Lezione 5.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ campo totalmente ordinato e completo (o continuo)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$.

Principio di induzione (1ª forma)

Sia $A \subset \mathbb{N}$ tale che:

- $0 \in A$
- $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \in A \Rightarrow n+1 \in A$.

Allora $A = \mathbb{N}$.

Dim: A è un sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$ e perciò $\mathbb{N} \subset A$. Ma per ipotesi $A \subset \mathbb{N}$ e quindi $A = \mathbb{N}$.

Principio di induzione (2° forma)

Sia $P(n)$ un predicato su $\mathbb{N}$ con n variabile libera

Supponiamo che

1) $P(0)$ è vera (base dell'induzione)
2) $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dim: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\} \subset \mathbb{N}$.

A è un insieme induttivo e quindi $A = \mathbb{N}$. $\square$

$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad S(n) = n+1$ funzione successore.

Teorema

(i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0)$ ($\mathbb{R}_+$ è induttivo)

(ii) $\mathbb{N} = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$

$A = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$. $0 \in A$, $n \in A \Rightarrow n+1 = S(n) \in S(\mathbb{N}) \subset A$. Perciò $A = \mathbb{N}$.

(iii) S è iniettiva $(S(n) = S(m) \Rightarrow n + \cancel{1} = m + \cancel{1} \Rightarrow n = m)$

(iv) $0 \notin S(\mathbb{N})$

$(\forall n \in \mathbb{N} : S(n) = \underbrace{n+1 \geq 1}_{n \geq 0} > 0 \Rightarrow S(n) > 0 \Rightarrow S(n) \neq 0.)$

Osserv: Assiomi di G. Peano.

(P1) Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$

(P2) Esiste una funzione $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (funzione successore)

(P3) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \neq y \Rightarrow S(x) \neq S(y)$.

(P4) $\forall x \in \mathbb{N} : S(x) \neq 0$

(P5) se $A \subset \mathbb{N}$ e vale $\begin{cases} \bullet\ 0 \in A \\ \bullet\ x \in A \Rightarrow x+1 \in A \end{cases}$

Allora $A = \mathbb{N}$.

$(\mathbb{N}, s, 0)$ sistema di Peano

Proposizione

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : n = 0 \lor n \geq 1$ (non ci sono numeri naturali tra 0 e 1)

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : s(n) \neq n$

(iii) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$

(iv) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}$

(v) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n \iff n - m \in \mathbb{N}$.

Dim: per la (ii) del Teorema precedente, se $n \neq 0$, allora $n \in s(\mathbb{N}) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $n = \underbrace{k+1}_{k \geq 0} \geq 1$.

(ii) se per assurdo fosse $n + 1 = n$, allora si avrebbe $1 = 0$.

(iii) Si fissa $m \in \mathbb{N}$ e si definisce $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$ e si prova che A è induttivo.

(iv) Si fissa $m \in \mathbb{N}$ e si definisce $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n \in \mathbb{N}\}$ e si prova che A induttivo

(v) L'implicazione $\Leftarrow$ è immediata, perché
$$n - m \in \mathbb{N} \Rightarrow n - m \geq 0 \Rightarrow n \geq m$$

Per l'implicazione $\Rightarrow$, fisso $n \in \mathbb{N}$ e definisco $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}\}$ e si prova che A è induttivo

Proposizione

(i) Se $m \in \mathbb{N}$ non ci sono numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ tali che $m < n < m+1$

(ii) Se m e n sono numeri naturali, allora $m < n \Rightarrow m+1 \leq n$.

Dim: (i) sappiamo già che non ci sono numeri interi tra 0 e 1.
Perciò se fosse $m < n < m+1$, si avrebbe

$$0 < \underbrace{n-m}_{\in \mathbb{N}} < 1$$ che è assurdo.

(ii) se $m < n$ e $m+1 > n$, avrei $m < n < m+1$

Def Sia X un insieme (qualunque). Una funzione $u: \mathbb{N} \to X$ si chiama anche una successione di elementi di X.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'immagine $u(n)$ si indica anche con u_n e la funzione stessa si indica con $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema (di definizione per ricorrenza)

Sia X un insieme qualunque, $f: X \to X$ e $a \in X$.
Allora esiste una ed una sola successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di X tale che $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

Esempi

1) Potenza di base a e esponente naturale

$a \in \mathbb{R}$. $\quad a^n \quad \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a \cdot a^n \end{cases} \longrightarrow f(x) = ax$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

2) Metodo di Erone per trovare la radice quadrata di $b > 0$.

Si sceglie $u_0 > 0$ e si definisce $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{b}{u_n}\right)$

Questo è un esempio di algoritmo

Proprietà delle potenze

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad (a \cdot b)^n = a^n b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Proposizione (disuguaglianza di Bernoulli)

$\forall x \in [-1, \to[\ \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

dove si fa la convenzione che $0^0 = 1$.

Dim: $P(n): (1+x)^n \geq 1+nx$

base dell'induzione $P(0): (1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$

passo induttivo. Supponiamo che $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Allora $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2$
$\geq 1+(n+1)x$ $\square$

Corollario $2^n > n$.

Dim: $2^n = (1+1)^n \geq 1+n > n$.