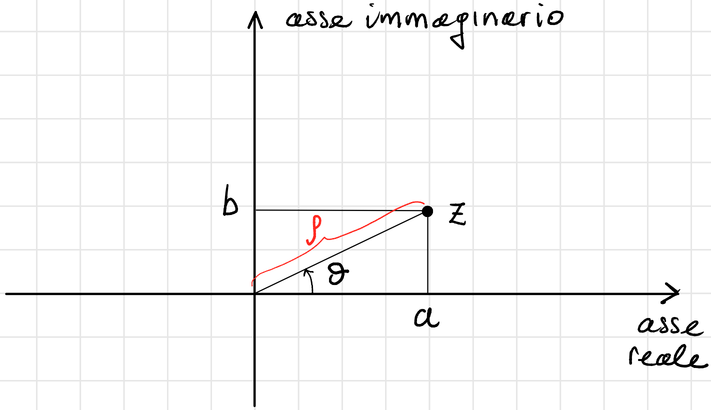
Lezione 10

Forma trigonometrica dei numeri complessi



(ρ, ϑ) coordinate polari di z.

$\rho \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

ϑ angolo orientato.

Relazioni che legano le coordinate polari alle coordinate cartesiane.

Dalle polari alle cartesiane.

$(\rho, \vartheta) \mapsto (a, b)$

$$\begin{cases} a = \rho \cos\vartheta \\ b = \rho \,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$\rho \in \mathbb{R}_+$, $\vartheta \in [0, 2\pi[$.

Dalle cartesiane alle polari

$(a, b) \mapsto (\rho, \vartheta)$

$$\left.\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \\ \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \mathrm{sen}\,\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}\right\} \quad (1)$$

Dato che $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

$\exists\, \vartheta \in \mathbb{R}$ che soddisfa la (1) e inoltre

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$: φ soddisfa la (1) $\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\varphi = \vartheta + 2k\pi$

Ogni soluzione di (1) si chiama ARGOMENTO DI z

e l'unico argomento di z nell'intervallo $[0, 2\pi[$ si chiama argomento principale di z e si indica con $\arg(z)$

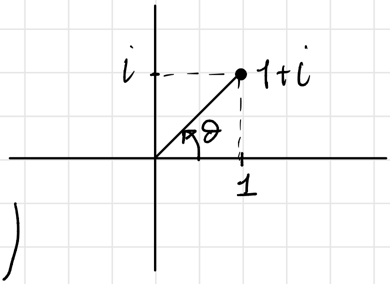
Si noti che (1) $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a}$,

quindi utilizzando la funzione $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (che è bigettiva) e tenendo conto dei segni di a e b in (1) si può ottenere una soluzione di (1) in $[0, 2\pi[$.

La forma $\boxed{z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)}$

si chiama forma trigonometrica del numero z.

Es. $z = 1 + i$

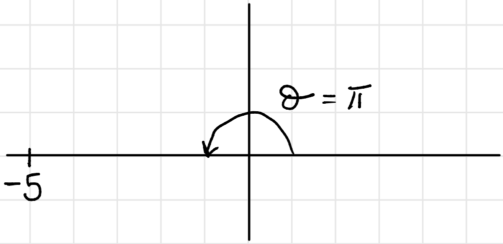


$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $\left(\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{1} = 1 \iff \vartheta = \frac{\pi}{4}\right)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

Es. $z = -5$

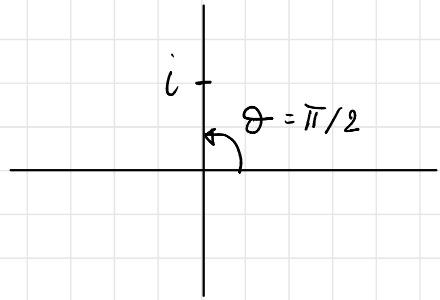


$|z| = 5$

$\vartheta = \arg(z) = \pi$

$z = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

Es. $z = i$



$|z| = 1 \qquad \vartheta = \dfrac{\pi}{2}$

$z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}.$

<u>Proposizione</u>

$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta)$, $w = r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$

