$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}$$

DOMINIO E CONTINUITÀ: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\pm 1\}$

la funzione è continua in A perché rapporto di funzioni continue

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$(x^2+x-2)(x-1)$

INTERSEZIONE CON GLI ASSI:

↳ ASSE x $\quad y=0=x^3-3x+2 \underset{\text{RUFFINI}}{=} (x^2+x-2)(x-1)$

$\to x_3=1$ NON AMMISSIBILE

$\to x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2}=$ 1 ← NON AMMISSIBILE ; -2 $\quad P_1(-2,0)$

↳ ASSE y $\quad x=0\to y=-2 \quad P_2(0,-2)$

PARITÀ O DISPARITÀ DELLA FUNZIONE:

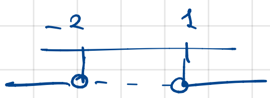
$$f(-x)=\frac{-x^3+3x+2}{x^2-1}\to \text{NÉ PARI NÉ DISPARI}$$

STUDIO DEL SEGNO

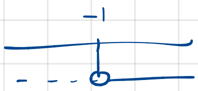
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}$$ ← usare questa espressione d'ora in poi

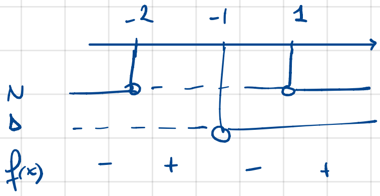
$$\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}>0$$

N: $(x-1)(x+2)>0$



D: $(x+1)>0$





LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\pm\infty \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}=0^+ \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}=0^-$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=+\infty$$

la funzione è prolungabile per continuità in 1

ASINTOTI

↳ ORIZZONTALI NON ESISTONO

↳ VERTICALI IN ±1 (COME CALCOLATO)

↳ OBLIQUI:

Asintoti obliqui sx. dx coincidenti

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)}=1 \qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{x(x+1)}=0 \Rightarrow y=x$$

MONOTONIA

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} > 0$$

N: $x^2+2x+3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ SEMPRE POSITIVA

D: $(x+1)^2 > 0$ SEMPRE

$f'(x)$ SEMPRE POSITIVA

$\Downarrow$

$f(x)$ è strettamente crescente in $]-\infty, -1[$ e in $]-1, 1[$ e in $]1, +\infty[$

MASSIMI E MINIMI

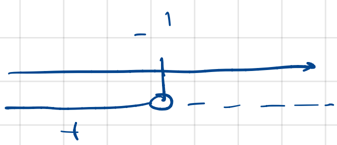
$\nexists\, x$ t.c. $f'(x) = 0 \Rightarrow \nexists$ PUNTI STAZIONARI

