# Lezione 12

**Proposizione 1**

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(A) \subset B.$

$g \circ f : A \to \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Allora:

(i) se $f$ e $g$ sono entrambe crescenti o entrambe decrescenti, allora $g \circ f$ è crescente.

(ii) se una tra $f$ e $g$ è crescente e l'altra è decrescente allora $g \circ f$ è decrescente

Risultati analoghi valgono con la stretta monotonia.

**Proposizione 2**

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva e $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ la sua funzione inversa. Allora:

(i) $f$ è strett. crescente $\Rightarrow$ $f^{-1}$ è strett. crescente

(ii) $f$ è strett. decrescente $\Rightarrow$ $f^{-1}$ è strett. decrescente

Dim:

(i) Supponiamo che $f$ sia strett. crescente.

Sia $y_1, y_2 \in f(A)$ con $y_1 < y_2$.

$\exists\ x_1, x_2 \in A$ t.c. $f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2$.

$x_1 = f^{-1}(y_1) \quad x_2 = f^{-1}(y_2)$

se fosse $x_1 \geq x_2$, allora essendo $f$ strett. crescente

sarebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$ e quindi $y_1 \geq y_2$ che è

contro ipotesi. Perciò deve essere $x_1 < x_2$

(ii): si prova allo stesso modo. $\square$

## Funzione potenza con esponente un numero naturale

$P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad P_n(x) = x^n.$

Proposizione 3 (proprietà)

(i) $P_n|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è strett. crescente.

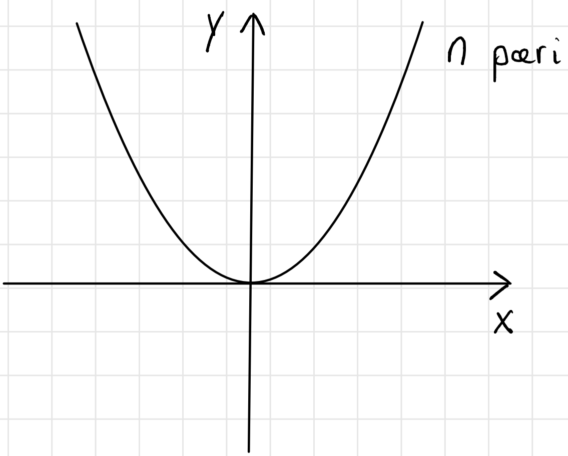
(ii) $P_n$ è pari se $n$ è pari ed è dispari se $n$ è dispari

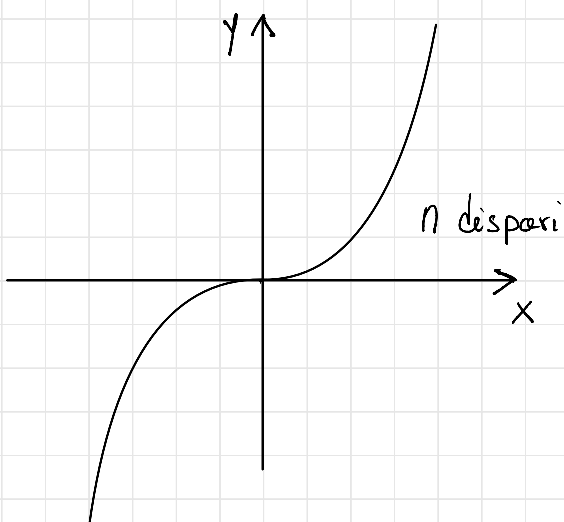
(iii) $P_n$ è strett. crescente se $n$ è dispari

(iv) $P_n|_{\mathbb{R}_-} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ è strett. decrescente

(v) $P_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ $(\forall y \geq 0 \ \exists x \geq 0$ t.c. $x^n = y)$

(vi) $$P_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \mathbb{R}_+ & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

