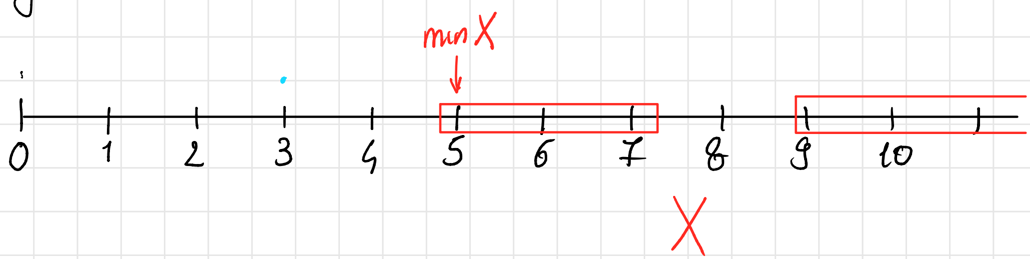
Lezione 6

Teorema ($\mathbb{N}$ è bene ordinato)

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ è dotato di minimo.



Dim $X \subset \mathbb{N}$ $X \neq \emptyset$. Bisogna provare che $\exists \min X$.

In altri termini si tratta di provare che esiste un minorante di X che appartiene ad X.

Vale la seguente proprietà

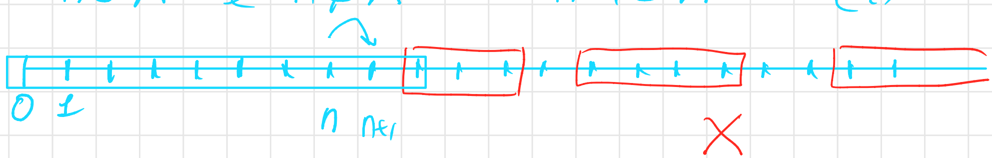
n è un minorante di X e $n \notin X \Rightarrow n+1$ è un minorante di X

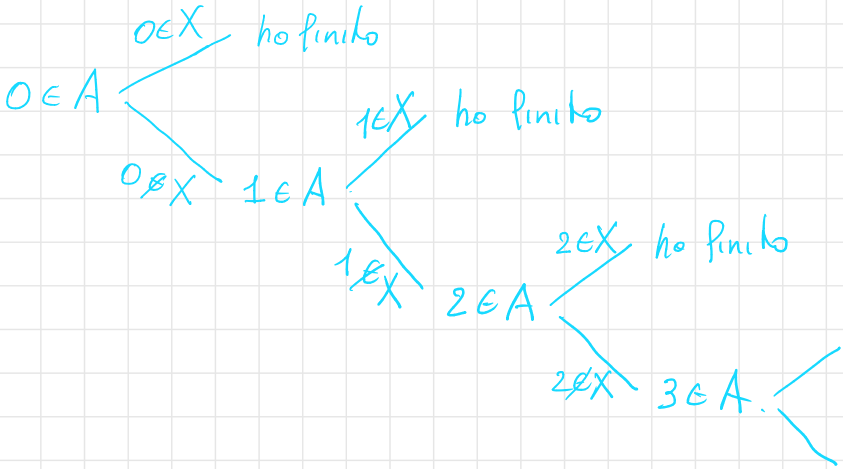
Infatti:

$(\forall m \in X : n \leq m)$ e $n \notin X \Rightarrow (\forall m \in X \ n < m) \Rightarrow \forall m \in X \ n+1 \leq m$

Se indichiamo con A l'insieme dei minoranti di X in $\mathbb{N}$ si ha.

$$n \in A \quad \text{e} \quad n \notin X \quad \Rightarrow \quad n+1 \in A \qquad (1)$$





Se il procedimento non avesse fine allora si avrebbe $\forall n\in\mathbb{N}: n\in A$ e $n\notin X$, ma questo implica che $X=\emptyset$, che è assurdo.

