Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 18.01.2023 Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Gli studenti con DSA sono esonerati dalle domande con $*$. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi (arrotondando per eccesso). L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode.

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti*).

a) *Dare la definizione di successione numerica limitata*

b) *Dimostrare che una successione numerica convergente è limitata.*

c) (opzionale – 2 punto). *Dare un esempio di successione limitata positiva ma non convergente.*

Risposta:

a) Una successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se esiste $M>0$ t.c. $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_n|\leq M$.

b) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente.
Quindi $a_n \to l$ per $n\to+\infty$, per qualche $l\in\mathbb{R}$.

Allora dato $\varepsilon = 1 > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \nu : \quad |a_n - \ell| < 1.$$

e quindi, per la disuguaglianza triangolare,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \nu : \quad |a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

Posto allora $M = \max\{|a_0|, \dots, |a_\nu|, 1 + |\ell|\}$

risulta $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$

$\left(\text{perchè } \begin{cases} n > \nu \Rightarrow |a_n| < 1 + |\ell| \leq M \\ n \leq \nu \Rightarrow |a_n| \leq M \end{cases}\right)$

c) esempi:

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

$$a_n = 1 + \operatorname{sen} n \quad (\text{o } 2 + \operatorname{sen} n,\ 2 + \cos n).$$

$$a_n = |\operatorname{sen} n|$$

$$a_n = |\cos n|.$$

Domanda 1.2 (12 punti).

a) *Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle*

b) (opzionale – 2 punti) *Stabilire (con appropriata giustificazione) se le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate per la funzione* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$*, definita nel suo insieme di definizione naturale.*

Risposta:

a) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, tale che $f(a) = f(b) = 0$.

Allora $\exists\, c \in]a,b[$ t.c. $f'(c) = 0$.

Dim: Per il teorema di Weierstrass f ammette minimo e massimo. Quindi esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = \min_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \max_{[a,b]} f$

Perciò: $\forall x \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Si possono avere due casi:

1. $x_1, x_2 \in \{a,b\}$ (cioè x_1 e x_2 sono entrambi p.ti di frontiera di $[a,b]$)

In tal caso, dato che $f(a) = f(b)$, risulta $f(x_1) = f(x_2)$ (cioè massimo e minimo sono uguali) e quindi f è costante su $[a,b]$. Allora chiaramente esiste $c \in]a,b[$ t.c. $f'(c) = 0$

2. x_1 o $x_2 \in]a,b[$. Allora se per esempio $x_1 \in]a,b[$, essendo x_1 p.to di min locale, per il teorema di Fermat, risulta $f'(x_1)=0$. Allo stesso modo se $x_2 \in]a,b[$, per il teorema di Fermat risulta $f'(x_2)=0$. In ogni caso vale la tesi.

Domanda 1.3 (3+7 punti).

a) *Enunciare il teorema dei valori intermedi di Bolzano* (1° forma).

b) *Sia* $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione continua e tale che* $f(0) = 2$ *e* $\inf f = -1$. *Indicare quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera*

~~1)~~ X *esiste* $x \in]0,+\infty[$ *tale che* $f(x) = 1$.
2) *esiste* $x \in]0,+\infty[$ *tale che* $f(x) = -1$.
3) *esiste* $x \in]0,+\infty[$ *tale che* $f(x) = 2$
4) *esiste* $x \in]1,+\infty[$ *tale che* $f(x) = 0$.

Risposta:

a) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ funzione continua e $m = \inf_I f$ e $M = \sup_I f$.

Allora $\forall\ y \in]m,M[$, esiste $x \in I$ t.c. $f(x)=y$.

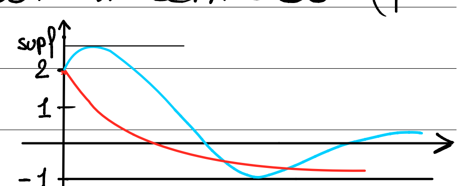
b) Evidentemente si ha

$$\inf f = -1 \quad \text{e} \quad \sup f \geq f(0) = 2.$$

e perciò $\inf f < 1 < \sup f$

Allora per il teorema dei valori intermedi (punto a))

$\exists\ x \in [0,+\infty[$ t.c. $f(x)=1$



Poi $x \neq 0$, perché $f(0) = 2$ e quindi $x \in]0, +\infty[$.

Domanda 1.4 (3+3 punti).

a) *Dare la definizione di serie convergente.*

b) *Dare la definizione di serie assolutamente convergente.*

c) (extra – 1 punti) *Dare un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente.*

Risposta:

a) Una serie $\sum a_n$ è convergente se la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ delle sue somme parziali è convergente

b) La serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum |a_n|$ è convergente

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la serie armonica, che diverge.

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}} & se \ -3 < x < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\alpha+x)}} & se \ x \geq 0, \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione è continua.

a) $\alpha = 2$

~~b)~~ X $\alpha = e$

c) $\alpha = 1$

d) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione: (giustificare la risposta):

La funzione f è definita a tratti con "pezzi" che sono continui (essendo composte di funzioni continue).

Si tratta di verificare la continuità in 0, cioè

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{3}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha+x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} = f(0)$$

Perciò $f(0-) = f(0+) \iff \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} \iff \alpha = e.$

Esercizio 2.2 (8 punti*). *Stabilire il carattere della serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}\log(1+1/n)}$.

a) *convergente.*

~~b)~~ *divergente.*

c) *irregolare.*

d) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$a_n = \frac{1}{n^{3/2}\log(1+1/n)} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{1/n} \cdot \frac{1/n}{\log(1+1/n)}$$

$$= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \underbrace{\frac{1/n}{\log(1+1/n)}}_{\to 1} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

La serie è asintotica ad una serie armonica generalizzata con esponente < 1 e quindi, per il criterio di confronto asintotico, è divergente.

