Le funzioni iperboliche

$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

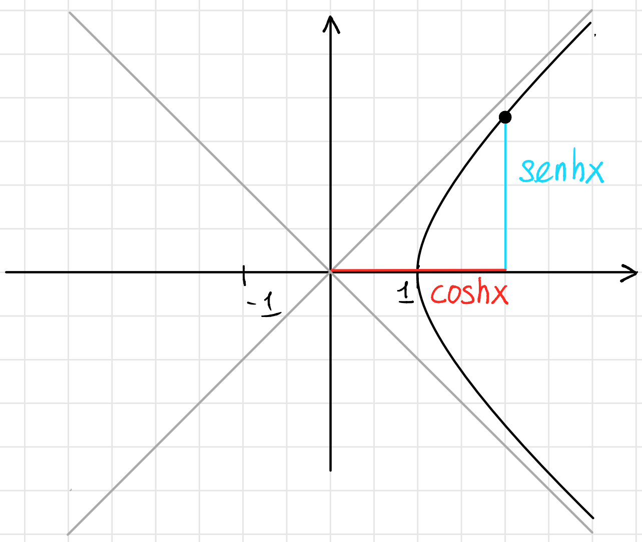
$\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \operatorname{tgh} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Proposizione

(i) senh e tgh sono dispari mentre cosh è pari

(ii) I punti del piano di coordinate $(\cosh x, \operatorname{senh} x)$ descrivono per $x \in \mathbb{R}$ un ramo di iperbole equilatera infatti vale: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$



(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cosh x \geq 1$, $\cosh 0 = 1$

Inoltre $\operatorname{senh} x \geq 0 \iff x \geq 0$ e $\operatorname{senh} 0 = 0$.

$\operatorname{tgh} x \geq 0 \iff x \geq 0$ e $\operatorname{tgh} 0 = 0$.

(IV) La funzione cosh è strett. crescente su $\mathbb{R}_+$ e strett. decrescente su $\mathbb{R}_-$. Le funzioni senh e tgh sono strett. crescenti su $\mathbb{R}$

(V) $\cosh(\mathbb{R}) = [1, \to[$, $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\operatorname{tgh}(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

Dim: La (i) è evidente dalle definizioni. Proviamo le altre.

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \qquad \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \varphi(e^x) \qquad\qquad = \psi(e^x)$$

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \qquad\qquad \psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad\qquad t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

In altri termini $\boxed{\cosh = \varphi \circ \exp}$ e $\boxed{\operatorname{senh} = \psi \circ \exp}$.

$$\varphi(t)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\psi(t)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\right) = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\varphi(t)^2 - \psi(t)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Chiaramente per $t>0$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \geq 0$

ma $\varphi(t)^2 = 1 + \psi(t)^2 \geq 1$

Perciò $\varphi(t) \geq 1$ e anche

$$\varphi(t) = \sqrt{1+\psi(t)^2}$$

Passiamo quindi allo studio di ψ.

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{t}{2} + \left(\frac{-1}{2t}\right)$$

adesso si nota che $\frac{t}{2}$ e $\frac{-1}{2t}$ sono entrambe strett. crescenti e quindi ψ è strett. crescente

Allora $\operatorname{senh} = \psi \circ \exp$ è una composizione di funzioni strett. crescenti e quindi è strett. cresc.

Inoltre $\psi(t) \geq 0 \iff \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \geq 0 \overset{\text{molt. per } 2t>0}{\overbrace{\iff}} t^2 - 1 \geq 0$

$$\iff t^2 \geq 1 \overset{t>0}{\overbrace{\iff}} t \geq 1.$$

Quindi ψ è positiva su $[1, \rightarrow[$ e negativa su $]0, 1]$.

