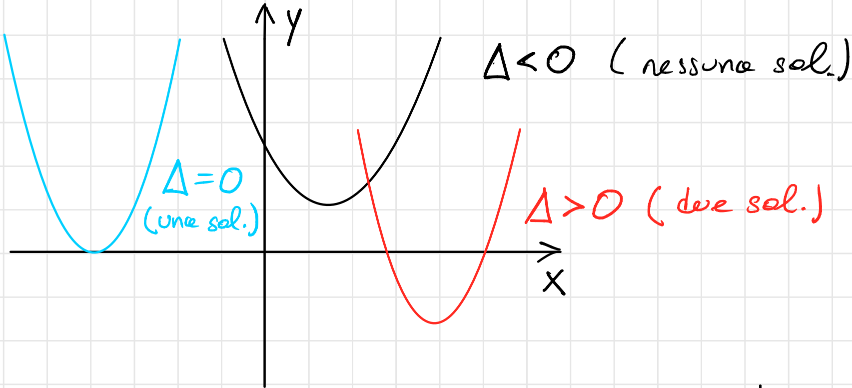
Lezione 9

I NUMERI COMPLESSI

Equazione di secondo grado

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a>0)$$



$$\Delta = b^2-4ac$$

$$\boxed{x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad (1)$$

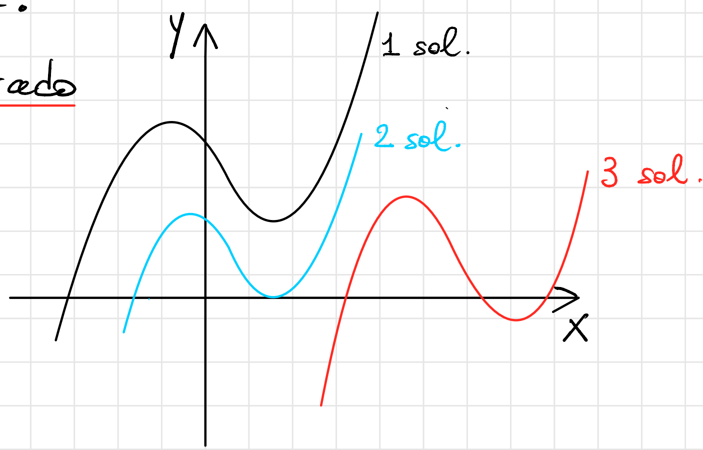
non sempre ha soluzioni il segno di Δ segnala l'esistenza o meno di soluzioni.

La formula (1) da' conto completamente della situazione geometrica.

Equazione di terzo grado

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$(a>0)$



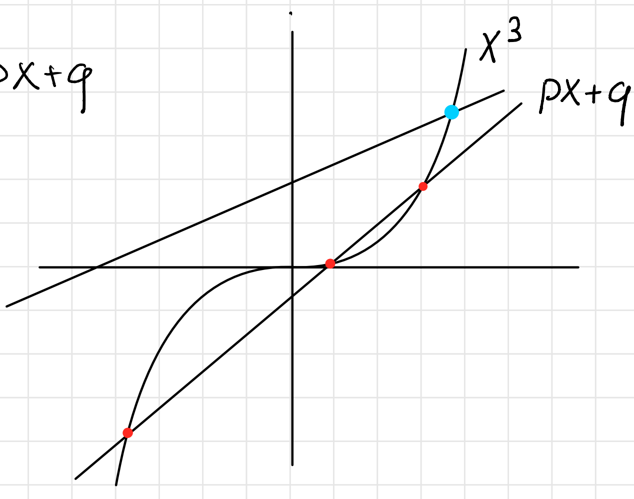
Formula di Cardano per il caso $x^3 = px + q$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}}\,, \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Questa formula appare nell'Ars Magna di Cardano nel 1545.

Circa 30 anni dopo Rafael Bombelli riconobbe che c'era qualcosa di strano nella formula di Cardano. Un'equazione di terzo grado ha sempre soluzioni, ma la formula di Cardano ha senso solo se $\Delta \geq 0$. Quindi per $\Delta < 0$ essa non fornisce alcuna soluzione, ma geometricamente si vede che una soluzione esiste!

