Lezione 32

Problema

La banca offre un interesse annuo composto del 10% per il primo anno e del 40% per il secondo anno. Qual è l'interesse medio annuo?

Svolgimento

Poniamo $q_1 = 0.1$ e $q_2 = 0.4$. Se C_0 è il capitale iniziale, allora dopo il primo anno il capitale diventa

$$C_1 = C_0 \cdot (1+q_1)$$

e dopo il secondo anno (essendo l'interesse composto)

$$C_2 = C_1 \cdot (1+q_2) = C_0 (1+q_1) \cdot (1+q_2).$$

L'interesse medio è quell'interesse $q \in]0,1[$ che se fosse applicato per i due anni consecutivamente genererebbe lo stesso capitale finale C_2. Quindi

$$\cancel{C_0} \cdot (1+q) \cdot (1+q) = C_2 = \cancel{C_0} \cdot (1+q_1) \cdot (1+q_2),$$

da cui segue $(1+q) = \sqrt{(1+q_1) \cdot (1+q_2)} = \sqrt{1.1 \cdot 1,4} \simeq 1.24$

Allora l'interesse medio annuo è

$$q = 0.24 \mp 0.25$$ che è la media aritmetica degli interessi q_1 e q_2.

La quantità $$(1+q) = \sqrt{(1+q_1)\cdot(1+q_2)}$$
si chiama media geometrica di $1+q_1$ e $1+q_2$

In generale se abbiamo n quantità positive $a_1, a_2, \dots, a_n$, la loro media geometrica è

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}$$

Notiamo che nell'esempio precedente $q < \frac{q_1+q_2}{2} = 0.25$ o equivalentemente

$$1+q < \frac{(1+q_1)+(1+q_2)}{2}$$

Questa disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica vale sempre in generale.

Nel libro Course d'Analyse (parte 1, 1821) Cauchy dimostra che la media geometrica tra più numeri è sempre inferiore alla loro media aritmetica, cioè vale la seguente:

Disuguaglianza Geometrico-Aritmetica.

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}} \qquad (G\text{-}A)$$

Nel caso $n=2$, la (G-A) diventa

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad (1)$$

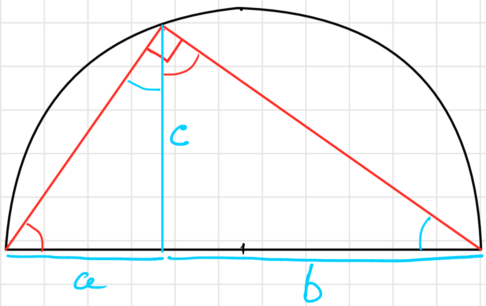
Questa si vede subito. Basta notare che

$$0 \leq (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

E da questa disuguaglianza si vede anche che l'uguaglianza vale se e solo se $a_1 = a_2$

Cauchy poi procede a provare la (G-A) per tutti gli interi del tipo $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ e poi per qualunque $n \in \mathbb{N}$.

Il caso $n=2$ si può ottenere anche geometricamente



si dice che c è medio proporzionale tra a e b

$$a : c = c : b \iff \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

$$\iff c^2 = a \cdot b \iff c = \sqrt{a \cdot b}.$$

c è la media geometrica di a e b

mentre il raggio del cerchio è la media aritmetica di a e b e ovviamente $c \leq r = \frac{a+b}{2}$.

Osserv: in (G-A) si ha l'uguaglianza se e solo se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Esempio (problema isoperimetrico)

Determinare il cilindro a base circolare di superficie totale minima con volume assegnato

$$V = \pi r^2 \cdot h \quad e \quad S = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = \underbrace{\pi r h}_{a_1} + \underbrace{\pi r h}_{a_2} + \underbrace{2\pi r^2}_{a_3}$$

Dalla disuguaglianza G-A (con $n=3$) si ha

$$\sqrt[3]{2\pi^3 r^4 h^2} \leq \frac{\pi r \cdot h + \pi r h + 2\pi r^2}{3} \iff \sqrt[3]{2\pi V^2} \leq \frac{S}{3}$$