Allora: (i): $z \cdot w = \rho r(\cos(\vartheta+\varphi) + i\,\text{sen}(\vartheta+\varphi))$

cioè $|z \cdot w| = |z|\,|w|$ e $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$

(ii) $w^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\,\text{sen}(-\varphi))$

(iii) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho}{r}(\cos(\vartheta-\varphi) + i\,\text{sen}(\vartheta-\varphi))$

cioè $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ e $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$.

(iv) $z = w \iff \rho = r \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \vartheta = \varphi + 2k\pi)$

Dim. (i): dalle formule di addizione di cos e sen.

$$z \cdot w = \rho r (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

$$= \rho r [(\cos\vartheta \cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi + \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi)]$$

$$= \rho r (\cos(\vartheta+\varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta+\varphi))$$

(ii) $$w^{-1} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{(\cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi)}{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\operatorname{sen}(-\varphi))$$

(iii): segue da (i) e (ii)

(IV): supponiamo che z e w siano entrambi non nulli,

allora $$z = w \iff \frac{z}{w} = 1 \iff$$

$$\iff \frac{\rho}{r}(\cos(\vartheta-\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta-\varphi)) = 1 = 1 + 0i$$

$$\iff \frac{\rho}{r} = 1 \text{ e } \begin{cases} \cos(\vartheta-\varphi) = 1 \\ \operatorname{sen}(\vartheta-\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \rho = r \text{ e } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \vartheta - \varphi = 2k\pi. \ \square$$

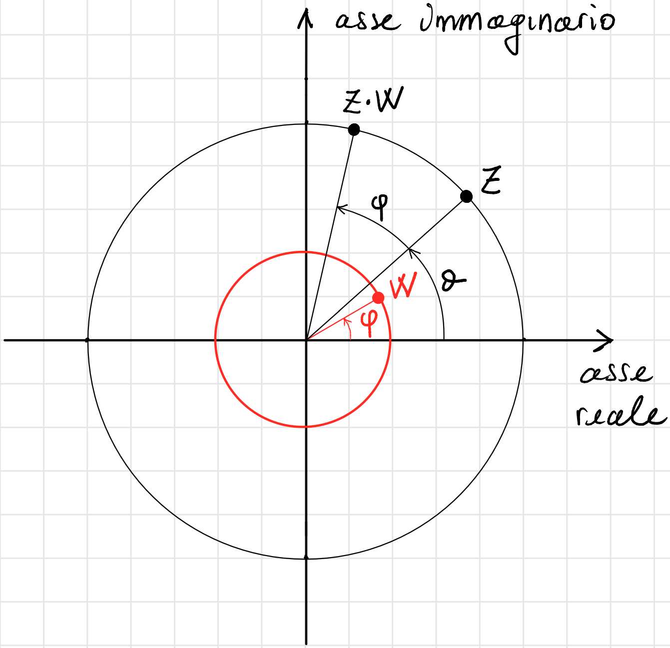
<u>Osserv:</u>

Supponiamo che $|w| = 1$

Quindi $w = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$.

Allora se $z = \rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$ si ha

$$z \cdot w = \rho\,(\cos(\vartheta+\varphi) + \operatorname{sen}(\vartheta+\varphi))$$



l'applicazione

$z \longmapsto z \cdot w$ è la

rotazione di angolo φ

di centro l'origine

Se $|w| \neq 1$, allora la trasformazione

$$z \longmapsto z \cdot w$$

è una rotazione di angolo φ seguita da una dilatazione di rapporto $|w|$.

