Lezione 34

Funzioni convesse
- Disuguaglianze
- Ottimizzazione

Esempio

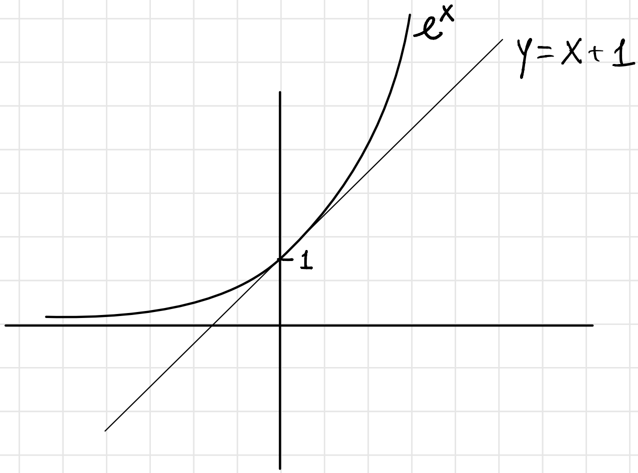
1) $f(x) = e^x$ è strett. convessa, perché

$$f''(x) = e^x > 0$$

Dalla proprietà $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

se si prende $x_0 = 0$, si ha

$$e^x \geq e^0 + e^0 (x - 0) = 1 + x$$



Da questa si ricava

$e^{x-1} \geq x$ e passando

ai logaritmi per $x > 0$

$$\log x \leq x - 1$$

Disuguaglianza di Young

Siano $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (es. $p = q = 2$)

Allora
$$\boxed{a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} a^q}$$

Dim: basta considerare il caso $a > 0$ e $b > 0$, perchè se uno dei due è zero la disuguaglianza è ovvia.

Allora, se $a > 0$ e $b > 0$, prendendo i logaritmi di ambo i membri, la disuguaglianza è equivalente a

$$\log(a \cdot b) \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} a^q\right)$$

$$\iff \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \log a + \log b$$

ma questa è vera perchè log è una funzione concava. Infatti, essendo $1/p + 1/q = 1$,

$$\log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q$$

$$= \log a + \log b$$

MINIMI DI FUNZIONI CONVESSE

Corollario 2

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e convessa.
Se $x_0 \in I$ è p.to stazionario per f (cioè $f'(x_0) = 0$), allora x_0 è p.to di minimo globale per f.

Dim: Dal teorema sui criteri di convessità, risulta

$$\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) = f(x_0).$$

Quindi $\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0)$, cioè x_0 è p.to di minimo globale per f. $\square$

Teorema (sugli estremi di funzioni convesse)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ convessa e $x_0 \in I$. Allora i punti di minimo locale per f sono punti di minimo globale per f

Dim: Sia x_0 un punto di minimo locale per f e proviamo che è un punto di minimo globale

Sia $y \in I$ (e proviamo che $f(y) \geq f(x_0)$).

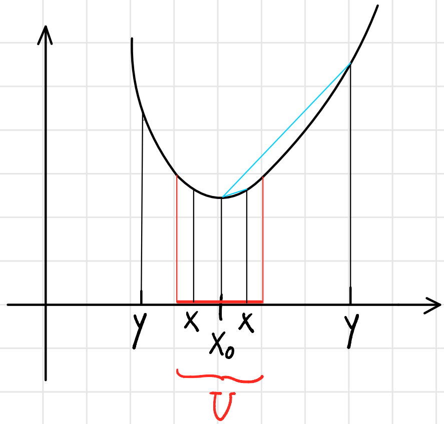
Dato che x_0 è p.to di minimo locale per f, esiste U intorno di x_0 tale che:

$$\forall x \in U \cap I_{x_0} : f(x) \geq f(x_0)$$

Consideriamo 2 casi.

