Lezione 4

Il campo dei numeri reali

<u>Gli assiomi di campo</u>

Su $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano i seguenti assiomi

A1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x + (y+z) = (x+y)+z$

A2 $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X: \quad x+0 = 0+x = x$

A3 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}$ t.c. $\quad x+(-x) = (-x)+x = 0$

si chiama opposto di x ed è unico.

A4 $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y = y+x$

M1 $\forall x\, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

M2 $\exists\, 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0,$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}: \ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

M3 $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ t.c. $\quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

si chiama reciproco di x ed è unico.

M4 $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$

D $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z.$

Assiomi di ordinamento

Su $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale denotata con $\leq$, cioè che verifica gli assiomi

O1 $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$

O2 $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y$

O3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O4 $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x.$

O-A $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

O-M $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ e } 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z.$

Assioma di completezza (o continuità)

C Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti e separati di $\mathbb{R}$, allora esiste un elemento separatore tra A e B.

Osserv:

1) Gli assiomi (A1-A4) dicono che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

0 è l'elemento neutro per $+$

$-x$ è l'opposto di x (è l'inverso di x per $+$)

2) Gli assiomi di campo dicono che

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è una struttura algebrica che

si chiama <u>campo</u> o <u>corpo commutativo</u>

3) Gli assiomi di campo insieme agli assiomi

di ordinamento dicono che

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è una struttura algebrica

chiamata <u>campo totalmente ordinato</u>

4) Tutti gli assiomi stabiliscono che

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un <u>campo totalmente ordinato completo</u>

(o continuo)

<u>Def</u> $x \geq 0$ positivo $\mathbb{R}_+$

$x \leq 0$ negativi $\mathbb{R}_-$

$x > 0$ strett. positivo $\mathbb{R}_+^*$

<u>Conseguenze degli assiomi di campo</u>

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $-(-x) = x$ e se $x \neq 0$ $(x^{-1})^{-1} = x$

(ii) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

(iii) $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \neq 0 \Rightarrow x = y$

(iv) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

$(\Leftarrow)$: Supponiamo che $y=0$.

$$\underbrace{\cancel{x\cdot 0}}+0=\underline{x\cdot 0}=x\cdot(0+0)=\underbrace{\cancel{x\cdot 0}}+x\cdot 0 \Rightarrow 0=x\cdot 0.$$

$(\Rightarrow)$: Supponiamo $x\cdot y=0$.

Se $y\neq 0$, allora $\underbrace{(x\cdot y)\, y^{-1}} = 0\cdot y^{-1}=0$

$$x = x\cdot 1 = x\cdot(y\cdot y^{-1})$$

(v) $\underbrace{(-x)\cdot y} = -\underbrace{(x\cdot y)}$ $\qquad (-x)(-y)=x\cdot y.$

$$(-x)\cdot y + x\cdot y = ((-x)+x)\cdot y = 0\cdot y = 0.$$

(vi) se $x\neq 0$, allora $(-x)^{-1} = -x^{-1}$

(vii) se $x,y\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $(x\cdot y)^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1}$

<u>Def</u> $\qquad \dfrac{x}{y} \overset{def}{=} x\cdot y^{-1}$ a patto che $y\neq 0$

$$x-y \overset{def}{=} x+(-y)$$

<u>Conseguenze degli assiomi di ordinamento</u>

(i) $0\leq x \Leftrightarrow -x\leq 0$ e $\quad x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq -x$

(ii) $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2\geq 0$

$x\geq 0 \Rightarrow x\cdot x\geq x\cdot 0 \Rightarrow x^2\geq 0$

$x\leq 0 \Rightarrow 0\leq -x \Rightarrow 0(-x)\leq(-x)^2 \Rightarrow 0\leq x^2.$

(iii) $1 > 0$

$1 = 1^2 \geq 0$, $1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $1 > 0$.

(iv) $x < y$ e $0 < z$ $\Rightarrow$ $x \cdot z < y \cdot z$.

1) $\underbrace{x \geq 0}$ e $y \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot y \geq 0$

2) $x \geq 0$ e $y \leq 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot y \leq 0$.

1) $x \cdot y \geq 0 \cdot y = 0$

2) $x(-y) \geq 0 \cdot (-y) = 0$ $\Rightarrow$ $-(x \cdot y) \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot y \leq 0$.

