Lezione 35

Studiare la funzione

$$f(x) = |x| + 3\log\left(\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$$

1) Dominio e continuità

$$|x| - 2 \neq 0 \iff |x| \neq 2 \iff x \neq \pm 2$$

$$\frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \iff \text{(si studia il segno separatamente)}$$

$$|x| - 1 > 0 \iff |x| > 1 \iff x < -1 \vee x > 1$$

$$|x| - 2 > 0 \iff |x| > 2 \iff x < -2 \vee x > 2$$

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$\lvert x\rvert-1$	+	+	−	+	+
$\lvert x\rvert-2$	+	−	−	−	+
	+	−	+	−	+

$$\boxed{\text{Il dominio è } A =]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[}$$

e $\boxed{\text{la funzione è continua in } A}$ perché è composta e somma di funzioni continue.

2) simmetrie, periodicità, positività ...

- $\boxed{\text{la funzione è pari}}$ perché $f(-x)=f(x)$ dato che la variabile x compare sempre dentro al valore assoluto.

Quindi possiamo studiare la funzione solo sull'asse positivo delle x, cioè nell'insieme

$$B = A \cap [0,+\infty[= [0,1[\cup]2,+\infty[$$

e in tale insieme risulta

$$f(x) = x + 3\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

- Controlliamo la positività, cioè dove risulta $f(x) \geq 0$ (e dove $f(x) \leq 0$).

$$x + 3\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \geq 0$$

Vediamo dove il logaritmo è positivo.

$$\log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) > 0 \iff \frac{x-1}{x-2} > 1 \iff \frac{x-1}{x-2} - 1 > 0$$

$$\log\left(\frac{1-x}{2-x}\right) \leq \frac{1-x}{2-x} - 1 = -\frac{1}{2-x}$$

$$-\frac{1}{2-x} \leq -\frac{x}{3} \iff \frac{1}{2-x} \geq \frac{x}{3}$$

$$\iff 3 \geq x(2-x) \iff x^2-2x+3 \geq 0$$

$$\iff \frac{x-1-(x-2)}{x-2} > 0 \iff \frac{1}{x-2} > 0$$

$$\iff \underline{x > 2.}$$

Quindi $\forall\, x \in]2,+\infty[$ $f(x)$ è somma di due termini positivi e quindi $\boxed{f(x) \geq 0 \text{ su }]2,+\infty[}$

Controllare il segno quando $x \in [0,1[$ non è semplice (la disuguaglianza $\log\left(\frac{1-x}{2-x}\right) > -\frac{x}{3}$ non si può risolvere esplicitamente), quindi

$\boxed{\text{il segno in } [0,1[\text{ non è stabilito}}$

Valutiamo $\boxed{f(0) = 3\log\left(\frac{1}{2}\right) = -3\log 2.}$

3) <u>limiti significativi e asintoti</u>

Ricordiamo che $B = [0,1[\,\cup\,]2,+\infty[$.

Quindi i punti dove controllare i limiti sono: $1, 2, +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + 3\log(y\to 0) = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 + 3\log(y\to +\infty) = +\infty.}$$

Le rette di equazione

$x = 1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 3 \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\log\left(\frac{1-1/x}{1-2/x}\right)}_{\downarrow\, 0} = +\infty$$

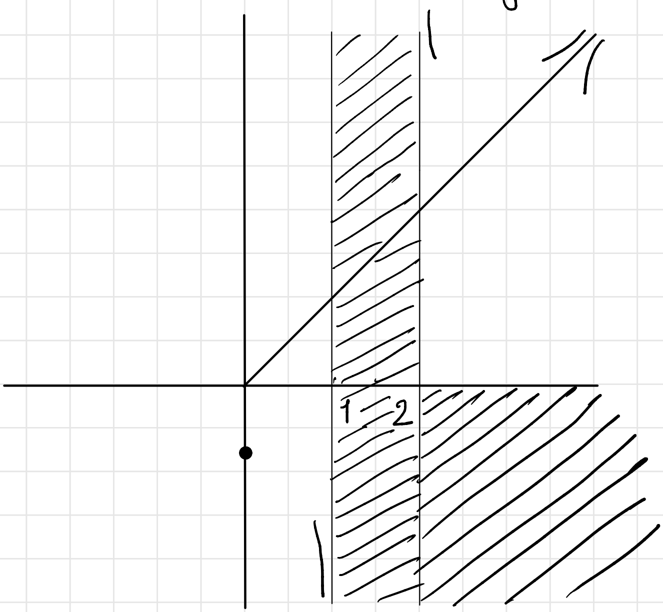
Ma, più precisamente

$$f(x) = x + \underbrace{3\log\left(\frac{1-1/x}{1-2/x}\right)}_{\downarrow\, 0}$$

$$= x + \omega(x) \quad \text{con} \quad \omega(x) \to 0 \text{ per } x \to +\infty$$

Quindi la retta $y = x$ è un asintoto obliquo a destra

Finora la situazione è la seguente



4) Derivabilità e derivata prima.

