Lezione 43

Integrale orientato

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile sec. R. su I.

$$\forall a,b \in I: \quad \int_a^b f = \begin{cases} \int_a^b f_{|[a,b]} & \text{se } a<b \\ 0 & \text{se } a=b \\ -\int_b^a f_{|[b,a]} & \text{se } b<a \end{cases}$$

Osserv:

(i) $\forall a,b \in I \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \alpha = \alpha \underbrace{(b-a)}_{\text{segno di percorrenza.}}$

se $a \leq b$ è ovvia. se $a>b$: $\int_a^b \alpha = -\int_b^a \alpha = -\alpha(a-b) = \alpha(b-a)$.

(ii) $\forall a,b,c \in I: \quad \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

(es: $b<a<c$: $\int_a^b f + \int_b^c f = -\int_b^a f + \int_b^c = \int_a^c f$)

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su I e $a \in I$. La funzione

$$F: I \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f$$

si chiama funzione integrale della funzione f di punto iniziale a

Osserv: $\boxed{\forall\, x, y \in I \qquad F(y) - F(x) = \int_x^y f}$

Infatti $\int_a^y f = \int_a^x f + \int_x^y f$

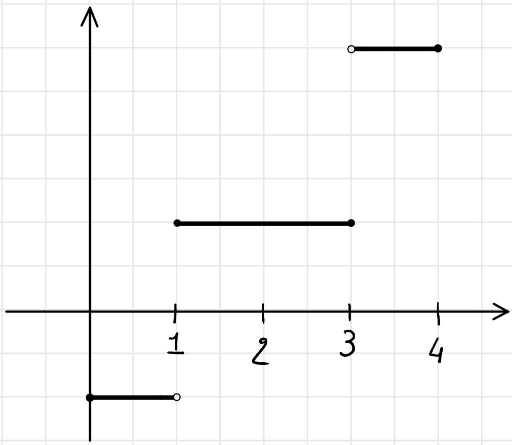
e quindi $F(y) = F(x) + \int_x^y f$, da cui segue la tesi.

Perciò la differenza tra due valori di una funzione integrale non dipende dal punto iniziale

Esempio

Calcoliamo la funzione integrale $F_2(x)$ della funzione $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \in [1,3] \\ 3 & \text{se } x \in]3,4] \end{cases}$$



$$\boxed{F(x) = \int_2^x f \qquad \forall\, x \in [0,4]}$$

- Se $x \in [0,1[$:

$$F_2(x) = \int_2^x f = \int_2^1 f + \int_1^x f = -\int_1^2 f - \int_x^1 f$$

$$= -\int_1^2 1 - \int_x^1 (-1) = -1(2-1) - (-1)(1-x) = -1+1-x = -x$$

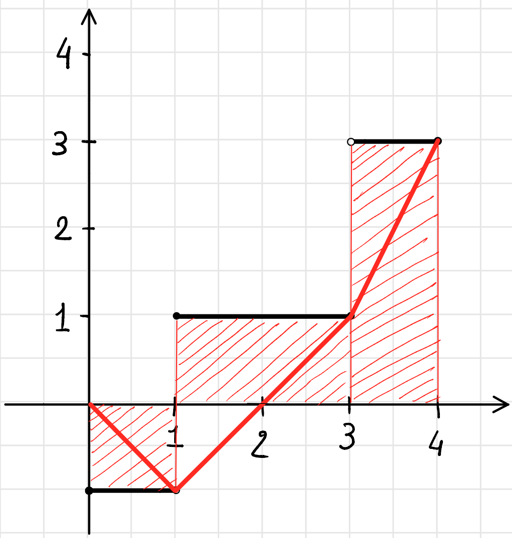
• Se $x \in [1,3]$:

$$F(x) = \int_2^x f = \int_2^x 1 = 1(x-2) = x-2.$$

• Se $x \in]3,4]$: $F(x) = \int_2^x f = \int_2^3 f + \int_3^x f = \int_2^3 1 + \int_3^x 3$

$$= 1(3-2) + 3(x-3)$$

$$= 1 + 3x - 9 = 3x-8.$$



In definitiva

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [0,1[\\ x-2 & \text{se } x \in [1,3] \\ 3x-8 & \text{se } x \in]3,4] \end{cases}$$

Osserv: (sul teorema della media integrale)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall a,b \in I, a \neq b$ esiste c compreso tra a e b tale che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$