DERIVATA SECONDA, CONCAVITÀ, CONVESSITÀ E FLESSI

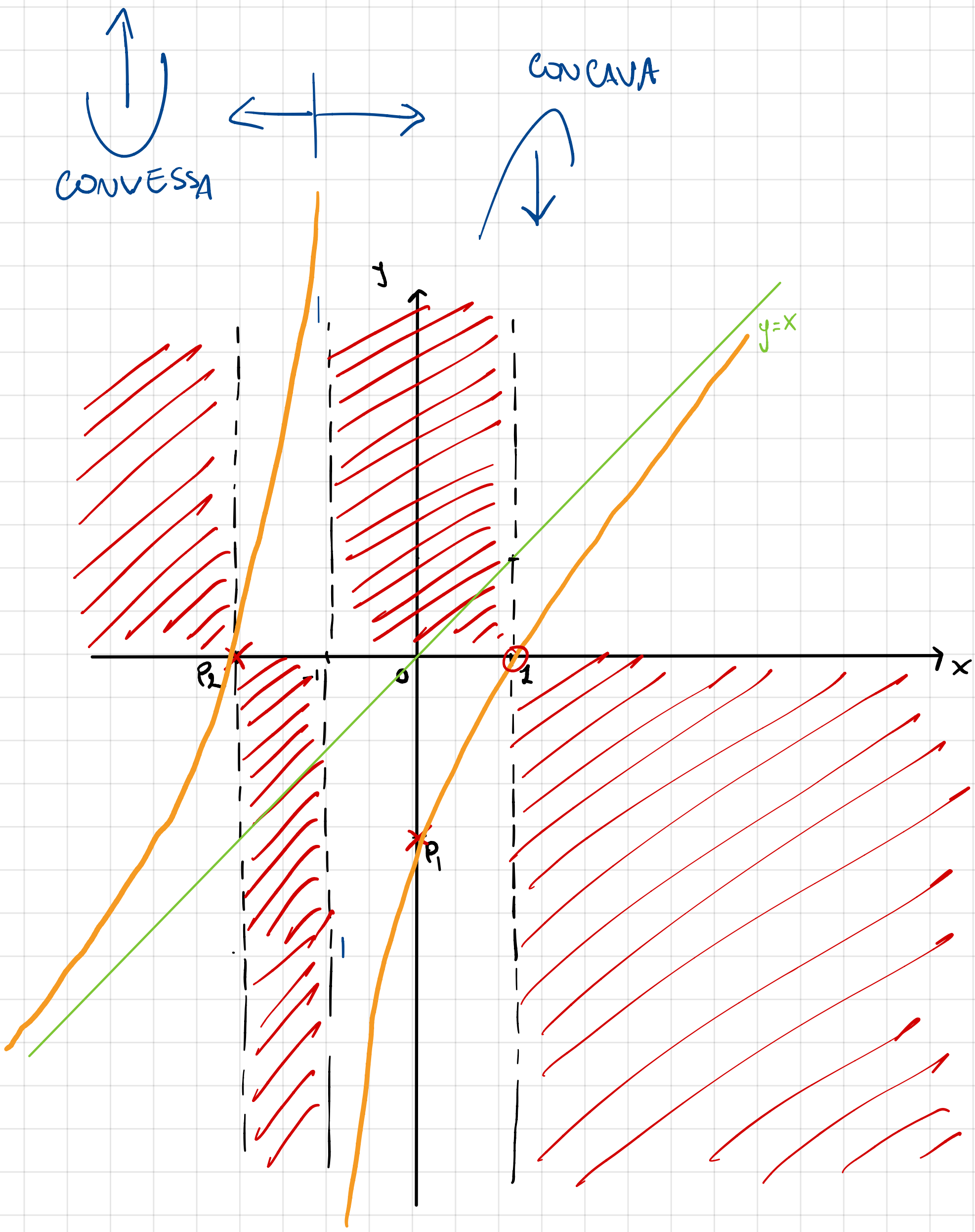
$$f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x+3)\,2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= -\frac{4}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3} > 0 \qquad (x+1)^3 < 0 \qquad x < -1$$



$\rightarrow$ NON SI ANNULLA MAI $\Rightarrow \nexists$ PUNTI DI FLESSO



CONVESSA
CONCAVA
y
x
y=x
0
1
-1
P_1
P_2

$$f(x) = -\sqrt{4e^{2x}-4}$$

DOMINIO E CONTINUITÀ

$$4e^{2x}-4 = 4(e^{2x}-1) \geq 0 \iff \ln e^{2x} \geq \ln 1 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0 \Rightarrow A = [0,+\infty[$$

f continua in A perché composizione di funzioni continue

INTERSEZIONE ASSI

ASSE X $\quad y = 0 = -\sqrt{4(e^{2x}-1)} \iff x = 0 \quad P_1 = (0,0)$

ASSE Y $\quad x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad P_2 = P_1$

PARITÀ O DISPARITÀ

NÉ PARI NÉ DISPARI (LO SI NOTA DAL DOMINIO CHE NON È SIMMETRICO E DAL FATTO CHE $f(-x) \neq f(x)$)

STUDIO DEL SEGNO

$-\sqrt{4(e^{2x}-1)} > 0$ MAI! SEMPRE NEGATIVA

LIMITI

$$\lim_{x \to 0^+} -\sqrt{4(e^{2x}-1)} = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} -\sqrt{4(e^{2x}-1)} = -\infty$$