$x^3 = px + q$



Bombelli fornisce come esempio

$$x^3 = 15x + 4$$

che ha soluzione $x = 4$ (verificare!), ma la formula di Cardano da'

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$ $[-121 = (-1) \cdot 11^2]$

$$= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

che (apparentemente) è $\neq 4$.

Allora Bombelli ha un'idea. Immagina che se fosse possibile scrivere

(1) $\underline{\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + b\sqrt{-1}}$ e $\underline{\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - b\sqrt{-1}}$ (2)

allora si avrebbe

$$x = 2 + b\sqrt{-1} + 2 - b\sqrt{-1} = 4$$

- Implicitamente qui Bombelli sta applicando

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

Poi la (1) e (2) equivalgono a

$$(2+b\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1} \quad e \quad (2-b\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1}$$

E qui Bombelli sviluppa il cubo seguendo le regole usuali dell'algebra anche per la quantità $\sqrt{-1}$ con l'accortezza di considerare che $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

$$\begin{aligned}(2+b\sqrt{-1})^3 &= 8+3\cdot 4\, b\sqrt{-1} + 3\cdot 2\, b^2(-1) + b^3(-1)\sqrt{-1} \\ &= 8+12b\sqrt{-1} - 6b^2 - b^3\sqrt{-1} \\ &= 8-6b^2 + b(12-b^2)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Si vede quindi che per $b=1$ si ottiene $2+11\sqrt{-1}$

Si ha quindi

$$(2\pm\sqrt{-1})^3 = 2\pm 11\sqrt{-1}$$

- Implicitamente qui Bombelli usa la regola

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = (ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

In seguito Eulero ha denotato $\sqrt{-1}$ con $\underline{i}$

Il numero i non è un numero reale, è un numero "immaginario" con la proprietà che $i^2=-1$.

A parte questa proprietà speciale il numero i segue le stesse regole dell'algebra dei numeri reali.

Per esempio proviamo a calcolare la seguente espressione

$$\frac{(1+2i+3(i+1))(i+2)}{3+2(i-1)}$$

$$=\frac{(1+2i+3i+3)(i+2)}{3+2(i-1)}=\frac{(4+5i)(i+2)}{3+2i-2}$$

$$=\frac{4i+8+5i^2+10i}{1+2i}=\frac{14i+8-5}{1+2i}$$

$$=\frac{14i+3}{1+2i}=\frac{(14i+3)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{14i-28i^2+3-6i}{1-4i^2}$$

$$=\frac{8i+31}{1+4}=\frac{31}{5}+\frac{8}{5}i.$$

$x, y, z, w, t, r, s \in \mathbb{R}$ $\qquad i \quad i^2 = -1$

$$\frac{w\left(x+i(z+1)\right)^2 + x\cdot r}{y(r+i)s} \longrightarrow a+ib \quad , a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}.$$

I numeri complessi sono numeri della forma

$z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. [forma algebrica dei numeri complessi]

a si dice parte reale di z, $Re(z) = a$

b si dice parte immaginaria di z, $Im(z) = b$.

Si noti che $i = 0 + i\cdot 1$ (quindi $Re(i) = 0$ e $Im(i) = 1$)

Regole somma e moltiplicazione

$z = a+ib$ e $w = c+id$

1. $z + w = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

$Re(z+w) = Re(z) + Re(w)$, $Im(z+w) = Im(z) + Im(w)$

2. $z \cdot w = (a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot c + adi + bc\cdot i + bd\underbrace{i^2}_{-1}$

