Lezione 46

Ancora sugli integrali di funzioni razionali.

1 $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ caso grado $q(x)=1$

$$p(x) = d(x)\cdot\underbrace{q(x)} + r(x)$$

grado $r(x) < 1 \Rightarrow r(x)$ costante

Se $q(x) = ax+b$.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{d(x)}_{\text{polinomio}} + \frac{c}{ax+b}$$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int d(x)\,dx + \frac{c}{a}\int \frac{D(ax+b)}{ax+b}\,dx$$

$$= \int d(x)\,dx + \frac{c}{a}\log|ax+b| + c.$$

Es. $\displaystyle\int \frac{X+1}{3X-2}\,dX$

$$\begin{array}{r|l} X+1 & 3X-2 \\ \hline X-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline // \quad \frac{5}{3} & \end{array}$$

$$X+1 = \frac{1}{3}(3X-2) + \frac{5}{3}$$

$$\frac{X+1}{3X-2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\,\frac{1}{3X-2}$$

$$\int \frac{X+1}{3X-2}\,dX = \frac{1}{3}X + \frac{5}{3}\log|3X-2| + c.$$

Osservazione se grado $q(x) = 2$ e $\Delta = 0$ si ha $q(x) = ax^2+bx+c$ $= a(x-x_0)^2$ e si può fare la seguente scomposizione immediata

$$\int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}\,dx = \int \frac{m(x-x_0)+mx_0+n}{a(x-x_0)^2}\,dx$$

$$= \frac{m}{a}\int \frac{1}{x-x_0}\,dx + \frac{mx_0+n}{a}\int \frac{1}{(x-x_0)^2}\,dx$$

$$= \frac{m}{a}\log|x-x_0| - \frac{mx_0+n}{a}\,\frac{1}{x-x_0} + c$$

Integrali che si riconducono a funzioni razionali

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int R(e^{\lambda x})\,dx$ con $\lambda \neq 0$ e $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ funzione razionale.

Si effettua la sostituzione

$$t = e^{\lambda x} \iff \lambda x = \log t \iff x = \frac{1}{\lambda}\log t = \varphi(t)$$

$$\text{e} \quad \varphi'(t) = \frac{1}{\lambda t}.$$

Allora $$\int R(e^{\lambda x})\,dx = \left(\int \underbrace{R(t)\cdot\frac{1}{\lambda t}}_{\text{funzione razionale}}\,dt\right)_{t=e^{\lambda x}}$$

Esempi

1) $$\int \frac{2\sqrt{e^x}+e^{2x}}{e^x-4}\,dx = \int \frac{2e^{\frac{x}{2}}+e^{4\frac{x}{2}}}{e^{2\frac{x}{2}}-4}\,dx = (*)$$

Si faccia la sostituzione

$$t = e^{x/2} \iff \frac{x}{2} = \log t \iff x = 2\log t = \varphi(t)$$

quindi $\varphi'(t) = \frac{2}{t}$ e risulta

$$(*) = \left(\int \frac{2\cancel{t}+t^{\cancel{4}\,3}}{t^2-4}\cdot\frac{2}{\cancel{t}}\,dt\right)\Big|_{t=e^{x/2}} = 2\left(\int \frac{t^3+2}{t^2-4}\,dt\right)\Big|_{t=e^{\frac{x}{2}}}$$

$$\begin{array}{lll|l} t^3 & & +2 & t^2-4 \\ \hline t^3 & -4t & & t \\ \hline // & 4t+2 & & \end{array}$$

$$t^3+2 = (t^2-4)\cdot t + 4t+2. \implies \frac{t^3+2}{t^2-4} = t + \frac{4t+2}{t^2-4}$$

$$\frac{4t+2}{t^2-4} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} \iff 4t+2 = A(t+2)+B(t-2)$$

$$\iff 4t+2 = (A+B)t + 2(A-B)$$

$$\begin{cases} A+B = 4 \\ A-B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2A = 5 \\ 2B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 5/2 \\ B = 3/2. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{4t+2}{t^2-4} = \frac{5}{2}\,\frac{1}{t-2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{t+2}.$$