1. Se $y > x_0$, allora prendiamo $x \in U \cap I^+_{x_0}$ in modo che

$$x_0 < x < y$$



Allora $R(x_0, x) \leq R(x_0, y)$

e quindi

$$0 \leq \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{\underbrace{y-x_0}_{>0}} \Rightarrow f(y) \geq f(x_0)$$

– Se $y < x_0$, prendiamo

$x \in U^-_{x_0}$ in modo che $y < x < x_0$

Allora $R(x_0, y) \leq R(x_0, x)$ e quindi

$$\frac{f(x_0)-f(y)}{\underbrace{x_0-y}_{>0}} \leq \frac{\overbrace{f(x_0)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_0-x}_{>0}} \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x_0)$$

□

<u>Ricapitolazione regole</u>

per lo studio di funzione

f continua in I

f derivabile in $\mathring{I}$

1) f crescente (decrescente) in $I \iff \forall x \in \mathring{I} : f'(x) \geq 0$
(≤ 0)

2) $\left.\begin{cases} \forall x \in \mathring{I} : f'(x) \geq 0 \\ \{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\} \text{ non contiene intervalli} \end{cases}\right\} \iff f$ strett. crescente

f è crescente se non fosse strett. cresc., allora

$\exists x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$

$\forall x \in [x_1, x_2] \quad f(x_1) \leq f(x) = f(x_2)$

f è costante su $[x_1, x_2]$

$\forall x \in]x_1, x_2[\quad f'(x) = 0$

Viceversa, se f è strett. cresc. in I, allora

- $\forall x \in \mathring{I} \quad f'(x) \geq 0$

se $\exists]x_1, x_2[$ t.c. $f'(x) = 0 \ \forall x \in]x_1, x_2[$, allora

f è costante su $[x_1, x_2]$, quindi f non è strett. cresc.

3) f è convessa (concava) in $I \iff f'$ crescente in I (decrescente)

4) f è strett. convessa (concava) in $I \iff f'$ è strett. crescente in I (concava)

Se f è di classe $\mathcal{C}^1$ su I e f è derivabile due volte in $\mathring{I}$

5) f è convessa (concava) in $I \iff \forall x \in \mathring{I} : f''(x) \geq 0$

6) f è strett. convessa (concava) in $I \iff \begin{cases} \forall x \in \mathring{I} \ f''(x) \geq 0 \\ \{x \in \mathring{I} \mid f''(x) = 0\} \text{ non contiene intervalli} \end{cases}$

7) x_0 p.to di flesso $\iff$ f' è strett crescente (decr.) in $]x_0 - \delta, x_0]$ e strett. decresc. (crescente) in $[x_0, x_0 + \delta[$.

8) x_0 p.to di flesso $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

9) $\begin{cases} f''(x) > 0 \ (<) \text{ in }]x_0 - \delta, x_0[\\ f''(x) < 0 \ (>0) \text{ in }]x_0, x_0 + \delta[\end{cases} \Rightarrow x_0$ p.to di flesso.

Studio di funzione

L'obiettivo è disegnare un grafico approssimativo di una funzione.

1) Dominio e continuità (o discontinuità)
2) positività e zeri, simmetrie (pari, dispari) periodicità
3) limiti agli estremi del dominio e ai punti di frontiera del dominio (asintoti verticali, o discontinuità eliminabili), asintoti
4) derivabilità e derivata prima (eventuali punti angolosi)
5) intervalli di monotonia e punti di estremo locali e assoluti.
6) convessità, concavità e flessi

Esercizi

1 Studiare la funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{x} =$$

1.1) Il dominio è $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f è continua in A perchè somma di funzioni continue.

1.2) $f(x) > 0 \iff \frac{x^2+1}{x} > 0 \iff x > 0$

$f > 0$ in $]0,+\infty[$ e $f < 0$ in $]-\infty, 0[$

non ci sono zeri.

f è dispari perchè

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

Quindi si può studiare f solo nell'intervallo $]0,+\infty[$. (il grafico in $]-\infty, 0[$ si ottiene per simmetria rispetto all'origine).

1.3) $\lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty$.

