Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 18.01.2023 Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Gli studenti con DSA sono esonerati dalle domande con $*$. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi (arrotondando per eccesso). L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode.

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti*)**.**

a) *Dare la definizione di media integrale*

b) *Enunciare a dimostrare il teorema della media integrale.*

c) (opzionale – 2 punti) *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_a^b f = 0$. Cosa si può dire sull'equazione $f(x) = 0$? Giustificare la risposta.*

Risposta:

a) Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile, la media integrale di f su $[a,b]$ è la quantità: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

b) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata integrabile. Posto $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$ risulta $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M$ (1)

Inoltre se f è continua, $\exists c \in [a,b]$ t.c. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$.

<u>Dim:</u> Dalla definizione di m e M : $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$.

Per la proprietà di monotonia dell'integrale

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a)$$

e dividendo per $(b-a)$ si ottiene la (1).

Supponiamo adesso che f sia continua. Per il teorema di Weierstrass f ammette minimo e massimo, quindi m e M sono valori assunti dalla funzione ($\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$). Allora la (1) dice che la media integrale è compresa tra due valori di f e perciò per il teorema dei valori intermedi

$$\exists c \in [a,b] \text{ t.c. } \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$$

c) Siamo nelle ipotesi del teorema (con f continua) quindi

$$\exists c \in [a,b] \text{ t.c. } \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$$

Ma, per ipotesi, $\int_a^b f = 0$ e quindi $f(c) = 0$, cioè l'equazione $f(x) = 0$ ammette soluzioni (la funzione f si annulla in $[a,b]$).

Domanda 1.2 (2+10 punti).

a) *Dare la definizione di punti di massimo e minimo locale per una funzione* $f\colon A \to \mathbb{R}$.

b) *Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.*

c) (opzionale – 2 punti) *Mostrare, fornendo un esempio, che nel teorema di Fermat la condizione che* x_0 *sia interno ad* A *è necessaria, cioè che se* x_0 *è punto di frontiera di* A *allora la regola di Fermat non vale necessariamente.*

Risposta:

a) $x_0 \in A$ è p.to di massimo locale per f se
$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap A_{x_0}$: $f(x) \le f(x_0)$

$x_0 \in A$ è p.to di minimo locale per f se
$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap A_{x_0}$: $f(x) \ge f(x_0)$.

b) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto $x_0 \in \mathring{A}$ (interno di A)
Se x_0 è p.to di minimo o massimo locale per f, allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Dim: Supponiamo che x_0 sia un p.to di minimo locale per f.
Quindi (vedi a)) $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap A_{x_0}$: $f(x) \ge f(x_0)$.

Definiamo $\Phi : A_{x_0} \to \mathbb{R}$ $\quad \Phi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (funzione rapporto increm.)
Dato che f è derivabile in x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} \Phi(x) = f'(x_0) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \Phi(x) = f'(x_0)$$

Ma $\forall x \in U \cap A^-_{x_0}$: $\Phi(x) \le 0$ e $\forall x \in U \cap A^+_{x_0}$: $\Phi(x) \ge 0$
(perché il numeratore di $\Phi(x)$ è sempre positivo, ma il denominatore cambia segno a seconda che x sia minore o maggiore di x_0)

Perciò, per il teor. di prolungamento delle disuguaglianze deve essere $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$ e quindi $f'(x_0) = 0$.

c) Per la funzione $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, risulta che 0 e 1 sono p.ti di minimo e massimo (assoluti e quindi anche locali), ma $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Domanda 1.3 (3+7 punti).

a) Enunciare il teorema degli zeri di Bolzano.

b) Sia $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Indicare in quale delle seguenti situazioni f ha certamente uno zero in $[0, +\infty[$.

~~1)~~ $f(0) = -2$ *e* $\sup f = 1$
2) $\inf f = 0$ *e* $\sup f = 1$
3) $f(0) = -1$ *e* $\sup f = 0$
4) *nessuna delle precedenti.*

Risposta (giustificare con precisione la scelta):

a) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists\, c \in]a,b[$ t.c. $f(c) = 0$

Oppure anche: Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua con A intervallo e $a, b \in A$, $a < b$. Allora $\exists\, c \in]a,b[$ t.c. $f(c) = 0$.

b) Nel caso 1), dato che $\sup f = 1 > 0$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, $\exists\, b \in]0, +\infty[$ t.c. $f(b) > 0$.

Quindi $f_{|[0,b]}: [0,b] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(0) \cdot f(b) < 0$.

Perciò per il teor. degli zeri $\exists\, c \in]0,b[$ t.c. $f(c) = 0$.

Domanda 1.4 (3+3 punti).

a) *Dare la definizione di serie convergente.*

b) *Dare la definizione di serie assolutamente convergente.*

c) (extra – 1 punti) *Dare un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente.*

Risposta:

a) Una serie $\sum a_n$ è convergente se la successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ delle sue somme parziali è convergente.

b) La serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum |a_n|$ è convergente

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la serie armonica, che diverge.

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} & se \ -2 < x < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha+x)e}} & se \ x \geq 0, \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione è continua.

a) $\alpha = 2$

b) $\alpha = e$

~~c)~~ X $\alpha = 1$

d) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione: (giustificare la risposta):

La funzione f è definita a tratti con "pezzi" che sono continui (essendo composte di funzioni continue)

Si tratta di verificare la continuità in 0, cioè

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{(\alpha+x)e}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha e}} = f(0)$$

Quindi $f(0-) = f(0+) \iff \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha e}} \iff \alpha = 1.$

Esercizio 2.2 (8 punti*). *Stabilire il carattere della serie numerica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}\log(1+1/n)}$.