L'uguaglianza si ha se $\pi r h = 2\pi r^2 \iff h = 2r$

Si ottiene così un risultato che abbiamo già ottenuto usando il calcolo differenziale

---

Nel 1906 appare un articolo di un matematico danese di nome Jensen che parte dal risultato di Cauchy e introduce le funzioni convesse come le funzioni che verificano una disuguaglianza che generalizza la (1)

Più precisamente, prendendo i logaritmi, la (1) si scrive

$$\log (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \log \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)$$

che è equivalente a

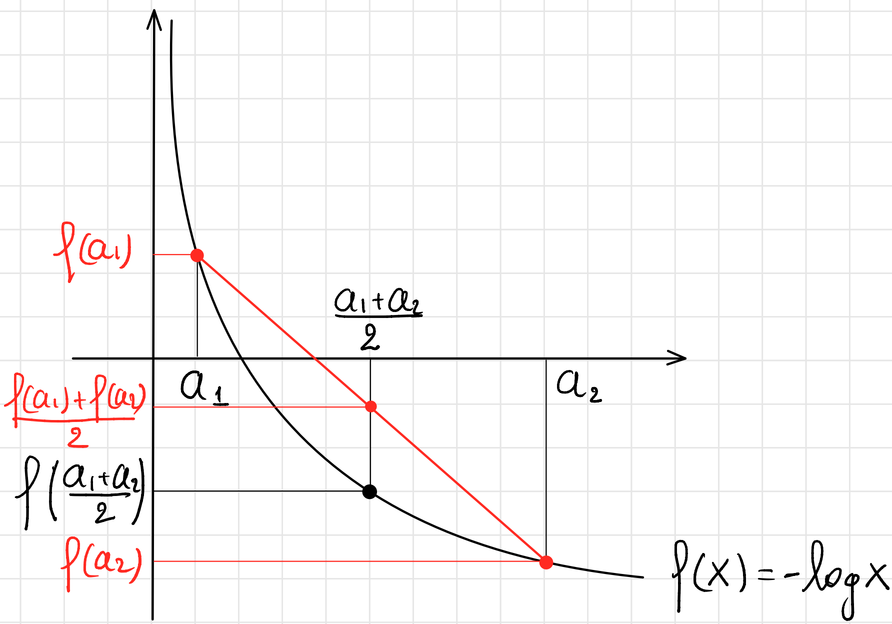
$$-\log \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \leq -\frac{1}{2} \log a_1 - \frac{1}{2} \log a_2 .$$

cioè

$$f\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2} \qquad (2)$$

dove $f(x) = -\log x$.

Jensen chiama convesse le funzioni che verificano la (2) per ogni a_1, a_2 nel dominio di f.



Jensen prova allora che per $n = 2^k$ si ha

$$f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}. \qquad (3)$$

e poi prova la (3) per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ seguendo lo stesso ragionamento di Cauchy (che riportiamo di seguito)

Complementi

Supponiamo che la (4) sia vera per 2^k e proviamo la 2^{k+1}. Poniamo $n = 2^k$, allora $2^{k+1} = 2 \cdot n$.

Allora $f\left(\frac{a_1 + \dots a_n + a_{n+1} + \dots a_{2n}}{2n}\right)$

$$= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots a_{2n}}{n}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a_{n+1}) + \dots + f(a_n)}{n}$$

$$= \frac{f(a_1) + \dots + f(a_{2n})}{2n}$$

Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e sia $m = 2^k$ con $m > n$.

definiamo $a_{n+1}, \dots a_m$ in modo che

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m}{m} \quad (*)$$

cioè $$m(a_1 + \dots + a_n) = n(a_1 + \dots + a_n) + n(a_{n+1} + \dots + a_m)$$

$$(m-n)\frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} = \underbrace{a_{n+1} + \dots + a_m}_{m-n \text{ termini}}$$

si può allora definire

$\forall i = n+1, \dots, m: \qquad a_i = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

e la (*) è verificata.