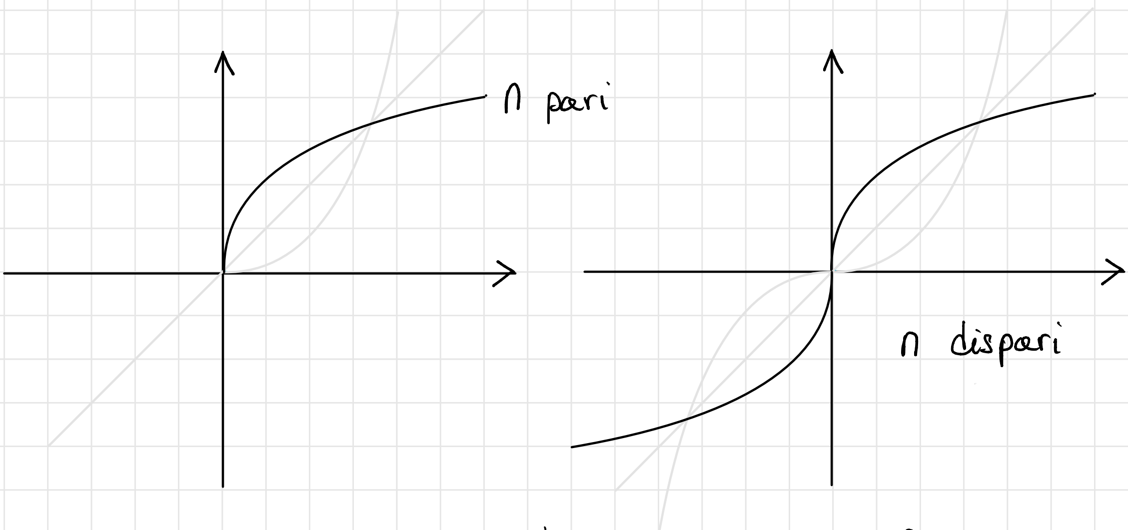


# Funzione radice n-esima

La funzione radice n-esima è l'inversa di $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $n$ è dispari ed è l'inversa di $P_n|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se $n$ è pari

Quindi $\begin{cases} \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$




Essendo in ogni caso l'inversa di una funzione strettamente crescente, la funzione radice n-esima è strettamente crescente

# Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$

- $$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\underbrace{-n}_{>0} \text{ volte}}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$ $\underline{a^n > 0}$

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

- se $n \geq 1$ $\sqrt[n]{a}$ (è l'unica soluzione dell'eq. $?^n = a$)

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

[ proviamo per esempio la prima. Poniamo $x = \sqrt[n]{a}$. Allora $x^n = a$ e quindi $(x^n)^m = a^m$. Ma $(x^n)^m = (x^m)^n$ e perciò $(x^m)^n = a^m$. Ma questo significa $x^m = \sqrt[n]{a^m}$, cioè $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

- $q \in \mathbb{Q}$ $\quad q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^q \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$$ (è ben definita).

Supponiamo che $q$ si scriva anche $q = \frac{r}{s}$ con $r \in \mathbb{Z}$ e $s \in \mathbb{N}^*$

Allora $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff ms = nr.$

Perciò : $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[s]{a^r} \iff (\sqrt[s]{a^r})^n = a^m$

$$\iff \sqrt[s]{a^{r \cdot n}} = a^m \iff a^{ms} = a^{rn}$$

<u>Osserv:</u> Dalla definizione segue che $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$

Proposizione 4

(i) $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ $\quad a^{q_1+q_2} = a^{q_1} \cdot a^{q_2}$ $\quad a^{q_1 \cdot q_2} = (a^{q_1})^{q_2}$

(ii) se $q \in \mathbb{Q}$, $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q.$

Dim:

(i) : $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ e $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$ $\quad q_1 + q_2 = \frac{n_2 \cdot m_1 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$

$$a^{q_1+q_2} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_2 m_1} \cdot a^{n_1 m_2}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_2 m_1}} \cdot \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_1 m_2}}$$
$$= \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$$
$$= a^{q_1} \cdot a^{q_2}$$

$$a^{q_1 \cdot q_2} = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} = \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}} = (a^{q_1})^{q_2}.$$

(ii) $q = \frac{m}{n}$

$$(a \cdot b)^q = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^q b^q. \quad \square$$