In definitiva $\quad \dfrac{t^3+2}{t^2-4} = t + \dfrac{5}{2}\,\dfrac{1}{t-2} + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{t+2}$

e allora

$$(*) = 2\left(\int \frac{t^3+2}{t^2-4}\,dt\right)_{t=e^{x/2}} = \left(\int 2t + \frac{5}{t-2} + \frac{3}{t+2}\,dt\right)_{t=e^{x/2}}$$

$$= \left(t^2 + 5\log|t-2| + 3\log|t+2|\right)_{t=\sqrt{e^x}} + c$$

$$= e^x + 5\log|\sqrt{e^x}-2| + 3\log|\sqrt{e^x}+2|\,dx$$

2) $\quad \displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

$$t = e^x \iff x = \log t = \varphi(t) \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \left(\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} =$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1+t-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \left(\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt \right)_{t=e^x} = \left(\log t - \log(t+1) \right)_{t=e^x} + c$$

$$= x - \log(1+e^x) + c.$$

$\boxed{2}$ $$\int R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen} x \cos x)\,dx$$

dove $R(s,t,w) = \dfrac{p(s,t,w)}{q(s,t,w)}$ è rapporto di polinomi in s, t, w.

In questo caso si nota che

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

da cui segue che

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

(**) $$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{tg} x \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Perciò se si effettua la sostituzione

$$t = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t), \quad \varphi : \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

si ha $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ e utilizzando le (**) risulta

$$\int R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen}x \cos x)\, dx$$

$$= \left(\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt \right)_{t = \operatorname{tg} x}$$

si ottiene così un integrale di una funzione razionale.

Esempi

1) $$\int \frac{1}{\cos x(\operatorname{sen}x + \cos x)}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \left(\int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt \right)_{t = \operatorname{tg} x}$$

$$= \left(\int \frac{1}{t+1}\, dt \right)_{t = \operatorname{tg} x} = \left(\log|t+1| \right)_{t = \operatorname{tg} x} + c$$

$$= \log|\operatorname{tg} x + 1| + c.$$

Si noti che la sostituzione vale per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Infatti per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha $\cos x(\operatorname{sen}x + \cos x) = 0$.

2) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}2x}{7+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{7+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{2\operatorname{sen}x\, D\operatorname{sen}x}{7+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \left(\int \frac{2y}{7+y^2}\right)_{y=\operatorname{sen}x}$$

$$= \left(\int \frac{D(7+y^2)}{7+y^2}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x} = \left(\log 7+y^2\right)_{y=\operatorname{sen}x} + c$$

$$= \log(7+\operatorname{sen}^2 x) + c.$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx$

dove $R(s,t) = \dfrac{p(s,t)}{q(s,t)}$ è una funzione razionale in r,s.

Si utilizzano le formule di duplicazione

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \quad \operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

e quindi ricordando le (**) risulta.

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Allora si effettua la sostituzione

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \iff \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2} \iff x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t)$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[\quad e \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

Quindi

$$\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx = \Bigg(\int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{2}{1+t^2}}_{\text{funzione razionale}}\,dt\Bigg)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Esempio

1) $$\int \frac{1}{\operatorname{sen}x}\,dx = \left(\int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\int \frac{1}{t}\,dt\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

2) $$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\,dx = \left(\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\int \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left(\int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{t+1}\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + c$$

Integrali impropri

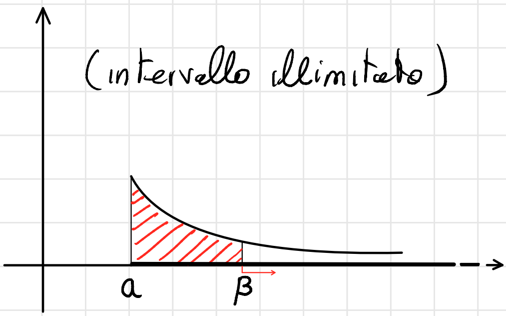
L'integrale di Riemann vale sotto le seguenti ipotesi:

1) l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato
2) la funzione è limitata

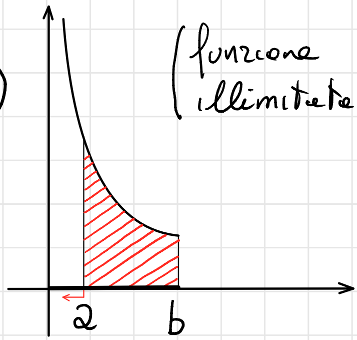
Gli integrali impropri si introducono per dare significato all'integrale anche quando le condizioni di sopra non sono verificate.

