Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 05.07.2023

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi. L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode. Per gli studenti con DSA il voto sarà riscalato sul 70% del punteggio massimo (cioè 53 punti).

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti)**.**

a) *Dare la definizione di funzione continua in un punto.*

b) *Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri di Bolzano.*

c) (opzionale – 2 punto). *Mostrare con un controesempio che l'ipotesi di continuità nel teorema degli zeri di Bolzano è necessaria.*

Risposta:

a) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Definizione alternativa</u>: x_0 è pto isolato di A oppure

x_0 è pto di accumulazione per A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora $\exists\, x_0 \in]a, b[$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Dim:

Mediante il metodo di bisezione (si vedano le lezioni 20 e 21), si costruisce una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$ tali che

$$\begin{cases} I_{n+1} \subset I_n & \text{(gli intervalli sono incapsulati)} \\ |I_{n+1}| = \dfrac{|I_n|}{2} \\ f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \end{cases}$$

Allora $|I_n| = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ e perciò per il principio degli intervalli incapsulati $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$

Dato che $a_n, b_n, x_0 \in I_n$, si ha

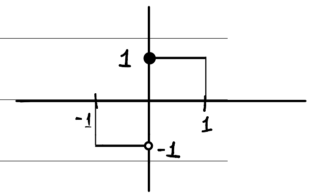
$|a_n - x_0|$, $|b_n - x_0| \leq |I_n| = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ e quindi $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$.

Ora, usando la continuità di f si ha $f(a_n) \to f(x_0)$ e

$f(b_n) \to f(x_0)$ e quindi $f(a_n) \cdot f(b_n) \to f(x_0)^2$.
Ma $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e allora per il teor. di prolungamento delle disuguaglianze si ha $f(x_0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$

c)

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



f non è continua, $f(-1) \cdot f(1) < 0$ ma $\forall x \in [-1,1] \; f(x) \neq 0$.

Domanda 1.2 (7+5 punti). *Sia data la serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{1}$$

a) *Calcolare le somme parziali della serie.*

b) *Studiare il carattere e calcolare la somma della serie.*

c) (opzionale – 2 punti). *Si può dedurre il carattere della serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *a partire dal carattere della serie* (1)*?*

Risposta:

a)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

c) Per confronto si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1+1 = 2$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente e la sua somma è ≤ 2.

Domanda 1.3 (4+4 punti).

a) Sia $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, dispari e diversa da zero. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0$

2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$

~~3)~~ $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

4) *non si può dire nulla.*

b) Cosa si può dire invece di $\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$?

Risposta (dare adeguata giustificazione):

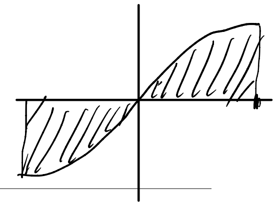
a) Evidentemente $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

Ma tenendo conto che $f(-x) = -f(x)$, si ha $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} -f(-x)dx$

Adesso si effettui la sostituzione $t = -x \iff x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

e poi $x = -1 \iff t = 1$ e $x = 0 \iff t = 0$. Quindi

$$\int_{-1}^{0} -f(-x)dx = \int_{1}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{1} f(t)dt$$



In definitiva $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 0$

b)

f è non nulla e quindi $\exists\, x_0 \in [-1,1]$ tale che $|f(x_0)| > 0$.

Per il teorema della permanenza del segno $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in [-1,1] \cap [x_0-\delta, x_0+\delta] \; : \; |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$$

Allora posto $a = \max\{x_0-\delta, -1\}$ e $b = \min\{x_0+\delta, 1\}$ si ha

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2} \implies \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \geq \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \geq \frac{|f(x_0)|}{2}(b-a) > 0.$$

Domanda 1.4 (3+3+2 punti)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo compatto.*

a) *Cosa vuol dire che f è strettamente crescente? (dare la definizione)*

b) *Supponiamo che f sia strettamente crescente. Allora necessariamente si ha*

1) $\lim_{x\to a} f(x) = \sup_{x\in[a,b[} f(x)$.

2) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

3) $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in[a,b[} f(x)$.

4) $\lim_{x\to b} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

c) *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente, è sempre vero che f è limitata superiormente e inferiormente (se sì, indicare un minorante e un maggiorante)?*

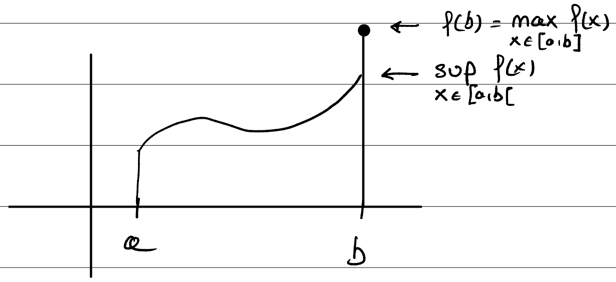
Risposta:

a) $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b] \; : \; x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

b) Per il teorema sui limiti delle funzioni monotone

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ x < b}} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x) .$$