Allora $$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) = f\left(\frac{a_1+\dots+a_m}{m}\right)$$

$$\leq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)+f(a_{n+1})+\dots+f(a_m)}{m}$$

$$= \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{m} + \frac{(m-n)}{m} f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{n}{m} f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n} \qquad \square$$

Dalla (3) si prova poi che, se f è continua, allora la (2) si può generalizzare a medie pesate cioè

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) \qquad (4)$$

dove $t_1, t_2 \in [0,1]$ e $t_1 + t_2 = 1$.

Complementi

Siano $r_1, r_2 \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$, con $r_1 + r_2 = 1$,

e $a_1\ a_2 \in I$ (si assume che f è def. in un interv. I)

Allora $r_1 = \frac{m_1}{n}$ e $r_2 = \frac{m_2}{n}$ con $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}^*$

e, dato che $r_1 + r_2 = 1$, risulta $m_1 + m_2 = n$.

Perciò, applicando la (3), si ottiene

$$f(r_1 a_1 + r_2 a_2) = f\left(\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{n}\right)$$

$$= f\left(\frac{\overbrace{a_1 + \cdots + a_1}^{m_1 \text{ volte}} + \overbrace{a_2 + \cdots + a_2}^{m_2 \text{ volte}}}{n}\right)$$

$$\leq \frac{\overbrace{f(a_1) + \cdots + f(a_1)}^{m_1 \text{ volte}} + \overbrace{f(a_2) + \cdots + f(a_2)}^{m_2 \text{ volte}}}{n}$$

$$= \frac{m_1}{n} f(a_1) + \frac{m_2}{n} f(a_2)$$

$$= r_1 f(a_1) + r_2 f(a_2)$$

Quindi abbiamo provato la (4) quando i pesi t_1 e t_2 sono numeri razionali.

Se $t_1, t_2 \in [0,1]$, allora si può prendere una successione $(r_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$, con $r_k^{(2)} \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ e $r_k^{(2)} \to t_2$. Poi si definisce $r_k^{(1)} = 1 - r_k^{(2)}$ e evidentemente $r_k^{(1)} \to 1 - t_2 = t_1$.

Allora $r_k^{(1)} a_1 + r_k^{(2)} a_2 \to t_1 a_1 + t_2 a_2$ per $k \to +\infty$ ed essendo f continua, si ha

$$f(r_k^{(1)} a_1 + r_k^{(2)} a_2) \to f(t_1 a_1 + t_2 a_2).$$

Per quanto già provato risulta

$$f(r_k^{(1)} a_1 + r_k^{(2)} a_2) \leq r_k^{(1)} f(a_1) + r_k^{(2)} f(a_2)$$

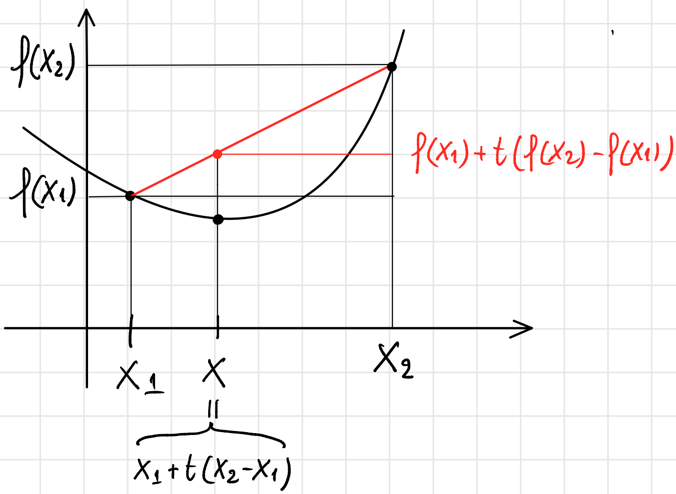
$$\underbrace{f(r_k^{(1)} a_1 + r_k^{(2)} a_2)}_{\downarrow \; f(t_1 a_1 + t_2 a_2)} \qquad \underbrace{r_k^{(1)} f(a_1) + r_k^{(2)} f(a_2)}_{\downarrow \; t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2)}$$