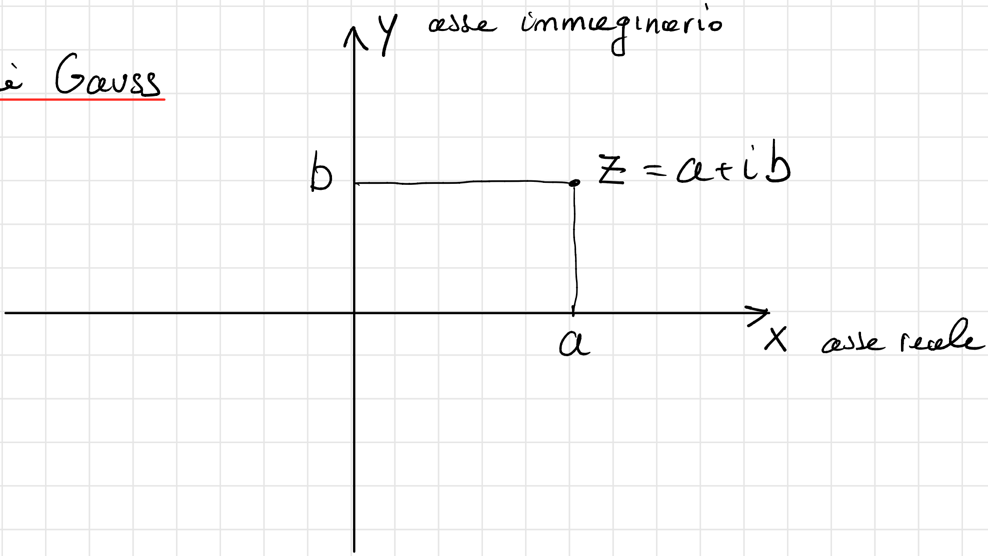
$= (a\cdot c - bd) + (ad+bc)i$

$Re(z\cdot w) = Re(z)Re(w) - Im(z)Im(w)$, $Im(z\cdot w) = Re(z)Im(w) + Im(z)Re(w)$.

- $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Gauss ha riconosciuto che i numeri complessi si possono interpretare come un punto in un piano euclideo

Piano di Gauss

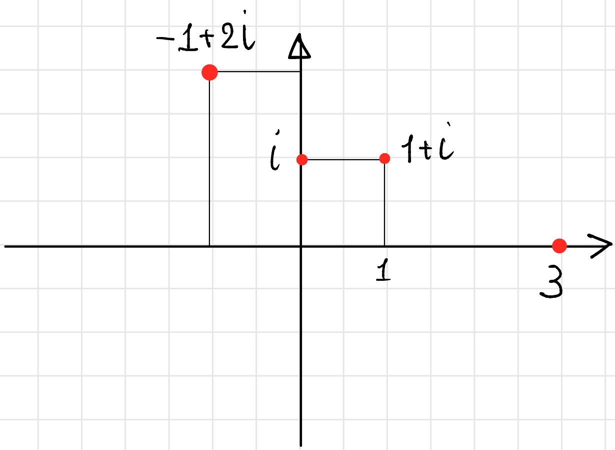


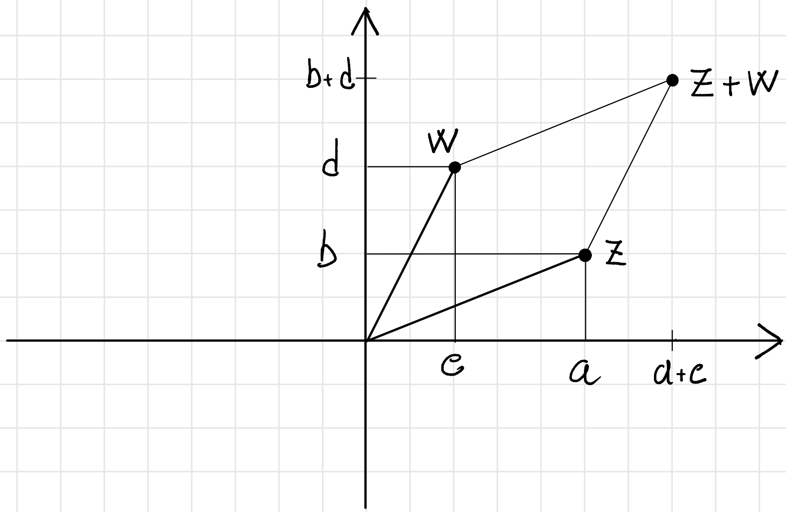
$1+i$

$2i$

3

$-1+2i$





La somma tra numeri complessi è come la somma tra vettori.

