Lezione 7

Assioma di completezza e ulteriori conseguenze.

<u>AC</u> Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti e separati, allora esiste l'elemento separatore.

Se $A, B \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \leq B$, allora $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $A \leq \lambda \leq B$.

<u>Proposizione</u>

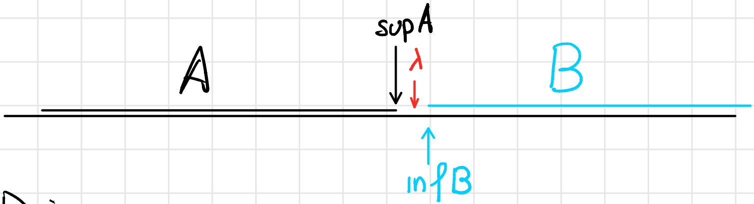
Sia $A, B \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ $\underline{A \leq B}$.

Allora sono vere le seguenti affermazioni.

(i) $\exists$ $\sup A$ e $\inf B$ e risulta $\underline{\sup A \leq \inf B}$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $A \leq \lambda \leq B \iff \underbrace{\sup A}_{\in \mathbb{R}} \leq \lambda \leq \underbrace{\inf B}_{\in \mathbb{R}}$.

gli elementi separatori tra A e B sono gli elementi dell'interv. $[\sup A, \inf B]$



Dim:

(i) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq b$.

$\sup A$ e $\inf B$ esistono perchè A è l.s. e B è l.i.

Se $a \in A$, allora

$a \leq B$ (a è un minorante di B) $\Rightarrow a \leq \inf B$

Ho provato che

$$\underbrace{A}_{\text{insieme}} \leq \underbrace{\inf B}_{\text{numero}} \iff \inf B \text{ è un maggiorante di } A$$

$$\Rightarrow \underline{\sup A \leq \inf B}$$

(ii) $A \leq \overbrace{\underbrace{A \leq \lambda}_{\lambda \text{ è un maggiorante di } A} \leq B}^{\lambda \text{ è un minorante di } B} \Rightarrow \underbrace{\sup A \leq \lambda}\overbrace{\leq \inf B}$

$$\sup A \leq \lambda \leq \inf B \Rightarrow A \leq \sup A \leq \lambda \leq \inf B \leq B$$

$$\Rightarrow A \leq \lambda \leq B.$$

Osservazione

Come diretta conseguenza del punto (ii) si ha che A e B hanno un unico elemento separatore se e solo se $\sup A = \inf B$.

In tal caso gli insiemi A e B si dicono <u>contigui</u>.

Osservazione: $a \geq 0$ e $(\forall \varepsilon > 0 : a \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

Infatti se fosse $a > 0$ allora potrei trovare ε (per esempio $\varepsilon = a/2$) t.c. $\varepsilon < a$ e questo contraddice l'ipotesi

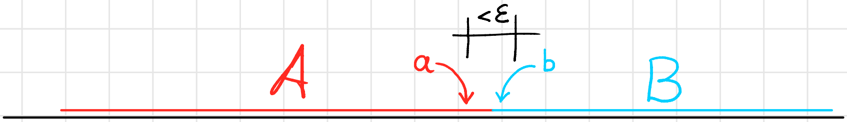
Proposizione

Siano A e $B \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ con $A \leq B$.

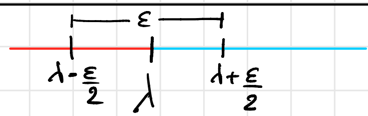
Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti

(i) A e B sono contigui ($\sup A = \inf B$)

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ $\exists b \in B$ t.c. $b - a < \varepsilon$.



Dim:



(i) $\Rightarrow$ (ii): Poniamo $\lambda = \sup A = \inf B$

$\underline{\varepsilon > 0}$ $\exists a \in A$ t.c. $a > \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists b \in B$ t.c. $b < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{\left(-a < -\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{b - a < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists a \in A$ $\exists b \in B$ t.c. $b - a < \varepsilon$

Ma chiaramente $a \leq \sup A \leq \inf B \leq b$.

Perciò, $0 \leq \inf B - \sup A \leq b - a \leq \varepsilon$

Dall'arbitrarietà di ε (vedi osservazione precedente) segue $\inf B - \sup A = 0$.