Proviamo che $\varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Sia $y \in \mathbb{R}$ e risolviamo

$$(1) \qquad \varphi(t) = y \qquad (t > 0)$$

Evidentemente

$$(1) \iff t - \frac{1}{t} = 2y \iff t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$$

$$t_{1/2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Si vede che $y - \sqrt{y^2+1} < 0 < y + \sqrt{y^2+1}$

Quindi l'unica soluzione positiva di (1) è

$$t = y + \sqrt{y^2+1}$$

[questo prova anche che $\varphi^{-1}(y) = y + \sqrt{y^2+1}$]

Allora $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \varphi(\exp(\mathbb{R})) = \varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

(Perciò senh è bigettiva e strett. crescente)

Inoltre è chiaro che se $y \geq 0$, allora $y + \sqrt{y^2+1} \geq 1$

Perciò $\varphi([1, \to[) = \mathbb{R}_+$

Dato che $\operatorname{senh} = \psi \circ \exp$, allora

$$\operatorname{senh}^{-1} = \exp^{-1} \circ \psi^{-1} = \log \circ \psi^{-1}, \text{ cioè}$$

La funzione senh^{-1} si chiama settore seno iperbolico e si denota con settsenh. Quindi si ha settsenh $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e

$$\boxed{\operatorname{settsenh}(y) = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$$

Consideriamo φ. Si è visto che

$$\varphi(t) = \sqrt{1 + \psi(t)^2}$$

e che $\psi_{|[1,\to[}$ è bigettiva e $\psi([1,\to[) = \mathbb{R}_+$

Allora $\varphi_{|[1,\to[}$ è strett. crescente in quanto composta di funzioni strett. crescenti

$\left(\psi_{|[1,\to[} : [1,\to[\to \mathbb{R}_+ \; , \; 0 \leq s \mapsto s^2+1, \; \sqrt{\cdot} \right)$

e $\varphi([1,\to[) = [1,\to[$.

Si noti poi che per $y \geq 1$ e $t \geq 1$ risulta

$$\varphi(t) = y \iff \sqrt{1+\psi(t)^2} = y \iff 1+\psi(t)^2 = y^2 \iff \psi(t)^2 = y^2-1$$

$$\overset{\psi(t) \geq 0}{\iff} \psi(t) = \sqrt{y^2-1} \iff t = \psi^{-1}\left(\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\iff t=\sqrt{y^2-1}+\sqrt{(y^2-1)+1} \iff t = y+\sqrt{y^2-1}.$$

Perciò $\left(\varphi_{|[1,\to[}\right)^{-1}: [1,\to[\;\to\; [1,\to[$ e

$$\left(\varphi_{|[1,\to[}\right)^{-1}(y) = y+\sqrt{y^2-1}.$$

Quindi $\cosh(x) = \varphi(e^x)$ è strett. crescente su $[0,\to[$ e

$$\cosh(\mathbb{R}_+) = \varphi(\exp(\mathbb{R}_+)) = \varphi([1,\to[) = [1,\to[$$

Dato che $\cosh_{|\mathbb{R}_+} = \varphi_{|[1,\to[} \circ \exp_{|\mathbb{R}_+}$, allora

$$\left(\cosh_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1} = \left(\exp_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_{|[1,\to[}\right)^{-1}$$

La funzione $\left(\cosh_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$ si chiama settore coseno iperbolico e si indica con settcosh. Quindi $\operatorname{settcosh}: [1,\to[\;\to \mathbb{R}_+$ e

$$\boxed{\operatorname{settcosh}(y) = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}$$

Analizziamo infine la tangente iperbolica.

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\psi(e^x)}{\varphi(e^x)} = \frac{\psi}{\varphi}(e^x).$$

$$\frac{\psi}{\varphi}(t) = \frac{t-1/t}{t+1/t} = \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1-\frac{2}{t^2+1}$$

Quindi $\frac{\psi}{\varphi}$ è strett. crescente. Inoltre

$$\forall t>0 : 0 < \frac{2}{t^2+1} < 2 \Rightarrow -2 < -\frac{2}{t^2+1} < 0 \Rightarrow -1 < 1 - \frac{2}{t^2+1} < 1$$

Quindi $\frac{\psi}{\varphi}(t) \in]-1,1[$.