Esempio

$$A=\{n^2-2n+3 \mid n\in\mathbb{N}\}\subset A$$

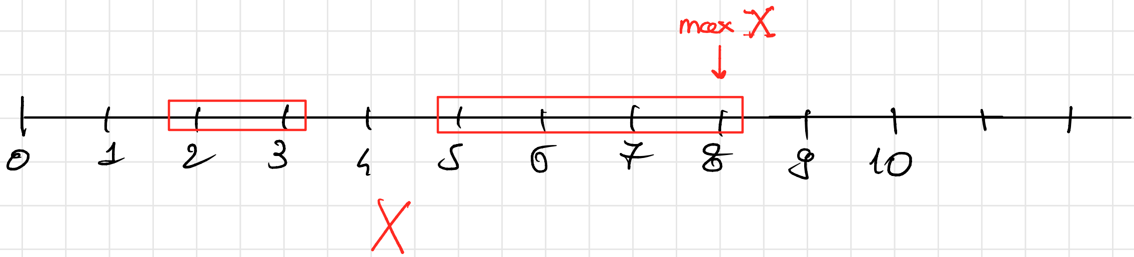
$$n^2-2n+1=(n-1)^2$$

$$n^2-2n+3=(n-1)^2+2\geq 2.$$

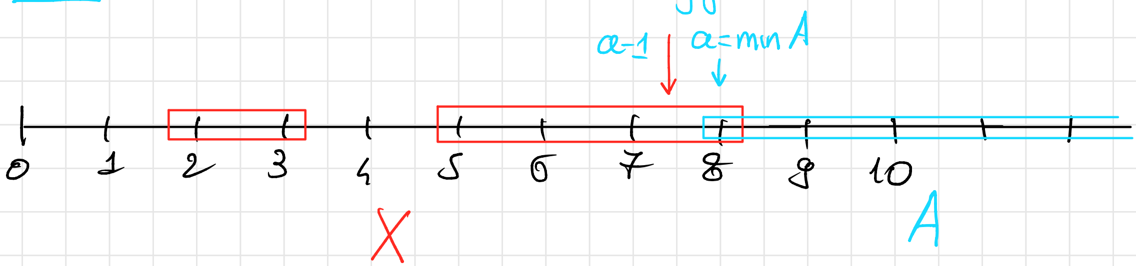
$$\{3,2,6,\dots$$

$$\min A = 2.$$

Teorema ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ che è limitato superiormente in $\mathbb{N}$ ha massimo



Dim: Sia A l'insieme dei maggioranti di X in $\mathbb{N}$



$a = \min A$. Evidentemente a è un maggiorante di X

- Devo provare che $a \in X$ (perché così a è il massimo di X)

Se $a = 0$, allora $\forall n \in X : n \leq 0 \Rightarrow X = \{0\}$ e $0 = \max X$

Se $a \neq 0$, allora $a \geq 1$ e quindi $a-1 \in \mathbb{N}$.

Ma $a-1 < a = \min A$, perciò $a-1 \notin A$.

Allora $\exists\, n \in X$ t.c. $n > a-1$.

Perciò risulta $a-1 < n \leq a$ e allora necessariamente $n = a$. Ma $n \in X$ e quindi $a \in X$.

Teorema (divisione euclidea)

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \neq 0$.

Allora $\exists! \, (q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.c. $n = m \cdot q + r$ con $r < m$.

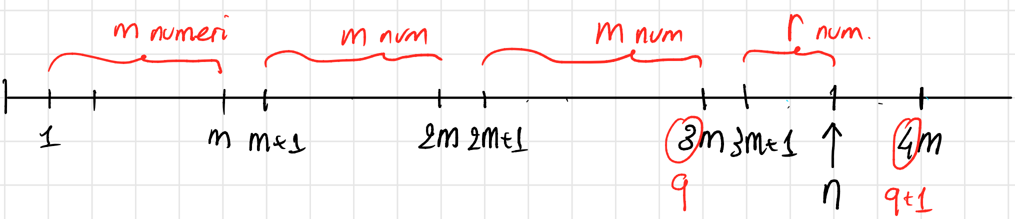
Es. $n = 25$, $m = 7$ $\qquad 25 = 7 \cdot \underbrace{3}_{q} + \underbrace{4}_{r}$

$n = 37$, $m = 5$ $\qquad 37 = 5 \cdot \underbrace{7}_{q} + \underbrace{2}_{r}$

$n < m$ $\qquad n = m \cdot \underbrace{0}_{q} + \underbrace{n}_{r}$

$n = m$ $\qquad n = m \cdot \underbrace{1}_{q} + \underbrace{0}_{r}$

Il caso interessante è $\underline{n > m}$



Dim: caso $n > m$

Si definisce $A = \{ k \in \mathbb{N} \mid mk \leq n \}$

$A \neq \emptyset$ perché $0 \in A$ e A è l.s. perché $k \leq \underbrace{mk}_{1 \leq m} \leq n$

Per il Teorema precedente $\exists \; q = \max A$.