Una conseguenza della (i) della proposizione precedente è Formula di De Moivre

Se $n \geq 1$ $\quad \boxed{z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)}$

Dim: si ricordi che

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}}$$

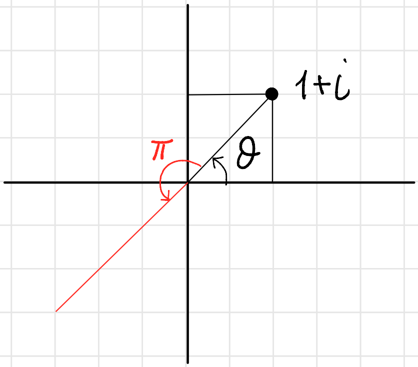
Perciò per le formule sulla moltiplicazione in forma trigonometrica, risulta

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdots \rho}_{n \text{ volte}} \cdot \left(\cos(\underbrace{\vartheta + \vartheta + \ldots \vartheta}_{n \text{ volte}}) + i \operatorname{sen}(\underbrace{\vartheta + \vartheta + \ldots \vartheta}_{n \text{ volte}}) \right)$$

$$= \rho^n \left(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta) \right). \qquad \square$$

Esempio

$(1+i)^5$



$\vartheta = \frac{\pi}{4}$

$z = 1 + i$

$\rho = |z| = \sqrt{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -4(1+i).$$

<u>Radice di un numero reale</u> Sia $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$.

$\forall\, y \in \mathbb{R}_+ \; \exists!\, x \in \mathbb{R}_+$ t.c. $x^n = y$.

l'unica soluzione di $x^n = y$ si chiama

radice n-esima di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$

<u>Proprietà</u>

Sia $a, b \in \mathbb{R}_+$. Allora

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

Dim:

- $\sqrt[n]{a} = x$, $\sqrt[n]{b} = y \Rightarrow x^n = a$ e $y^n = b \Rightarrow (x \cdot y)^n = a \cdot b$

  $\Rightarrow x \cdot y = \sqrt[n]{a \cdot b}$

- $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a \Rightarrow a^m = (x^n)^m = (x^m)^n \Rightarrow x^m = \sqrt[n]{a^m}$.

- $x = \sqrt[nm]{a} \Rightarrow x^{nm} = a \Rightarrow (x^m)^n = a \Rightarrow x^m = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Radici n-esime di numeri complessi

Def Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.
Ogni $z \in \mathbb{C}$ t.c. $z^n = w$ si chiama radice n-esima di w.

Teorema

Sia $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \neq 0$ e $n \geq 1$
Allora esistono esattamente n radici (distinte) di w e sono:

$$z_k = \rho(\cos\vartheta_k + i \operatorname{sen}\vartheta_k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Dim:

Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$.
Per la formula di De Moivre

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta).$$

Perciò la condizione che z è radice n-esima di w si scrive:

$$z^n = w \iff \rho^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\iff \rho^n = r \text{ e } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n\vartheta = \varphi + 2k\pi$$

$$\iff \rho = \sqrt[n]{r} \text{ e } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Quindi le radici n-esime di w sono i numeri complessi

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Ora bisogna notare che

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots$$

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

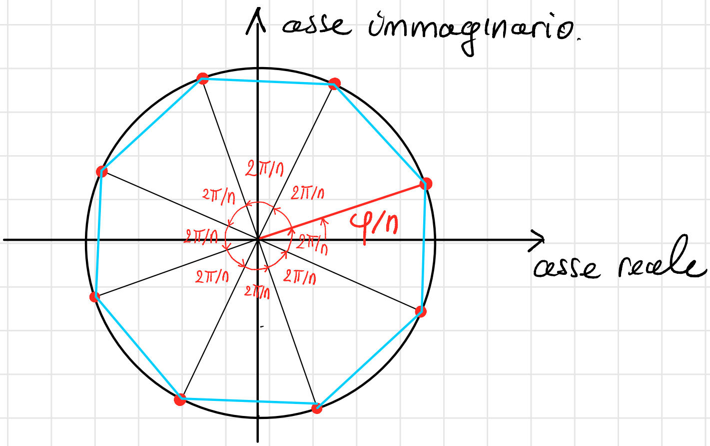
e che per $k = n$ si ottiene

$$\vartheta_n = \frac{\varphi}{n} + n\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

e quindi $\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)$

e perciò $z_n = z_0$.