$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

Struttura reticolare di $\mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x \leq y \vee y \leq x$

$\exists \max\{x, y\}$ $\quad \exists \min\{x, y\}$.

Def $\quad |x| = \max\{x, -x\}$

$x_+ = \max\{x, 0\}$

$x_- = \max\{-x, 0\}$.

Osserv: (i) $x_+ \geq 0$, $x_- \geq 0$ $\quad |x| \geq 0$.

$x \geq 0 \vee -x \geq 0$. $\Rightarrow$ $\{x, -x\}$ ha un elemento positivo $\Rightarrow |x| \geq 0$.

(ii) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$x_+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$x_- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$

Proprietà del valore assoluto

(i) $|x| = 0 \iff x = 0$ $\qquad x, -x \leq |x| = 0$

(ii) $|-x| = |x|$ $\qquad \Rightarrow x \leq 0 , -x \leq 0$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\qquad \Rightarrow x \leq 0$ e $x \geq 0 \Rightarrow x = 0.$

$x \leq |x| \quad y \leq |y| \quad \Rightarrow \underbrace{x+y} \leq |x| + |y|$

$-x \leq |x| \quad -y \leq |y| \quad \Rightarrow -(x+y) \leq |x| + |y|$

$|x+y| \leq |x| + |y|.$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$ $\qquad x \leq |x|$ e $\underbrace{-x \leq |x|}_{-|x| \leq x}$

(v) $\underline{a > 0}$

$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$\max\{x, -x\} \leq a \iff x, -x \leq a$

$\iff -a \leq x \leq a$

(vi) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Intervalli di $\mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ e } x < b\}.$$

Se I è uno di questi intervalli

$|I| = b - a$. (ampiezza dell'intervallo)

$x, y \in I$, allora $|x - y| \leq |I|$

se $a \leq x \leq y \leq b \Rightarrow |x - y| = y - x \leq b - a$

$a \in \mathbb{R}$

$[a, \to [\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

$]a, \to [\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$

$]\leftarrow, a]$

$]\leftarrow, a[.$

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}.$

$0, 1 \in \mathbb{R} \quad 0 < 1.$

Intuitivamente i numeri naturali li generano sommando 1 a partire da 0.

0

$1 = 1 + 0$

$2 = 1 + 1$

$3 = 2 + 1$

$4 = 3 + 1$

$\vdots$

Def Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice **induttivo** se verifica le seguenti prop.

1) $0 \in A$
2) $\forall x \in \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow x+1 \in A$.

Esempi $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ sono sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$.

Teorema

Esiste il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$.

Dim:

$$\mathcal{F} = \{ A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ è un sottoinsieme induttivo} \}$$

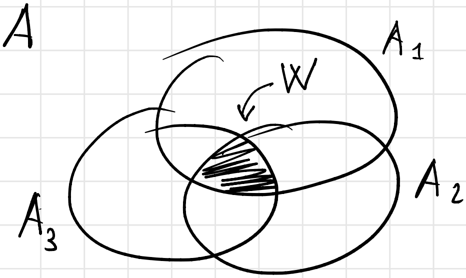
$$\mathcal{F} \neq \emptyset$$

$$x \in W = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \iff \forall A \in \mathcal{F} : x \in A.$$

1) W è induttivo $\quad 0 \in W$

$x \in W \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F},\ x \in A \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F} : x+1 \in A \Rightarrow x+1 \in W$

2) $\forall A \in \mathcal{F} : W \subset A$



$\square$

Def L'insieme dei numeri naturali è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

Gli elementi di $\mathbb{N}$ vengono denotati con $n, m, k, \dots$

Osserv: $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$ e perciò

$$\begin{cases} 0 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad S(n) = n+1$$

funzione successore.

$$0,\ 1 = S(0),\ 2 = S(1),\ 3 = S(2),\ 4 = S(3) \dots$$

$$0, 1, 2, 3, 4 \dots \in \mathbb{N}.$$

Principio di induzione (1ª forma)

Sia $A \subset \mathbb{N}$ tale che

1) $0 \in A$

2) $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Allora $A = \mathbb{N}$.

<u>Dim</u>, evidentemente A è un sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{N}$ è il più piccolo sott... ,

$\mathbb{N} \subset A$, $\Rightarrow A = \mathbb{N}$. $\square$