Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 06.04.2023

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Gli studenti con DSA sono esonerati dalle domande con $*$. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi. L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode.

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti*)**.**

a) *Sia data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, un punto di accumulazione per A e $\ell \in \mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.*

b) *Enunciare e dimostrare il teorema dei carabinieri.*

Risposta:

a)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

b)

Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di accum. per A e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Supponiamo che

(i) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ in un intorno di x_0

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ. Da (ii) segue che

$f(x) \in V$ in un intorno di x_0

$h(x) \in V$ in un intorno di x_0

Da (i) si ha che $f(x) \le g(x) \le h(x)$ in un intorno di x_0

Si può fare in modo che le tre condizioni di sopra siano vere in uno stesso intorno di x_0.

Quindi, essendo V intervallo, si ha $g(x) \in V$ in un intorno di x_0.

Domanda 1.2 (7+5 punti). *Sia data la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad con\ q \in \mathbb{R}.$$

a) Calcolare le somme parziali della serie

b) Studiare il carattere e calcolare la somma della serie al variare di q.

Risposta:

a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

$$q \cdot S_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = S_{n+1} - 1 = S_n + q^{n+1} - 1$$

Quindi $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1} \iff \underline{(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}}$

Se $q \neq 1$, si ha $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Se $q = 1$, $s_n = \sum_{n=0}^{n} 1 = n+1$

In definitiva $s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1. \end{cases}$

b)

- Se $|q| < 1 \Rightarrow q^{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$

  e quindi $s_n \to \dfrac{1}{1-q}$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
- Se $q = 1$ $s_n = n+1 \to +\infty$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.
- Se $q = -1$ $s_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} = 1, 0, 1, 0 \dots$ non è regolare
- Se $q > 1$, $q^{n+1} \to +\infty$ e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.
- Se $q < -1$ la successione q^{n+1} non è regolare e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ non è regolare.

Domanda 1.3 (4+4 punti)**.**

a) *Dare la definizione di funzione strettamente descrescente.*

b) *Dare un esempio di funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e strettamente decrescente che non verifica la condizione: $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

c) (opzionale – 2 punti) *Se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente, ammette punti di minimo e massimo assoluti? Se sì, quali sono?*

Risposta (dare adeguata giustificazione):

a) La funzione $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strett. decrescente

se $\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

b)

$f(x) = -x^3$ è strett. decrescente in $\mathbb{R}$, ma

$f'(x) = -3x^2$ e quindi $f'(0) = 0$.

c) Se f è strett. decrescente, risulta

$x \in [0,1] \implies 0 \leq x \leq 1 \implies f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

Quindi 0 è p.to di massimo assoluto e 1 è p.to di minimo assoluto.

Domanda 1.4 (4+4 punti)**.**

a) *Dare la definizione di* $f = o(g)$ *per* $x \to x_0$.

b) *Fare un esempio di una funzione* f *tale che* $f = o(\sin(x^2))$ *per* $x \to 0$.

c) (opzionale – 2 punti) *Fare un esempio di una funzione* g *tale che* $\sin(x^2) = o(g)$ *per* $x \to 0$.

Risposta:

a) $f = o(g)$ per $x \to x_0 \overset{def}{\iff} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) Si tratta di trovare una funzione f tale che

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen} x^2} = 0$. Ricordando che $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} = 1$,

basta prendere $\underline{f(x) = x^3}$ e si ha $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x \to 0} \overset{\nearrow 0}{\cancel{x}} \cdot \overset{\nearrow 1}{\cancel{\frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2}}} = 0$

c) Si tratta di trovare una g tale che $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{g(x)} = 0$

Basta prendere $\underline{g(x) = x}$ e risulta $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 0$

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin (si veda il formulario in fondo), calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$$

Risoluzione: (giustificare la risposta):

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^x - \cos x - x = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right) - \cancel{x} + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$

Perciò $e^x - \cos x - x \sim x^2$ e quindi $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Esercizio 2.2 (8 punti*).

a) *Data la serie numerica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha n+1}{\beta n+\gamma}\right)^n$, *con* $\alpha,\beta,\gamma>0$, *quale delle seguenti affermazioni è vera?*

~~*1)*~~ *la serie è convergente se* $\alpha<\beta$ *e per qualunque* $\gamma>0$

2) *la serie è convergente se* $\alpha>\beta$ *e* $\gamma=1$.