Evidentemente $mq \le n < m(q+1)$

Poniamo $r = n - mq \in \mathbb{N}$ e risulta

$$mq + r = n < mq + m \implies r < m.$$

Si vede poi che la coppia (q,r) è unica.

<u>Def</u> $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$, dove $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$= \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ <u>insieme degli interi relativi</u>

<u>Proposizione</u>

(i) $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$ $\quad m+n$ e $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$: $\quad n \ge 0 \iff n \in \mathbb{N}$

Sia $n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n \ge 0$. $\quad n \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \implies n \in \mathbb{N} \vee n \in (-\mathbb{N})$
se $n \in \mathbb{N}$ ho finito. Se $n \in -\mathbb{N}$, allora $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c. $n = -m$
e $m \ge 0 \implies -m \le 0 \implies n \le 0$. Perciò risulta $n \ge 0$ e $n \le 0$,
cioè $n = 0 \in \mathbb{N}$.

(iii) ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Z}$ che è limitato superiormente in $\mathbb{Z}$ ha massimo

ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Z}$ che sia limitato inferiormente in $\mathbb{Z}$ ha minimo

Def Potenze con esponente negativo.

$a \neq 0 \quad n \in \mathbb{Z}$

Se $n < 0$ si pone $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

Proposizione (proprietà)

(i) $\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad a^{n+m} = a^n a^m$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

(iii) $\forall n, m \in \mathbb{N}: (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Dim:

(i): Se $n, m \in \mathbb{N}$ si è già vista. Supponiamo per esempio che $n \geq 0$ e $m \leq 0$. Allora $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$, e $n + m = n - k$

- se $n \geq k$, $\quad n = \underbrace{(n-k)}_{\geq 0} + k$

$$a^n = a^{n-k} a^k \Rightarrow a^n \cdot \frac{1}{a^{-k}} = a^{n-k} \Rightarrow a^n a^m = a^{n+m}$$

- se $n \leq k$

$$k = \underbrace{k-n}_{\geq 0} + n \qquad k - n = -(n+m)$$

$$a^k = a^{k-n} \cdot a^n \Rightarrow \frac{1}{a^{k-n}} = a^n \cdot \frac{1}{a^k} \Rightarrow a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

I casi ($n \leq 0$ e $m \geq 0$) e ($n \leq 0$ e $m \leq 0$) si dimostrano allo stesso modo.

$\square$

(ii) : se $n \geq 0$, l'abbiamo già vista.

se $n \leq 0$, allora $-n \geq$ e

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n.$$

(iii) basta fare i vari casi $n \leq 0$ $m \geq 0$, ecc...

I numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ t.c. } x = m \cdot n^{-1} \}$$

Si pone $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^*_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^*_+$ e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Proposizione

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$: $x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$ e $x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{Q}$.

Quindi $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato

Dim: $x_1 = m_1 \cdot n_1^{-1}$ $\quad x_2 = m_2 \cdot n_2^{-1}$

$$x_1 \cdot x_2 = m_1 \cdot n_1^{-1} \cdot m_2 \cdot n_2^{-1} = m_1 \cdot m_2 \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} \in \mathbb{Q}$$

$$x_1 + x_2 = m_1 \cdot n_1^{-1} + m_2 \cdot n_2^{-1} = \frac{n_2 m_1 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} \in \mathbb{Q}$$

$\square$

Lemma

Ogni numero naturale $n \geq 1$ si può scrivere nella forma $\underline{n = 2^j \cdot k}$, dove $j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ è dispari
(1)

Dim:

Se n è dispari la tesi è vera, basta prendere $j = 0$ e $k = n$. ($n = 2^0 \cdot n$ con n dispari)

Se n è pari, allora l'idea è di raccogliere i fattori 2 presenti in n. Se li raccolgo tutti, quello che rimane non può essere pari e quindi deve essere dispari.