X *convergente.*

b) *divergente.*

c) *irregolare.*

d) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$a_n = \frac{1}{n^{5/2}\log(1+1/n)} = \frac{1}{n^{5/2}} \cdot \frac{1}{1/n} \cdot \frac{1/n}{\log(1+1/n)}$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \underbrace{\frac{1/n}{\log(1+1/n)}}_{\to 1} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (3/2 > 1)$$

La serie è asintotica ad una serie armonica generalizzata con esponente > 1 e quindi, per il criterio di confronto asintotico, è convergente

Esercizio 2.3 (6 punti*). *Sia* $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = \dfrac{2x+7}{5x}$. *Indicare quale delle seguenti affermazioni è vera*

1) $\inf A = -\infty$ *e* $\sup A = +\infty$

X $\inf A = 2/5$ *e* $\sup A = +\infty$.

3) $\inf A = 0$ *e* $\sup A = 7/5$.

4) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$f(x) = \frac{2x+7}{5x} = \frac{2}{5} + \frac{7}{5x}$$

Quindi la funzione è decrescente e per il teorema sui limiti unilaterali delle funzioni monotone

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sup f \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f.$$

Ma $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{5x} \right) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{5x} \right) = \frac{2}{5}$$

Perciò $\sup f = +\infty$ e $\inf f = \frac{2}{5}$.

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} dx$$

Risoluzione:

Per sostituzione : $t = e^x \iff x = \log t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

Inoltre: $x = 0 \iff t = 1$ e $x = 1 \iff t = e$.

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t+\frac{4}{t}}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t^2+4}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^e \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{D(t/2)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_1^e$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{e}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$$

Oppure si calcola prima l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \left(\int \frac{1}{t+4/t}\cdot\frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{1}{t^2+4}\,dt\right)_{t=e^x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\int \frac{D(t/2)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)_{t=e^x} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{e}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$$

Si noti che vale l'identità $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{x_1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x_2}$

Per cui è anche corretto $\boxed{\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{e}{2}\right)}$

Esercizio 2.5 (14 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x-2)^2 \log(x-2).$$

In particolare si richiede:

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione dei punti di massimo e minimo, studio della derivata seconda e determinazione di intervalli di convessità e concavità e dei punti di flesso, infine di tracciarne il grafico.*

b) (opzionale – 3 punti) *Stabilire se la funzione f è prolungabile per continuità nel punto 2 e se tale prolungamento è derivabile in 2*

Risoluzione:

a) Dominio $x-2>0 \iff x>2 \Rightarrow A=]2,+\infty[$.

Segno $f(x)>0 \iff \log(x-2)>0 \iff x-2>1 \iff x>3$.

Zeri: $f(3)=0$

Limiti ai punti di frontiera e asintoti

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^2\log(x-2)=\lim_{y\to 0^+}y^2\log y=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(x-2)^2\log(x-2)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2\log(x-2)}{x}=+\infty \quad \text{(non ci sono asintoti).}$$

(si è usato il limite notevole $\lim_{y\to 0}y^p\log y=0,\ p>0$)

Derivata prima e monotonia

$$f'(x)=2(x-2)\log(x-2)+(x-2)^2\cdot\frac{1}{x-2}=\boxed{\underbrace{(x-2)}_{>0}(2\log(x-2)+1)}$$

Dato che $x-2>0\ \forall x\in A$, si ha

$$f'(x)>0 \iff 2\log(x-2)+1>0 \iff \log(x-2)>-1/2$$

$$\iff x-2>e^{-1/2} \iff x>\underbrace{2+\frac{1}{\sqrt{e}}}_{\text{è compreso tra 2 e 3}}$$

Allora si ha che:

• f è strett. crescente nell'intervallo $[2+\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$

• f è strett. decrescente nell'intervallo $]0, 2+\frac{1}{\sqrt{e}}]$

Quindi $x_1 = 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$ è punto di minimo assoluto per f.

Derivata seconda e convessità/concavità/flessi.

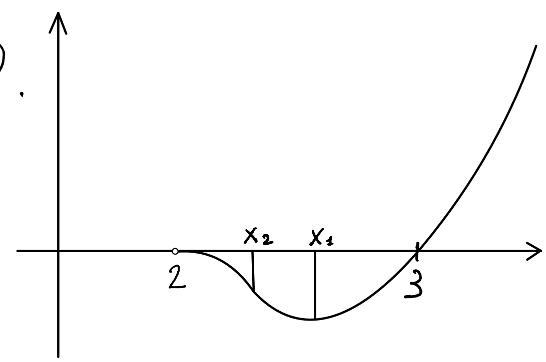
$$f''(x) = \left(2\log(x-2)+1\right) + (x-2)\frac{2}{x-2} = 2\log(x-2)+3$$

$$f''(x) > 0 \iff 2\log(x-2)+3>0 \iff \log(x-2) > -3/2$$

$$\iff x-2 > e^{-3/2} \iff x > \underbrace{2+\frac{1}{\sqrt{e^3}}}_{\text{è più piccolo di } 2+\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Quindi f è convessa in $[2+\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty[$ e concava in $]0, 2+\frac{1}{\sqrt{e^3}}]$

Il punto $x_2 = 2+\frac{1}{\sqrt{e^3}}$ è di flesso per f.



b) Dato che $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$,

f è prolungabile per continuità in 2

ponendo $\bar{f}: [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x>2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$

Poi $\lim_{x\to 2^+} \bar{f}'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)\, 2\log(x-2) + x-2 = 0$

Perciò $\bar{f}$ è derivabile in 2 e $\bar{f}'(2) = 0$.

Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p \in \mathbb{R}).$
2. $D \operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D \cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D \log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$
11. $D \operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D \cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di MacLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0.$
6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0.$

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
12. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$