Inoltre se $y \in]-1,1[$, allora

$$(2) \qquad \frac{\psi}{\varphi}(t) = y \qquad (t>0)$$

$$(2) \iff 1 - \frac{2}{t^2+1} = y \iff 1-y = \frac{2}{t^2+1} \iff t^2+1 = \frac{2}{1-y}$$

$$\iff t^2 = \frac{2}{1-y} - 1 = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\overset{t>0}{\iff} t = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

In definitiva $\frac{\psi}{\varphi}(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

Si noti che $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$.

Allora essendo $\mathrm{tgh} = \frac{\psi}{\varphi} \circ \exp$, risulta

$$\mathrm{tgh}^{-1} = \exp^{-1} \circ \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1} = \log \circ \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-1}.$$

La funzione tgh^{-1} si chiama <u>settore tangente iperbolica</u> e si denota con sett tgh. Quindi

$$\text{sett tgh} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \quad e$$

$$\boxed{\text{sett tgh}(y) = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}}$$

Funzione potenza con esponente razionale

Sia $q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ primi tra loro.
(non sono entrambi pari)

- Se $q > 0$ $(m > 0)$ definiamo

$$P_q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P_q(x) = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

$$P_q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P_q(x) = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{se } n \text{ pari}$$

- Se $q < 0$, $\quad P_q(x) = 1/x^{|q|}$

$$P_q : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad P_q(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{|m|}}} \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

$$P_q : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad P_q(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{|m|}}} \quad \text{se } n \text{ pari}$$

$P_{\frac{3}{5}}(x) = \sqrt[3]{x^5} \quad x \in \mathbb{R} \qquad P_{4/5}(x) = \sqrt[5]{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}$

$P_{3/2}(x) = \sqrt[2]{x^3}, \quad x \geq 0$

$P_{-\frac{3}{5}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \quad x \neq 0, \qquad P_{-4/5}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}, \quad x \in \mathbb{R}^*$

$P_{-3/2}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \quad x > 0$

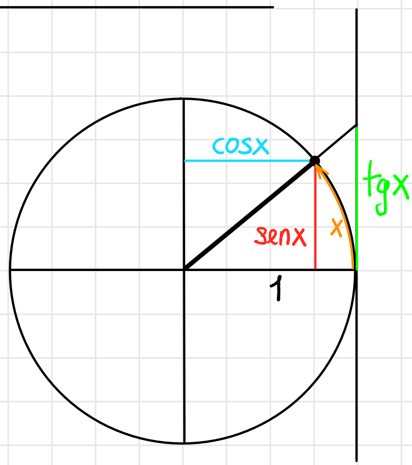
Funzione potenza con esponente irrazionale

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$a > 0 : \quad P_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad P_a(x) = x^a$

$a < 0 : \quad P_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad P_a(x) = \dfrac{1}{x^{|a|}}$

Funzioni trigonometriche.