ASINTOTI

- NO ORIZZONTALI
- NO VERTICALI
- NO OBLIQUI $\quad ! \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

DERIVABILITÀ E DERIVATA

f È COMPOSTA DALLE FUNZIONI:

- $g_1 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad g_1(x) = 4(e^{2x}-1)$
- $g_2 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad g_2(x) = -\sqrt{x}$

CHE SONO ENTRAMBE DERIVABILI E $g_1(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

Perciò $f = g_2 \circ g_1$ È DERIVABILE IN $]0,+\infty[$ PER IL TEOREMA SULLA DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE E $\forall x \in]0,+\infty[$: $f'(x) = -\frac{4e^{2x} \, 2}{2\sqrt{4(e^{2x}-1)}} = -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

DATO CHE $\sqrt{x}$ NON È DERIVABILE IN 0, BISOGNA CONTROLLARE LA DERIVABILITÀ IN 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\infty \implies f$$ NON È DERIVABILE IN $x=0$ MA HA RETTA TANGENTE VERTICALE

MONOTONIA

$$f(x) = -\sqrt{4(e^{2x}-1)} \to f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4(e^{2x}-1)}} \cdot 4 \cdot 2e^{2x} = -\frac{4e^{2x}}{\sqrt{4(e^{2x}-1)}}$$

$$f'(x) = -4\frac{e^{2x}}{\sqrt{4(e^{2x}-1)}} > 0$$ MAI, SEMPRE NEGATIVA! QUINDI f È STRETTAMENTE DECRESCENTE IN $[0,+\infty[$

→ NON SI ANNULLA MAI $\implies \nexists$ PUNTI STAZIONARI

→ NOTARE $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

MAX / MIN

$\nexists\, x$ s.t. $f'(x) = 0 \implies \nexists$ PUNTI STAZIONARI

DERIVATA SECONDA, CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, FLESSI

$$f'(x) = -4\frac{e^{2x}}{\sqrt{4(e^{2x}-1)}} = -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\frac{2e^{2x}\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}-1}$$

