Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica

Sapienza Università di Roma.

Appello del 07.02.2023 Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Gli studenti con DSA sono esonerati dalle domande con $*$. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi. L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode.

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti*)**.**

a) *Dare la definizione di* $a_n \to 0$ *per* $n \to 0$.

b) *Dimostrare la condizione necessaria per la convergenza di una serie, cioè che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente } \implies a_n \to 0.$$

c) (opzionale – 2 punti). *Mostrare un esempio per cui non vale il viceversa nell'implicazione di sopra.*

Risposta:

a)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}, n > \nu : \ |a_n| < \varepsilon$

b) Sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la successione delle somme parziali

e supponiamo che $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$.

Dato che $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, si ha $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Ma evidentemente $S_n \to \ell$ e $S_{n+1} \to \ell$ e quindi

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \to \ell - \ell = 0,$$

(il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti)

Infine $a_{n+1} \to \ell \Rightarrow a_n \to \ell$. $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la serie armonica è divergente, ma $\frac{1}{n} \to 0$.

Domanda 1.2 (2+10 punti).

a) *Dare la definizione di* funzione integrale, *di punto iniziale assegnato, di una funzione f.*

b) *Enunciare e dimostrare il* Teorema fondamentale del calcolo integrale *(solo la parte della derivabilità della funzione integrale)*

c) (opzionale – 3 punti) *Se f è una funzione positiva, cosa si può dire della sua funzione integrale?*

Risposta:

a) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile secondo R.

Sia $a \in I$, la funzione integrale di f di p.to iniziale a è

la funzione $F_a : I \to \mathbb{R}$ con $F_a(x) = \int_a^x f$.

b) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile sec R. e $F: I \to \mathbb{R}$ una funzione integrale di f di punto iniziale qualunque. Se f è continua in I, allora F è derivabile in I e $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

<u>Dim:</u> Sia $x \in I$ e sia $h \in \mathbb{R}$ t.c. $x+h \in I$.

Allora $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f$ (questo segue dalle proprietà della funzione integrale)

Dato che f è continua, per il teorema della media integrale $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f = f(c(h))$ con $c(h)$ compreso tra x e $x+h$.

Allora $|c(h)-x| \leq h$ e quindi $c(h) \to x$ per $h \to 0$.

Ma, essendo f continua in x, si ha $f(c(h)) \to f(x)$ per $h \to 0$

In definitiva $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x)$ per $h \to 0$

e quindi F è derivabile in x e $F'(x) = f(x)$.

c) Se f è positiva, $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$ risulta

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0 \quad \text{(per la monotonia dell'int.)}$$

e quindi $F(x) \leq F(y)$, cioè <u>F è crescente</u>

Domanda 1.3 (3+7 punti).

a) *Per una funzione f, dare la definizione di derivabilità in un punto x_0.*

b) *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = 0$. Allora è necessariamente vero che*

1) *$|f|$ è derivabile in x_0*
~~2)~~ *$|f|$ è continua in x_0*
3) *$|f|$ non è derivabile in x_0*

Risposta:

a)

f è derivabile in $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito.

b) 2) perchè f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

E dato che $|\cdot|$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$,

$|f|$ è continua in x_0 (composizione di funzioni continue)

la 1) è falsa se $f(x) = x$ e $x_0 = 0$

la 3) è falsa se $f(x) = x^2$

Domanda 1.4 (3+3 punti*). *Sia $A \subset \mathbb{R}$.*

a) *Dare la definizione di maggiorante di A*

b) *Dare la definizione di estremo superiore di A.*

Risposta:

a)

$M \in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se $\forall x \in A : x \leq M$.

b) $\mu \in \mathbb{R}$ è estremo superiore di A se

1) $\forall x \in A \quad x \leq \mu$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ t.c. $x > \mu - \varepsilon$.
(oppure: $\forall y \in \mathbb{R}, y < \mu, \ \exists x \in A$ t.c. $x > y$).

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^\alpha)}{1 - \cos x}$$

a) $\alpha = 2$ *e nessun altro valore.*

~~*b)*~~ $\alpha \geq 2$

c) $\alpha = 1$

d) $\alpha < 2$

Risoluzione: (giustificare la risposta):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^\alpha)}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{\to 2} \cdot x^{\alpha-2}$$

$\lim_{x \to 0} x^{\alpha-2}$ è finito $\iff \alpha - 2 \geq 0 \iff \alpha \geq 2$

Oppure: $\log(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$ e $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

Perciò $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^\alpha)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{x^\alpha}{x^2}$

e di nuovo il limite è finito $\iff \alpha \geq 2$.

Esercizio 2.2 (8 punti*).

a) *Stabilire il carattere della serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

1) *convergente.*
~~2)~~ *divergente.*
3) *irregolare.*

b) (opzionale – 4 punti) *Cosa si può dire della serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$*? (suggerimento: verificare il criterio del rapporto oppure la monotonia e quindi il limite dei termini della serie).*

Risoluzione (giustificare la risposta):

a) Si usa il criterio del rapporto con $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3\cdot\cancel{3^n}\,\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{3^n}\cdot\cancel{n!}}$$

$$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\,\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 3\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1$$

La serie è divergente

b) Come prima si verifica che, se $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, allora

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ e quindi con il criterio del rapporto non si può concludere nulla. Possiamo invece studiare la monotonia della successione.

