Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 07.02.2023 Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Gli studenti con DSA sono esonerati dalle domande con $*$. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi. L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode.

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti*)**.**

a) *Dare la definizione di $a_n \to 0$ per $n \to 0$.*

b) *Dimostrare la condizione necessaria per la convergenza di una serie, cioè che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente } \implies a_n \to 0.$$

c) (opzionale – 2 punto)*. Mostrare un esempio per cui non vale il viceversa nell'implicazione di sopra.*

Risposta:

a)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}, n > \nu: \ |a_n| < \varepsilon$

b) Sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la successione delle somme parziali

e supponiamo che $S_n \to l \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$.

Dato che $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, si ha $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Ma evidentemente $S_n \to l$ e $S_{n+1} \to l$ e quindi

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \to l - l = 0,$$

(il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti)

Infine $a_{n+1} \to l \Rightarrow a_n \to l$. $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la serie armonica è divergente, ma $\frac{1}{n} \to 0$.

Domanda 1.2 (12 punti*).

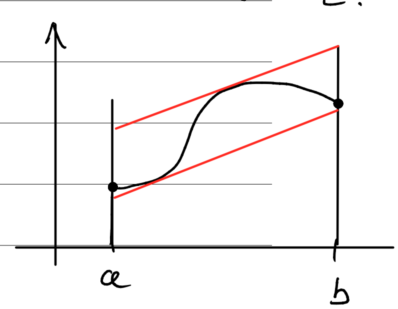
a) *Enunciare a dimostrare il teorema di Lagrange.*

b) (opzionale – 3 punti) *Trovare un punto c del teorema di Lagrange per la funzione* $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Risposta:

a) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$.

Allora $\exists\, c \in]a,b[$ i.e. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Dim:

Si definisce la funzione affine $l : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)$$

Evidentemente $l(a) = f(a)$ e $l(b) = f(b)$ e l è derivabile in $[a,b]$ e $l'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\forall x \in [a,b]$.

Allora, se si definisce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $g(x) = f(x) - l(x)$, si ha che g è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Inoltre $g(a) = g(b) = 0$. Perciò, per il teorema di Rolle,

$\exists\, c \in]a,b[$ t.c. $g'(c) = 0$, cioè $f'(c) - \underbrace{l'(c)}_{= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = 0$

e quindi $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$. $f'(x) = 2x + 2$, $f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$

$f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$.

Perciò si tratta di trovare $c \in]1,2[$ t.c. $f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

$\iff 2c + 2 = 5 \iff 2c = 3 \iff c = \frac{3}{2}$

Domanda 1.3 (3+7 punti).

a) *Per una funzione f, dare la definizione di derivabilità in un punto x_0.*

b) *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = 0$. Allora è necessariamente vero che*

1) $\sqrt[3]{f}$ *è derivabile in* x_0
2) $\sqrt[3]{f}$ *è continua in* x_0
3) $\sqrt[3]{f}$ *non è derivabile in* x_0

Risposta (giustificare con precisione la scelta):

a)

f è derivabile in x_0 se

$$\exists\, l \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

b)

è vera la 2) perché

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

ma, essendo $\sqrt[3]{}$ continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$, allora $\sqrt[3]{f}$ è continua in x_0 (composizione di funz. continue)

La 1) non è vera nel caso $f(x) = x$ e $x_0 = 0$.

La 3) non è vera nel caso $f(x) = x^3$ e $x_0 = 0$

Domanda 1.4 (3+3 punti*). *Sia $A \subset \mathbb{R}$.*

a) *Dare la definizione di minorante di A*

b) *Dare la definizione di estremo inferiore di A.*

Risposta:

a)

$m \in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se $\forall x \in A \ m \leq x$.

b) $\lambda \in \mathbb{R}$ è estremo inferiore di A se

1) $\forall x \in A \ \lambda \leq x$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ t.c. $x < \lambda + \varepsilon$.

(oppure: $\forall y \in \mathbb{R}, y > \lambda, \exists x \in A$ t.c. $x < y$).

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\operatorname{sen} x^\alpha}$$

a) $\alpha = 2$ *e nessun altro valore.*

b) $\alpha > 2$

c) $\alpha = 1$

~~*d)*~~ $\alpha \leq 2$

Risoluzione: (giustificare la risposta): $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ e $\operatorname{sen} x^\alpha \sim x^\alpha$ per $x \to 0$.

perciò $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen} x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} x^{2-\alpha}$

L'ultimo limite è finito $\iff 2-\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 2$

Oppure $\dfrac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen} x^\alpha} = \underbrace{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{x^\alpha}{\operatorname{sen} x^\alpha}}_{\to 1} \cdot x^{2-\alpha}$

e di nuovo $\lim_{x\to 0} x^{2-\alpha}$ esiste finito $\iff 2-\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 2$

Esercizio 2.2 (8 punti*).

a) *Stabilire il carattere della serie numerica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

~~1)~~ *convergente.*
2) *divergente.*
3) *irregolare.*

b) (opzionale – 4 punti) *Cosa si può dire della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$? *(suggerimento: verificare il criterio del rapporto oppure la monotonia e quindi il limite dei termini della serie).*

Risoluzione (giustificare la risposta):

a) si usa il criterio del rapporto con $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2\cdot \cancel{2^n}\,\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{\cancel{2^n}\,\cancel{n!}} = 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1$$

Quindi la serie è convergente.

b) Come prima si verifica che, se $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, allora

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ e quindi con il criterio del rapporto non si può concludere nulla. Possiamo invece studiare la monotonia della successione.

