Lezione 14

Definizione 1 (punto di accumulazione)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Si dice che x_0 è punto di accumulazione per A se $\forall V$ intorno di x_0 : $V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Osserv: si notino le differenze con la definizione di punto di aderenza. Infatti:

1) x_0 può essere $\pm \infty$

2) ogni intorno di x_0 deve contenere punti di A distinti da x_0

Definizione 2

Un punto isolato di A è un punto di A che non è di accumulazione per A, cioè un $x_0 \in A$ per cui

$$\exists V \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } V \cap A = \{x_0\}.$$

Esempio 1 $\quad A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$

Abbiamo visto che ogni punto di A è aderente ad A. Ma ogni punto di A non è di accumulazione per A, cioè ogni punto di A è un punto isolato di A.

Infatti se $x = \frac{1}{n}$, per qualche $n \in \mathbb{N}^*$

allora $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n-1}$ (supponiamo per semplicità $n \geq 2$)

Posto $r = x - \frac{1}{n+1}$, risulta che $]x-r, x+r[\cap A = \{x\}$,

e quindi x non è di accumulazione per A.

<u>Osserv:</u> Sia $A \subset \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti

(i) A non è limitato superiormente

(ii) $+\infty$ è punto di accumulazione per A.

Infatti (i) $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ \exists x \in A$ t.c. $x > a$

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ ]a, +\infty] \cap A \neq \emptyset$.

Allo stesso modo sono equivalenti

(i) A non è limitato inferiormente

(ii) $-\infty$ è punto di accumulazione per A.

<u>Esempio 2</u> $+\infty$ è p.to di accumulazione degli insiemi

$\mathbb{N}$, $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$.

Definizione 3 (di limite)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che l è limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 e si scrive

"$f(x) \to l$ per $x \to x_0$" oppure "$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$"

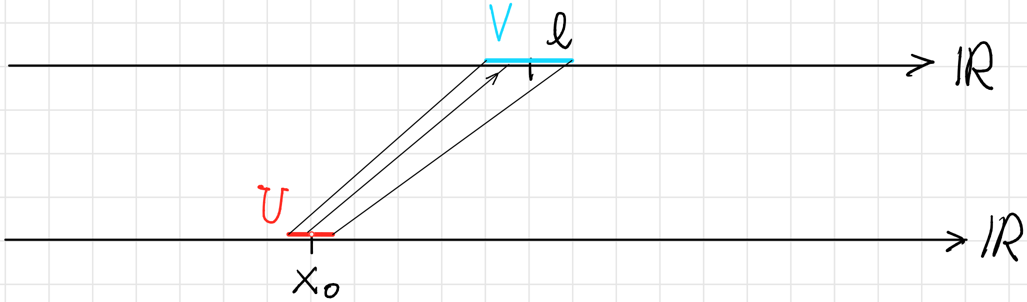
se $\forall V$ intorno di l,

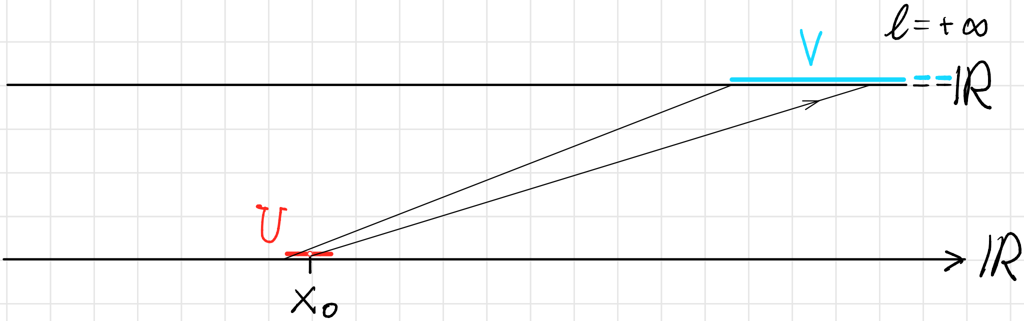
$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}: f(x) \in V$

Poniamo per brevità $A_{x_0} = A \setminus \{x_0\}$ e la condizione di limite si può scrivere:

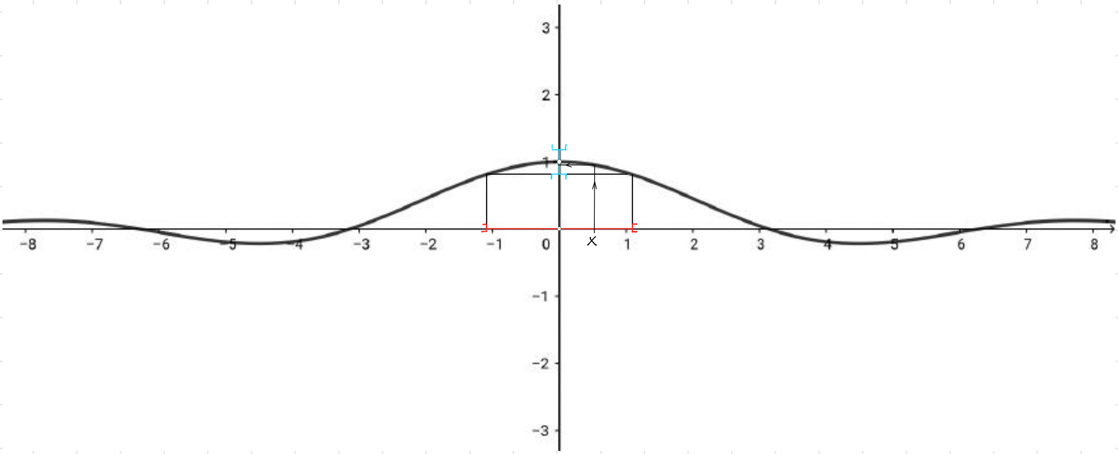
$\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(U \cap A_{x_0}) \subset V$.

Osserv: si noti che $U \cap A_{x_0} \neq \emptyset$ perché x_0 è di acc. per A.





Esempio $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



Definizione 4

La funzione f si dice regolare per x che tende a x_0 se $\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

In tal caso se $l \in \mathbb{R}$ si dice che f converge a l per $x \to x_0$, se $l = +\infty$ (risp. $l = -\infty$) si dice che f diverge positivamente (risp. negativamente) per $x \to x_0$.

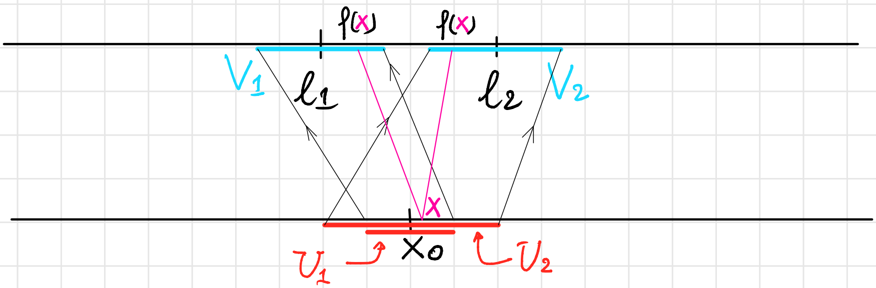
Teorema 1 (di unicità del limite)

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di accumulazione per A. Allora esiste al più un $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Dim:

Supponiamo per assurdo che esistano $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ con $l_1 \neq l_2$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$.

Allora, per la proprietà di separazione degli intorni $\exists\, V_1$ intorno di l_1, $\exists\, V_2$ intorno di l_2 tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



Dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e V_1 è un intorno di l_1, esiste (per definizione di limite) U_1 intorno di x_0 tale che $f(U_1 \cap A_{x_0}) \subset V_1$

Dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ e V_2 è un intorno di l_2 esiste (per definizione di limite) U_2 intorno di x_0 tale che $f(U_2 \cap A_{x_0}) \subset V$

Adesso $U := U_1 \cap U_2$ è un intorno di x_0 e essendo x_0 p.to di accumulazione per A, risulta $U \cap A_{x_0} \neq \emptyset$

Ma $\quad x \in U \cap A_{x_0} \Rightarrow x \in U_1 \cap A_{x_0}$ e $x \in U_2 \cap A_{x_0}$

$$\Rightarrow f(x) \in V_1 \text{ e } f(x) \in V_2$$

$$\Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2$$

Quindi avremmo trovato un punto nell'intersezione di V_1 e V_2 e questo è assurdo $\square$

<u>Osserv</u>: (i) In virtù del teorema di unicità del limite si può dire che l è <u>il</u> limite di f per x che tende a x_0.