Esempio (vediamo due situazioni)

① (intervallo illimitato)



② (funzione illimitata)



Sia $p > 0$ e $a, b > 0$.

① $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$

② $f :]0, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$

Consideriamo ①

$\forall \beta \in]a, +\infty[:$

$$\int_a^\beta f = \int_a^\beta \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^\beta \\ \left[\log x\right]_a^\beta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\beta^{1-p} - a^{1-p}\right) & \text{se } p \neq 1 \\ \log \beta - \log a & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\beta^{1-p} - a^{1-p}\right) & \text{se } p < 1 \\ \log \beta - \log a & \text{se } p = 1 \\ \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{\beta^{p-1}}\right) & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Dato che $f \geq 0$, l'integrale $\int_a^\beta f$ è l'area sotto il grafico di f nell'intervallo $[a,\beta]$. Quindi per $\beta \to +\infty$ l'integrale tende all'area sotto il grafico di f nell'intervallo $[a,+\infty[$. È allora naturale definire

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f$$

e tenendo conto delle formule trovate sopra risulta

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Consideriamo adesso il caso 2

$$\forall a \in]0,b[: \quad \int_a^b f = \int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^b & \text{se } p \neq 1 \\ \log b - \log a & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - a^{1-p}\right) & \text{se } p \neq 1 \\ \log b - \log a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - a^{1-p}\right) & \text{se } p < 1 \\ \log b - \log a & \text{se } p = 1 \\ \dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{a^{p-1}} - \dfrac{1}{b^{p-1}}\right) & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Come prima è naturale definire l'integrale su I come limite dell'integrale sull'intervallo $[a,b]$ per $a \to 0$ e risulta

$$\int_0^b f = \lim_{a \to 0} \int_a^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{b^{1-p}}{1-p} & \text{se } p < 1 \\ +\infty & \text{se } p \geq 1. \end{cases}$$

Diamo allora la definizione formale di integrale improprio.

Ricordiamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile secondo Riemann su I se $\forall a, \beta \in I$ $a < \beta$, risulta $f_{|[a,\beta]}$ è limitata e integrabile su $[a,\beta]$.

Def Supponiamo che f sia localmente integrabile su I

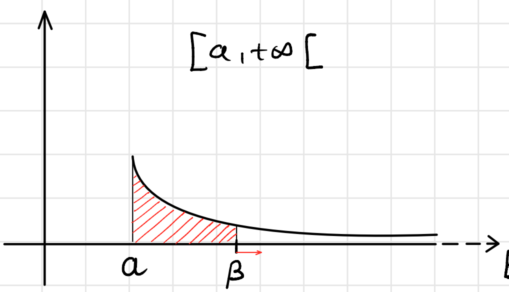
CASO 1 $I = [a, b[$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $a < b$.

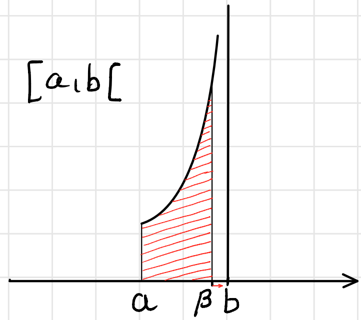
$$\text{Se } \exists\, l \in \overline{\mathbb{R}} \text{ t.c. } \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f = l$$

tale limite si dice integrale improprio o generalizzato di f su $[a, b[$ e si indica con

$$\text{con } \int_a^b f \quad \text{o con} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Se $l \in \mathbb{R}$ (il limite è finito), allora f si dice integrabile in senso improprio (o generalizzato) su $[a, b[$ o si dice che l'integrale su I è convergente. Mentre se $l = \pm\infty$ si dice che l'integrale su I è divergente. Nel caso il limite non esiste si dice che l'integrale è indeterminato.





