Lezione 47

Proposizione (carattere locale della integrabilità in senso improprio)

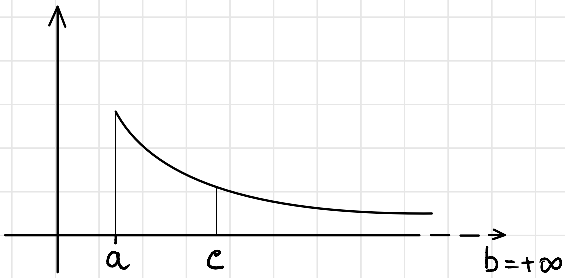
Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ localmente integrabile su $[a, b[$ e $c \in]a, b[$. Allora sono equivalenti:

(i) f è integrabile in senso improprio su $[a, b[$

(ii) f è integrabile in senso improprio su $[c, b[$

e vera l'una e quindi l'altra, risulta

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$$



Quindi l'integrabilità di f dipende solo dai valori di f in un intorno di b. Questo risultato è l'equivalente del teorema sulla stabilità del carattere di una serie (Proposizione 1.3, Lezione 23).

Dim: $\forall \beta > c$: $\int_a^\beta f = \int_a^c f + \int_c^\beta f$

Quindi, se $l \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f = l \iff \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f = \int_a^c f + l \quad \square$$

Osserv: un risultato analogo vale per intervalli del tipo $I =]a, b]$.

Proposizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile sec. R. su I e supponiamo che $f \geq 0$. Allora esiste l'integrale improprio di f su I e

$$\int_a^b f \geq 0 \quad (\text{può essere in } \mathbb{R}_+ \text{ o } +\infty)$$

Dim: Sia F una funzione integrale di f (di punto iniziale qualunque). Dimostriamo che F è crescente in I. Siano $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha < \beta$.

Allora $F(\beta)-F(\alpha)=\underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} f \geq \int_{\alpha}^{\beta} 0}_{\text{monotonia dell'integrale (essendo } f\geq 0)} = 0 \implies F(\alpha)\leq F(\beta)$

Quindi F è crescente in I e, per il teorema sui limiti delle funzioni monotone risulta

$$\lim_{\alpha\to a} F(\alpha) = \inf_I F \quad \text{e} \quad \lim_{\beta\to b} F(\beta) = \sup_I F.$$

Inoltre dato che F è una funzione integrale di f, si ha

$$F(x) = \int_c^x f \qquad \text{per qualche } c\in I.$$

Perciò $F(c)=0$ e quindi

$$\inf_I F \leq 0 \leq \sup_I F.$$

In definitiva esistono i limiti di F agli estremi e non sono entrambi $+\infty$ o entrambi $-\infty$, e allora esiste l'integrale improprio di f su I e

$$\int_a^b f = \sup_I F - \inf_I F \geq 0. \qquad \square$$

Esempi

1) Abbiamo visto che

- $\frac{1}{x^p}$ è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty[\iff p>1$

- $\frac{1}{x^p}$ è integrabile in senso improprio su $]0,1] \iff p<1$

Allo stesso modo si prova che

- $\frac{1}{|x|^p}$ è integrabile in senso improprio su $]-\infty,-1] \iff p>1$

- $\frac{1}{|x|^p}$ è integrabile in senso improprio su $[-1,0[\iff p<1$

Più in generale si prova che se $x_0 \in \mathbb{R}$

- $\frac{1}{|x-x_0|^p}$ è integrabile in senso improprio su $[x_0+1,+\infty[\iff p>1$ (risp. $]-\infty, x_0-1]$)

- $\frac{1}{|x-x_0|^p}$ è integrabile in senso improprio su $]x_0,x_0+1] \iff p<1$ (risp. $[x_0-1,x_0[$)

2) Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^q}\,dx \qquad \text{con } q>0$$