## Proposizione 5

$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^*_+ \qquad f_a(q) = a^q$$

(i) $f_a(q_1 + q_2) = f_a(q_1) \cdot f_a(q_2) \qquad f_a(1) = a.$

(ii) $f_a$ è strett. crescente se $a > 1$ e strett. decresc se $a < 1$

Dim: (ii) $\quad q_1 < q_2 \qquad q_1 = \frac{m_1}{n_1} \quad q_2 < \frac{m_2}{n_2}$

$$q_1 < q_2 \iff \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \iff \frac{n_2 m_1}{n_1 n_2} < \frac{n_1 m_2}{n_1 n_2}$$

Si può quindi assumere $\quad q_1 = \frac{m_1}{n} \quad q_2 = \frac{m_2}{n} \quad$ con $\quad m_1 < m_2$

$$a^{q_1} = \sqrt[n]{a^{m_1}} < \sqrt[n]{a^{m_2}} = a^{q_2} \quad \text{se } a > 1$$

$$a^{q_2} = \sqrt[n]{a^{m_1}} > \sqrt[n]{a^{m_2}} = a^{q_2} \quad \text{se } a < 1$$

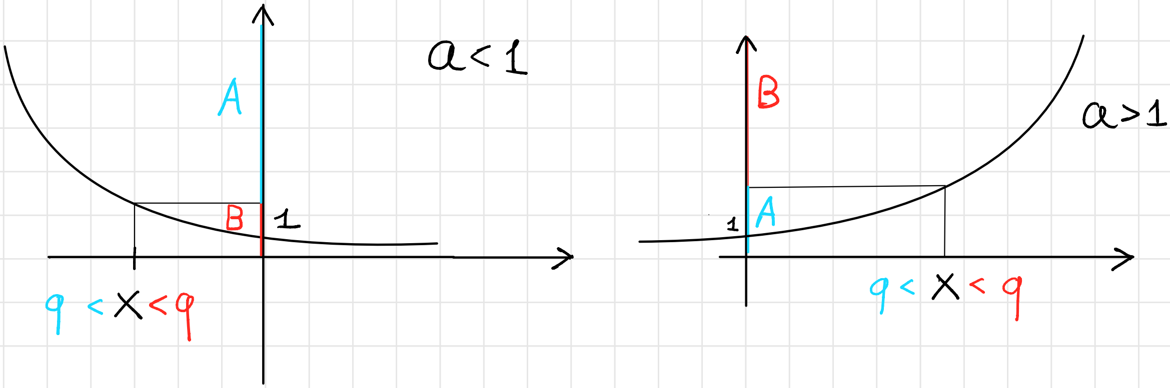
dato che $m_2 > m_1$, $\quad a^{m_2} = a^{m_2 - m_1 + m_1} = a^{m_2 - m_1} \cdot a^{m_1}$

$$\text{e } a^{\overbrace{m_2 - m_1}^{>0}} \begin{cases} > 1 & \text{se } a > 1 \\ < 1 & \text{se } a < 1 \end{cases} \qquad \square$$

## Teorema 1 (definizione di $a^x$)

Sia $a>0$, $a\neq 1$. Sia $x\in\mathbb{R}$ e poniamo

$$A=\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q<x\} \qquad B=\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q>x\}$$




Allora A e B sono insiemi separati, in particolare

$$\begin{cases} A\leq B & \text{se } a>1 \\ B\leq A & \text{se } a<1 \end{cases}$$

Inoltre A e B sono contigui, cioè

se $a>1$ : $\forall \varepsilon>0\ \exists q_1,q_2\in\mathbb{Q}\quad q_1<x<q_2\quad a^{q_2}-a^{q_1}<\varepsilon$.

se $a<1$ : $\forall \varepsilon>0\ \exists q_1,q_2\in\mathbb{Q}\quad q_1<x<q_2\quad a^{q_1}-a^{q_2}<\varepsilon$.