Un modello formale dei numeri complessi

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \}$$

1) $(a,b) = (c,d) = (a+c, b+d)$

2) $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Con queste operazioni $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo.

A1 $((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))$

A2 $(0,0)$ è l'elemento neutro per l'addizione

$$(a,b)+(0,0) = (0,0)+(a,b) = (a,b)$$

A3 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ esiste l'opposto di (a,b) e risulta $-(a,b) = (-a,-b)$.

Infatti $(a,b)+(-a,-b) = (-a,-b)+(a,b) = (0,0)$

A4 $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$

M1 $\big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(e,f) = (a,b)\cdot\big((c,d)\cdot(e,f)\big)$

M2 $(1,0)$ è l'elemento neutro per la moltiplicazione

cioè $(a,b)\cdot(1,0) = (1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$

M3 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ esiste il reciproco di (a,b)

e $(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ e risulta

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

M4 $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$.

D $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] = (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$.

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ è detto il campo dei numeri complessi e si denota con $\mathbb{C}$.

Osserv: Sia $\mathbb{C}_0 = \{(a,0) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}$

evidentemente $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$

$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b,0)$$

$$(1,0)\in \mathbb{C}_0.$$

$\mathbb{C}_0$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.

e l'applicazione $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}_0$ $\quad \varphi(a)=(a,0)$

è una bigezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_0$ e $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

Quindi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_0$ si possono identificare

e $(a,b)=(a,0)+(0,b)$

$$=\underbrace{(a,0)}_{a}+\underbrace{(0,1)}_{i}\underbrace{(b,0)}_{b}=a+ib.$$

unità immaginaria

$\boxed{(a,b)=a+ib}$ si chiama forma algebrica dei numeri complessi

$a+ib$ è un'abbreviazione di $(a,0)+(0,1)(b,0)$.

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-(1,0)=-1.$$

Esempio

$$(1+i)(2+3i) = 2+3i+2i+3i^2$$
$$= 2-3+3i+2i$$
$$= -1+5i$$

Se $z = a+ib$ $\quad a = Re(z)$ parte reale

$b) = Im(z)$ parte immaginaria.

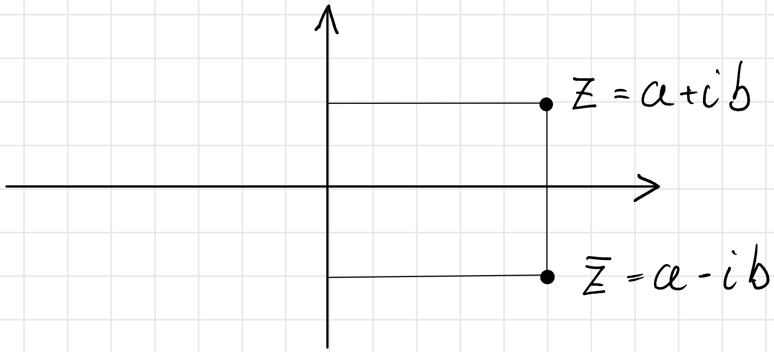
Esempio

$z = 4-7i \implies Re(z) = 4,\ Im(z) = -7$

$z = 2i \implies Re(z) = 0,\ Im(z) = 2$

Def Coniugato di un numero complesso

Se $z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, allora il coniugato di z è $\bar{z} = a-ib$



Quindi $Re(\bar{z}) = Re(z)$ e $Im(\bar{z}) = -Im(z)$

L'operazione di coniugio $z \mapsto \bar{z}$ corrisponde ad una simmetria del piano con asse l'asse reale.

Esempio

Se $z = 2+6i$, allora $\bar{z} = 2-6i$

se $z = -2i$, allora $\bar{z} = 2i$

se $z = 4$, allora $\bar{z} = 4$

Proprietà del coniugio

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

3) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ $\quad \left(2) \text{ e } 3) \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \right)$

4) Se $z = a+ib$, allora $z \cdot \bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib)$
$= a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$.