Infatti se $b < a$ (se $a < b$ è già visto) esiste $c \in [b,a]$ tale che $\frac{1}{a-b}\int_b^a f = f(c)$, ma $\int_a^b f = -\int_b^a f$ e quindi segue la tesi.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile e F una sua funzione integrale di punto iniziale arbitrario. Allora

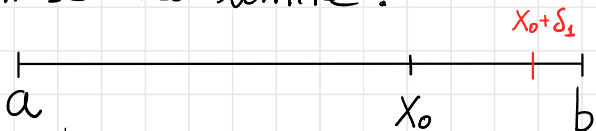
(i) F è continua su I

(ii) se f è continua su I, allora F è derivabile in I e $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

Dim: (i) Sia $x_0 \in I$. Si tratta di provare che

$$\lim_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

Proviamo solo il secondo limite.



Supponiamo quindi che $x_0 < b$.

(dove a, b sono gli estremi di I). Sia $\delta_1 > 0$ t.c. $x_0 + \delta_1 < b$.

Dato che f è limitata su $[x_0, x_0+\delta_1]$, esiste $M > 0$ t.c.

$$\forall x \in [x_0, x_0+\delta_1]: \quad |f(x)| \leq M.$$

Allora

$$\forall x \in [x_0, x_0+\delta_1] : \ |F(x)-F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f| \leq \int_{x_0}^{x} M = \underbrace{M|x-x_0|}_{<\varepsilon}$$

$\Longleftrightarrow |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{M}$

Quindi se $\varepsilon > 0$, si definisce

$$\delta = \min\left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$$

e risulta che

$$\forall x \in [x_0, x_0+\delta[\ : \ |F(x)-F(x_0)| \leq M|x-x_0| < M\delta \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Questo prova che $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

(ii) Sia $x \in I$ e $h \neq 0$ t.c. $x+h \in I$.

Allora $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f = f(c_h)$, con $|c_h - x| \leq h$

$f(c_h) \to f(x)$.

per il teorema della media integrale (osserv. prec.)

Quindi $c_h \to x$ per $h \to 0$ e f continua in x

$$\Rightarrow f(c_h) \to f(x)$$

Perciò abbiamo dimostrato che F è derivabile

e $F'(x) = f(x)$. $\square$

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo qualunque)

Si chiama primitiva di f in I una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e tale che $\forall x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

Corollario 1 Ogni funzione continua in un intervallo ammette una primitiva

Dim: basta considerare la funzione integrale.

Osserv: ci sono funzioni discontinue che ammettono primitive.

Sia $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

e $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Si vede che F è derivabile in $\mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = f(x)$, ma f è discontinua in 0.

Proposizione 1 Se F e G sono due primitive di f in I, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + c \ \forall x \in I$.

In altri termini due primitive di f in I differiscono per una costante

Dim: Poniamo $H = G - F$. Allora $H'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ e quindi H è costante.

[se $x, y \in I$, per il teorema di Lagrange esiste c compreso tra x e y tale che $H(x) - H(y) = H'(c)(x - y) = 0$ quindi H è costante]

Perciò $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in I \ H(x) = c$

e quindi $\forall x \in I \ F(x) - G(x) = c$ $\square$

Osserv: Sia F una primitiva di f in I. Allora tutte le altre primitive di f in I sono del tipo

$$F(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

In altri termini

$G : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in I

$\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + c$.

Corollario 2

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e $F: I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in I. Allora

$$\forall\, a, b \in I: \quad \boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

La differenza $F(b) - F(a)$ si indica con una delle seguenti notazioni

$$[F(x)]_a^b \qquad F(x)\Big|_a^b$$

Dim: Sia $G(x) = \int_a^x f$ la funzione integrale di f.