Esercizio 2.3 (6 punti*). *Sia* $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = \dfrac{x+5}{2x}$. *Indicare quale delle seguenti affermazioni è vera*

1) $\inf A = -\infty$ *e* $\sup A = +\infty$
2) $\inf A = 0$ *e* $\sup A = 5/2$.
3) $\inf A = 1/2$ *e* $\sup A = +\infty$.
4) *nessuna delle precedenti.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$f(x) = \frac{x+5}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2x}$$

Quindi la funzione è decrescente e per il teorema sui limiti unilaterali delle funzioni monotone

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \sup f \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf f.$$

Ma $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

Perciò $\sup f = +\infty$ e $\inf f = \dfrac{1}{2}$.

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} dx$$

Risoluzione:

Per sostituzione : $t = e^x \iff x = \log t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

Inoltre: $x = 0 \iff t = 1$ e $x = 1 \iff t = e$.

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{2}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^e \frac{D(t/\sqrt{2})}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}\right]_1^e$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Oppure si calcola prima l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} dx = \left(\int \frac{1}{t + \frac{2}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt\right)_{t = e^x} = \left(\int \frac{1}{t^2 + 2} dt\right)_{t = e^x}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{D(t/\sqrt{2})}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt\right)_{t = e^x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)_{t = e^x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Si noti che vale l'identità $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x_2}$

Per cui è anche corretto $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{e}\right)}$

Esercizio 2.5 (14 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x-1)^2 \log(x-1).$$

In particolare si richiede:

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione dei punti di massimo e minimo, studio della derivata seconda e determinazione di intervalli di convessità e concavità e dei punti di flesso, infine di tracciarne il grafico.*

b) (opzionale – 3 punti) *Stabilire se la funzione f è prolungabile per continuità nel punto 1 e se tale prolungamento è derivabile in 1*

Risoluzione:

a) Dominio $X-1>0 \iff X>1 \Rightarrow A =]1, +\infty[$.

Segno $f(x) > 0 \iff \log(X-1) > 0 \iff X-1>1 \iff X>2$.

Zeri: $f(2)=0$

Limiti ai punti di frontiera e asintoti

$$\lim_{X\to 1^+} (X-1)^2 \log(X-1) = \lim_{y \to 0^+} y^2 \log y = 0, \quad \lim_{X\to +\infty} (X-1)^2 \log(X-1) = +\infty.$$

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{(X-1)^2 \log(X-1)}{X} = +\infty \quad \text{(non ci sono asintoti)}.$$

(si è usato il limite notevole $\lim_{y\to 0} y^p \log y = 0$, $p>0$)

Derivata prima e monotonia

$$\boxed{f'(x) = 2(X-1)\log(X-1) + (X-1)^2 \cdot \frac{1}{X-1} = \underbrace{(X-1)}_{>0}(2\log(X-1)+1)}$$

Dato che $X-1>0$ $\forall X \in A$, si ha

$$f'(x) > 0 \iff 2\log(X-1)+1>0 \iff \log(X-1) > -1/2$$

$$\iff X-1 > e^{-1/2} \iff X > \underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{e}}}_{\text{è compreso tra 1 e 2}}$$

Allora si ha che:

- f è strett. crescente nell'intervallo $\left[1+\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$
- f è strett. decrescente nell'intervallo $\left]0, 1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

Quindi $x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$ è punto di minimo assoluto per f.

Derivata seconda e convessità/concavità/flessi.

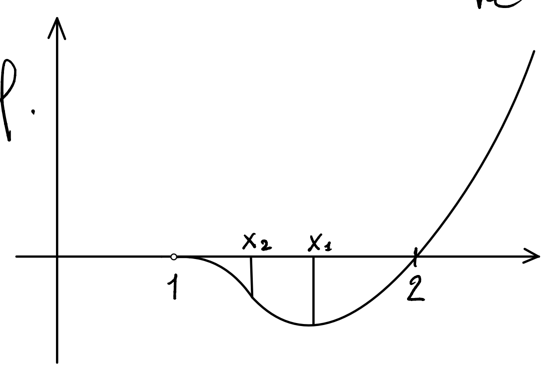
$$f''(x) = \left(2\log(x-1)+1\right) + (x-1)\frac{2}{x-1} = 2\log(x-1)+3$$

$$f''(x) > 0 \iff 2\log(x-1)+3 > 0 \iff \log(x-1) > -3/2$$

$$\iff x-1 > e^{-3/2} \iff x > \underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{e^3}}}_{\text{è più piccolo di } 1+\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Quindi f è convessa in $\left[1+\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right[$ e concava in $\left]0, 1+\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right]$

Il punto $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ è di flesso per f.



b) Dato che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$,

f è prolungabile per continuità in 1

ponendo $\bar{f} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x > 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

Poi $\lim_{x\to 1^+} \bar{f}'(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\,2\log(x-1) + x - 1 = 0$

Perciò $\bar{f}$ è derivabile in 1 e $\bar{f}'(1) = 0$.

Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\dfrac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \big(1+px\big)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim\limits_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p \in \mathbb{R}).$
2. $D \operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D \cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D \log|x| = \dfrac{1}{x}$
8. $D \operatorname{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D \operatorname{arctg} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$
11. $D \operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D \cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di MacLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0$.
6. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$.

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
12. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$