Osservazione: ogni numero razionale positivo si può sempre rappresentare come rapporto di due numero naturali di cui almeno uno è dispari.

Infatti se $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}^*$, allora

$$x = \frac{m}{n} = \frac{2^i \cdot h}{2^j \cdot k} = \begin{cases} \dfrac{2^{i-j} h}{k} & \text{se } i \geq j \\[2ex] \dfrac{h}{2^{j-i} k} & \text{se } j \geq i \end{cases}$$

Teorema

Non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

(in altre parole $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioè $\sqrt{2}$ è irrazionale)

Dim:

Supponiamo per assurdo che $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

Dato che $x^2 = (-x)^2$ posso supporre che $x \geq 0$

Poi $x \neq 0$, perchè $0^2 = 0 \neq 2$.

Quindi $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Allora per l'osservazione precedente $x = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}^*$ e

m e n che non sono entrambi pari

Allora $x^2 = 2 \iff \dfrac{m^2}{n^2} = 2 \iff m^2 = 2n^2 \implies$

$\implies m^2$ è pari $\implies m$ è pari (perchè il quadrato di un numero dispari è dispari)

Quindi $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}^*$ e si ha

$m^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2k^2 \implies n^2$ è pari $\implies$

$\implies n$ pari

Abbiamo così trovato che m e n sono pari e quindi ottenuto una contraddizione. $\square$

Assiomi di completezza e prime conseguenze

Richiamo (caratterizzazione di sup e inf)

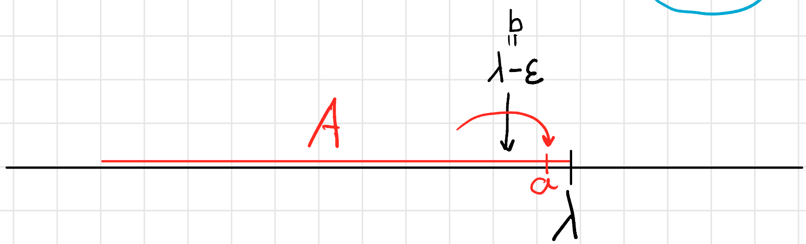
Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Allora $\lambda = \sup A$ se e soltanto se

  1) $\forall a \in A \quad a \le \lambda$

  2) $\forall b < \lambda \ \exists a \in A$ t.c. $a > b$.

  2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a > \lambda - \varepsilon$.

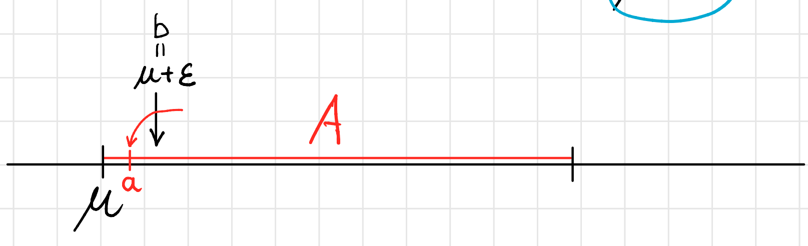


- Allora $\mu = \inf A$ se e soltanto se

  1) $\forall a \in A \quad \mu \le a$

  2) $\forall b > \mu \ \exists a \in A$ t.c. $a < b$

  2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a < \mu + \varepsilon$.



Assioma di completezza (o continuità)

CO (uno dei seguenti)

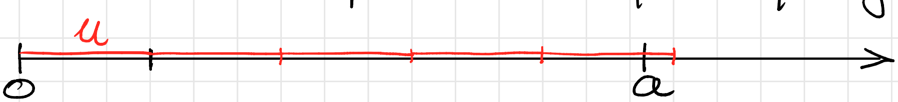
- Se $A \subset \mathbb{R}$ A l.s., allora $\exists \sup A \in \mathbb{R}$.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ A l.i, allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$
- Se $A, B \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ $A \leq B$, allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $A \leq \lambda \leq B$.

