Lezione 11

Funzioni reali

Una funzione reale è una funzione definita in un insieme qualunque a valori nell'insieme $\mathbb{R}$

Quindi è una funzione del tipo

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } A \text{ insieme (arbitrario)}$$

Le funzioni reali rappresentano fenomeni fisici, economici, sociali e biologici.

Esempi

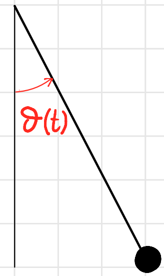
1. Sia A una regione limitata dello spazio fisico (tridimensionale). Lo spazio fisico si può identificare con l'insieme $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle terne di numeri reali:

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sono le coordinate rispetto a un sistema di riferimento dello spazio.

Quindi $A \subset \mathbb{R}^3$ e $T : A \to \mathbb{R}$ e

$\forall (x, y, z) \in A$ $T(x, y, z)$ è la temperatura nel punto di coordinate (x, y, z).

2. Sia A un intervallo temporale in cui stiamo osservando un pendolo oscillare $A = [t_0, t_1]$



Sia $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ e

$\forall t \in A$: $\vartheta(t)$ rappresenta l'angolo orientato tra la direzione del pendolo e la verticale all'istante t.

3. Sia $A = [1, 365]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, \dots, 365\}$

$$f : [1, 365]_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

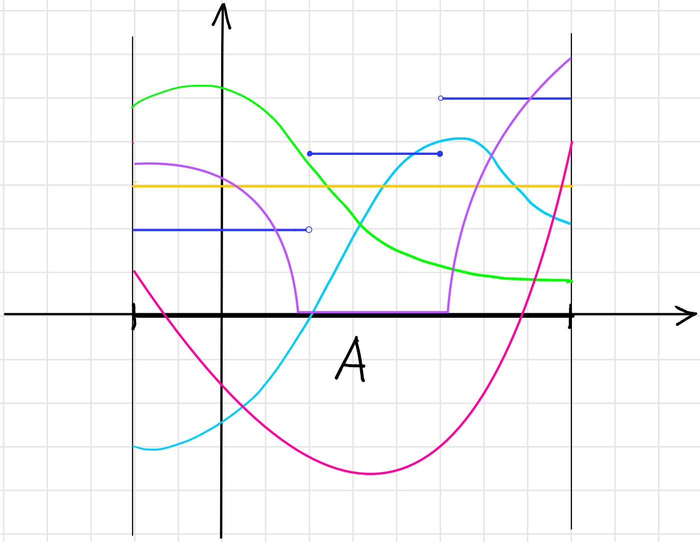
$f(n) =$ è il prezzo di un certo bene nel giorno n di un dato anno.

Quindi f rappresenta l'andamento dei prezzi giornalieri di un dato bene nel corso di un anno.

Def L'insieme di tutte le funzioni di A in $\mathbb{R}$ si denota con $\mathbb{R}^A$

Quindi informalmente possiamo scrivere

$$\mathbb{R}^A = \{ f : A \to \mathbb{R} \}$$



Tra le funzioni in $\mathbb{R}^A$ ci sono le funzioni costanti $x \mapsto c$.

Sull'insieme $\mathbb{R}^A$ si possono definire due operazioni

$f, g \in \mathbb{R}^A$

$$f+g : A \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g : A \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

$(\mathbb{R}^A, +, \cdot)$ è una struttura algebrica.

Evidentemente valgono le seguenti:

A1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

A2 $f+0 = 0+f = f$

dove 0 denota la funzione nulla di A in $\mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

A3 $f+(-f) = (-f)+f = 0$

dove $-f : A \to \mathbb{R}$ $\quad (-f)(x) = f(x)$

A4 $f+g = g+f$.

M1 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

M2 $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$, dove 1 indica la funzione costante $x \mapsto 1$.