Si definisce allora $a^x$ come l'unico elemento separatore tra A e B, cioè

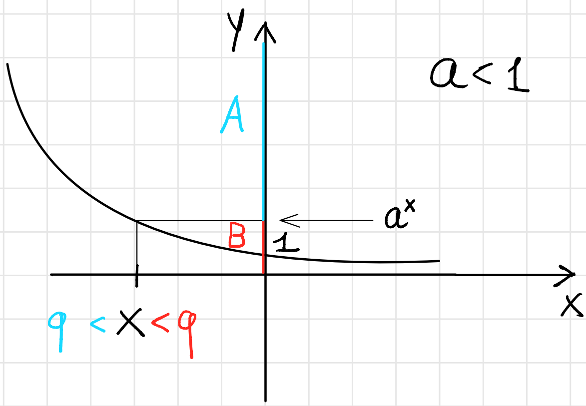
$$\begin{cases} \sup A = a^x = \inf B & \text{se } a>1 \\ \sup B = a^x = \inf A & \text{se } a<1 \end{cases}$$

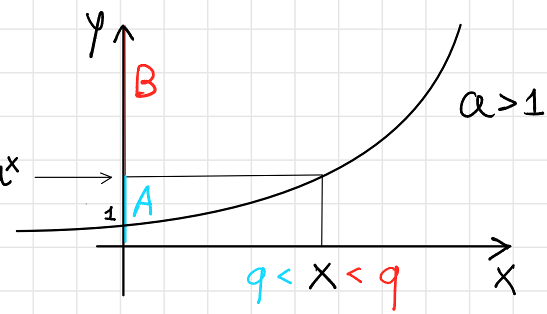
Più esplicitamente si ha:

$$\sup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<x}} a^q = a^x = \inf_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>x}} a^q \qquad \text{se } a>1$$

$$\inf_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<x}} a^q = a^x = \sup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>x}} a^q \qquad \text{se } a<1$$

$a^x$ si chiama esponenziale di base $a$ e esponente $x$.



Def. Sia $a>0$.

$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ con $\exp_a(x) = a^x$ verifica.

Funzione esponenziale di base $a$

Teorema 2 (proprietà fondamentali di $\exp_a$)

(i) $\exp_a(x_1+x_2) = \exp_a(x_1)\cdot\exp_a(x_2)$ $\exp_a(1) = a$.

(ii) $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strett. crescente per $a>1$

e strett. decrescente per $a<1$.

(iii) $\exp_a$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+^*$.

(iv) la funzione $\exp_a$ è l'unica funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+^*$ che sia strett. monotona e che soddisfa (i).

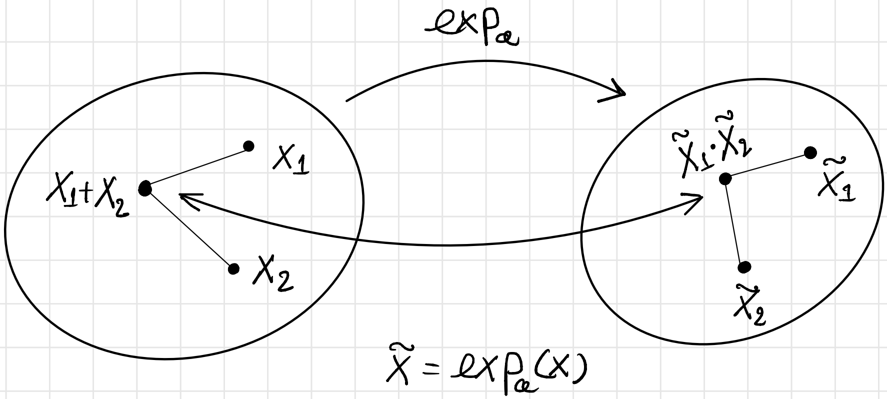
Osserv: $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sono gruppi commutativi

La proprietà: $\exp_a(x_1+x_2) = \exp_a(x_1)\cdot\exp_a(x_2)$

dice che $\exp_a$ è un omomorfismo del gruppo additivo di $\mathbb{R}$ $[(\mathbb{R},+)]$ nel gruppo moltiplicativo dei numeri strett. positivi $[(\mathbb{R}_+^*,\cdot)]$. Per questo si scrive

$$\exp_a : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+^*,\cdot)$$

cioè esso "trasforma" l'addizione in moltiplicazione.




