Lezione 42

Dimostrazione teorema sulla integrabilità delle funzioni continue

Fatti:

1. f è limitata su $[a,b]$ (Weierstrass)
2. f è uniformemente continua su $[a,b]$ (Heine-Cantor)

Da 2. segue che

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \text{ t.c. } \forall I\subset[a,b] : |I|<\underset{\downarrow\ 10^{-2}}{\delta} \Rightarrow \omega_f(I)\le \underset{\downarrow\ 10^{-6}}{\varepsilon} . \quad (1)$$

$10^{-6} \rightarrow 10^{-2}$

questo mi dice che posso rendere l'oscillazione di f su un qualunque sottointervallo piccola quanto voglio ($\le\varepsilon$) se l'ampiezza dell'intervallo è abbastanza piccola ($<\delta$)

Voglio dimostrare che

$$\forall \underset{10^{-6}}{\varepsilon}>0 \ \exists P\in\mathcal{P}([a,b]) \text{ t.c. } \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)\cdot|I_k|}_{(*)}<\varepsilon . \quad (2)$$

Allora dato $\varepsilon>0$, si tratta di fare in modo che le oscillazioni sugli intervalli I_k siano piccole abbastanza da rendere la somma $(*)$ più piccola di ε.

Per esempio se in (2) scelgo $\varepsilon = 10^{-6}$, non posso scegliere in (1) 10^{-6} perchè allora $(*) \approx 10^{-6} \underbrace{\sum |I_k|}_{b-a}$.

Allora fissato ε in (2)

scelgo come approssimazione in (1) $\frac{\varepsilon}{b-a+1}$ e in corrispondenza trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|I| < \delta \Rightarrow \omega_f(I) < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$$

Quindi prendo una suddivisione P tale che $\max_{1 \le k \le n} |I_k| < \delta$ e allora risulta $\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k) \cdot |I_k| \le \frac{\varepsilon}{b-a+1} \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \frac{\varepsilon}{b-a+1}(b-a) < \varepsilon$. $\square$

Operazioni sulle funzioni integrabili.

Denotiamo con $\mathcal{R}([a,b])$ l'insieme delle funzioni limitate e integrabili secondo Riemann su $[a,b]$.

Studieremo le proprietà dell'insieme $\mathcal{R}([a,b])$ e della funzione

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \longrightarrow \int_a^b f$$

Teorema (operazioni con le funzioni integrabili)

1) Se $f, g \in R([a,b])$ e $f \leq g$, allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

monotonia

2) Se $f, g \in R([a,b])$, allora $f+g \in R([a,b])$ e

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

3) Se $f \in R([a,b])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f \in R([a,b])$ e

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

linearità

4) Se $f, g \in R([a,b])$, allora $f \cdot g \in R([a,b])$

5) Se $f \in R([a,b])$, allora $|f| \in R([a,b])$ e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

disuguaglianza triangolare

6) Se $f, g \in R([a,b])$, allora $f \vee g,\ f \wedge g \in R([a,b])$

$R([a,b])$ è un reticolo

Osserv. tutte insieme queste proprietà dicono che $\mathcal{R}([a,b])$ è un'algebra reticolata di funzioni, cioè all'interno di questo insieme posso fare tutte le operazioni come sui numeri reali:

$$f+g,\ f\cdot g,\ \alpha f,\ f\vee g,\ f\wedge g$$

Per dimostrare questo teorema sarà utile richiamare i criteri di integrabilità:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Allora sono equivalenti

(i) f è integrabile sec R su $[a,b]$

$\boxed{\text{(ii)}}$ $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, P\in\mathcal{D}([a,b])$ t.c $\underbrace{S(f,P)-s(f,P)}_{=\sum_{k=1}^{n}\omega_f(I_k)\cdot|I_k|}<\varepsilon$

$\boxed{\text{(iii)}}$ $\exists\,(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di suddivisioni di $[a,b]$ tale che $S(f,P_n)-s(f,P_n)\to 0$

Inoltre, vera (iii) (e quindi anche le altre), risulta

$$\lim_n s(f,P_n)=\int_a^b f=\lim_n S(f,P_n).$$

Lemma Siano $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$.
Allora esiste $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di suddivisioni di $[a,b]$ tale che

$$\begin{cases} \lim_n s(f,P_n) = \int_a^b f = \lim_n S(f,P_n) \\ \lim_n s(g,P_n) = \int_a^b g = \lim_n S(g,P_n) \end{cases}$$

Dim:

Dato che f e g sono integrabili, per il criterio di integrabilità richiamato sopra, esistono $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di suddivisioni di $[a,b]$ tali che

$$\begin{cases} \lim_n s(f,Q_n) = \int_a^b f = \lim_n S(f,Q_n) \\ \lim_n s(g,R_n) = \int_a^b g = \lim_n S(g,R_n) \end{cases}$$

Definiamo $P_n = Q_n \cup R_n$. Dato che P_n è più fine di Q_n e R_n, risulta

$$\underbrace{s(f,Q_n)}_{\to \int_a^b f} \le s(f,P_n) \le S(f,P_n) \le \underbrace{S(f,Q_n)}_{\to \int_a^b f}$$

$$\underbrace{s(g,R_n)}_{\to \int_a^b g} \le s(g,P_n) \le S(g,P_n) \le \underbrace{S(g,R_n)}_{\to \int_a^b f}$$

Allora per il teorema dei carabinieri si ha la tesi.

$\square$

<u>Dimostrazione teorema</u>

1) (monotonia)

Per il lemma esiste $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di suddivisioni tale che

$$\lim_n s(f,P_n) = \int_a^b f = \lim_n S(f,P_n)$$

$$\lim_n s(g,P_n) = \int_a^b g = \lim_n S(g,P_n).$$

Dato che $f \le g$,

$$\forall\, I \subset [a,b] : \quad \inf_I f \le \inf_I g \quad e \quad \sup_I f \le \sup_I g$$

Da questo segue che

$$s(f, P_n) \leq s(g, P_n) \quad e \quad S(f, P_n) \leq S(g, P_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f \qquad\qquad \int_a^b g$$

La tesi segue dal teorema di prolungamento delle disuguaglianze. $\square$

2) (additività)

per il lemma esiste $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di suddivisioni di $[a,b]$ tale che

$$\begin{cases} \lim_n s(f, P_n) = \int_a^b f = \lim_n S(f, P_n) \\ \lim_n s(g, P_n) = \int_a^b g = \lim_n S(g, P_n) \end{cases}$$

Osserviamo che se $I \subset [a,b]$, allora

$$(*) \quad \inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f+g) \leq \sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

La (*) si prova notando che

$$\forall x \in I : \quad \underbrace{\inf_I f + \inf_I g}_{\text{è un minorante di}} \le \underbrace{f(x) + g(x)} \le \underbrace{\sup_I f + \sup_I g}_{\text{è un maggiorante di}}$$

Allora dalla (*) segue che

$$\underset{\displaystyle \int_a^b f}{\underset{\downarrow}{s(f,P_n)}} + \underset{\displaystyle \int_a^b g}{\underset{\downarrow}{s(g,P_n)}} \le s(f+g,P_n) \le S(f+g,P_n) \le \underset{\displaystyle \int_a^b f}{\underset{\downarrow}{S(f,P_n)}} + \underset{\displaystyle \int_a^b g}{\underset{\downarrow}{S(g,P_n)}}$$

Quindi per il teorema dei carabinieri risulta

$$\lim_n s(f+g,P_n) = \int_a^b f + \int_a^b g = \lim_n S(f+g,P_n)$$

Ma questo implica che $S(f+g,P_n) - s(f+g,P_n) \to 0$

e quindi $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Inoltre $\displaystyle\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\square$

3) Sia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di suddivisioni di $[a,b]$ tale che $\lim_n s(f,P_n) = \int_a^b f = \lim_n S(f,P_n)$.

Osserviamo che $\forall\, I \subset [a,b]$ risulta

$$\begin{cases} \text{se } \alpha \geq 0: & \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f \ \text{ e } \ \sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \\ \text{se } \alpha < 0: & \inf_I \alpha f = \alpha \sup_I f \ \text{ e } \ \sup_I \alpha f = \alpha \inf_I f. \end{cases}$$

Perciò

se $\alpha \geq 0$: $s(\alpha f, P_n) = \underbrace{\alpha s(f,P_n)}_{\to \alpha \int_a^b f}$ e $S(\alpha f, P_n) = \underbrace{\alpha S(f,P_n)}_{\to \alpha \int_a^b f}$

se $\alpha < 0$: $s(\alpha f, P_n) = \underbrace{\alpha S(f,P_n)}_{\to \alpha \int_a^b f}$ e $S(\alpha f, P_n) = \underbrace{\alpha s(f,P_n)}_{\to \alpha \int_a^b f}$

Quindi in ogni caso risulta

$$\lim_n s(\alpha f, P_n) = \alpha \int_a^b f = \lim_n S(\alpha f, P_n).$$

Perciò $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. $\square$

4) (moltiplicazione)

f e g sono limitate, quindi esistono $M_1, M_2 > 0$ tali che $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq M_1$ e $|g(x)| \leq M_2$.