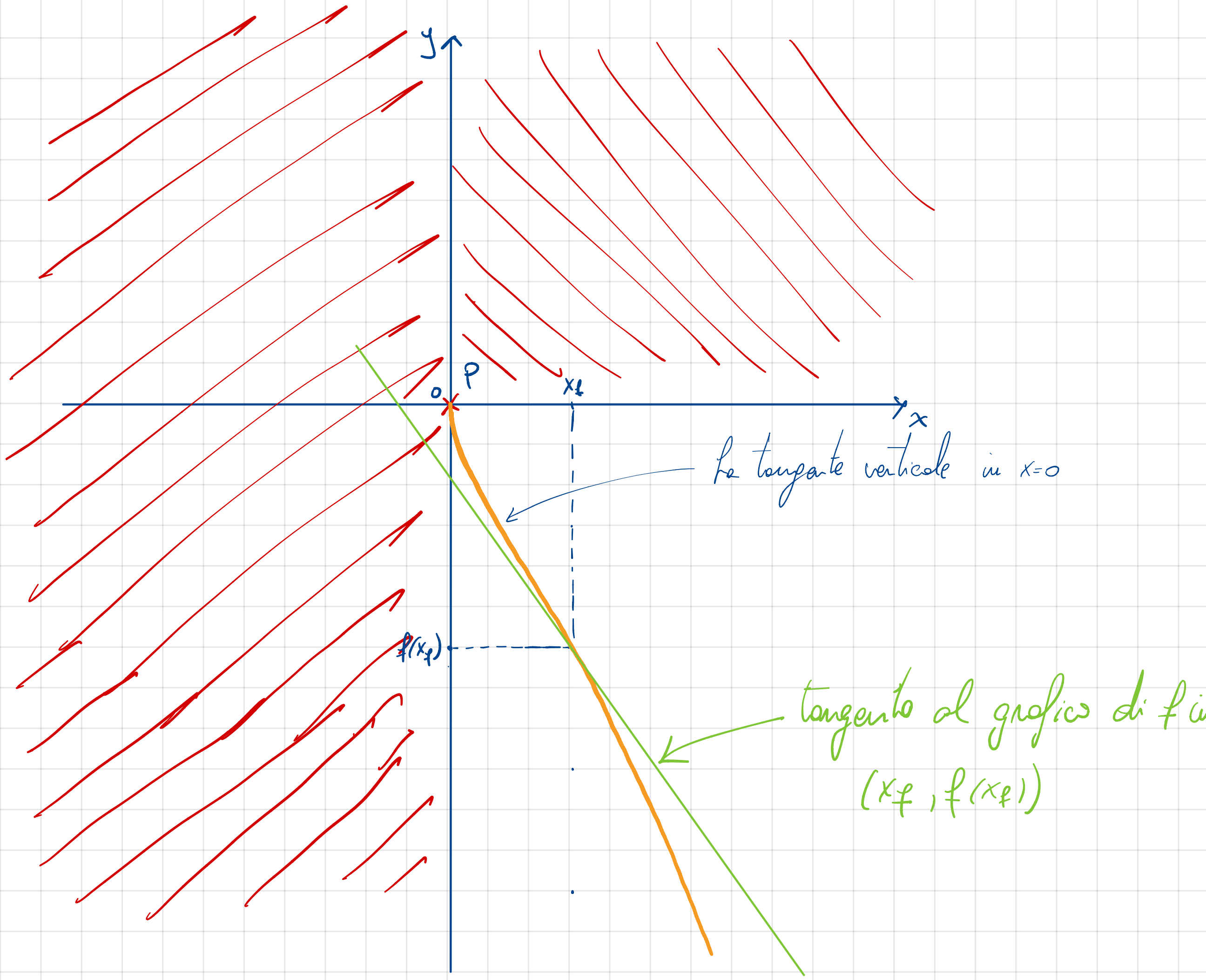
$$f''(x) = \frac{-2e^{2x}(e^{2x}-2)}{\sqrt{(e^{2x}-1)^3}} > 0 \iff e^{2x}-2 < 0 \iff x < \frac{\log 2}{2} \quad (\sim 0.346)$$

$\frac{\log 2}{2}$: $+$ CONVESSA ($\cup$) | $-$ CONCAVA ($\cap$)

$x_f = \frac{\log 2}{2} \implies f''(x) = 0 \implies x_f$ è un punto di flesso

$$f(x_f) = -\sqrt{4\cdot 2 - 4} = 2$$

$$e^{2\frac{\log 2}{2}} = e^{\log 2} = 2$$



$$f'(x_f) = -2\,\frac{2}{\sqrt{2-1}} = -4 \leftarrow$$ coefficiente angolare della tangente nel punto di flesso

$$f(x)=e^{-x}(1-e^{-2x})$$

DOMINIO E CONTINUITÀ $A=\mathbb{R}$, f è continua in $\mathbb{R}$ perché prodotto di funzioni continue in $\mathbb{R}$

INTERSEZIONE ASSI

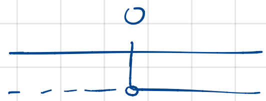
$\hookrightarrow$ Asse y, $x=0 \Rightarrow y=0$ $\quad P_1=(0,0)$

$\hookrightarrow$ Asse x, $y=0 \Rightarrow x=0$ $\quad P_2=P_1$

PARITÀ/DISPARITÀ

$f(-x)\neq f(x)$ né pari né dispari

STUDIO DEL SEGNO



$$e^{-x}(1-e^{-2x})>0 \iff 1-e^{-2x}>0 \quad \ln e^{-2x}<\ln 1 \quad -2x<0 \quad \boxed{x>0}$$

Notare che $\begin{cases} f(x)>0 & x>0 \\ f(x)<0 & x<0 \end{cases}$

LIMITI

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1-e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)=0^{+}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1-e^{-2x}) = (+\infty)(-\infty)=-\infty \Rightarrow y=0 \text{ asintoto orizzontale}$$