Per quanto riguarda l'esistenza dell'inverso per la moltiplicazione di una funzione $f \neq 0$, questo inverso non sempre esiste. Infatti se $f(x) = 0$ per qualche $x \in A$, allora non esiste alcuna funzione $g : A \to \mathbb{R}$ t.c. $f \cdot g = 1$.

Perchè un tale elemento inverso esista deve essere $\forall x \in A$ $f(x) \neq 0$. Allora in tal caso si può definire

$$\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R} \qquad \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

e chiaramente si ha $f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = 1$.

M4 $f \cdot g = g \cdot f$

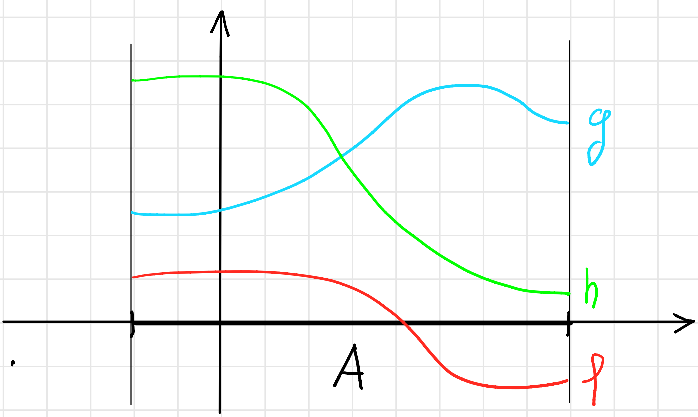
D $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Sull'insieme $\mathbb{R}^A$ si può definire una relazione d'ordine nel modo seguente

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^A : \qquad f \leq g \overset{def}{\iff} \forall x \in A : f(x) \leq g(x)$$

La relazione d'ordine non è totale

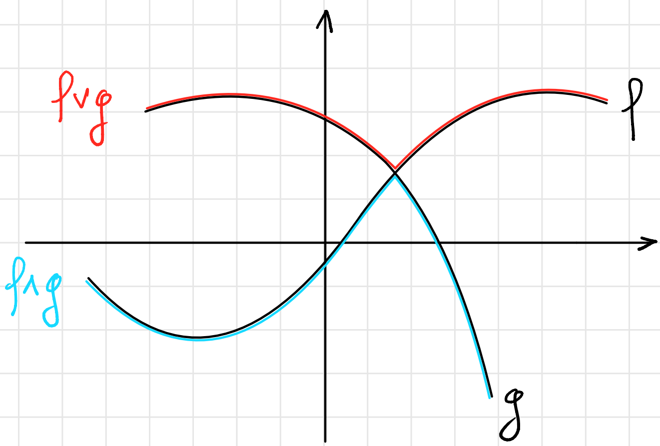
In figura risulta $f \leq g$, ma $g \nleq h$ e $h \nleq g$.



Dati $f, g \in \mathbb{R}^A$, si definiscono

$$f \vee g = \max\{f, g\} : A \to \mathbb{R} \qquad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$f \wedge g = \min\{f, g\} : A \to \mathbb{R} \qquad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$



$$f_+ = f \vee 0 \quad , \quad f_- = (-f) \vee 0 \qquad |f| = f \vee (-f)$$

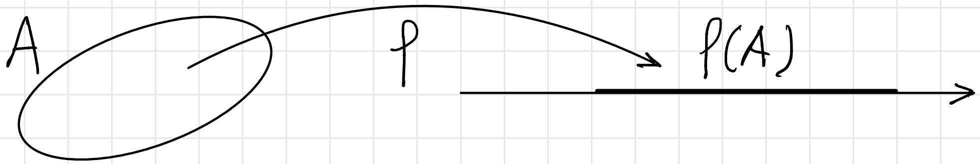
$$|f| = f_+ + f_- \quad , \quad f = f_+ - f_-$$

Estremi di funzioni

Le nozioni di limitato superiormente e inferiormente come pure di sup, inf, min e max si sono date per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Nel caso di funzioni reali le nozioni di sopra si danno riconducendole al caso di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, essendo l'immagine di funzioni reali un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Def $f : A \to \mathbb{R}$.