(Abbiamo visto che per $q=0$ l'integrale è divergente)

$$\forall \beta \geq 2 : \quad \int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^q}\,dx = \int_2^\beta \frac{D\log x}{(\log x)^q}\,dx$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{(\log x)^{1-q}}{1-q}\right]_2^\beta & \text{se } q \neq 1 \\ \left[\log(\log x)\right]_2^\beta & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\left((\log\beta)^{1-q} - (\log 2)^{1-q}\right) & \text{se } q < 1 \\ \dfrac{1}{q-1}\left(\dfrac{1}{(\log 2)^{q-1}} - \dfrac{1}{(\log\beta)^{q-1}}\right) & \text{se } q > 1 \\ \log(\log\beta) - \log(\log 2) & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

Perciò
$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^q}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \leq 1 \\ \dfrac{1}{(q-1)(\log 2)^{q-1}} & \text{se } q > 1 \end{cases}$$

In definitiva

$\dfrac{1}{x(\log x)^q}$ è integrabile in senso improprio su $[2,+\infty[\iff q>1$.

Proposizione (criterio del confronto)

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni localmente integrabili sec. R su I e supponiamo che $0 \leq f \leq g$.

Allora $$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g .$$

In particolare valgono le seguenti implicazioni:

(i) $\int_a^b g$ è convergente $\Rightarrow \int_a^b f$ è convergente

(ii) $\int_a^b f$ è divergente $\Rightarrow \int_a^b g$ è divergente

Dim: Sappiamo già che esistono gli integrali impropri di f e g su I e risulta
$$\int_a^b f \geq 0 \quad e \quad \int_a^b g \geq 0.$$

Sia $c \in \mathring{I}$ consideriamo le funzioni integrali
$$F(x) = \int_c^x f \quad e \quad G(x) = \int_c^x g$$
di f e g, di punto iniziale c. Allora

$$\beta > c \implies F(\beta) = \int_c^\beta f \leq \int_c^\beta g = G(\beta)$$

$$\begin{array}{ccc} F(\beta) & & G(\beta) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \beta \to b} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \beta \to b} \\ \sup_I F & \leq & \sup_I G \end{array}$$

$$\alpha < c \implies F(\alpha) = \int_c^\alpha f = -\int_\alpha^c f \geq -\int_\alpha^c g = \int_c^\alpha g = G(\alpha)$$

$$\implies G(\alpha) \leq F(\alpha)$$

$$\begin{array}{ccc} G(\alpha) & \leq & F(\alpha) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \alpha \to a} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \alpha \to a.} \\ \inf G & \leq & \inf F \end{array}$$

In definitiva $\inf G \leq \inf F \leq 0 \leq \sup F \leq \sup G$

e perciò $\displaystyle\int_a^b f = \sup F - \inf F \leq \sup G - \inf G = \int_a^b g$. $\square$

<u>Osserv:</u> nel caso che $I = [a, b[$, le conclusioni (i) e (ii) sono ancora vere se si suppone che la condizione $0 \leq f \leq g$ valga solo in un intorno di b. Questo segue dal carattere locale della integrabilità in senso improprio (si veda proposizione all'inizio).

Osserv. Sia $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, una funzione pari. Allora sono equivalenti

(i) esiste l'integrale improprio di f su $]-a,a[$

(ii) esiste l'integrale improprio di f su $[0,a[$

e vera l'una e quindi l'altra: $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

Infatti sia F la funzione int. di punto iniziale 0.