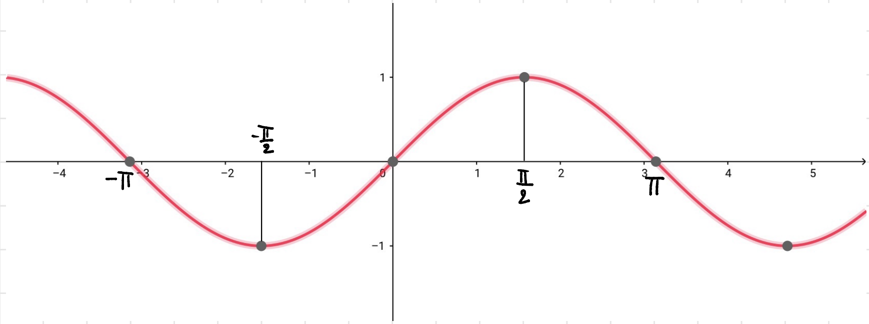


$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

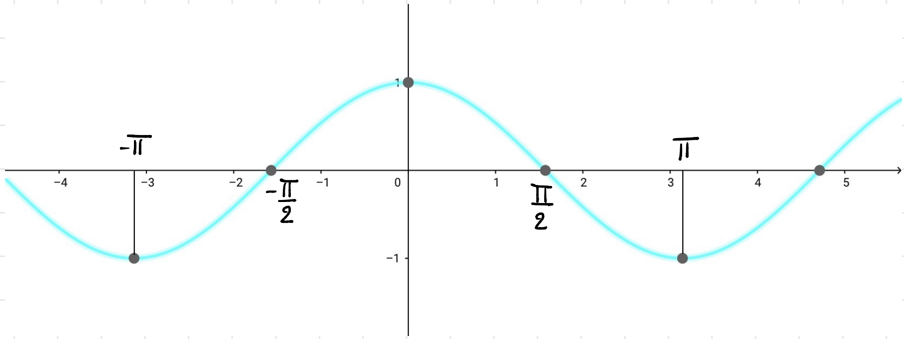
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)}_{\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}} \to \mathbb{R}$

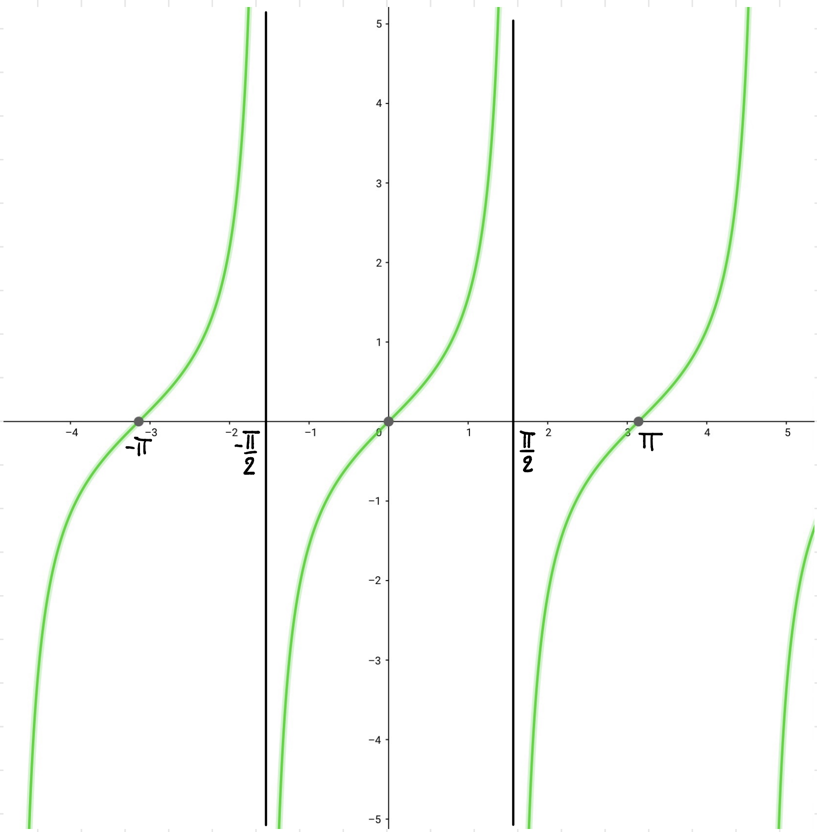
sen



cos

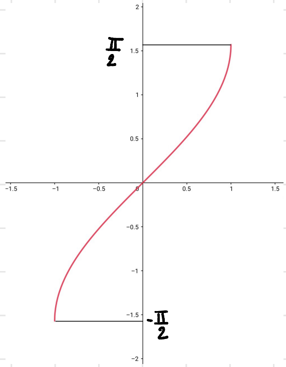


tg



$$\text{arcsen} = \left(\text{sen}|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