Si ricordi che $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$ è l'immagine di f e chiaramente $f(A) \subset \mathbb{R}$



Si pongono allora le seguenti definizioni:

1) f è limitata superiormente in $\mathbb{R}$

$\overset{def}{\iff} f(A)$ è limitata superiormente in $\mathbb{R}$.

$\iff \exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in A : f(x) \leq M$

2) f è limitata inferiormente in $\mathbb{R}$

$\overset{def}{\iff}$ $f(A)$ è limitata inferiormente in $\mathbb{R}$.

$\iff \exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in A: m \leq f(x)$

3) $M \in \mathbb{R}$, M è maggiorante di f

$\overset{def}{\iff}$ M è maggiorante di $f(A)$

$\iff \forall x \in A: f(x) \leq M$

4) $m \in \mathbb{R}$, m è minorante di f

$\overset{def}{\iff}$ m è minorante di $f(A)$

$\iff \forall x \in A: m \leq f(x)$.

5) f è dotata di massimo

$\overset{def}{\iff}$ $f(A)$ è dotata di massimo

$\iff \exists x_1 \in A$ t.c. $\forall x \in A: f(x) \leq f(x_1)$

In tal caso si pone $\max\limits_{A} f := \max f(A)$

6) f è dotata di minimo

$\overset{def}{\iff}$ $f(A)$ è dotata di minimo

$\iff \exists x_2 \in A$ t.c. $\forall x \in A: f(x_2) \leq f(x)$

In tal caso si pone $\min\limits_{A} f = \min f(A)$

7) Se f è limitata superiormente in $\mathbb{R}$, si pone

$\sup_A f := \sup f(A)$. Quindi se $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sup_A f = \lambda \iff \begin{cases} 1) \ \forall x \in A: f(x) \leq \lambda \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: f(x) > \lambda - \varepsilon \end{cases}$$

8) Se f è limitata inferiormente in $\mathbb{R}$, si pone

$\inf_A f := \inf f(A)$. Quindi se $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\inf_A f = \mu \iff \begin{cases} 1) \ \forall x \in A: \mu \leq f(x) \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: f(x) < \lambda + \varepsilon. \end{cases}$$

10) f non è limitata superiormente in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(A)$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$

$\iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in A$ t.c. $f(x) > M$

$\iff +\infty$ è il solo maggiorante di $f(A)$ in $\overline{\mathbb{R}}$

In tal caso si pone $\sup_A f = +\infty$.

11) f non è limitata inferiormente in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(A)$ non è limitata inferiormente in $\mathbb{R}$

$\iff \forall m \in \mathbb{R} \ \exists x \in A$ t.c. $f(x) < m$

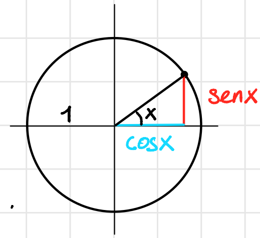
$\iff -\infty$ è il solo minorante di $f(A)$ in $\overline{\mathbb{R}}$

In tal caso si pone $\inf_A f = -\infty$.

Esercizi

$\boxed{1}$ Sia $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}$

Si provi che f è limitata inferiormente e non è limitata superiormente.



Soluzione:

Evidentemente $\operatorname{sen} x > 0$ per $x \in]0, \pi[$.

Quindi $f(x) > 0$.

Perciò 0 è minorante di f (in $]0, \pi[$) e quindi f è limitata inferiormente.

Proviamo che f non è limitata superiormente.

Sia $M \in \mathbb{R}^*_+$ arbitrario. Dobbiamo provare che la disequazione $\quad f(x) > M \quad (1)$

ha soluzione in $]0, \pi[$.