ASINTOTI

- orizzontale a destra $y=0$
- verticale $\to$ no
- obliqui no! $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

MONOTONIA E ESTREMI

$$f(x)=e^{-x}(1-e^{-2x}) = e^{-x}-e^{-3x}$$

$$f'(x)=-e^{-x}(1-e^{-2x})+e^{-x}(2e^{-2x}) = e^{-x}(-1+e^{-2x}+2e^{-2x}) = e^{-x}(3e^{-2x}-1)$$

$\leftarrow$ sempre continua

$\Downarrow$

$f(x)$ sempre derivabile

$$f'(x)>0 \iff 3e^{-2x}-1>0 \overset{t=e^{x}}{\iff} 3\frac{1}{t^2}-1>0 \iff \frac{3}{t^2}>1 \iff t^2<3$$

$$\Downarrow$$

$$(\text{solo } t>0)\ t<\sqrt{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$x<\log\sqrt{3}$$

$t=\pm\sqrt{3}$

$e^{x}=\pm\sqrt{3}$

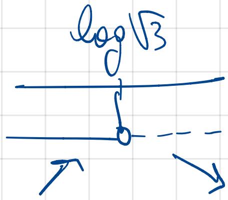
NO

PUNTO STAZIONARIO $\quad \dfrac{3-t^2}{t^2}=0$

$x_s=\ln\sqrt{3}\ (\approx 0.549)$ (MASSIMO GLOBALE)

$\hookrightarrow f(x_s)=-\sqrt{3}(1-3)=2\sqrt{3}\ (\approx 3.46)$

$$f'(x)=e^{-x}\left(3e^{-2x}-1\right)>0 \iff x<\ln\sqrt{3}$$



$f(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE IN $]-\infty, \log\sqrt{3}]$ E STRETTAMENTE DECRESCENTE IN $[\log\sqrt{3}, +\infty[\implies x=\log\sqrt{3}$ PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO PER f

DERIVATA SECONDA

$$f'(x)=e^{-x}\left(3e^{-2x}-1\right) \to f''(x)=-e^{-x}\left(3e^{-2x}-1\right)+e^{-x}\left(-2\cdot 3e^{-2x}\right)=$$