(ii) dato che nella definizione di limite si esclude il punto x_0, il limite, se esiste, non dipende dal valore della funzione in x_0.

Esempi

3. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, $f(x) = c$, e x_0 è p.to di acc. per A, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$

Per esempio se $A =]a, b[$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, allora $\lim_{x \to a} f(x) = c$

4. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è l'iniezione canonica di A in $\mathbb{R}$, $f(x) = x$ (è la restrizione della funzione identità di $\mathbb{R}$ a A) e x_0 è punto di accumulazione per A, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Per esempio se $A =]a, b[$, $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Specializziamo la definizione generale di limite ai casi che x_0 e/o ℓ siano finiti o $\pm\infty$.

$\boxed{1}$ Limite, caso $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Sono equivalenti

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$\forall x \in U \cap A_{x_0} : \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{\iff f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[} .$$

$\boxed{2}$ Limite, caso $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in A : \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{x \neq x_0 \text{ e } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Osserv: la condizione (ii) al punto 2) di sopra stabilisce che per provare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, si deve considerare la disequazione

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{con } x \in A$$

dove $\varepsilon > 0$ è un parametro e x è l'incognita, e provare che l'insieme delle soluzioni contiene un insieme del tipo:

$$]x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon[\cap A_{x_0}$$

con δ_ε che in generale dipende da ε.

Esempi

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Proviamo

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Si tratta di risolvere la disequazione parametrica

$$(5.1) \qquad x^2 < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

Chiaramente le soluzioni sono gli x tali che

$$-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}.$$

Perciò l'insieme delle soluzioni di (5.1) è

$$]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[\quad \text{con } \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}.$$

6. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=3x+2$ e $x_0=1$.

Proviamo che $\lim_{x\to 1} 3x+2 = 5$.

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$(6.1) \qquad |3x+2-5| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

Si ha $|3x+2-5| < \varepsilon \iff |3x-3| < \varepsilon$

$$\iff 3|x-1| < \varepsilon$$

$$\iff |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\iff x \in \underbrace{\left]1-\frac{\varepsilon}{3}, 1+\frac{\varepsilon}{3}\right[}_{\text{è un intorno di } 1}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni di (6.1) è

$$]1-\delta_\varepsilon, 1+\delta_\varepsilon[\quad \text{con} \quad \delta_\varepsilon = \varepsilon/3.$$

$\boxed{3}$ Limiti, caso $x_0 = +\infty$ ($x_0 = -\infty$), $\ell \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell\right)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a > 0$ t.c. $\forall x \in A: x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ($x < -a$)

$\boxed{4}$ Limiti, caso $x_0 = +\infty$, $l = +\infty$. Sono equivalenti
$(x_0 = -\infty)$

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$

(ii) $\forall \beta > 0 \ \exists a > 0$ t.c. $\forall x \in A : x > a \Rightarrow f(x) > \beta$.
$(x < -a)$

$\boxed{5}$ Limiti, caso $x_0 = +\infty$, $l = -\infty$
$(x_0 = -\infty)$

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \right)$

(ii) $\forall \beta > 0 \ \exists a > 0$ t.c. $\forall x \in A : x > a \Rightarrow f(x) < -\beta$.
$(x < -a)$

Esempi

7. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Si tratta di provare che la disequazione parametrica

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon \tag{7.1}$$

ha un insieme di soluzioni che contiene un intervallo del tipo $\quad]a, +\infty] \cap \mathbb{R}^* =]a, +\infty[$ con $a > 0$.