La 1) e la 2) non sono vere per funzioni discontinue in b.



b)

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti)**.** *Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + 2x^\alpha)}{e^{3x} - 1}$$

a) $\alpha = 1$ *e nessun altro valore.*

b) $\alpha \geq 1$

c) $\alpha = 1/2$

d) $\alpha < 1$

Risoluzione: (giustificare la risposta):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^2)}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2}}_{\to 1} \frac{2x^2}{3x} \cdot \underbrace{\frac{3x}{e^{3x}-1}}_{\to 1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3} x^{2-1} = \begin{cases} \frac{2}{3} & 2 = 1 \\ 0 & 2 > 1 \\ +\infty & 2 < 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.2 (8 punti). *Stabilire il carattere della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}}.$$

~~1)~~ *convergente.*

2) *divergente.*

3) *irregolare.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3-n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{n^{3/2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}}_{\to 1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

a_n è asintotica ad una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p > 1$ e perciò per il criterio di confronto asintotico $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente

Esercizio 2.3 (6 punti)**.** *Date le funzioni* $f(x) = \cos x$*,* $g(x) = x^2$ *e* $h(x) = \log x$*. Stabilire l'espressione e il dominio della funzione* $h(g(f(x)))$*.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$h(g(f(x))) = \log \cos^2 x$

L'insieme di definizione è $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 x > 0\}$.

Ma $\cos^2 x > 0 \iff \cos x \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Esercizio 2.4 (12 punti)**.** *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

(*Suggerimento: per sostituzione*).

Risoluzione:

Si pone $e^x = t \iff x = \log t \implies dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \left(\int \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right)_{t=e^x}$$

$$= \left(\operatorname{arctg} t + c\right)_{t=e^x} = \operatorname{arctg} e^x + c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \operatorname{arctg} e^1 - \operatorname{arctg} e^0 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 2.5 (10+4 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \log x$$

e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione degli estremi locali e assoluti.*

b) *studio della derivata seconda e determinazione dei punti di flesso e degli intervalli di convessità e concavità.*

c) (*opzionale* – 3 *punti*) *Stabilire se la funzione f è prolungabile per continuità nel punto* 0 *e se tale prolungamento è derivabile in* 0.

Risoluzione:

a) Il dominio è $A = \,]0, +\infty[$

$$f(x) > 0 \iff \sqrt{x}\log x > 0 \overset{\sqrt{x}>0}{\iff} \log x > 0 \iff x > 1$$

Quindi $x = 1$ è uno zero di f e $f(x) > 0$ in $]1, +\infty[$

e $f(x) < 0$ in $]0, 1[$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\log x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{y \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{y}}\log\frac{1}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log y}{\sqrt{y}} = 0$$ per

la gerarchia degli infiniti.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$ non ci sono asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2} + 1\right)$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\log x}{2} + 1 > 0 \iff \log x > -2 \iff x > e^{-2}$$

f è strett. crescente in $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right[$

e strett. decrescente in $\left]0, \frac{1}{e^2}\right]$

$\frac{1}{e^2}$ è p.to di minimo assoluto e $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e}\cdot\log\frac{1}{e^2} = -\frac{2}{e}$

$$f''(x) = D\left[x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\log x}{2} + 1\right)\right] = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\log x}{2} + 1\right) + x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2x}$$

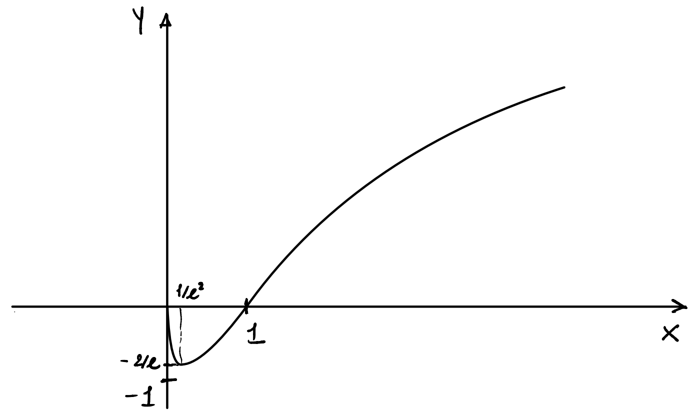
$$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\left(\frac{\log x}{2} + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \frac{\log x}{2}$$

$$f''(x) > 0 \iff \log x < 0 \iff x < 1$$

f è convessa in $]0,1]$ e concava in $[1,+\infty[$

1 è p.to di flesso per f.



c) Dato che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, la funzione è prolungabile per continuità in 0.

Per vedere se è derivabile in 0 basta controllare il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{3/2}} = \frac{(-\infty)}{0^+} = -\infty.$$

Quindi il prolungamento non è derivabile in 0.

Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p\in\mathbb{R}).$
2. $D\operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D\cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D\log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
11. $D\operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D\cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di McLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x\to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x\to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x\to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x\to 0.$
6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x\to 0.$

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
12. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$