3) *la serie è irregolare per qualunque valore di* $\alpha,\beta,\gamma>0$.

b) (opzionale – 4 punti) *Stabilire il carattere della serie per* $\alpha=\beta$ *e* $\gamma>0$.

Risoluzione (giustificare la risposta):

a) Poniamo $a_n=\left(\frac{\alpha n+1}{\beta n+\gamma}\right)^n$ e applichiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha n+1}{\beta n+\gamma}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha+\frac{1}{n}}{\beta+\frac{\gamma}{n}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

La serie è convergente se $\frac{\alpha}{\beta}<1$, cioè $\alpha<\beta$

e divergente se $\frac{\alpha}{\beta}>1$, cioè $\alpha>\beta$

Nel caso $\frac{\alpha}{\beta}=1$ non si può concludere nulla e bisogna studiare il carattere direttamente (punto b))

b) Supponiamo $\alpha=\beta$. Allora

$$a_n=\left(\frac{\alpha n+1}{\alpha n+\gamma}\right)^n=\left(\frac{\alpha n+\gamma+1-\gamma}{\alpha n+\gamma}\right)^n=\left(1+\frac{1-\gamma}{\alpha n+\gamma}\right)^n$$

Poniamo $x = 2n+\gamma$, da cui segue $n = \frac{x-\gamma}{2}$.

Allora $a_n = \left(1+\frac{1-\gamma}{x}\right)^{\frac{x-\gamma}{2}} = \left[\left(1+\frac{1-\gamma}{x}\right)^{x-\gamma}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1-\gamma}{x}\right)^{x}}^{\nearrow e^{1-\gamma} \text{ per } x \to +\infty}}{\underbrace{\left(1+\frac{1-\gamma}{x}\right)^{\gamma}}_{\downarrow\, 1 \text{ per } x \to +\infty}}\right]^{\frac{1}{2}}$

per $n \to +\infty$, si ha $x \to +\infty$ e quindi

$a_n \to e^{\frac{1-\gamma}{2}} > 0$ per $n \to +\infty$

La serie diverge perchè a_n non tende a zero.

Esercizio 2.3 (6 punti*). *L'estremo inferiore dell'insieme* $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^{-x} < 1/3\}$ *è*

a) 0

~~*b)*~~ $\log 3$

c) *non esiste.*

d) $-\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta):

$x \in A \iff e^{-x} < 1/3 \iff e^{x} > 3 \iff x > \log 3$

Quindi $A =]\log 3, +\infty[$ e allora $\inf A = \log 3$.

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^{\pi^2/4} \cos(\sqrt{x})dx$$

(Suggerimento: prima per sostituzione e poi per parti)

Risoluzione:

Poniamo $t = \sqrt{x} \iff t^2 = x \implies dx = 2t\,dt$.

Inoltre $x = 0 \iff t = 0$

$x = \frac{\pi^2}{4} \iff t = \frac{\pi}{2}$

Perciò $\int_0^{\pi^2/4} \cos(\sqrt{x})dx = \int_0^{\pi/2} (\cos t)\, 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} t\cos t\,dt$

$= 2\int_0^{\pi/2} t\, D\mathrm{sen}\,t\,dt = 2\left[t\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,t\,dt$

$= 2\left[t\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\cos t\right]_0^{\pi/2}$

$= 2\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} - 0\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$

$= 2\frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2.$

Esercizio 2.5 (10+4 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (1-x)e^{\frac{1}{x}}$$

e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione degli estremi locali e assoluti.*

b) *studio della derivata seconda e determinazione dei punti di flesso e degli intervalli di convessità e concavità.*

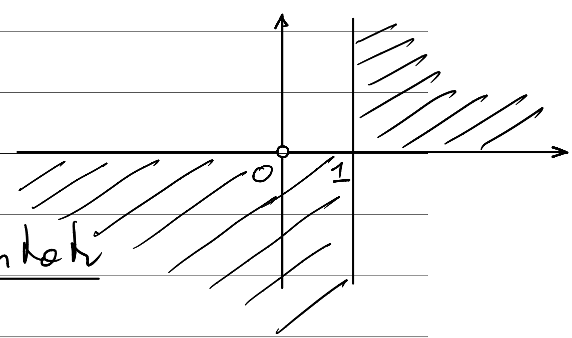
Risoluzione:

Dominio : $x \neq 0$. $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Positività : dato che $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $f(x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1$