f è derivabile in $]0,1[\cup]2,+\infty[$ perchè somma e composizione di funzioni derivabili e $\forall x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$:

$$f'(x) = 1 + 3\,\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-2-(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$= 1 - \frac{3}{(x-1)(x-2)}$$

Nel punto 0 bisogna controllare la derivabilità

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Quindi f non è derivabile in 0

In generale se f è pari, cioè $f(x) = f(-x)$,

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{f(-x)-f(0)}{-x} = -f'_+(0)$$

Quindi $f'_-(0) = f'_+(0) \iff f'_+(0) = -f'_+(0) \iff f'_+(0) = 0$

e se f è derivabile, si ha $f'(0) = 0$)

In definitiva $\boxed{f' :]0,1[\cup]2,+\infty[\to \mathbb{R}.}$

5) <u>monotonia e estremi locali e assoluti</u>

$$f'(x) > 0 \iff \frac{3}{(x-1)(x-2)} < 1$$

se $x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$: $(x-1)(x-2) > 0$

e quindi

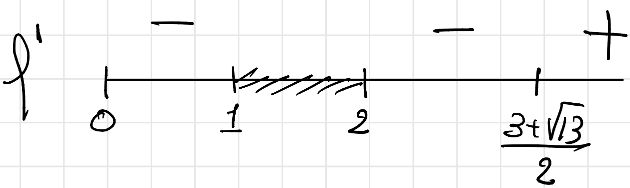
$$f'(x) > 0 \iff 3 < (x-1)(x-2)$$

$$\iff 3 < x^2 - 3x + 2 \iff x^2 - 3x - 1 > 0$$

$$\Delta = 9 + 4 = 13 \qquad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

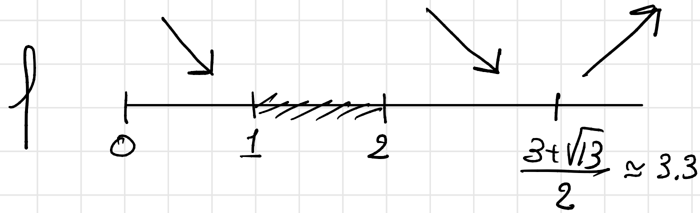
$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} > 3 \qquad \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0.$$

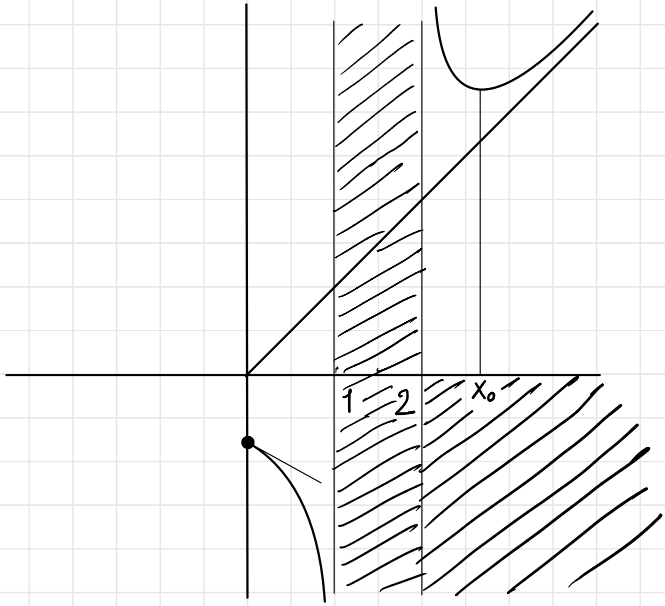


MONOTONIA

f è strett. decrescente in $[0,1[$ e in $]2, \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$

f è strett. crescente in $[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$





$$\frac{x_0-1}{x_0-2} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-1\right)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-2\right)^{-1}$$

$$= \frac{3+\sqrt{13}-2}{2}\cdot\frac{2}{3+\sqrt{13}-4} = \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}-1}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right) = \frac{\sqrt{13}+3}{2}+3\log\left(\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}-1}\right)\simeq 5$$

PUNTI DI MASSIMO, MINIMO LOCALE E ASSOLUTO

- 0 è punto di massimo locale proprio per f (anche se non è p.to critico perchè non esiste la derivata)
- $\pm \frac{\sqrt{13}+3}{2}$ sono p.ti di minimo locale proprio per f.
- non ci sono massimi e minimi assoluti perche $\sup_A f = +\infty$ e $\inf_A f = -\infty$.

6) convessità, concavità e flessi.

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{2}{\varphi(x)}$$

consideriamo la funzione $\varphi(x) = (x-1)(x-2)$
$= x^2 - 3x + 2.$

$\varphi'(x) = 2x - 3$, quindi

$$\varphi'(x) \geq 0 \iff 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3/2$$

φ è strett. cresc. in $[3/2, +\infty[$ e strett. decresc. in $]-\infty, \frac{3}{2}]$

Allora f' è strett. cresc. in $]2, +\infty[$ e strett. decresc. in $[0, 1[$.

In definitiva

f è strett. convessa in $]2, +\infty[$ e strett. concava in $[0, 1[$