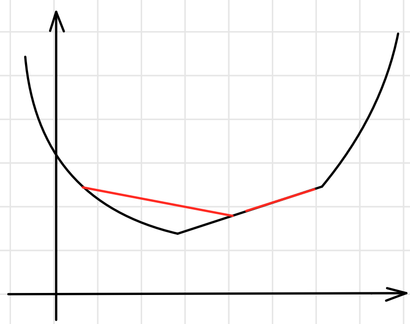
Per il teorema sul prolungamento delle disuguaglianze si ha

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) \qquad \square$$

Def Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$.
La funzione f si dice <u>convessa</u> (risp. <u>concava</u>) se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in [0,1]$:

$$\boxed{f(\underbrace{(1-t)x_1 + t x_2}_{x_1 + t(x_2 - x_1)}) \underset{(\text{risp.} \geq)}{\leq} \underbrace{(1-t) f(x_1) + t f(x_2)}_{f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))}.} \qquad (5)$$





una funzione convessa può avere parti piatte.

f è convessa se <u>la corda che unisce due punti del grafico di f si trova al di sopra del grafico di f.</u>

<u>Esempio</u> $f(x) = |x|$ è convessa. Infatti dalla disuguaglianza triangolare, $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall\, t \in [0,1]$

$$|(1-t)x_1 + t x_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2|$$

Def La funzione f si dice <u>strettamente convessa</u> (risp. concava) se

$\forall\, x_1, x_2 \in I \quad x_1 \neq x_2$ e $\forall\, t \in]0,1[$:

$$f((1-t)x_1 + t x_2) < (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

Osserv: le funzioni strettamente convesse o concave non hanno parti piatte.

<u>Osserv:</u> dalla definizione segue che

f è (strett.) concava $\Longleftrightarrow$ $-f$ è (strett.) convessa

Quindi nel seguito studieremo solo le funzioni convesse.

<u>Osserv:</u> La definizione di (stretta) convessità si può scrivere anche nel modo seguente

$\forall\, x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$ e $\forall\, x \in]x_1, x_2[$:

$$\boxed{f(x) \underset{(<)}{\leq} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad (6)$$

Infatti basta scrivere la (6) come

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \left(f(x_2) - f(x_1) \right)$$

e porre $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in \,]0,1[$, da cui segue

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad \text{e quindi}$$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t \left(f(x_2) - f(x_1) \right).$$

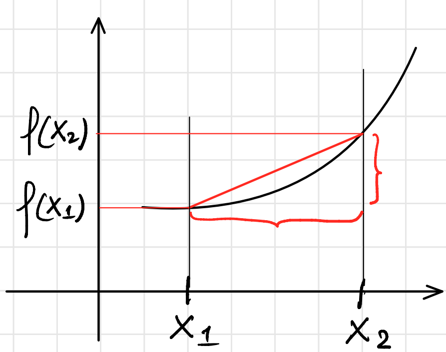
Definizione

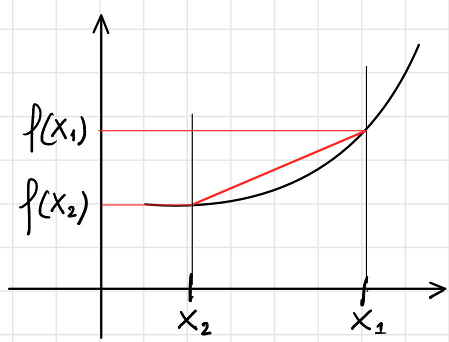
Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo I.

Poniamo $\forall x_1, x_2 \in I \ \ x_1 \neq x_2 \ \ R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

è il rapporto incrementale tra x_1 e x_2

o anche la pendenza tra x_1 e x_2





Notiamo che R è simmetrico, cioè

$R(x_1,x_2) = R(x_2,x_1)$ e rappresenta la pendenza del segmento che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$.