Per ogni $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \leq |(f(x) - \overbrace{f(y)) g(x)}^{-} + \overbrace{f(y) (g(x)}^{+} - g(y))|$$

$$\leq |f(x) - f(y)| |g(x)| + |f(y)| |g(x) - g(y)|$$

$$\leq |f(x) - f(y)| M_2 + M_1 |g(x) - g(y)|$$

Quindi se $I \subset [a,b]$

$$\omega_{f \cdot g}(I) \leq \omega_f(I) \cdot M_2 + \omega_g(I) \cdot M_1$$

E allora se $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ è una suddivisione di $[a,b]$, risulta

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{f \cdot g}(I_k) |I_k| \leq M_2 \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k) |I_k| + M_1 \sum_{k=1}^{n} \omega_g(I_k) |I_k|$$

Questo vale per una suddivisione generica P. che si può quindi scrivere

$$S(f \cdot g, P) - s(f \cdot g, P) \leq M_2 (S(f, P) - s(f, P)) + M_1 (S(g, P) - s(g, P))$$

Per il lemma esiste $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di suddivisioni tale che $\begin{cases} S(f,P_n) - s(f,P_n) \to 0 \\ S(g,P_n) - s(g,P_n) \to 0 \end{cases}$

Allora

$$S(f\cdot g,P_n) - s(f\cdot g,P_n) \le M_2 \underbrace{(S(f,P_n) - s(f,P_n))}_{\downarrow\, 0} + M_1 \underbrace{(S(g,P_n) - s(g,P_n))}_{\downarrow\, 0}$$

e perciò $S(f\cdot g,P_n) - s(f\cdot g,P_n) \to 0$.

Quindi $f\cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$ $\square$

---

5) (disuguaglianza triangolare)

Ricordiamo che in generale vale $||x|-|y|| \le |x-y|$

Perciò $\forall x,y \in [a,b]$: $||f(x)|-|f(y)|| \le |f(x)-f(y)|$

Da questo segue che se $I \subset [a,b]$, allora

$$\omega_{|f|}(I) \le \omega_f(I)$$

e quindi

$$\forall P \in \mathcal{P}([a,b]) : \sum_{k=1}^{n} \omega_{|f|}(I_k)|I_k| \le \sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k|$$

Allora dato $\varepsilon > 0$, se si prende $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tale che $\sum_{k=1}^{n} \omega_f(I_k)|I_k| < \varepsilon$, a maggior ragione sarà $\sum_{k=1}^{n} \omega_{|f|}(I_k)|I_k| < \varepsilon$.

Quindi $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Poi, essendo $\quad -|f| \leq f \leq |f|$

dalla monotonia e linearità dell'integrale si ha

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

da cui segue $\left| \int_a^b |f| \right| \leq \int_a^b |f|$ $\square$

6) (operazioni reticolari)

basta ricordare che

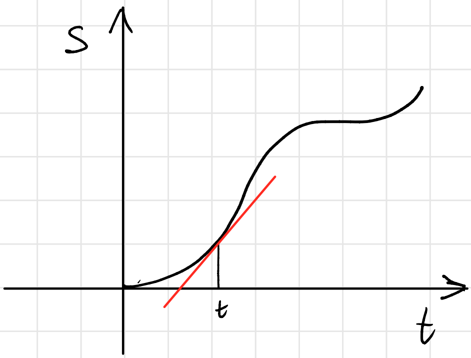
$$f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad e \quad f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

e applicare le proposizioni precedenti. $\square$

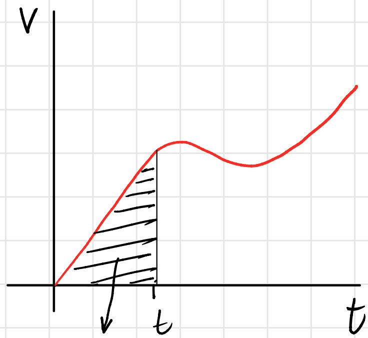
Teorema fondamentale del calcolo

E' il teorema che lega l'operazione di derivazione con l'operazione di integrazione. Sappiamo che derivare significa calcolare tangenti, mentre integrare significa calcolare le aree. Quindi a prima vista non è chiaro che ci possa essere un legame tra queste due operazioni. Il primo a intravedere una relazione tra queste operazioni è Evangelista Torricelli intorno al 1640. Torricelli si interessava di studiare il moto dei corpi (era alliavo di Galileo Galilei) e intuì che la velocità e la distanza esiste una relazione inversa:

La distanza è l'area della velocità (rispetto al tempo) e la velocità è il coefficiente angolare della distanza (in relazione al tempo)



$S'(t) = V(t)$



$\underbrace{A(t)}_{\text{area sotto il grafico della velocità}} = s(t)$

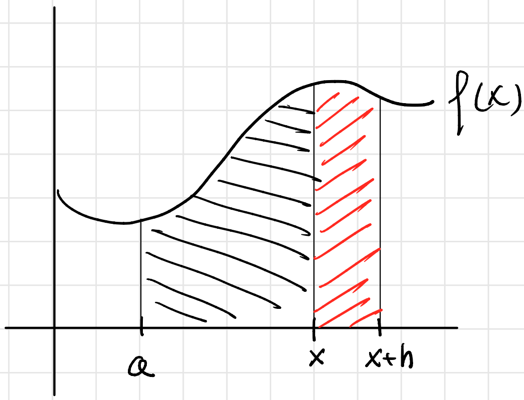
Quindi per trovare l'area $A(t)$ basta cercare una funzione $s(t)$ tale che $S'(t) = V(t)$

Per esempio per calcolare l'area sotto la funzione t^n, Torricelli si chiede quale curva distanza-tempo ($s(t)$) ha coefficiente angolare t^n?

La risposta è semplice $\frac{t^{n+1}}{n+1}$.

In altre parole, l'area sottesa dalla curva $y=x^n$ compresa fra le ascisse $x=0$ e $x=a$ è pari a $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

Più in generale si ha quanto segue



$$F(x)=\int_a^x f \quad , \quad F(x+h)=\int_a^{x+h} f$$

funzione area
(che chiameremo funzione integrale)

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \longrightarrow f(x) \quad \text{per } h \to 0$$

(se f è continua)

Quindi $F'(x)=f(x)$

e allora calcolare l'area si riduce a cercare una funzione F derivabile tale che $F'(x)=f(x)$

Teorema della media integrale.

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile

Siano $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$. Allora

$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f}_{\text{valor medio di } f \text{ su } [a,b]} \le M \qquad (1)$$

Inoltre se f è continua in $[a,b]$, allora

$$\exists\, c \in [a,b] \text{ t.c. } \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c). \qquad (2)$$

Dim: Evidentemente $\forall x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$.

Per la monotonia dell'integrale

$$m(b-a) = \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M(b-a)$$

Dividendo per $b-a$ si ottiene la (1)

Supponiamo ora che f sia continua in $[a,b]$.

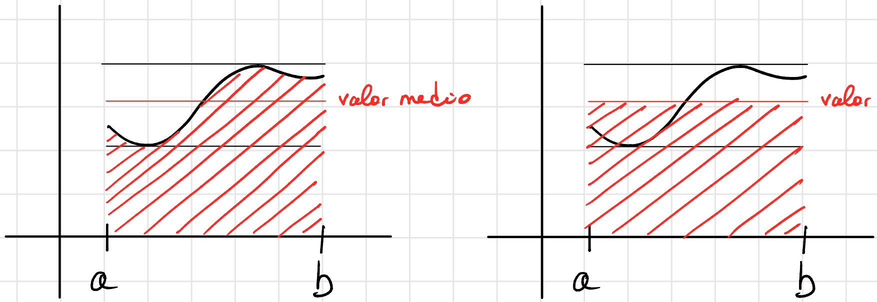
Allora per il teorema di Weierstrass m e M

sono valori assunti dalla funzione f. e risulta

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M.$$

Quindi, per il teorema dei valori intermedi (ogni valore compreso tra il minimo e il massimo è assunto)

$\exists\, c \in [a,b]$ tale che $\displaystyle \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c).$



Def Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo qualunque.
Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice localmente integrabile su I se $\forall\, a,b \in I$, $a<b$ risulta che $f_{|[a,b]}$ è limitata e integrabile secondo Riemann su $[a,b]$. In tal caso si pone

$\forall\, a,b \in I$:

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_a^b f_{|[a,b]} & \text{se } a<b \\ 0 & \text{se } a=b \\ -\int_b^a f_{|[b,a]} & \text{se } b<a \end{cases}$$

e si chiama integrale orientato di f da a a b

Osserv.: vale la seguente proprietà

$\forall a, b, c \in I \qquad \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$