

Esercizi sugli integrali impropri

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{2x-3}{x^2+1} dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1} = \frac{x}{x^2} \cdot \frac{(2-3/x)}{1+1/x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2-3/x}{1+1/x^2}$$

2

Percio' $f(x) \approx \frac{1}{x}$ e quindi l'integrale 1 non è convergente

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} dx$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} \frac{\log x}{x^{1/2}} \Rightarrow f(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

e perciò l'integrale improprio è convergente.

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} dx$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{x^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} + 1 \right) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{x^{3/2}}$$

l'integrale improprio è convergente

$$4) \int_0^1 x \log x \, dx \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = 0$$

$x \log x$ è prolungabile per cont. in 0.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log x \, \Delta \frac{x^2}{2} \, dx &= \left[\frac{x^2 \log x}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= - \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = - \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$5) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} \, dx \quad (\sin x \geq 0 \text{ per } x \in [0,1])$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Quindi l'integrale è divergente.

$$6) \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{3/2}} \, dx$$

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{e^{-x}-1}{-x} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Perciò l'integrale è convergente

$$7) \int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_2^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx &= \int_2^{1/2} \frac{d \log x}{\log x} dx = \left[\log |\log x| \right]_2^{1/2} \\ &= (\log |\log 1/2| - \log |\log 2|) \rightarrow -\infty \text{ per } 2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$8) \text{ Calcolare l'integrale } \int_0^{+\infty} (x^2-x) e^{-x} dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\begin{aligned} \int (x^2-x) e^{-x} dx &= \int (x-x^2) D e^{-x} dx \\ &= (x-x^2) e^{-x} - \int (1-2x) e^{-x} dx \\ &= (x-x^2) e^{-x} + \int (1-2x) D e^{-x} dx \\ &= (x-x^2) e^{-x} + (1-2x) e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-x^2) e^{-x} + (1-2x) e^{-x} - 2e^{-x} + c \\
 &= [x-x^2 + 1-2x-2] e^{-x} + c \\
 &= -(x^2+x+1) e^{-x} + c
 \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} (x^2-x) e^{-x} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-(x^2+x+1) e^{-x} \right]_0^\beta \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-(\beta^2+\beta+1) e^{-\beta} + 1 \right) \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\frac{\beta^2+\beta+1}{e^\beta} + 1 = 1
 \end{aligned}$$

g) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \\
 &= \int \frac{de^x}{e^{2x} + 1} dx = \left(\int \frac{1}{y^2+1} dy \right)_{y=e^x} \\
 &= \operatorname{arctg} e^x + c
 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\operatorname{arctg} e^x \right]_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} e^\beta - \operatorname{arctg} 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

10) Studiare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^2+1) - 2\log x} dx$$

$$f(x) = \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^2+1) - 2\log x^2} = \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)} = \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{(1/x)^5} \cdot \frac{x^2}{x^5} \cdot \frac{1/x^2}{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^3} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

Perciò l'integrale è convergente

$$11) \int_1^{+\infty} \frac{e^{x^2}}{1 + e^{2x^2}} dx$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{1 + e^{2x^2}} = \frac{e^{x^2}}{e^{2x^2}} \frac{1}{e^{-2x^2} + 1}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$$

Dato che e^{-x^2} è integrabile in senso improprio,
allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty]$

$$12) \int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5 + \sin e^x}} dx$$

$$f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5 + \sin e^x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1 + \frac{\sin e^x}{x^5}}} \cdot \frac{x}{x^{5/3}} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

Quindi l'integrale è divergente

$$13) \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^p}{x^2} dx = (*)$$

$$(*) = \underbrace{\int_0^1 \frac{|\sin x|^p}{x^2} dx}_{\textcircled{1}} \quad \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^p}{x^2} dx}_{\textcircled{2}}$$

$$\textcircled{2} \leq \int \frac{1}{x^2} dx < +\infty.$$

$$\textcircled{1} \text{ per } x \in [0, 1]: f(x) = \frac{(\sin x)^p}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p, x^{p-2} \sim x^{p-2}$$

Se $p-2 \geq 0$ la funzione x^{p-2} è continua su $[0, 1]$
e quindi è integrabile

Se $p-2 < 0$, allora

$$x^{p-2} = \frac{1}{x^{2-p}} \text{ è integrabile su } [0, 1] \Leftrightarrow 2-p < 1 \Leftrightarrow p > 1$$