5) $\bar{\bar{z}} = z$ (è un involuzione)

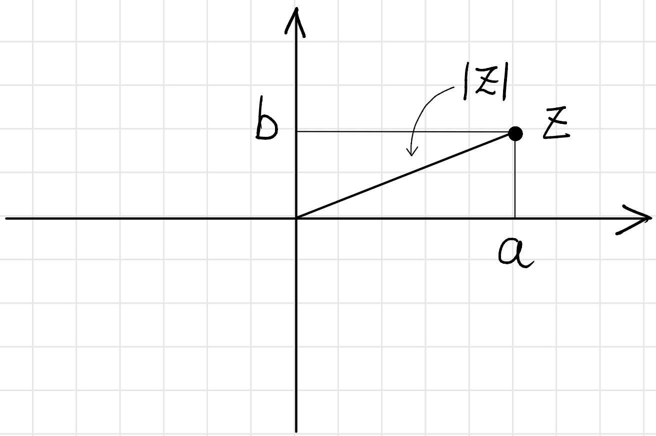
(se $\varphi(z) = \bar{z}$, allora $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\varphi(\varphi(z)) = z$,

perciò φ è bigettiva con inversa φ, cioè $\varphi^{-1} = \varphi$)

Modulo di un numero complesso

Se $z = a + ib$, allora il modulo di z è

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$



è la distanza euclidea del punto z dall'origine.

Esempio

$$z = 1 + i \implies |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Osserv: se $z = a \in \mathbb{R}$, allora $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$

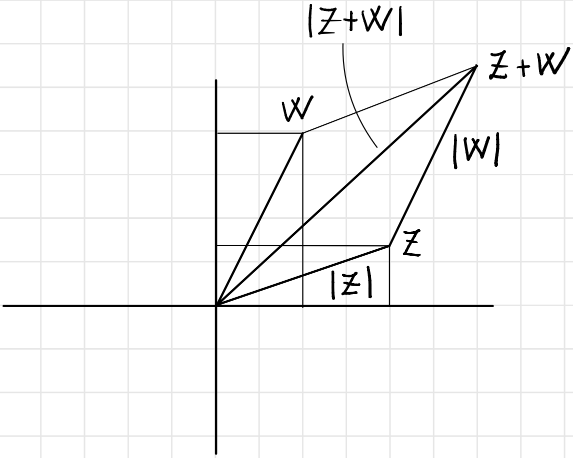
quindi per numeri reali il modulo coincide con il valore assoluto.

Proprietà del modulo

1) $|z| \geq 0$

2) $|z| = 0 \iff z = 0$

3) $|Z+W| \le |Z| + |W|$ (diseguaglianza triangolare)



la lunghezza di un lato di un triangolo è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati.

La 3) si può provare analiticamente nel modo seguente:

$Z = a+ib$ e $W = c+id$,

$$|Z+W| \le |Z|+|W| \iff |Z+W|^2 \le (|Z|+|W|)^2$$

$$\iff |Z+W|^2 \le |Z|^2+|W|^2+2|Z||W|$$

$$\iff (a+c)^2+(b+d)^2 \le a^2+b^2+c^2+d^2+2|Z||W|$$

$$\iff \cancel{2}(ac+bd) \le \cancel{2}|Z||W|$$

$$\Longleftarrow |ac+bd| \le |Z||W|$$

$$\iff (ac+bd)^2 \le |Z|^2|W|^2$$

$$\iff (ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$\iff 2acbd \le a^2d^2+b^2c^2$$

$$\iff 0 \le (ad-bc)^2,$$ che è vera

4) $|z \cdot w| = |z||w|$

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)\overline{(z \cdot w)} = (z \cdot w)(\bar{z} \cdot \bar{w})$$
$$= z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

5) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ $\quad \left(4) \text{ e } 5) \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \right)$

$$|z^{-1}| = \left|\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

Oppure, più direttamente, dalla 4) si ha

$$|z^{-1}| \cdot |z| = |z^{-1} z| = |1| = 1 \Rightarrow |z|^{-1} = |z^{-1}|.$$

<u>Osserv:</u> Se $z = a + ib$ e $w = c + id$

$$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

è la distanza euclidea tra i punti (a,b) e (c,d)