Allora si nota che

$$0 < x \operatorname{sen} x \leq x \quad (\text{perché } \operatorname{sen} x \leq 1)$$

Perciò

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x \operatorname{sen} x} = f(x).$$

Allora se risolvo

$$\frac{1}{x} > M \qquad (2)$$

avrò anche risolto $f(x) > M$.

Risolviamo quindi la (2) con $x \in]0,\pi[$.

$$\frac{1}{x} > M \iff x < \frac{1}{M}$$

Basta quindi prendere $x < \min\left\{\frac{1}{M}, \pi\right\}$ e risulta la (2) vera e quindi la (1) vera con $x \in]0,\pi[$.

$\boxed{2}$ $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = -x\sqrt{x} + \frac{1}{1-x}$.

Dimostrare che $\inf\limits_{[0,1[} f = 1$ e $\sup\limits_{[0,1[} f = +\infty$.

<u>Soluzione:</u>

Cominciamo con $\inf\limits_{[0,1[} f = 1$.

Si deve trasformare l'espressione di f

$$f(x) = -x\sqrt{x} + \frac{1-x+x}{1-x} = -x\sqrt{x} + 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$= \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\geq 0} \underbrace{\left(1-\sqrt{x}\,(1-x)\right)}_{\geq 0} + 1$$

Infatti, si nota che, essendo $0 \leq x < 1$, risulta

$$0 \leq \sqrt{x} < 1 \quad e \quad 0 < 1-x \leq 1$$

perciò $0 \leq \sqrt{x}\,(1-x) \leq 1$.

Quindi $f(x) \geq 1$, cioè 1 è minorante di f.

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo la disequazione

$$(1) \quad f(x) < 1+\varepsilon$$

Allora (1) $\iff \dfrac{x}{1-x}\left(1-\sqrt{x}\,(1-x)\right) < \varepsilon$

ma $0 \leq 1-\sqrt{x}\,(1-x) \leq 1$, quindi

$$\frac{x}{1-x}\left(1-\sqrt{x}\,(1-x)\right) \leq \frac{x}{1-x}$$

Perciò se risolviamo

$$(2) \quad \frac{x}{1-x} < \varepsilon$$

avremo anche risolto la (1).

La (2) $\iff \dfrac{1-x}{x} > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff \dfrac{1}{x} - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$$\iff \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\iff x < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (<1)$$

Allora basta prendere

$x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ per risolvere la (2) e quindi la (1).

Proviamo che $\sup\limits_{[0,1[} f = +\infty$.

Sia $M > 0$ si tratta di provare che la disequazione

$$(3) \quad f(x) > M$$

ha soluzione in $[0,1[$.

Evidentemente (3) $\iff \overbrace{\dfrac{x}{1-x}\left(1 - \sqrt{x}(1-x)\right) + 1}^{f(x)} > M$

Si vede che per x vicino a 1 i valori di $f(x)$ diventano grandi.

Allora prendiamo $x \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Per tali x si ha

$$0 \leq \sqrt{x}\,(1-x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{1}{2}$$

e quindi $1-\sqrt{x}\,(1-x) \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Allora $f(x) \geq \frac{x}{1-x}\,\frac{1}{2} + 1 \geq \frac{x}{1-x}\,\frac{1}{2}$ (questa vale solo per $x \geq \frac{1}{2}$)

Quindi se risolvo

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x} > M$$

a maggior ragione avrò risolto la (3).

Ma $\frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x} > M \iff \frac{1-x}{x} < \frac{1}{2M} \iff \frac{1}{x} - 1 < \frac{1}{2M}$

$$\iff \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{2M} \iff \frac{1}{x} < \frac{2M+1}{2M}$$

$$\iff x > \frac{2M}{2M+1} < 1$$

Allora ogni $x > \underbrace{\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2M}{2M+1}\right\}}_{>1}$ risolve la

(4) e quindi la (3).

