Lezione 44

Calcolo integrale: metodi di integrazione

Metodo di decomposizione in somma (integrazione indefinita)

Sia $f, g : I \to \mathbb{R}$ dotate di primitive e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Allora
$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \underbrace{\underbrace{\alpha \int f(x)\, dx}_{F \in} + \underbrace{\beta \int g(x)\, dx}_{G \in}}$$

$$\alpha F + \beta G$$

Es:

1)
$$\int \frac{x}{1+x}\, dx = \int \frac{1+x-1}{1+x}\, dx = \int 1 - \frac{1}{1+x}\, dx$$
$$= \int 1\, dx - \int \frac{1}{1+x}\, dx$$
$$= x - \log|1+x| + c$$

2)
$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

Ricordiamo la formula

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$$

Integrazione per parti

Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$. Allora

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad (1)$$

Quindi $f\cdot g$ è una primitiva di $\underbrace{f'\cdot g}_{\text{continua}} + \underbrace{f\cdot g'}_{\text{continua}}$ (1)

Abbiamo visto che da questo fatto consegue la seguente

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\boxed{\int f(x)\underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattore differenziale.}} = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

Poi dalla (1) applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\forall a, b \in I: \int_a^b \left(f'(x)\,g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right) dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b$$

e separando gli integrali e riordinando si ha la seguente FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI PER INTEGRALI DEFINITI

$$\forall a,b \in I: \quad \boxed{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{fattore finito}}\, \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattore differenziale.}} = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

Esempi

1) $\int x e^x dx = \int x\, De^x dx = x e^x - \int 1\cdot e^x dx$

$= x e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$

2) $I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n De^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$

$= x^n e^x - n I_{n-1}$

Si ottiene così una formula per ricorrenza.

$I_n = x^n e^x - n I_{n-1} = x^n e^x - n\left(x^{n-1}e^x - (n-1) I_{n-2}\right)$

$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) I_{n-2} \dots$

che permette di risolvere l'integrale notando che $I_0 = e^x$

Per esempio $I_2 = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c$
$$= (x^2 - 2x + 2) e^x + c .$$

3) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, D e^x \, dx = \operatorname{sen} x \, e^x - \int \cos x \, e^x dx$

$$= \operatorname{sen} x \, e^x - \int \cos x \, D e^x \, dx$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot e^x - \left[\cos x \, e^x + \int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx \right]$$
$$= (\operatorname{sen} x - \cos x) e^x - \int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = (\operatorname{sen} x - \cos x) e^x + c$$

$$\Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} e^x + c$$

4) $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \, D \operatorname{sen} x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$
$$= \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \operatorname{sen} x + x}{2} + c$$

5) $$\int_0^{\pi} e^x \cos 3x\, dx = \int_0^{\pi} \cos 3x\, D e^x\, dx$$

$$= \left[\cos 3x \cdot e^x\right]_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cdot e^x\, dx$$

$$= -e^{\pi} - 1 + 3\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x\, D e^x\, dx$$

$$= -(1+e^{\pi}) + 3\left[\operatorname{sen} 3x \cdot e^x\right]_0^{\pi} - 9\int_0^{\pi} \cos 3x \cdot e^x\, dx$$

$$10\int_0^{\pi} e^x \cos 3x\, dx = -(1+e^{\pi})$$

6) $$\underline{I_n} = \int \log^n x\, dx = \int \log^n x\, Dx\, dx$$

$$= x\log^n x - \int x \cdot n \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \underline{x \log^n x - n I_{n-1}}$$

dove $I_0 = x$.

7) $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, D \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \left[\cos x \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1 - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2 dx = \frac{\pi}{4}$$

Integrazione per sostituzione

(cambiamento di variabili negli integrali)

Sia $f \in \mathcal{C}^1(I)$ e $\varphi : J \to I$ di classe $\mathcal{C}^1$

Sia F una primitiva di f. Allora

$$\forall t \in J \quad (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Perciò

$F \circ \varphi$ è una primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (1)

Da questo segue

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\varphi(t)}}$$

Questa formula permette di risolvere l'integrale a sinistra se è noto l'integrale a destra.