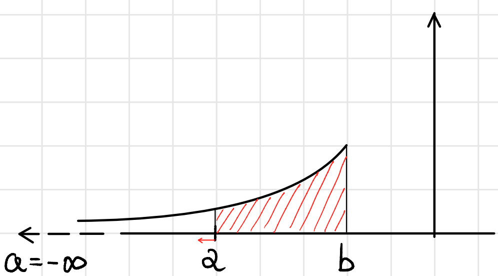
<u>CASO 2</u>: $I =]a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

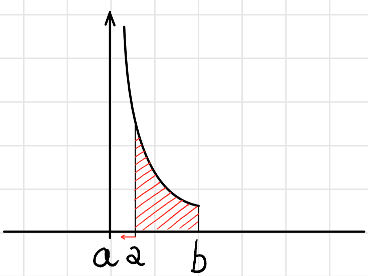
Se $\exists\, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\lim\limits_{\partial \to a} \int_{\partial}^{b} f = \ell$,

tale limite si dice integrale improprio o generalizzato di f su $]a, b]$ e si indica con

con $\int_a^b f$ o con $\int_a^b f(x)\,dx$

Se il limite esiste finito, allora f si dice integrabile in senso improprio (o generalizzato) su $]a, b]$ o si dice che l'integrale su I è convergente. Mentre se $\ell = \pm\infty$ si dice che l'integrale su I è divergente. Nel caso il limite non esiste si dice che l'integrale è indeterminato.





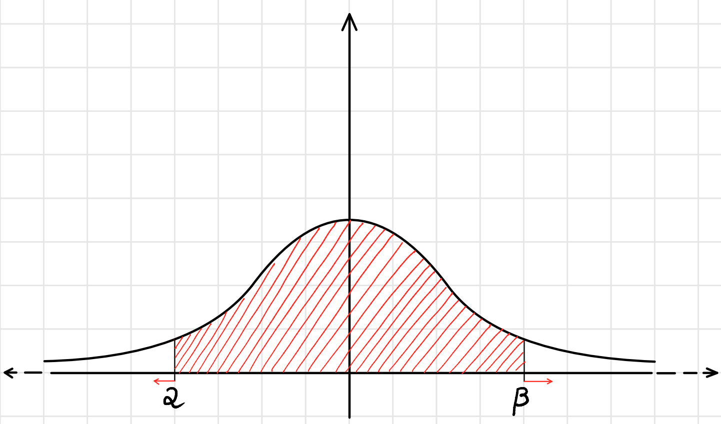
CASO 3 $I =]a,b[$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$.

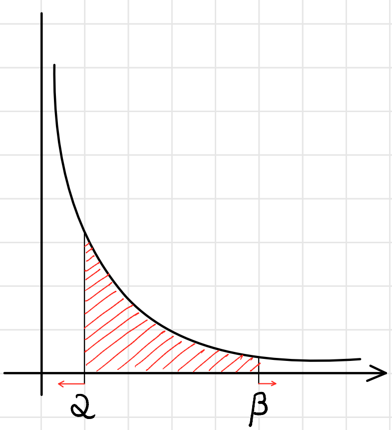
Sia $c \in]a,b[$. Se esistono entrambi gli integrali impropri di f su $]a,c]$ e $[c,b[$ e se $\int_a^c f$ e $\int_c^b f$ si possono sommare, cioè non danno luogo ad una forma indeterminata, allora si pone

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \in \overline{\mathbb{R}}$$

e si chiama integrale improprio di f su $]a,b[$.

Se gli integrali impropri $\int_a^c f$ e $\int_c^b f$ esistono finiti, si dice che f è integrabile in senso improprio su $]a,b[$.