Def Una funzione reale di una variabile reale è una funzione del tipo

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } A \subset \mathbb{R}.$$

Def Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$.

1) f si dice crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2) f si dice decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

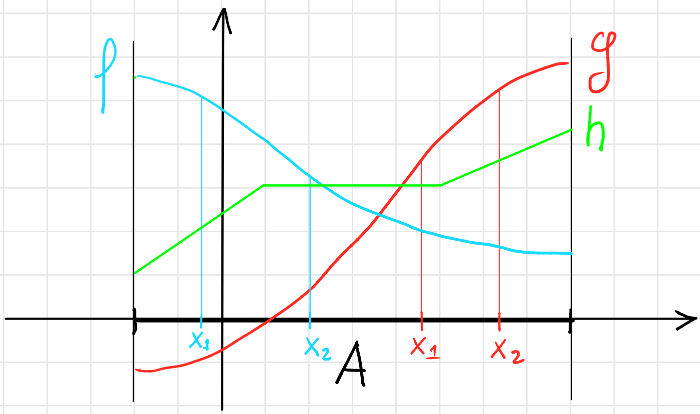
3) f si dice strettamente crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

4) f si dice strettamente decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una funzione che è crescente o decrescente si dice monotona. Una funzione che è strett. crescente o strett. decrescente si dice strettamente monotona.



f è strett. decrescente

g è strett crescente

h è crescente ma non è strett. crescente

Osserv:

Se f è strettamente monotona, allora f è iniettiva

Proposizione

La funzione $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^n$ (con $n \geq 1$) è strettamente crescente.

Dim:

Siano $0 < x_1 < x_2$. Proviamo per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \underbrace{0 < x_1^n < x_2^n}_{P(n)}$$

$P(1)$ è vera.

Supponiamo che $P(n)$ è vera.

Allora si ha $0 < x_1 < x_2$ e $0 < x_1^n < x_2^n$

$$0 < x_1 < x_2 \overset{\text{molt. per } x_1^n > 0}{\Longrightarrow} 0 < x_1^{n+1} < x_1^n \cdot x_2$$

$$0 < x_1^n < x_2^n \overset{\text{molt per } x_2}{\Longrightarrow} x_1^n \cdot x_2 < x_2^{n+1}$$

Quindi si ha $0 < x_1^{n+1} < x_1^n \cdot x_2 < x_2^{n+1}$ $\square$

__Proposizione__

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ strettamente monotona.

Allora si può considerare $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ e risulta

f strett. cresc $\Rightarrow f^{-1}$ strett. cresc.

f strett. decrescente $\Rightarrow f^{-1}$ strett. decrescente.

Dim: consideriamo il primo caso (f strett. crescente).

Siano $y_1, y_2 \in f(A)$ t.c. $y_1 < y_2$.

Allora $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$ e $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Perciò deve necessariamente essere $x_1 < x_2$, altrimenti se fosse $x_2 \geq x_1$ si avrebbe $y_2 = f(x_2) \geq f(x_1) = y_1$, che è contro ipotesi.

Esercizio.

$\boxed{1}$ Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

Dimostrare che f è strettamente crescente.

<u>Soluzione</u>:

Dato che $x > 0$, allora

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Perciò $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} + 1 > \dfrac{1}{x_2} + 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} < \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\boxed{2.}$ Sia $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Dimostrare che f è strettamente decrescente

<u>Svolgimento</u>: Siano $1 < x_1 < x_2$.