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x \text{ o } x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni di (7.1) contiene l'intervallo

$$]a_\varepsilon, +\infty[\quad \text{con } a_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

8. Sia $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty .$$

Di nuovo si tratta di risolvere la disequazione

$$(8.1) \qquad \frac{1}{x} < -\beta \qquad (\text{con } x < 0 \text{ e } \beta > 0)$$

e provare che l'insieme delle soluzioni contiene un insieme del tipo

$$]-\delta, \delta[\cap]-\infty, 0[=]-\delta, 0[.$$

In effetti si ha: $\frac{1}{x} < -\beta \iff \beta < \frac{1}{-x} \iff \frac{1}{\beta} > -x$

$$\iff x > -\frac{1}{\beta} \iff x \in]-\tfrac{1}{\beta}, 0[.$$

Percioè posto $\delta_\beta = \frac{1}{\beta}$ risulta

$$\forall x \in]-\delta_\beta, 0[\; : \; \frac{1}{x} < -\beta$$

Teorema 2 (limite di una restrizione di funzione)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$ e consideriamo la restrizione di f a B

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R}.$$

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di accumulazione per B (e quindi per A)

Allora se $l \in \overline{\mathbb{R}}$ risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = l$$

In altri termini se l è il limite di f per $x \to x_0$, allora l è il limite di ogni restrizione di f ad un insieme per cui x_0 risulta ancora di accumulazione

Dim: deriva dal fatto che per ogni intorno U di x_0

$$\dot{U} \cap B_{x_0} \subset \dot{U} \cap A_{x_0}$$

e quindi $f(\dot{U} \cap B_{x_0}) \subset f(\dot{U} \cap A_{x_0})$. $\square$

Osserv: Il teorema precedente è spesso usato nella forma negativa per stabilire che una funzione non è regolare per $x \to x_0$.

Corollario.1

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 p.to di acc per A.

Supponiamo che $B_1, B_2 \subset A$ tali che

(i) x_0 è di accumulazione per B_1 e B_2

(ii) $\lim_{x \to x_0} f_{|B_1}(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f_{|B_2}(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$

Allora f non è regolare in x_0

Dim: se f fosse regolare, allora $f_{|B_1}$ e $f_{|B_2}$ dovrebbero avere lo stesso limite di f per $x \to x_0$. $\square$

Esempi

9. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(funzione di Dirichelet)

Definiamo i sottoinsiemi

$$B_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q} \qquad B_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}.$$

Se $x_0 \in [0,1]$, x_0 è di accumulazione per B_1 e B_2.

e $f_{|B_1} = 1$ (costante) $\quad f_{|B_2} = 0$ (costante)

perciò $\lim_{x \to x_0} f_{|B_1}(x) = 1$ e $\lim_{x \to x_0} f_{|B_2}(x) = 0$.

Quindi f non è regolare in nessun punto di $[0,1]$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Proviamo che f non è regolare in 0

Sia $B_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right\}$

$$B_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \right\}$$

allora $\quad x \in B_1 \iff \frac{1}{x} = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}^*$

$$\iff x = \frac{1}{k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^*$$

$B_1 = \left\{ \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}^* \right\}$ e 0 è di accumulaz. per B_1

Poi $x \in B_2 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\iff x = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$B_2 = \left\{ \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ e 0 è di accumulaz. per B_2

Dato che $f_{|B_1} = 0$ e $f_{|B_2} = 1$ risulta

$$\lim_{x \to 0} f_{|B_1}(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0} f_{|B_2}(x) = 1$$

e quindi f non è regolare in 0.

Definizione 5 (limiti destro e sinistro)

- Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$A^+_{x_0} =]x_0, +\infty[\cap A \qquad A^-_{x_0} =]-\infty, x_0[\cap A$$

x_0 si dice p.to di accumulazione a sinistra (risp. a destra) di x_0 se x_0 è p.to di accumulaz.

per $A_{x_0}^-$ (risp. per $A_{x_0}^+$).

- Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per A.

Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è limite sinistro (risp. destro) di f per $x \to x_0$ o che $f(x)$ tende a l per x che tende a x_0 da sinistra (risp. da destra) e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad \text{o} \quad f(x_0-) = l$$

$$\left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \text{o} \quad f(x_0+) = l\right)$$

se l è limite della restrizione $f_{|A_{x_0}^-}$ (risp. $f_{|A_{x_0}^+}$) per x che tende a x_0. In altri termini se

$\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$\forall x \in U \cap A_{x_0}^-$ (risp. $x \in U \cap A_{x_0}^+$): $f(x) \in V$

Teorema 3

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione a sinistra e a destra di x_0 per A. Allora sono equivalenti:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Dim:

(i) $\Rightarrow$ (ii) segue dal Teorema sui limiti delle restrizioni

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sia V un intorno di ℓ.

Allora, essendo $f(x_0-) = \ell$ e $f(x_0+) = \ell$, esistono U_1 e U_2 intorni di x_0 t.c.

$$f(U_1 \cap A_{x_0}^-) \subset V \quad \text{e} \quad f(U_2 \cap A_{x_0}^+) \subset V.$$

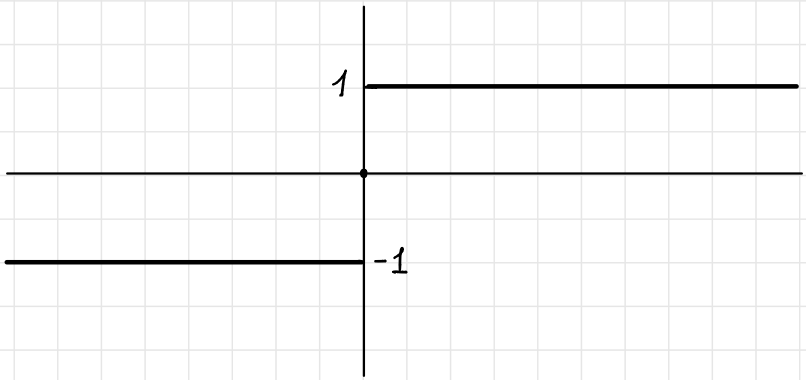
Posto $U = U_1 \cap U_2$ risulta

$$x \in U \cap A_{x_0} \Rightarrow x \in U_1 \cap A_{x_0}^- \text{ o } x \in U_2 \cap A_{x_0}^- \Rightarrow f(x) \in V \quad \square$$

Esempi

11. Consideriamo la funzione segno

$$\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Evidentemente $\mathrm{sgn}|_{\mathbb{R}^*_-} = -1$ e $\mathrm{sgn}|_{\mathbb{R}^*_+} = 1$

e quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$$

12. Proviamo che la funzione $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ non è regolare per $x \to 0$.

Infatti $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Altri esempi (generali)

1) Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f(x) = ax + b$ (funzione affine)

$a \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 p.to di accumulazione per A

Proviamo che: $\boxed{\lim_{x \to x_0} ax + b = ax_0 + b.}$

Consideriamo la disequazione

$$|ax + b - (ax_0 + b)| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

Evidentemente $|ax + b - (ax_0 + b)| = |a|\,|x - x_0|$

Perciò

$$|ax + b - (ax_0 + b)| < \varepsilon \iff |a|\,|x - x_0| < \varepsilon$$

$$\iff |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Quindi basta prende $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|a|}$ e risulta

$$\forall x \in A : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |ax + b - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

2) Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione per A.

Proviamo $\boxed{\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2}$

Consideriamo la disequazione parametrica

$$(4.1) \qquad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

Evidentemente

$$|x^2 - x_0^2| = |(x-x_0)(x+x_0)| = |x-x_0|\,|x+x_0|$$
$$\leq |x-x_0|\,(|x| + |x_0|)$$

Se si prende x tale che $|x-x_0| < 1$, allora

$$|x| \leq |x-x_0| + |x_0| < 1 + |x_0|$$

e perciò $|x^2 - x_0^2| \leq |x-x_0|\,(1 + 2|x_0|)$

Si è trovato che

$$\forall x \in A: \quad |x-x_0| < 1 \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq |x-x_0|\,(1+2|x_0|)$$

Per soddisfare la (4.1) possiamo risolvere

$$|x-x_0|\,(1+2|x_0|) < \varepsilon \iff |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$$

In definitiva se si prende $\delta_\varepsilon = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$

si ha

$$\forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$