Esempi

1) $$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, D\underbrace{\operatorname{sen} x}_{y} = \left(\int y^2 \, dy \right)_{y=\operatorname{sen} x}$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} \right)_{y=\operatorname{sen} x} + c = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

2) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{Dx^2}{\sqrt{1-x^4}} \, dx \overset{y=x^2}{=} \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \right)_{y=x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$$

3) $$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{D\cos x}{\cos x} \, dx = -\left(\int \frac{1}{y} \, dy \right)_{y=\cos x} = -\log|\cos x| + c$$

4) $$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) \, D(\underbrace{ax+b}_{y}) \, dx$$

$$= \frac{1}{a} \left(\int f(y) \, dy \right)_{y=ax+b}.$$

- $$\int \operatorname{sen}(3x-5) \, dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(3x-5) \, D(3x-5) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\int \operatorname{sen} y \, dy \right)_{y=3x-5}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos(3x-5)$$

- $$\int \sqrt{1-4x} \, dx = \int (1-4x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{-4} \int (1-4x)^{\frac{1}{2}} \, D(1-4x) \, dx$$

4) $\int e^{\text{sen}t}\,\text{sen}t\cos t\,dt = \int e^{\text{sen}t}\,\underbrace{\text{sen}t}_{\varphi(t)}\,D\,\text{sen}t\,dt =$

$$= \left(\int e^x x\,dx\right)_{x=\text{sen}t} = \left((x-1)e^x\right)_{x=\text{sen}t} + c$$

$$= (\text{sen}t - 1)\,e^{\text{sen}t} + c.$$

Dalla (1) si ricava anche che se $G(t)$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, allora

$$G(t) = F(\varphi(t)) + c \quad \forall t \in J.$$

Allora se $\varphi : J \to I$ è bigettiva e $\varphi^{-1} : I \to J$ è la sua inversa, si ha

$$\forall x \in I \qquad G(\varphi^{-1}(x)) = F(x) + c \quad \forall x \in I$$

Quindi $G(\varphi^{-1}(x))$ è una primitiva di f.

Questo si può scrivere come segue

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right)_{t=\varphi^{-1}(x)}}$$

Si noti che $\varphi : J \to I$ è di classe C^1 e bigettiva.

Questa seconda formula va nella direzione inversa rispetto alla precedente e permette di risolvere l'integrale $\int f(x)dx$ quando è noto l'integrale $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Esempio

1) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ Si pone $x = \underbrace{\operatorname{sen} t}_{\varphi(t)}$

$\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ è derivabile e bigettiva e l'inversa è $\varphi^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Quindi $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left(\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt\right)_{t=\operatorname{arcsen}x}$$

$$= \left(\int \cos^2 t\,dt\right)_{t=\operatorname{arcsen}x}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} t \cos t + t}{2}\right)_{t=\operatorname{arcsen}x} + c$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x}{2}$$

Per gli integrali definiti, sempre dalla (1) si ha che se $\alpha, \beta \in J$, allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

Si ha quindi la seguente FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx}$$

o con le notazioni che abbiamo usato per gli integrali orientati $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$

Se poi la funzione la funzione φ è bigettiva e se $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\alpha)$, risulta

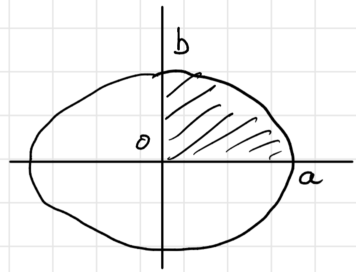
$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

e in notazione compatta $\displaystyle\int_{a}^{b} f = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$

Esempi

1) Calcoliamo l'area di un'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a,b>0.$$