Allora F e G sono due primitive di f in I

Quindi, per la Proposizione 1, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I.$$

Allora

$$\forall\, a, b \in I: \quad F(b) - F(a) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = G(b) = \int_a^b f$$

Esempio

1) Calcoliamo $\displaystyle\int_3^4 e^{2x}\,dx$

devo trovare una primitiva di e^{2x}

Evidentemente è $\frac{1}{2}e^{2x}$

Perciò $\displaystyle\int_3^4 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(e^8 - e^6)$

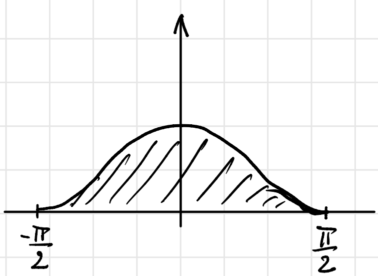
2) Calcoliamo $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

Una primitiva è $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$

Quindi $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen}\pi}{4} - \frac{\operatorname{sen}(-\pi)}{4} = \frac{\pi}{2}$$



Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si chiama integrale indefinito di f, l'insieme di tutte le primitive di f in I e si indica con

$$\int f(x)\,dx$$

Quindi

$$\int f(x)\,dx = \left\{ F: I \to \mathbb{R} \mid F \text{ deriv. in } I \text{ e } \forall x \in I: F'(x) = f(x) \right\}$$

Se F è una primitiva di f, abbiamo visto che tutte le altre si scrivono come

$$F(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Perciò

$$\int f(x)\,dx = \left\{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Più brevemente si scrive

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

Elenco di integrali indefiniti immediati

1) se $\alpha \neq 0$, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

- sull'intervallo $]0,+\infty[$ $\log|x| = \log x$ e risulta

$D \log x = \frac{1}{x}$

- sull'intervallo $]-\infty,0[$ $\log|x| = \log(-x)$ e risulta

$D \log(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

Quindi $\log|x|$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ su $]0,+\infty[$ e su $]-\infty,0[$

3) $\int e^x dx = e^x + c$

4) se $a>0$ e $a \neq 1$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

5) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

6) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int 1 + tg\, x^2\, dx = tg\, x + c$

8) $\int \frac{1}{sen^2 x}\, dx = -cotg\, x + c$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsen\, x + c$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctg\, x + c$

11) $\int senh\, x\, dx = cosh\, x + c$

12) $\int cosh\, x\, dx = senh\, x + c$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = sett\, senh + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = sett\, cosh + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c$

Integrazione per parti

Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$. Allora

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \qquad (1)$$

Quindi $f\cdot g$ è una primitiva di $\underbrace{f'\cdot g}_{\text{continua}} + \underbrace{f\cdot g'}_{\text{continua}}$

Allora dalla (1) segue che H è una primitiva di $f'\cdot g$, allora $f\cdot g - H$ è una primitiva di $f\cdot g'$.
Infatti,

$$(f\cdot g - H)' = (f\cdot g)' - H' = (f\cdot g) - f'\cdot g \overset{(1)}{=} f\cdot g'$$

Perciò si ha la seguente

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\boxed{\int f(x)\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattore differenziale.}} = f(x)\cdot g(x) - \underbrace{\int f'(x)\,g(x)\,dx}_{H\in}}$$

Esempi

1) $$\int x^{\alpha} \log x \, dx = \int \log x \, D\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \, dx \qquad \alpha \neq -1$$

$$= (\log x)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \, dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \log x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha} dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \log x - \frac{x^{\alpha}}{(\alpha+1)^2} + c$$

Notiamo che per il caso $\alpha = 0$

$$\int \log x \, dx = \int \log x \underbrace{Dx}_{1} \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx$$

$$= x \log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

2) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \int D e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int D e^x \cos x \, dx$$
$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right]$$
$$= e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c$$
$$\Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + c$$

Integrazione per sostituzione

(cambiamento di variabili negli integrali)

Sia $f \in \mathcal{C}^1(I)$ e $\varphi : J \to I$ di classe $\mathcal{C}^1$

Sia F una primitiva di f. Allora

$\forall t \in J \quad (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

Perciò

$F \circ \varphi$ è una primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (2)

e quindi

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + c$$

ma $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Perciò si può scrivere la seguente

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\varphi(t)}}$$

Formalmente si ha $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$

$$\int f(\boxed{\varphi(t)})\,\boxed{\varphi'(t)\,dt} \underbrace{=}_{x=\varphi(t)} \left(\int f(\boxed{x})\,\boxed{dx}\right)_{x=\varphi(t)}$$

Si pone $x=\varphi(t)$ e $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$

Esempio

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\, D\underbrace{\operatorname{sen} x}_{y} = \left(\int y^2\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x}$$

$$= \left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=\operatorname{sen}x} + c = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

$\xrightarrow{\text{continua}}$ lezione seguente