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{e^n n!}{n^n} < \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \iff \frac{\cancel{e^n}\cancel{n!}}{n^n} < \frac{e\cdot\cancel{e^n}\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

e quest'ultima disuguaglianza è sempre vera per definizione di e.

Perciò $\lim_n a_n = \sup_n a_n > 0$ e quindi la serie non può convergere ed essendo a termini positivi, deve necessariamente divergere.

Esercizio 2.3 (6 punti). *Sia* $f(x) = \sqrt{\log \operatorname{sen} x}$ *e sia* A *il dominio (naturale) di* f. *Quale delle seguenti è vera?*

a) $A = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

~~*b)*~~ $A = \{\pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) $A = [0, +\infty[$

d) nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > 0 \\ \log(\operatorname{sen} x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sen} x > 0 \\ \operatorname{sen} x \geq 1 \end{cases} \iff \operatorname{sen} x \geq 1 \iff \operatorname{sen} x = 1$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen} x dx$$

Risoluzione:

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti 2 volte e con fattore differenziale e^x (si può anche procedere con fattore differenziale $\operatorname{sen} x$)

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \int De^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int De^x \cos x\,dx$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \right]$$

$$= e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Da cui segue $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + c$

Allora ricordando che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si ha

$$\int e^x \cos x\,dx = \left[\frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2} \cdot 0 - \frac{e^0}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.5 (10+4 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x-1)^2 e^x.$$

e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione degli estremi locali e assoluti.*

b) *studio della derivata seconda e determinazione di intervalli di convessità e concavità e dei punti di flesso.*

Risoluzione:

Dominio $A = \mathbb{R}$

Segno: $(x-1)^2 \geq 0$ e $e^x > 0$, quindi $f(x) \geq 0$

La funzione è sempre positiva e $f(x) = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.
$x = 1$ è un p.to di minimo globale.

Limiti ai punti di frontiera e asintoti

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)^2 e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1)^2 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{-x}} \overset{t=-x}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{(t+1)^2}{e^t} = 0$$ per la

gerarchia di infiniti. Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^2 e^x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x(1 - 1/x)^2 e^x = (\pm\infty) \cdot (+\infty) = \pm\infty$$

non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima e monotonia

f è derivabile in $\mathbb{R}$ (perchè prodotto di funz. derivabili) e

$$f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = (x-1)e^x(2+x-1) = (x^2-1)e^x$$

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1 \lor x \geq 1$$

f': $+$ $\quad -1 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$

f è strett. crescente in $]-\infty,-1]$ e in $[1,+\infty[$

f è strett. decrescente in $[-1,1]$

-1 è p.to di massimo locale per f $\qquad f(-1) = 4e^{-1}$

1 è p.to di minimo assoluto per f. $\qquad f(1) = 0$

Derivata seconda e convessità/concavità/flessi

$$f''(x) = D[(x^2-1)e^x] = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)e^x$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x^2+2x-1 \geq 0 \iff x \leq -1-\sqrt{2} \lor x \geq -1+\sqrt{2}$$

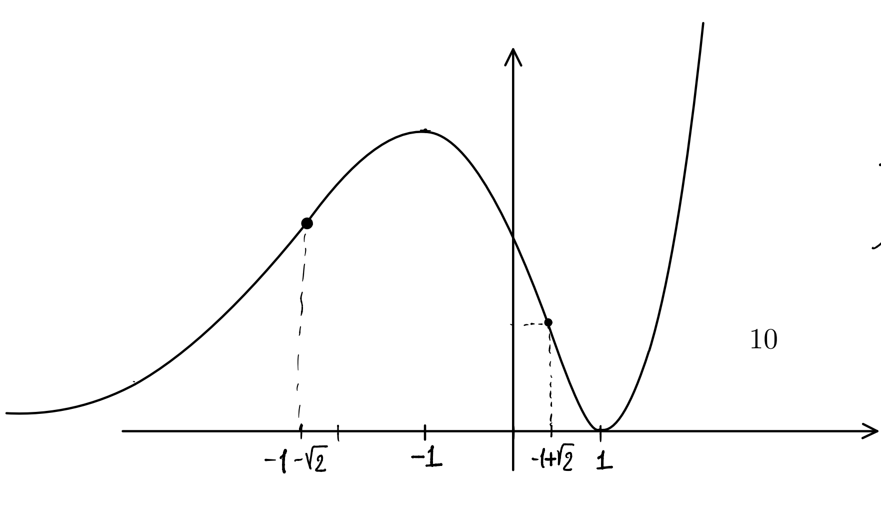
f'': $+$ $\quad -1-\sqrt{2} \quad$ $-$ $\quad -1+\sqrt{2} \quad$ $+$

f è strett. conv. in $]-\infty,-1-\sqrt{2}]$ e in $[-1+\sqrt{2},+\infty[$

f è strett. concava in $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$

$-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$ sono p.ti di flesso per f.

$f(-1-\sqrt{2}) = 2(3+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$, $f(-1+\sqrt{2}) = 2(3-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$



Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p\in\mathbb{R}).$
2. $D \operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D\cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D\log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
11. $D\operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D\cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di MacLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ per $x\to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$
3. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$ per $x\to 0$
4. $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ per $x\to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n)$ per $x\to 0$.
6. $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$.

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
12. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$