$$=e^{-x}\left(-3e^{-2x}+1-6e^{-2x}\right)=e^{-x}\left(1-9e^{-2x}\right)$$

$$f''(x)>0 \iff e^{-2x}<\frac{1}{9} \iff e^{-x}<\frac{1}{3} \iff 3<e^{x} \iff$$

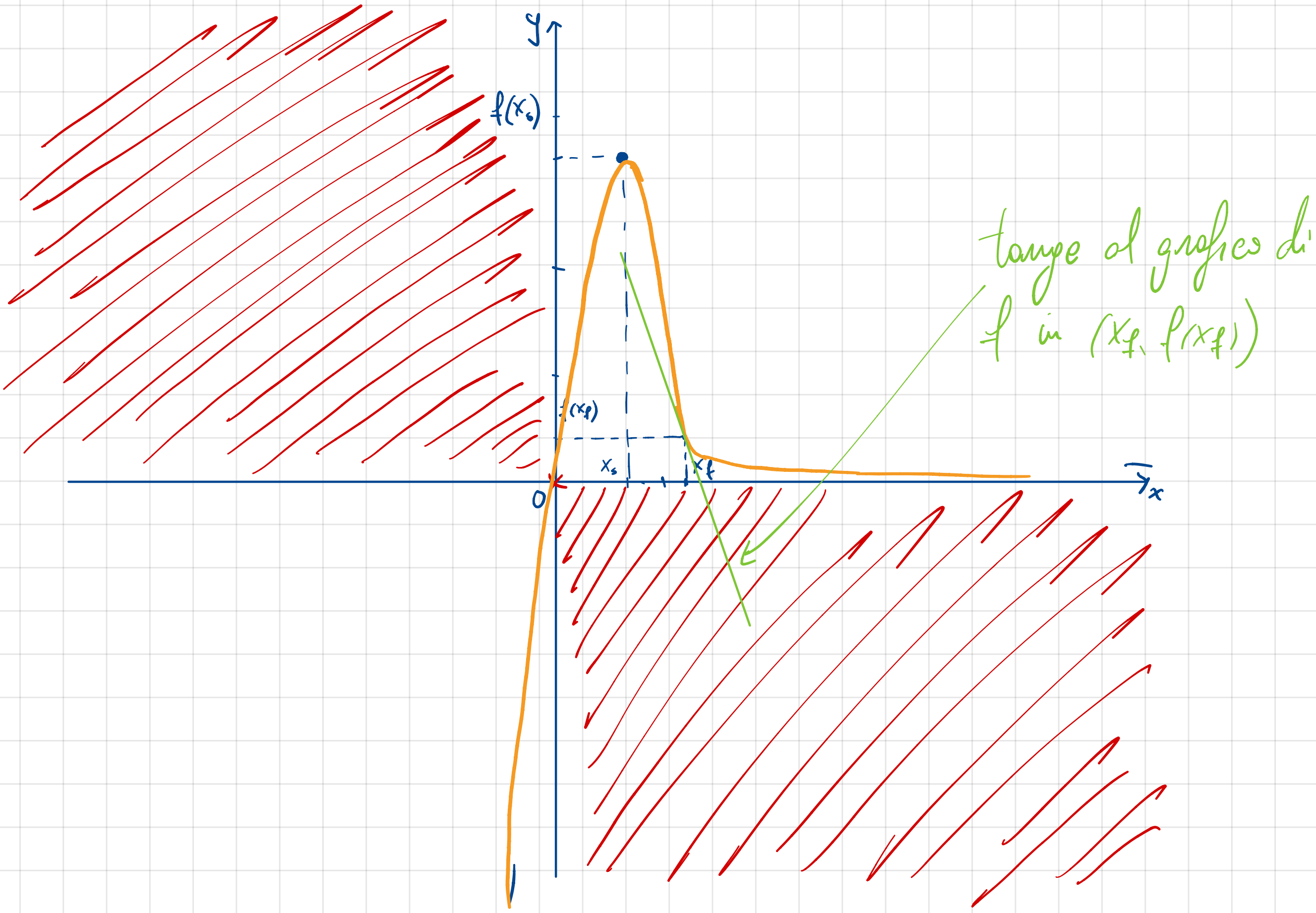
$$\iff x>\log 3$$

$f(x)$ È STRETTAMENTE CONCAVA IN $]-\infty, \log 3]$

$f(x)$ È STRETTAMENTE CONVESSA IN $[\log 3, +\infty[$

$x_f=\log 3$ PUNTO DI FLESSO PER f

$$f(x_f)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{8}{27}\ (\approx 0.3)$$


y
x
0
f(x_s)
f(x_f)
x_s
x_f
tange al grafico di
f in (x_f, f(x_f))

$$f(x)=\frac{x^2}{\ln|x|-1}$$

DOMINIO E CONTINUITÀ

$$A=\{x\in\mathbb{R} \mid \ln|x|-1\neq 0 \wedge |x|>0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq \pm e,\ x\neq 0\}$$

LA FUNZIONE È CONTINUA IN A PERCHÉ RAPPORTO DI FUNZIONI CONTINUE IN A ($\log|x|-1$) CONTINUA PERCHÉ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE

INTERSEZIONE ASSI

↳ ASSE Y: NESSUNA INTERSEZIONE PERCHÉ $x=0\notin A$

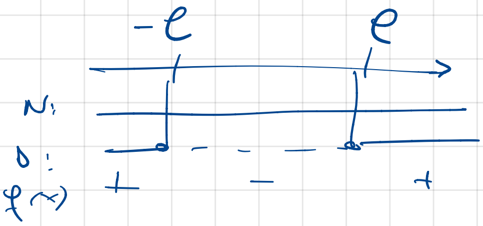
↳ ASSE X: $y=0 \Rightarrow x=0$ NON AMMISSIBILE! QUINDI NON CI SONO INTERSEZIONI CON L'ASSE X