Teorema (proprietà di Archimede)
$\mathbb{N}$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$,
cioè $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > x$

<u>Osserv.</u> una seconda forma della proprietà di Archimede è: $\forall u > 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $nu > a$

(basta applicare la forma precedente a $x = \frac{a}{u}$)

In questa forma il significato è che se u è una fissata unità di misura su una retta, i multipli di questa unità superano una qualunque grandezza a.



Dim: se $\mathbb{N}$ fosse limitato superiormente, allora, per l'assioma di completezza, esisterebbe $\underbrace{\sup \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$. Ma $\sup \mathbb{N} - 1 < \sup \mathbb{N}$ quindi per le proprietà dell'estremo superiore $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \sup \mathbb{N} - 1$ e quindi

$$n + 1 > \sup \mathbb{N}.$$

Ma $n+1 \in \mathbb{N}$ e quindi avrei ottenuto una contraddizione.

Es. $A = \left\{ \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A = 0$

1) $0 \leq \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (questo è vero)

2) Sia $b > 0$. Si tratta di trovare un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{2n+1} < b$

ma $\underbrace{\frac{1}{2n+1} < b \iff 2n+1 > \frac{1}{b} \iff n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - 1\right)}$

questa condizione si può soddisfare per il principio di Archimede. Perciò $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{2n+1} < b$.

Es. $A = \left\{ \frac{3n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$$\sup A = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2+\frac{1}{n}} \qquad n \neq 0.$$

$$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{n} > 2 \Rightarrow \frac{1}{2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2+\frac{1}{n}} < \frac{3}{2}$$ $\frac{3}{2}$ è un maggiorante.

Sia $0 < b < \frac{3}{2}$. $\frac{3}{2+\frac{1}{n}} > b \iff 3 > \left(2+\frac{1}{n}\right) b$

$$\iff 3 > 2b + \frac{b}{n} \iff \underbrace{3-2b}_{>0} > \frac{b}{n}$$

$\iff n > \underbrace{\frac{b}{3-2b}}_{>0}$ e questo si può verificare per Archimede.

Teorema

L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < x < b$.

Dim:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$.

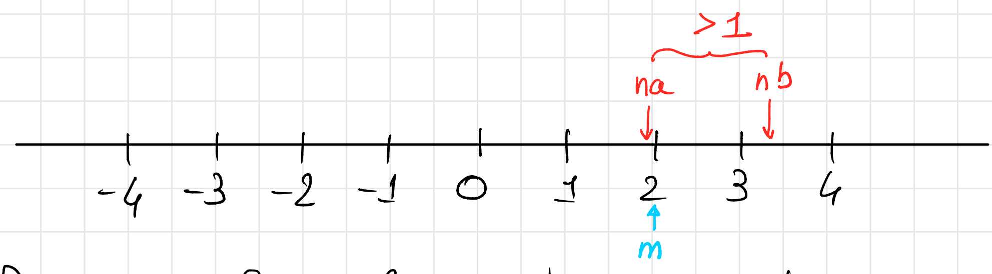
Si tratta di cercare $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ t.c.

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

$$\Updownarrow$$

$$na < m < nb. \qquad (1)$$

Ora na e nb sono due numeri reali e affinché esista un $m \in \mathbb{Z}$ che verifica (1) è sufficiente che $nb - na > 1$



Per soddisfare la condizione $nb - na > 1$ basta prendere $n(b-a) > 1$ cioè $n > 1/b-a$.

$A = \{ k \in \mathbb{Z} \mid na \leq k \}$ $\quad m = \min A$

m è ben definito perché

- $A \neq \emptyset$ (per il principio di A. $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $k > na$)
- A è limitato inferiormente in $\mathbb{Z}$.

[Infatti, per la proprietà di Archimede,

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c. $m > \underbrace{-na}_{\in \mathbb{R}}$ e quindi

$\forall k \in A : -m < na \leq k$, cioè $-m \in \mathbb{Z}$ è minorante di A]

e quindi, per le proprietà di $\mathbb{Z}$, $\exists \min A$.

$na \leq m$ e $m-1 < na \Rightarrow na \leq m < na + 1 < nb$.