Allora $\dfrac{x_1}{1+x_1^2} > \dfrac{x_2}{1+x_2^2} \iff x_1(1+x_2^2) > x_2(1+x_1^2)$

$$\iff x_1 + x_1 x_2^2 > x_2 + x_2 x_1^2$$

$$\iff x_1 \cdot x_2^2 - x_2 x_1^2 > x_2 - x_1$$

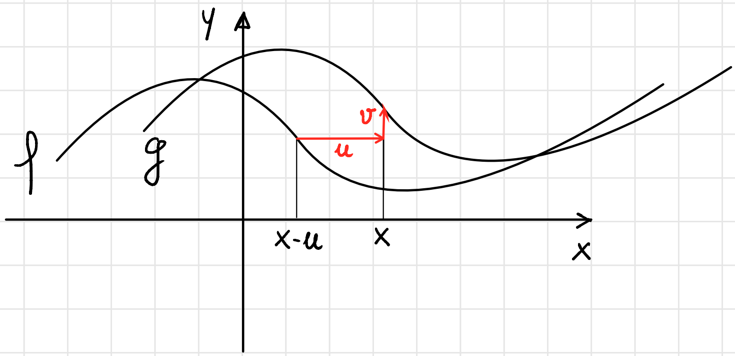
$$\iff \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{>1} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > \underbrace{x_2 - x_1}_{>0}$$

Quindi l'ultima equivalenza è vera.

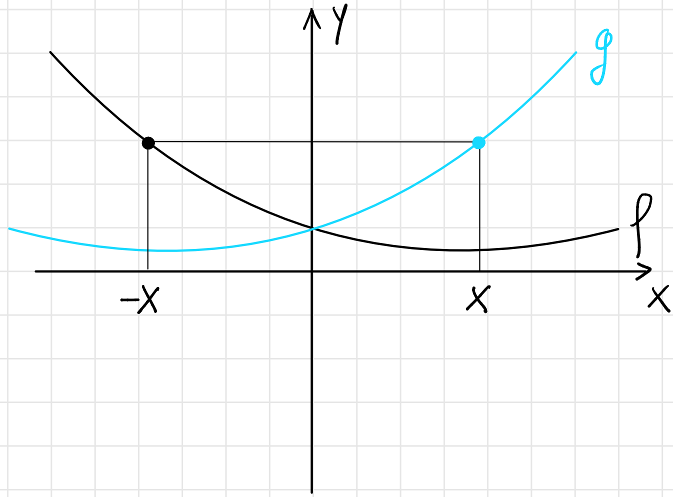
<u>Trasformazioni di funzioni e simmetrie</u>.

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

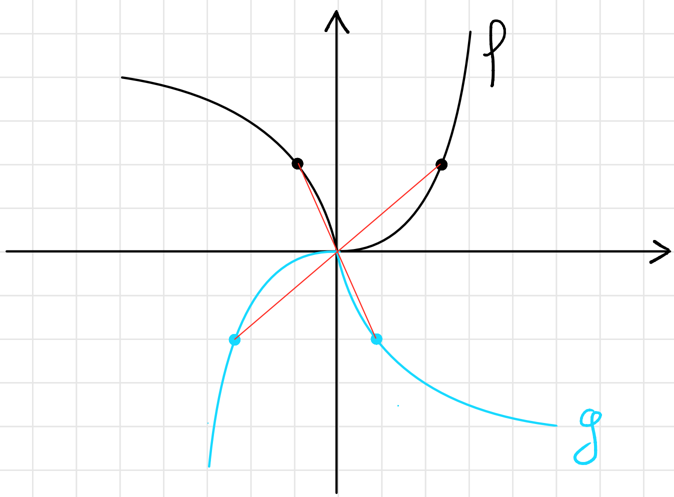
- $g(x) = f(x-u)+v$ è la funzione traslata di (u,v)



- $g(x) = f(-x)$ è la simmetrica (o riflessa) rispetto all'asse y



- $g(x) = -f(-x)$ è la simmetrica rispetto all'origine.



- La funzione f si dice pari se è uguale alla sua simmetrica rispetto all'asse y, cioè se

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = -f(x)$$

- f si dice dispari se è uguale alla sua simmetrica rispetto all'origine, cioè se

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) = -f(-x)$$

- f si dice periodica di periodo $p>0$ se è uguale alla sua traslata di ampiezza $(p,0)$, cioè se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x-p).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x+p).$$