E allo stesso modo $z_{n+1} = z_1$, $z_{n+2} = z_2$...

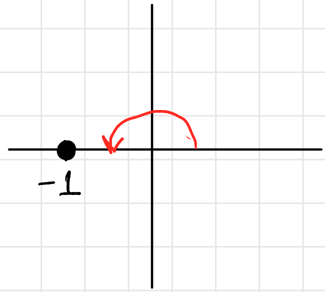


I punti distinti sono $z_0, z_1, \dots z_{n-1}$. $\square$

<u>Osserv:</u> Le radici n-esime di un numero complesso sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$ dove $r = |w|$.

Esempio

$\sqrt{-1}$

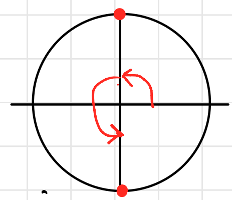


$W = -1 \longrightarrow \rho = |z| = 1, \ \vartheta = \pi$

$W = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi$

Allora le radici di W sono

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{2} \qquad k = 0, 1$$



$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -i$$

Infatti $\quad i^2 = (-i)^2 = -1$.

Osserv:

Se $\quad z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$

$$\bar{z} = \rho(\cos\vartheta - i \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$= \rho(\cos(-\vartheta) + i \operatorname{sen}(-\vartheta))$$

$|\bar{z}| = |z| \quad$ e $\quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

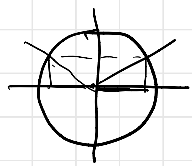
Esercizi

$\boxed{1}$ $z^2 = -\bar{z}$

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

$$\rho^2(\cos 2\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,2\vartheta) = -\rho(\cos\vartheta - i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

$$= \rho(-\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$



$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta$

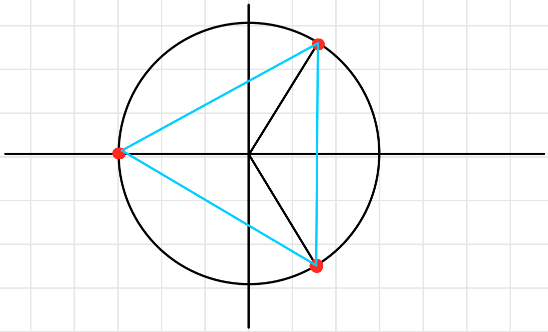
$\mathrm{sen}(\pi - \vartheta) = \mathrm{sen}\,\vartheta$

$$= \rho(\cos(\pi-\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(\pi-\vartheta))$$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho(\rho - 1) = 0 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rho = 0 \implies z = 0.$

$\rho \neq 0 \implies \rho = 1$ e $\vartheta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$



$\dfrac{\pi}{3}, \quad \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}, \quad \dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$\dfrac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \dfrac{5\pi}{3}$

Quindi si ha $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

per $k = 0, 1, 2$.

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Osserv: nell'esercizio precedente si potrebbe seguire un'altra strada

1) è chiaro che $z=0$ è una soluzione.

Supponiamo che $z \neq 0$. Allora

$$(1)\quad z^2 = -\bar{z} \implies |z|^2 = |-\bar{z}| \overset{|z|=|\bar{z}|}{\iff} |z|^2 = |z| \iff |z| = 1$$

perciò se $z \neq 0$ deve essere necessariamente $|z| = 1$.

Ora essendo $z \neq 0$:

$$z^2 = -\bar{z} \overset{\text{molt. per } z}{\iff} z^3 = -\bar{z}\cdot z \iff z^3 = -\underbrace{|z|^2}_{=1} \iff z^3 = -1$$

Perciò le soluzioni non nulle dell'equazione (1) non sono altro che le radici cubiche di -1. Quindi dato che $-1 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi$

si ha $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ con $k = 0, 1, 2$.