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{e^n n!}{n^n} < \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \iff \frac{\cancel{e^n}\cancel{n!}}{n^n} < \frac{e\cdot\cancel{e^n}\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

e quest'ultima disuguaglianza è sempre vera per definizione di e.

Perciò $\lim_n a_n = \sup_n a_n > 0$ e quindi la serie non può convergere ed essendo a termini positivi, deve necessariamente divergere.

Esercizio 2.3 (6 punti). *Sia $f(x) = \sqrt{\log \cos x}$ e sia A il dominio (naturale) di f. Quale delle seguenti è vera?*

X *a)* $A = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) $A = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) $A = [0, +\infty[$

d) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \log(\cos x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \geq 1 \end{cases} \iff \cos x \geq 1 \iff \cos x = 1$$

$$\iff x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_{-\pi/4}^{0} e^x \cos x dx$$

Risoluzione:

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti 2 volte e con fattore differenziale e^x (si può anche procedere con fattore differenziale $\cos x$)

$$\int e^x \cos x\, dx = \int De^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= e^x \cos x + \int De^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= e^x \cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \right]$$

$$= e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x\, dx.$$

Da cui segue $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$

Allora ricordando che $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si ha

$$\int e^x \cos x\, dx = \left[\frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{e^0}{2} \cdot 1 - \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.5 (10+4 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x-2)^2 e^x.$$

e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione degli estremi locali e assoluti.*

b) *studio della derivata seconda e determinazione dei punti di flesso e degli intervalli di convessità e concavità.*

Risoluzione:

Dominio $A = \mathbb{R}$

Segno: $(x-2)^2 \geq 0$ e $e^x > 0$, quindi $f(x) \geq 0$

La funzione è sempre positiva e $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$.
$x = 2$ è un p.to di minimo globale.

Limiti ai punti di frontiera e asintoti

$$\lim_{x \to +\infty} (x-2)^2 e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x-2)^2 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-2)}{e^{-x}} \overset{t=-x}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{(t+2)^2}{e^t} = 0$$ per la gerarchia di infiniti. Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-2)^2 e^x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x(1-2/x)^2 e^x = (\pm\infty) \cdot (+\infty) = \pm\infty$$

non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima e monotonia

f è derivabile in $\mathbb{R}$ (perché prodotto di funz. derivabili) e

$$f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x = (x-2)e^x(2+x-2) = x(x-2)e^x$$

$$f'(x) \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0 \iff x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2.$$

f': $+$ 0 $-$ 2 $+$

f è strett. crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$

f è strett. decrescente in $[0,2]$

0 è p.to di massimo locale per f $\quad f(0) = 4$

2 è p.to di minimo assoluto per f.

Derivata seconda e convessità/concavità/flessi

$$f''(x) = D[(x^2-2x)e^x] = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \iff x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2}.$$

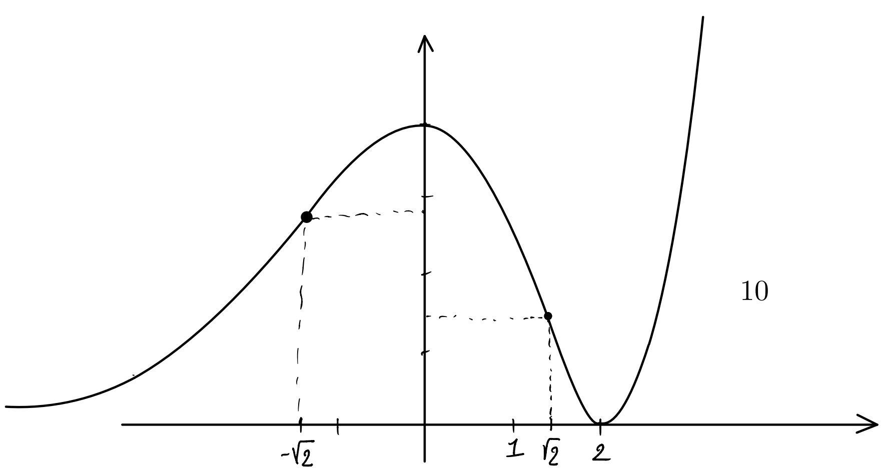
f'': $+$ $-\sqrt{2}$ $-$ $\sqrt{2}$ $+$

f è strett. conv. in $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty[$

f è strett. concava in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ sono p.ti di flesso per f.

$f(-\sqrt{2}) = 2(3+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, $f(\sqrt{2}) = 2(3-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$



Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p\in\mathbb{R}).$
2. $D\operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D\cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D\log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
11. $D\operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D\cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di MacLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0.$
6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0.$

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\int x^p \, dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C, \; p \neq -1$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C$
4. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$
5. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + C$
12. $\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\int \dfrac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\int \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \, dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$