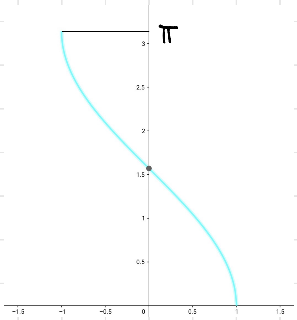
$$\text{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$



arcoseno

$$\text{arccos} = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\text{arccos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

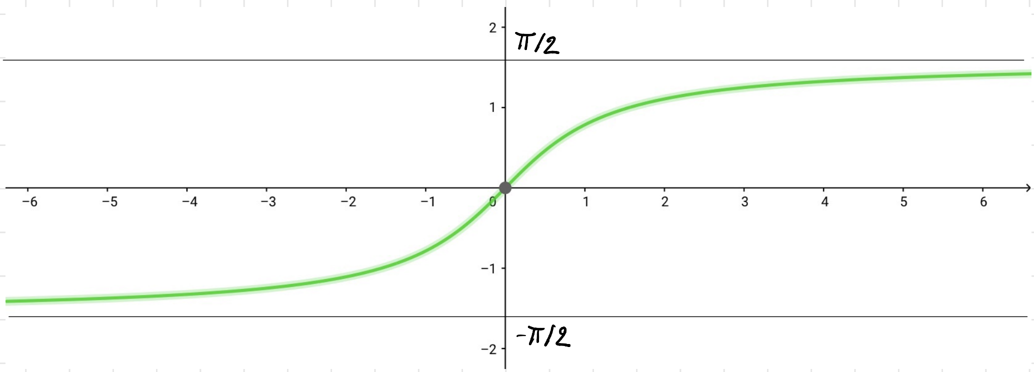


arcocoseno

$$\text{arctg} = \left(\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$$

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

arcotangente



La retta reale ampliata

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \qquad \pm\infty \notin \mathbb{R}$$

Si estende la relazione d'ordine

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < +\infty$

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato è completo

Osserv:

1. $+\infty$ è il massimo di $\overline{\mathbb{R}}$ e $-\infty$ è il minimo di $\overline{\mathbb{R}}$
2. ogni sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ è limitato in $\overline{\mathbb{R}}$ (superiormente e inferiormente).
3. Se $A \subset \mathbb{R}$ allora

   A non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$

   $\iff +\infty$ è l'unico maggiorante di A in $\overline{\mathbb{R}}$

   $\iff \sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = +\infty$

   In generale si omette $\overline{\mathbb{R}}$ a pedice e si scrive

   $\sup A = +\infty$ per dire che A non è l.s. in $\mathbb{R}$.

4. se $A \subset \mathbb{R}$ allora

A non è limitato inferiormente in $\mathbb{R}$

$\iff -\infty$ è l'unico minorante di A in $\overline{\mathbb{R}}$

$\iff \inf_{\overline{\mathbb{R}}} A = -\infty$.

Se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad a \leq b$

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$$

Intervalli di $\overline{\mathbb{R}}$

$$]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > a\}$$
$$[a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq a\}$$

Elementi di topologia della retta numerica reale ampliata.

Definizione (Intorni di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Cominciamo dal caso $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si chiama intorno di x_0 ogni intervallo del tipo

$]x_0 - r, x_0 + r[$ con $r > 0$.

Tra punti di $\mathbb{R}$ si può definire il concetto di distanza

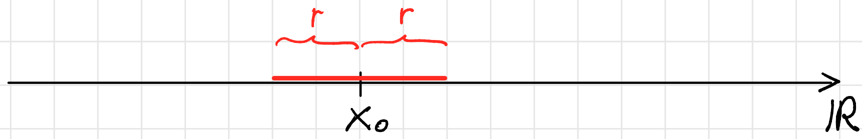
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad d(x,y) = |x-y|.$$

In questo modo si vede che

$$]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{d(x, x_0)}_{|x - x_0|} < r\}$$

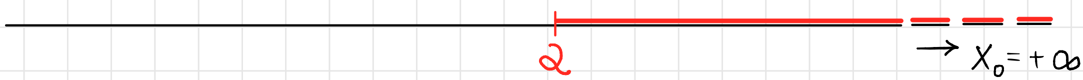
(è la distanza tra x e x_0)