PARITÀ E DISPARITÀ

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\ln|-x|-1}=\frac{x^2}{\ln|x|-1}=f(x) \Rightarrow \text{PARI!}$$

STUDIO DEL SEGNO

$$f(x)=\frac{x^2}{\ln|x|-1}>0$$



N: $x^2>0$ SEMPRE

D: $\ln|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>e \Rightarrow x<-e \vee x>e$

LIMITI

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\ln|x|-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to -e^-}f(x)=+\infty$$

PARITÀ

$$\lim_{x\to -e^+}f(x)=\lim_{x\to e^-}f(x)=-\infty$$

PARITÀ

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (x^2 infinitesimo di ordine maggiore di $\ln|x|$)

$\downarrow$

$f(x)$ PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ IN 0

ASINTOTI

↳ ORIZZONTALE: NON ESISTONO / VERTICALI: in $x=\pm e$ / OBLIQUI: NON ESISTONO

MONOTONIA

$f(x)=\dfrac{x^2}{\ln|x|-1}$ ESSENDO PARI POSSIAMO STUDIARE $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x-1}$, $x\geq 0$

$$f'(x)=\frac{2x(\ln x-1)-x^2\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{x(2\ln x-2-1)}{(\ln x-1)^2}=\frac{x(2\ln x-3)}{(\ln x-1)^2}$$

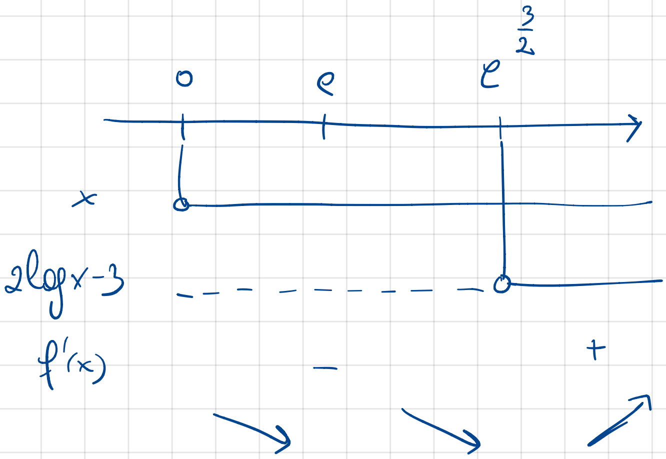
$f'(x)=0 \iff x=0 \vee x_s=e^{\frac{3}{2}}$

$\uparrow$ NON AMMISSIBILE

$f(x_s)=\dfrac{e^3}{\frac{3}{2}-1}=2e^3$

$x_{1,2}=\pm e^{\frac{3}{2}}$ ESTREMI LOCALI

$f'(x)>0 \iff x(2\log x-3)>0$



QUINDI:

- f È STRET. CRESCENTE IN $[e^{\frac{3}{2}},+\infty[$ (E L'INSIEME SIMMETRICO RISPETTO L'ASSE Y)
- f È STRET. DECRESCENTE IN $]0,e[$ e $]e,e^{\frac{3}{2}}]$ (//)
- $e^{\frac{3}{2}}$ È PUNTO DI MINIMO LOCALE PROPRIO