Teorema

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$.

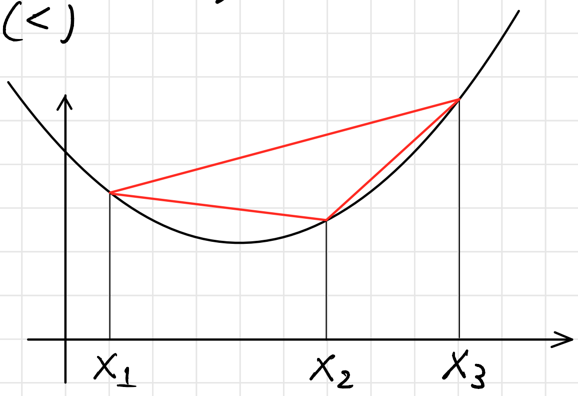
Allora sono equivalenti

(i) f è (strettamente) convessa

(ii) $\forall\, x_1, x_2\, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$:

$$R(x_1,x_2) \underset{(<)}{\leq} R(x_1,x_3) \underset{(<)}{\leq} R(x_2,x_3)$$

(proprietà delle tre corde)

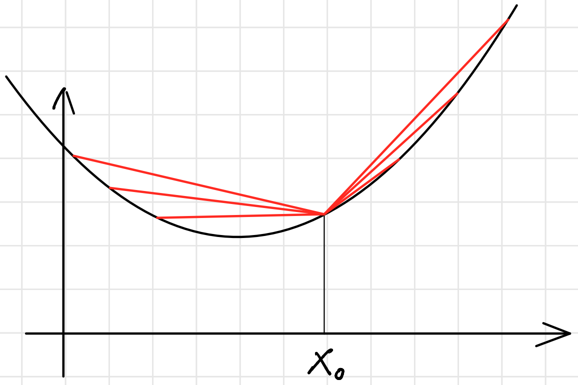


(iii) $\forall\, x_0 \in I$, la funzione rapporto incrementale

$$x \in I_{x_0} \longrightarrow R(x_0,x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

è (strettamente) crescente

il rapporto incrementale nel punto x_0 è una funzione crescente



Osserv: l'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) si chiama teorema delle tre corde

Dim: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Siano $x_1 < x_2 < x_3$.

Dalla convessità risulta

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1) \qquad (7)$$

e quindi

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

che equivale a $R(x_1,x_2) \leq R(x_1,x_3)$.

Poi dalla (7) risulta

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_3+x_3-x_1)$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_3) + f(x_3)-f(x_1)$$

$$= f(x_3) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_3)$$

e quindi $f(x_2)-f(x_3) \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_3)$

e dividendo per $x_2-x_3<0$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \iff R(x_1,x_3) \leq R(x_2,x_3)$$

Si noti che se f è strettamente convessa, allora la (7) vale con la disuguaglianza stretta ($<$) e quindi tutte le disuguaglianze che seguono saranno strette.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sia $x_1, x_2 \in I_{x_0}$ con $x_1 < x_2$.

Allora

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_0 \Rightarrow R(x_1,x_0) \leq R(x_2,x_0) & (<) \\ x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow R(x_1,x_0) \leq R(x_0,x_2) & (<) \\ x_0 < x_1 < x_2 \Rightarrow R(x_0,x_1) \leq R(x_0,x_2) & (<) \end{cases}$$

Quindi in ogni caso (tenendo conto della simmetria di R) si ha $R(x_0,x_1) \underset{(<)}{\le} R(x_0,x_2)$

e quindi $x \in I_{x_0} \to R(x_0,x)$ è (strettamente) crescente.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sia $x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$ e $x_1 < x < x_2$

Allora dato che il rapporto incrementale

$R(x_1, \cdot)$ è (strettamente) crescente

risulta $R(x_1,x) \le R(x_1,x_2)$ $(<)$

e quindi
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \underset{(<)}{\le} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$
cioè
$$f(x) \underset{(<)}{\le} f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x-x_1}(x-x_1)$$

$\square$