Quindi $]x_0-r, x_0+r[$ è il luogo dei punti di $\mathbb{R}$ la cui distanza da x_0 è minore di r. Per questo motivo l'intervallo $]x_0-r, x_0+r[$ si chiama intorno sferico di centro x_0 e raggio $r>0$ (perchè in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ questo insieme corrisponde rispettivamente a un cerchio e a una sfera di centro x_0 e raggio r) e si denota con $B_r(x_0)$.



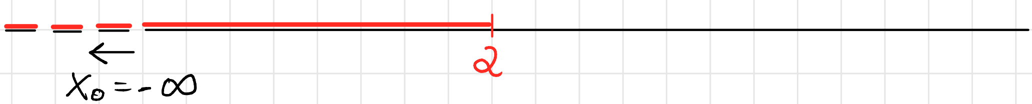
- Caso $x_0 = +\infty$.

  Si chiama <u>intorno di x_0</u> $(=+\infty)$ ogni intervallo di $\overline{\mathbb{R}}$ del tipo $]a,+\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$.

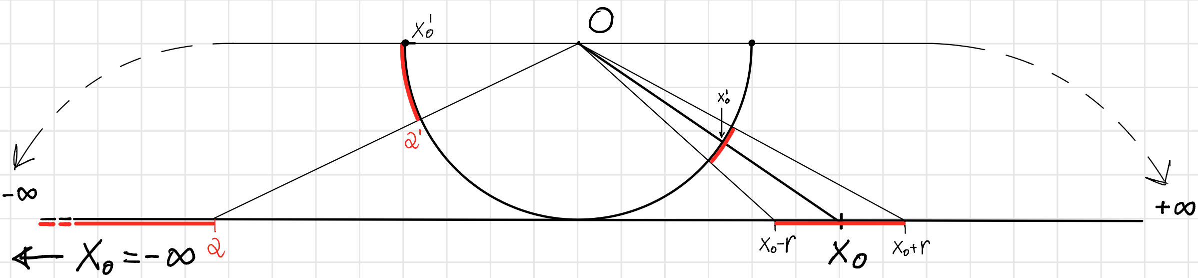


- Caso $x_0 = -\infty$.

  Si chiama <u>intorno di x_0</u> $(=-\infty)$ ogni intervallo di $\overline{\mathbb{R}}$ del tipo $[-\infty, a[$ con $a \in \mathbb{R}$.



Le nozioni di intorno di $+\infty$ e $-\infty$ date sopra si possono giustificare mediante la proiezione stereografica che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra una semicirconferenza aperta (senza gli estremi) e la retta reale $\mathbb{R}$. Questa corrispondenza si può estendere agli estremi della semicirconferenza facendo corrispondere ad essi i punti ideali $+\infty$ e $-\infty$ di $\overline{\mathbb{R}}$

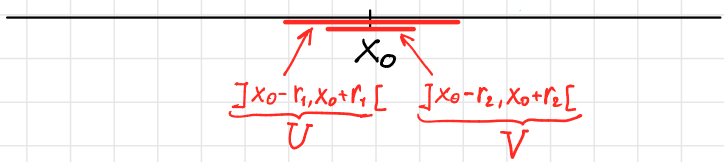


La corrispondenza $x' \leftrightarrow x$ è biunivoca tra la semicirconferenza (con estremi inclusi) e la retta ampliata $\overline{\mathbb{R}}$ dei numeri reali. Inoltre in questa corrispondenza si corrispondono gli intorni (anche se sulla circonferenza gli intorni non sono simmetrici).