---

## Funzione logaritmo

è l'inversa della funzione esponenziale e si denota con $\log_a$.

$$\log_a : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$$

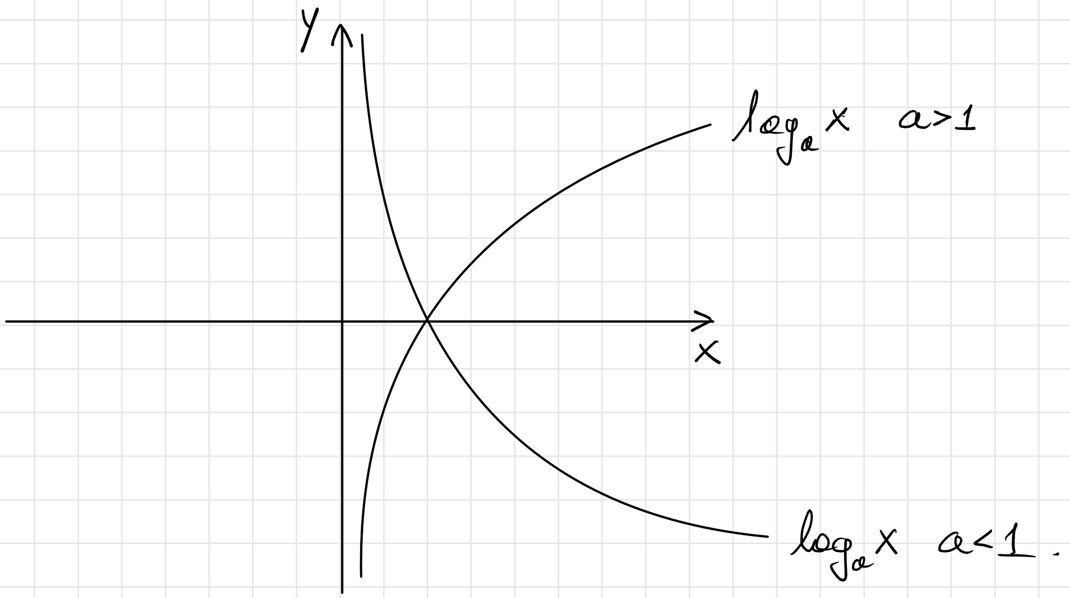
- $\log_a$ è strett. crescente se $a > 1$ e strett. decrescente se $a < 1$.

- $\log_a(\exp_a(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad [\log_a a^x = x]$
- $\exp_a(\log_a(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad [a^{\log_a x} = x]$

- $\log_a b^x = x \log_a b \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left[\, b = a^{\log_a b} \implies b^x = \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^{x \log_a b} = \exp_a(x \log_a b) \right.$$

$$\left. \implies \log_a b^x = x \log_a b. \,\right]$$




<u>Funzione potenza con esponente reale $\alpha \in \mathbb{R}^*$</u>

$P_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad P_\alpha(x) = x^\alpha \quad$ se $\quad \alpha > 0$

$P_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad P_\alpha(x) = x^\alpha \quad$ se $\quad \alpha < 0$

**Proposizione** 6 (proprietà)

La funzione potenza con esponente reale si può scrivere in termini di log e exp. Infatti

$$\log(x^\alpha) = \alpha \log x \implies x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$$

$$\boxed{P_\alpha = \exp \circ \varphi_\alpha \circ \log} \qquad \text{dove } \varphi_\alpha(t) = \alpha t$$

Da questo consegue che

(i) $P_\alpha$ è strett. crescente se $\alpha > 0$

e strett. decrescente se $\alpha < 0$.

(ii) $P_\alpha(\mathbb{R}_+^*) = \exp(\varphi_\alpha(\log(\mathbb{R}_+^*)))$

$$= \exp(\varphi_\alpha(\mathbb{R})) = \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$$

---