Queste sono infatti le stesse soluzioni trovate prima

$\boxed{2.}$ $(\bar{z})^4 = |z|$

Notiamo che $z=0$ è soluzione.

Supponiamo che $z \neq 0$.

Allora $(\bar{z})^4 = |z| \Rightarrow |\bar{z}^4| = |z| \Leftrightarrow |\bar{z}|^4 = |z|$

$\Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|^3 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1.$

Perciò deve essere necessariamente $|z|=1$.

Si noti poi che, essendo $|z|=1$, risulta

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$$

ma questo vuol dire che $z^{-1} = \bar{z}$

In definitiva l'equazione di partenza si può scrivere $\left(\frac{1}{z}\right)^4 = 1$, che equivale a

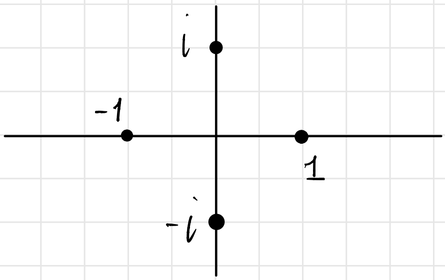
$$\frac{1}{z^4} = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1.$$

Quindi le soluzioni sono le radici 4° dell'unità.

Dato che $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ $\quad (\arg(1) = 0)$

Allora le soluzioni diverse da zero dell'equazione iniziale sono:

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$



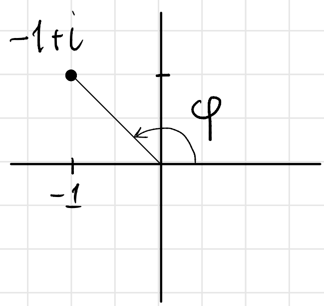
$z_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$

$z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$

$z_2 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$

$z_3 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -i$

$\boxed{3.}$ $\sqrt[3]{i-1}$



$w = i - 1 = -1 + i$

$\varphi = \frac{3}{4}\pi$

$|w| = \sqrt{2}$.

$|z_k| = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[6]{2}$ (si vedano le proprietà delle radici di numeri reali richiamate sopra)

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2.$$

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi + 8\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$$

$$\vartheta_2 = \pi - \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \pi + \frac{-\pi + 8\pi}{12} = \pi + \frac{7}{12}\pi$$

$\boxed{4.}$ $z^3 - z|z|^2 + z = 0$

$$z(z^2 - |z|^2 + 1) = 0 \iff z = 0 \lor \underbrace{z^2 - |z|^2 + 1 = 0}_{(1)}$$

Quindi $z = 0$ è soluzione

risolviamo $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$

che si può scrivere come $z^2 = \underbrace{|z|^2 - 1}_{\in \mathbb{R}}$

Se prendo il modulo di

ambo i membri $|z^2| = \left||z|^2 - 1\right| = \begin{cases} |z|^2 - 1 & \text{se } |z|^2 \geq 1 \\ 1 - |z|^2 & \text{se } |z|^2 < 1. \end{cases}$

Allora se $|z|^2 \geq 1$, si avrebbe $\cancel{|z|^2} = \cancel{|z|^2} - 1$ e

quindi $0 = -1$ che è assurdo. Perciò deve essere

necessariamente $|z|^2 < 1$ e quindi si ha

$$|z|^2 = 1 - |z|^2 \iff 2|z|^2 = 1 \iff |z|^2 = 1/2.$$

Allora posso sostituire nella (1) $|z|^2$ con $1/2$ e

ottenere $z^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0 \iff z^2 = -\frac{1}{2}$

Quindi le soluzioni sono le radici quadrate di $-\frac{1}{2}$. Per ottenerle basta ricordare che $i^2=-1$ e quindi l'equazione si può scrivere

$$z^2 = \frac{i^2}{2}$$

Da questo segue che $z_0 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ e $z_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}}$