Quindi $f(1) = 0$ e f è positiva in $]-\infty,0[\cup]0,1]$

e negativa in $[1,+\infty[$



Limiti alla frontiera del dominio e asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{\frac{1}{x}} = (-\infty)\cdot e^{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^{\frac{1}{x}} = (+\infty)\, e^{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (1-x)e^{\frac{1}{x}} = 1\cdot e^{-\infty} = 0$$

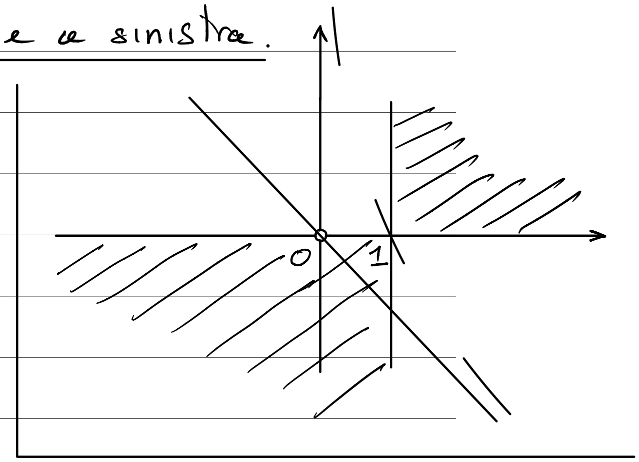
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (1-x)e^{\frac{1}{x}} = 1\cdot e^{+\infty} = +\infty \implies \underline{x=0 \text{ è asintoto a destra}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}=(-1)e^{0}=-1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)+x=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}-x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{1/x}$$

$$=1-\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=1-1=0.$$

Perciò $y=-x$ è asintoto a destra e a sinistra.



Derivata prima e intervalli di monotonia:

$$f'(x)=(-1)e^{\frac{1}{x}}+(1-x)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2}$$

Consideriamo il polinomio x^2-x+1. $\Delta=1-4=-3<0$

Perciò $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2-x+1>0$ e quindi $\forall x\in A: f'(x)<0$.

Allora f è strett. decrescente in $]-\infty,0[$ e in $]0,+\infty[$.

Derivata seconda, convessità, concavità e flessi

$$f''(x)=-\left[e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2}+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(2x-1)x^2-(x^2-x+1)\cdot 2x}{x^4}\right]$$

$$=-\left[-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^4}+e^{\frac{1}{x}}\,\frac{\cancel{2x^3}-x^2-\cancel{2x^3}+2x^2-2x}{x^4}\right]$$

$$=-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\cancel{-x^2}+x-1+\cancel{x^2}-2x}{x^4}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x+1)}{x^4}.$$

$f''(x)>0 \iff x>-1$.

f è strett. convessa in $[-1,0[$ e in $]0,+\infty[$ e strett. concava in $]-\infty,-1]$

-1 è p.to di flesso. Per il grafico, vedi dopo.

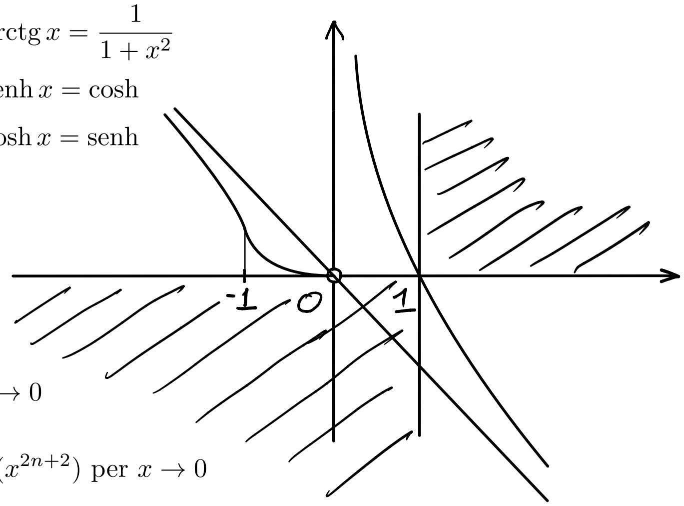
Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p \in \mathbb{R}).$
2. $D \operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D \cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D \log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
11. $D \operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D \cosh x = \operatorname{senh}$



Lista sviluppi di MacLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0.$
6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0.$

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

3. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

6. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + C$

12. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \operatorname{tgh} x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \, dx = -\operatorname{ctgh} x + C$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$

17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$