$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$A=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

si fa la sostituzione $x=\underbrace{a\,\mathrm{sen}\,t}_{\varphi(t)}$

$$\varphi'(t)=a\cos t.$$

$$a=\varphi(t)\iff$$

$$\begin{cases} a=\varphi(t) \iff a=a\,\mathrm{sen}\,t \iff \mathrm{sen}\,t=1 \iff t=\frac{\pi}{2} \\ 0=\varphi(t) \iff \mathrm{sen}\,t=0 \iff t=0. \end{cases}$$

$$A=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\;a\cos t\,dt=4b\int_0^{\pi/2}a\cos^2 t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$=4ab\,\frac{\pi}{4}=\pi ab.$$

Consideriamo ora una terza situazione di sostituzione che è una caso particolare della formula $\int f(x)\,dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right)_{t=\varphi^{-1}(x)}$

Supponiamo di voler calcolare un integrale del tipo

$$\int f(x, \psi(x))\,dx \quad \text{con} \quad \psi : I \to J \text{ bigettiva}$$

Allora si fa la sostituzione

$$t = \psi(x) \iff x = \underbrace{\psi^{-1}(t)}_{\varphi(t)}$$

e se ψ^{-1} è di classe $\mathcal{C}^1$, allora

$$\boxed{\int f(x, \psi(x))\,dx = \left(\int f(\psi^{-1}(t), t)\,(\psi^{-1})'(t)\,dt\right)_{t=\psi(x)}}$$

$\psi(\psi^{-1}(t))$

e per gli integrali definiti

$$\boxed{\int_a^b f(x,\psi(x))\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\psi^{-1}(t),t)\,(\psi^{-1})'(t)\,dt}$$

Esempio

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ si usa la sostituzione

$$\underbrace{t=\sqrt{x}}_{\psi(x)} \iff \underbrace{x=t^2}_{\psi^{-1}(t)} \quad (t,x>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left(\int \frac{1}{t+1}\,2t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\left(\int 1-\frac{1}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\left(t-\int\frac{1}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\left(\sqrt{x}-\log(\sqrt{x}+1)\right)+c$$

5) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ si usa la sostituzione

$$\underbrace{t=\sqrt{x-1}}_{\psi(x)} \iff t^2=x-1 \iff x=\underbrace{1+t^2}_{\varphi(t)}$$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left(\int (1+t^2)\,t\;2t\,dt\right)_{t=\sqrt{x-1}}$$

$$= \left(2\int t^2 + t^4\,dt\right)_{t=\sqrt{x-1}}$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)_{t=\sqrt{x-1}}$$

$$= 2\left((x-1)^{3/2} + (x-1)^{5/2}\right) + c$$

6) $\displaystyle\int_1^{16} e^{\sqrt{x}}\,dx$

$$t = \underbrace{\sqrt{x}}_{\varphi(x)} \iff x = \underbrace{t^2}_{\varphi^{-1}(t) = \varphi(t)} \quad (t, x \geq 0)$$

$\varphi'(t) = 2t.$ $\qquad x = 1 \iff t = 1$

$\qquad x = 16 \iff t = 4$

$$\int_1^{16} e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 e^t\,2t\,dt = 2\int_1^4 t\,e^t\,dt$$

$$= 2\left(\left[t\,e^t\right]_1^4 - \int_1^4 e^t\,dt\right)$$

$$= 2\left(4e^4 - e - (e^4 - e)\right)$$

$$= 2(4-1)e^4 = 6e^4.$$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

$$t = \underbrace{\sqrt{e^x-1}}_{\psi(x)} \iff t^2 = e^x - 1 \iff e^x = 1+t^2$$

$$\iff x = \underbrace{\log(1+t^2)}_{\psi^{-1}(t)}$$

$$(\psi^{-1})'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad (x>0 \text{ e } t>0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \left(\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{e^x-1}}$$

$$= 2\left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{e^x-1}}$$

$$= 2\,\operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1}) + c.$$