Allora per ogni $x > 0$ abbiamo visto che

$$F(x) - F(-x) = \int_{-x}^{x} f = 2\int_0^x f = 2F(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -F(-x) = F(x)$$

Perciò F è una funzione dispari e quindi

$$F(-x) = -F(x)$$

$$\lim_{\alpha \to -a} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to a} F(-\alpha) = -\lim_{\alpha \to a} F(\alpha)$$

e allora l'esistenza dei limiti agli estremi equivale all'esistenza del limite all'estremo destro e in tal caso

$$\int_{-a}^{a} f = \lim_{\alpha \to a} F(\alpha) - \lim_{\alpha \to -a} F(\alpha) = 2\lim_{\alpha \to a} F(\alpha) = 2\int_0^a f.$$

Esempio

Dimostriamo che la funzione gaussiana e^{-x^2} è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

La funzione è pari è quindi possiamo considerare soltanto l'integrale su $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Notiamo che $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Leftrightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$

Allora $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^{\beta}$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \left(e - e^{-\beta}\right) = e$$

Perciò per confronto e^{-x^2} è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty[$ e quindi anche su $[0,+\infty[$ e in definitiva su $\mathbb{R}$.

Teorema (criterio di confronto asintotico)

Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ funzioni localmente integrabili sec R su $[a, b[$.

Supponiamo che $g(x) > 0$ e $f(x) > 0$ $\forall x \in [a, b[$.

Valgono le seguenti affermazioni

(i) Se $f = o(g)$ per $x \to b$, allora

$$\int_a^b g \text{ è convergente} \Rightarrow \int_a^b f \text{ è convergente}$$

(ii) Se $f \asymp g$ per $x \to b$ (cioè $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}^*_+$),

allora: $\int_a^b f$ è convergente $\Leftrightarrow \int_a^b g$ convergente

Dim: (i) supponiamo che $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 < 1$

Allora per il teorema della permanenza delle disuguaglianze $\exists\, c \in]a, b[$ t.c.

$$\forall x \in [c, b[: \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

e quindi $f(x) \leq g(x)$.

Quindi per il criterio di confronto risulta
$$0 \leq \int_c^b f \leq \int_c^b g$$
Allora la tesi segue dal carattere locale della integrabilità in senso improprio.

(ii) Se $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ con $l \in]0,+\infty[$, allora di nuovo per il teorema della permanenza delle disuguaglianze (essendo $\frac{l}{2} < l < \frac{3}{2} l$), esiste $c \in]a,b[$ tale che

$$\forall x \in [c,b[: \quad \frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} l$$

e quindi $$\frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} l\, g(x)$$

Perciò $$\int_c^b f < +\infty \iff \int_c^b g < +\infty$$

e la tesi segue dal carattere locale dell'integra=bilità in senso improprio. $\square$

Osservazione 1 un risultato analogo vale per l'intervallo $]a,b]$.

Osservazione 2 nelle ipotesi del teorema precedente

se $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ e $h(x) \to \ell \in]0,+\infty[$ per $x \to b$

allora $f(x) \asymp g(x)$ per $x \to b$ e quindi l'integrabilità in senso improprio di f su $[a,b[$ equivale all'integrabilità in senso improprio di g su $[a,b[$

Esempio

Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}}\,dx .$$

Evidentemente

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}} = \underbrace{\sqrt{\frac{x}{\log(1+x)}}}_{\to 1 \text{ per } x \to 0} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$$

Perciò $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$ e quindi l'integrale improprio è convergente su $]0,1]$.

Proposizione (linearità degli integrali impropri)
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in senso improprio su I e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

(i) $f+g$ è integrabile in senso improprio su I

e $$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(ii) λf è integrabile in senso improprio su I

e $$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Dim: Sia $c \in I$ e siano F e G le funzioni integrali di f e g di punto iniziale c.
Allora
$$F(x)+G(x) = \int_c^x f + \int_c^x g = \int_c^x f+g$$
$$\lambda F(x) = \lambda \int_c^x f = \int_c^x \lambda f$$

Perciò $F+G$ e λF sono le funzioni integrali di $f+g$ e λf. di punto iniziale c.