$x = 0$ è un asintoto verticale

Dato che $f(x) = x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } x \to +\infty}}$

allora $y = x$ è un asintoto obliquo a destra

1.4) f è derivabile in $\mathbb{R}^*$ perché è somma di funzioni derivabili e

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

1.5) $f'(x) > 0 \iff \frac{1}{x^2} < 1 \iff x^2 > 1$

$$\iff x < -1 \text{ e } x > 1 .$$

f'	$+$	-1	$-$	0	$-$	1	$+$

perciò

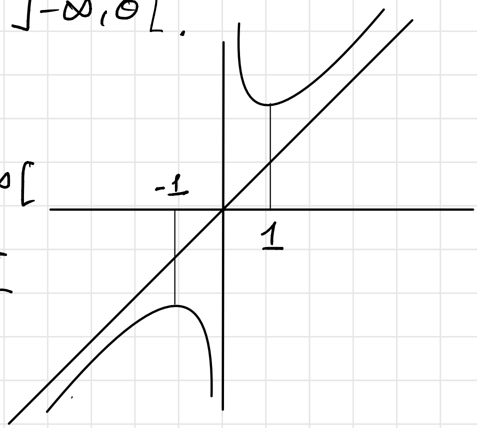
- f è strett. crescente in $]-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty[$
- f è strett. decrescente in $[-1, 0[$ e in $]0, 1]$
- -1 è p.to di massimo relativo proprio e
  1 è p.to di minimo relativo proprio.

1.6) Dall'espressione della derivata prima dato che x^2 è strett. cresc. in $]0,+\infty[$ e strett. decresc. in $]-\infty,0[$, allora si ha che f' è strett. cresc. in $]0,+\infty[$ e f' è strett. decresc. in $]-\infty,0[$.

Perciò

f è strett. convessa in $]0,+\infty[$

f è strett. concava in $]-\infty,0[$



$\boxed{2}$ Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.1) Il dominio di definizione è $A=\mathbb{R}$.

2.2) Poi $f(x)\geq 0$ e $f(x)=0 \iff x=0$.

f è una funzione pari $(f(-x)=f(x))$

2.3) $f(x) = x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+1/x_2}} \to +\infty$ per $x \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \to 1 \text{ per } x \to +\infty.$$

$$f(x) - x = x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= x\left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= x\,\frac{(x^2 - x^2 - 1)}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+1/x^2}\,(x+\sqrt{x^2+1})} \to 0 \text{ per } x \to +\infty$$

In alternativa si può anche notare che $f(x) = \dfrac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = x + (\sqrt{x^2+1} - x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = x + \omega(x) \text{ con } \omega(x) \to 0 \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi $y = x$ è asintoto obliqua a destra

2.4) f è derivabile in $\mathbb{R}$ perché $1+x^2$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e ha immagine contenuta in $[1,+\infty[$ e la radice è derivabile in $]0,+\infty[$. Perciò per composizione $\sqrt{1+x^2}$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

Poi il rapporto di funzioni derivabili è derivabile. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f'(x) =} \frac{2x\sqrt{x^2+1} - x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x(x^2+1) - x^3}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= \boxed{\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x\,(x^2+2)}{(x^2+1)^{3/2}}}$$

2.5) $f'(x) > 0 \iff x > 0$ (e $f'(x) = 0 \iff x = 0$)

- f è strett. crescente in $[0,+\infty[$
- f è strett. decrescente in $]-\infty,0]$
- 0 è p.to critico per f ed è p.to di minimo locale proprio e punto di minimo assoluto.

2.6) $f'(x) = \dfrac{x^3+2x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

$$\boxed{f''(x)} = \frac{(3x^2+2)(x^2+1)^{3/2} - (x^3+2x)\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^3}\left[(3x^2+2)(x^2+1) - 3x^2(x^2+2)\right]$$

$$= \frac{\cancel{3x^4}+5x^2+2-\cancel{3x^4}-6x^2}{(x^2+1)^{5/2}} \boxed{= \frac{2-x^2}{(x^2+1)^{5/2}}}$$

$$f''(x) > 0 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

f è strett. convessa in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

e strett. concava in $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty[$

$-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$ sono punti di flesso.

e $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} < \sqrt{2}$.

(quindi la funzione si trova sotto l'asintoto).