DERIVATA SECONDA, CONVESSITÀ, CONCAVITÀ E FLESSI

$$f'(x) = \frac{x(2\ln x - 3)}{(\ln x - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left[(2\ln x - 3) + x\frac{2}{x}\right](\ln x - 1)^2 - \left[x(2\ln x - 3)\right]2(\ln x - 1)\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4}$$

$$= \frac{(2\ln x - 1)(\ln x - 1)^2 - 2(2\ln x - 3)(\ln x - 1)}{(\ln x - 1)^4}$$

$$= \frac{(\ln x - 1)\left[(2\ln x - 1)(\ln x - 1) - 2(2\ln x - 3)\right]}{(\ln x - 1)^4}$$

$$= \frac{(\ln x - 1)\left[2\ln^2 x - 2\ln x - \ln x + 1 - 4\ln x + 6\right]}{(\ln x - 1)^4}$$

$$= \frac{(\ln x - 1)\left[2\ln^2 x - 7\ln x + 7\right]}{(\ln x - 1)^4}$$

$t = \ln x$, $x > 0$

$2t^2 - 7t + 7$

$\frac{7 \pm \sqrt{49 - 56}}{4}$: $\Delta < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ SEMPRE POSITIVA!

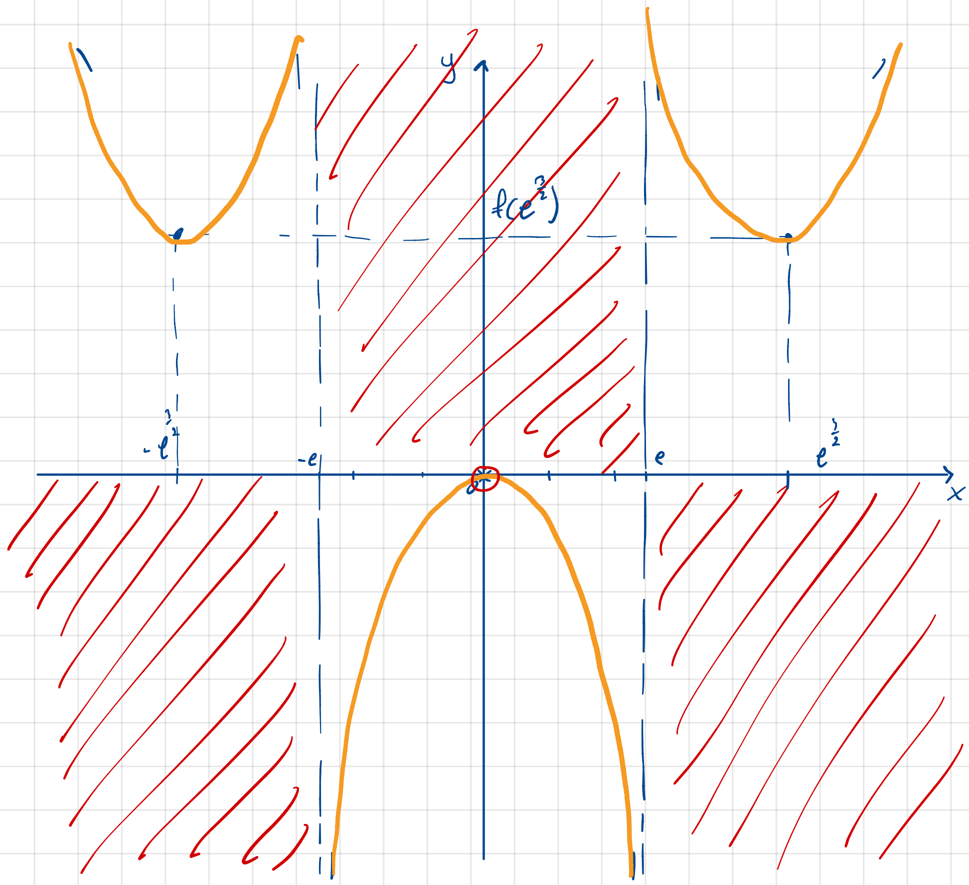
$f''(x) > 0 \iff (\ln x - 1) > 0 \iff x > e$

RICORDANDO LA SIMMETRIA DI f:

f CONVESSA IN $]-\infty, -e]$ E IN $[e, +\infty[$

f CONCAVA IN $]-e, e[$

$x_{f_{1,2}} = \pm e$ SONO PUNTI DI FLESSO PER f



y
x
$f(e^{\frac{3}{2}})$
$-e^{\frac{3}{2}}$
$-e$
e
$e^{\frac{3}{2}}$
0