Def Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathbb{R}$. Poniamo $A = a(\mathbb{N}) = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

[Si ricordi che $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, quindi A è l'immagine di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$]

Allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice limitata superiormente in $\mathbb{R}$ se l'insieme A (immagine della successione) è limitato superiormente in $\mathbb{R}$. In tal caso si pone $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup A$ e si chiama estremo superiore della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Allo stesso modo si dà il concetto di limitatezza inferiore e estremo inferiore per una successione di numeri reali.

Es.

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{e}{2^n} = 0.$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} = 0 \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

Def Una successione di intervalli incapsulati di $\mathbb{R}$ è una successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove I_n è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \subset I_n$.

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Es. $I_n = \left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$

$I_n = \left]0, \frac{1}{n+1}\right[$, $I_n = \left]-\frac{1}{2^n}, 0\right[$

$I_n = [n, \to[$

Osserv: se $m \geq n$, allora $I_m \subset I_n$

Volendo provarlo formalmente si può provare per induzione su $k \in \mathbb{N}$ che $I_{n+k} \subset I_n$. (1)

La (1) è vera per $k=0$. Se è vera per $k \in \mathbb{N}$, allora $I_{n+k+1} \subset I_{n+k} \subset I_n$. Quindi $\forall k \in \mathbb{N}: I_{n+k} \subset I_n$

Teorema (principio degli intervalli incapsulati)

Sia $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di intervalli incapsulati di $\mathbb{R}$ che siano chiusi e limitati.

Allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$

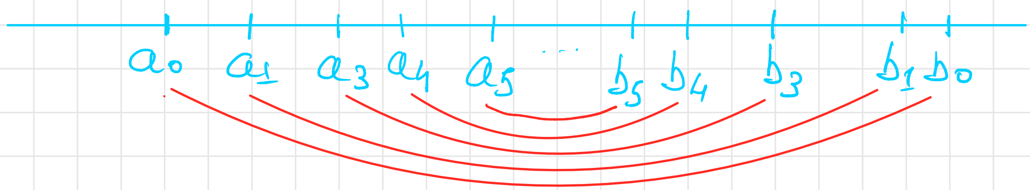
Inoltre se $\inf_{n \in \mathbb{N}} |I_n| = 0$, allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ è un singoletto,

cioè $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\lambda\}$

Dim:

Siano $I_n = [a_n, b_n]$ (a_n e b_n sono gli estremi di I_n)

Definiamo $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.



Dalla figura è chiaro che $\boxed{A \leq B}$, cioè A e B sono separati. Proviamolo in modo formale.

Se $a \in A$ e $b \in B$, allora $a = a_n$ e $b = b_m$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$.

Allora $n \geq m \Rightarrow I_n \subset I_m \Rightarrow a_m \leq \underline{a_n \leq b_n \leq b_m}$

$m \geq n \Rightarrow I_m \subset I_n \Rightarrow \underline{a_n \leq a_m \leq b_m} \leq a_m$

Quindi in ogni caso risulta $a_n \le b_m$, cioè $a \le b$.

Si è provato quindi che $\forall a \in A\ \forall b \in B : a \le b$, cioè $A \le B$. (1)

Per l'assioma di completezza $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ A \le \lambda \le B$.

e quindi risulta $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le \lambda \le b_n$.

In altre termini si è provato che $\forall n \in \mathbb{N}\ \lambda \in I_n$, cioè $\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Quindi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \ne \emptyset$.

Per la seconda parte dell'enunciato, dimostriamo che:

2) $\boxed{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\sup A, \inf B]}$ [gli elementi dell'intersezione sono proprio gli elementi separatori tra A e B]

Infatti: $\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \iff \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le \lambda \le b_n$

$\iff (\forall a \in A : a \le \lambda)$ e $(\forall b \in B : \lambda \le b)$

$\iff A \le \lambda \le B \iff \lambda \in [\sup A, \inf B]$

Adesso dalla 2) segue che $[\sup A, \inf B] \subset I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

e quindi $\inf B - \sup A \le b_n - a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \inf B - \sup A \le \inf_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n)$$

Perciò se $\inf_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) = 0$, allora $\inf B - \sup A = 0$, cioè $\sup A = \inf B$. Ma questo significa che nell' intervallo $[\sup A, \inf B]$ c'è un solo elemento e quindi ci sarà un solo elemento in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ $\square$