<u>Osserv:</u> Sia $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrale di f di punto iniziale qualunque. Sappiamo che

$$\forall \alpha, \beta \in I: \quad \int_\alpha^\beta f = F(\beta) - F(\alpha).$$

<u>Nel caso 1</u> $I = [a, b[$ si ha $\int_a^\beta f = F(\beta) - F(a)$

e quindi sono equivalenti

(i) esiste l'integrale improprio di f su $[a, b[$

(ii) $\exists \lim_{\beta \to b} F(\beta) \in \overline{\mathbb{R}}$

e, vera l'una e quindi l'altra:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{\beta \to b} F(\beta) - F(a) = F(b-) - F(a)}$$

<u>Nel caso 2</u> $I =]a, b]$ si ha $\int_\alpha^b f = F(b) - F(\alpha)$

e quindi sono equivalenti

(i) esiste l'integrale improprio di f su $]a, b]$

(ii) $\exists \lim_{\alpha \to a} F(\alpha) \in \overline{\mathbb{R}}$

e vera l'una e quindi l'altra:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a} F(b) - F(\alpha) = F(b) - F(a+)}$$

Nel caso 3 $I =]a,b[$, preso $c \in \mathring{I}$ si ha

$\forall \alpha \in]a,c[$ e $\forall \beta \in]c,b[$: $$\int_\alpha^\beta f = \underbrace{F(\beta)-F(c)}_{\int_c^\beta f} + \underbrace{F(c)-F(\alpha)}_{\int_\alpha^c f}$$

e quindi sono equivalenti

(i) esiste l'integrale improprio di f su $]a,b[$

(ii) $\exists \lim_{\alpha \to a} F(\alpha) \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\exists \lim_{\beta \to b} F(\beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ e non sono entrambi $+\infty$ o entrambi $-\infty$,

e vera l'una e quindi l'altra risulta

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{\beta \to b} F(\beta) - \lim_{\alpha \to a} F(\alpha) = F(b-) - F(a+)}$$

Osservazione

Se $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f, allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale

CASO 1: $$\int_a^\beta f = F(\beta) - F(a) \qquad \forall \beta \in \mathring{I}$$

CASO 2: $$\int_\alpha^b f = F(b) - F(\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathring{I}$$

CASO 3: $$\int_\alpha^\beta f = (F(\beta)-F(c)) + (F(c)-F(\alpha)) \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathring{I},\ \alpha<\beta$$

e quindi le conclusioni che sono state stabilite sopra per la funzione integrale di f, valgono anche per F.

Notiamo che per tutti e tre i casi trattati sopra si può dire che sono equivalenti

(i) esiste l'integrale improprio di f su I

(ii) esistono i limiti di F agli estremi di I

e non sono entrambi $+\infty$ o entrambi $-\infty$.

E vera (i) o (ii), risulta $\boxed{\int_a^b f = F(b-) - F(a+)}$ (1)

Questo perché, essendo F continua in I, se $a \in I$, allora $F(a+) = F(a)$ e se $b \in I$, allora $F(b-) = F(b)$

Inoltre sono equivalenti

(i) f è integrabile in senso improprio su I

(ii) esistono finiti i limiti di F agli estremi di I.

e vera l'una e quindi l'altra vale la (1).

Esempio

1) stabiliamo se esiste $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ su $\mathbb{R}$ è la funzione $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dato che $\lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} \beta = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} \alpha = -\frac{\pi}{2}$

risulta che $\frac{1}{1+x^2}$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$ e risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} \beta - \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2) stabiliamo se esiste $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ con $p \geq 0$

Una primitiva di $\frac{1}{x^p}$ su $]0,+\infty[$ è la funzione $F:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} & \text{se } p \neq 1 \\ \log x & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Valutiamo quindi i limiti di F agli estremi dell'intervallo

$$\lim_{\alpha \to 0^+} F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1 \\ -\infty & \text{se } p = 1 \\ -\infty & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) = \begin{cases} +\infty & \text{se } p < 1 \\ +\infty & \text{se } p = 1 \\ 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Quindi i limiti esistono sempre e non sono mai entrambi $+\infty$ o entrambi $-\infty$.

Allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = F(+\infty) - F(-\infty) = +\infty.$