Proprietà degli intorni di un punto di $\overline{\mathbb{R}}$

1) Se U è un intorno di x_0, allora $x_0 \in U$

2) Se U e V sono intorni di x_0, allora $U \cap V$ è un intorno di x_0



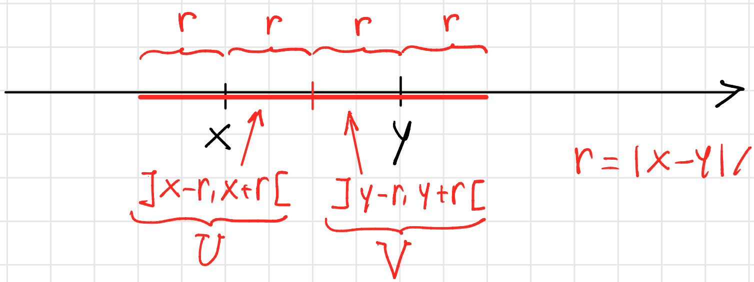
se $r = \min\{r_1, r_2\}$,

$U \cap V =]x_0 - r, x_0 + r[$

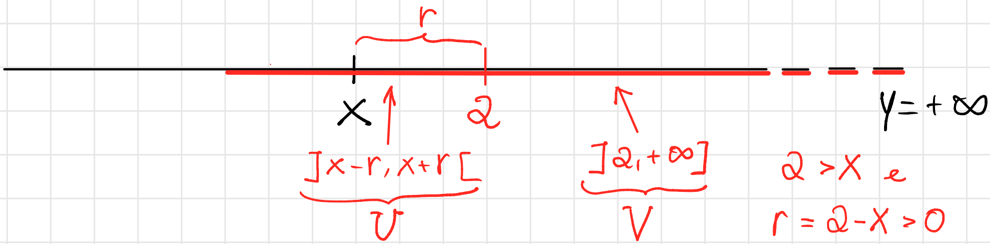
3) (proprietà di separazione)

Se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x \neq y$, allora

$\exists\, U$ intorno di x e $\exists\, V$ intorno di y, t.c. $U \cap V = \emptyset$



$r = |x-y|/2$



$a > x$ e

$r = a - x > 0$

In definitiva ad ogni punto x_0 di $\overline{\mathbb{R}}$ resta associato un sistema di intorni,

$$x_0 \in \mathbb{R} \qquad\qquad x_0 = +\infty \qquad\qquad x_0 = -\infty$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$(]x_0 - r, x_0 + r[)_{r>0}, \quad (]a, +\infty])_{a \in \mathbb{R}}, \quad ([-\infty, a[)_{a \in \mathbb{R}}$$

Questo sistema di intorni serve a stabilire una nozione di vicinanza al punto x_0.

Definizione Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.

si dice che x è aderente ad A se

$$\forall\, V \text{ intorno di } x \;:\; V \cap A \neq \emptyset$$

In altri termini x è aderente ad A se ogni intorno di x_0 contiene qualche elemento di A

x_1 non è aderente ad A perchè c'è un intorno di x_1 che non interseca A, mentre x_2 è aderente ad A perchè ogni intorno di x_2 interseca A.

Esempi: 0 è aderente a $A=\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}^*\}$, $\sqrt{2}$ è aderente a $\mathbb{Q}$

Se A è limitato superiormente, $\sup A$ è aderente ad A.

Definizione

L'insieme dei punti di $\mathbb{R}$ aderenti ad A si chiama aderenza di A o chiusura di A e si denota con $\bar{A}$, quindi $\bar{A}=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall\, V \text{ intorno di } x : V\cap A\neq\emptyset\}$

Esempi: $\overline{]a,b[}=[a,b]$, $\overline{]a,b]}=[a,b]$.

$$A=\{\tfrac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}^*\} \qquad \bar{A}=\{0\}\cup A.$$

Osservazione: se $x\in A$, chiaramente $x\in\bar{A}$ (perché per ogni V intorno di x risulta $x\in V\cap A$) perciò $A\subset\bar{A}$

Definizione

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice chiuso se $A=\bar{A}$

Esempi: $[a,b]$ e $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$.

Attenzione la nozione di chiusura e insiemi chiusi è stata data per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e non di $\overline{\mathbb{R}}$.