È chiaro che i limiti di $F+G$ e λF agli estremi di I sono finiti e risulta

$$\int_a^b f+g = (F+G)(b-) - (F+G)(a+)$$
$$= \left(F(b-) - F(a+)\right) + \left(G(b-) - G(a+)\right)$$
$$= \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b \lambda f = (\lambda F)(b-) - (\lambda F)(a+)$$
$$= \lambda\left(F(b-) - F(a+)\right) = \lambda \int_a^b f \qquad \square$$

Def Sia $f : I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile sec. R su I. Si dice che *f è assolutamente integrabile in senso improprio su I* oppure che *f è sommabile su I*, se $|f|$ è integrabile in in senso improprio su I, cioè se

$$\int_a^b |f| < +\infty$$

Proposizione

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile sec. R su I.
Allora

f assolut. integrabile in senso improprio su I
$\Rightarrow$ f integrabile in senso improprio su I

e in tal caso: $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Dim: Basta notare che

$$f = f^+ - f^- \quad e \quad |f| = f^+ + f^-$$

e che $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Perciò per il criterio del confronto se $\int_a^b |f| < +\infty$, allora $\int_a^b f^+ < +\infty$ e $\int_a^b f^- < +\infty$.

E allora per la linearità dell'integrale improprio, essendo $f = f^+ - f^-$, risulta che f è integrabile in senso improprio su I e $\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$.

Inoltre dalla disuguaglianza triangolare

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\right| \leq \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f| \quad \square$$

Integrali impropri e serie numeriche

Teorema (criterio integrale per serie numeriche)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

(i) $f \geq 0$

(ii) f è decrescente

Allora la serie numerica $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ e l'integrale improprio $\int_{n_0}^{+\infty} f$ hanno lo stesso carattere.

Dim: Sia $F(x) = \int_{n_0}^{x} f$ la funzione integrale.

Dato che $f \geq 0$, abbiamo visto che F è crescente

Perciò $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sup_{[n_0, +\infty[} F = \lim_{n \to +\infty} F(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} F(n)$

Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ e consideriamo

$$F(n) = \int_{n_0}^{n} f$$

Sia $P = \{n_0, n_0+1, \dots, n\} \in \mathcal{P}([n_0, n])$

Evidentemente $s(f,P) \leq F(n) \leq S(f,P)$.

Ma
$$s(f,P) = \inf_{[n_0,n_0+1]} f + \inf_{[n_0+1,n_0+2]} f + \dots + \inf_{[n-1,n]} f$$
$$= f(n_0+1) + f(n_0+2) + \dots + f(n)$$
$$= \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$$

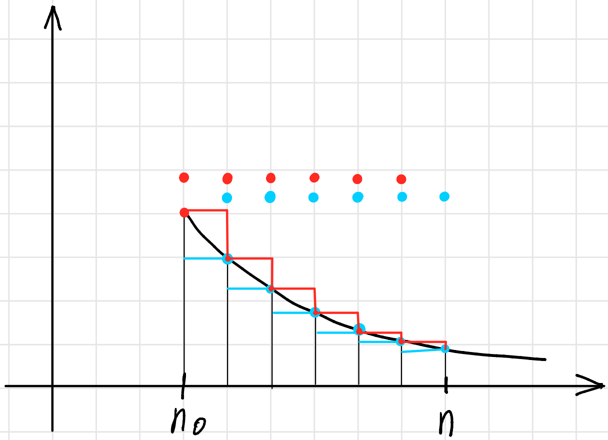
$$S(f,P) = \sup_{[n_0,n_0+1]} f + \sup_{[n_0+1,n_0+2]} f + \dots + \sup_{[n-1,n]} f$$
$$= f(n_0) + f(n_0+1) + \dots + f(n-1)$$
$$= \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$$

In definitiva si ha $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq F(n) \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$

Da questo segue che $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \qquad \int_{n_0}^{+\infty} f \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

e quindi la tesi $\square$



Esempio

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

e quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \iff p > 1$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^q}$ ha lo stesso carattere di

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^q}\,dx$ e quindi $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^q} < +\infty \iff q > 1.$