Lezione 20 (Proprietà topologiche per successioni)

Teorema (limiti)

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

b) $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to x_0 \Rightarrow f(a_n) \to \ell.$

Dim:

a) $\Rightarrow$ b):

$$f(a_n) = f(a(n))$$

$$f \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

$$a_n \to x_0 \text{ per } n \to +\infty : f(x) \to \ell \text{ per } x \to x_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(\underset{\substack{\shortparallel \\ x \to x_0 \\ \text{per } n \to +\infty}}{\underline{a_n}}) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

b) $\Rightarrow$ a): Per assurdo se $\exists\, V$ intorno di ℓ tale che

$$\underline{\forall\, U \text{ intorno di } x_0 : f(U \cap A_{x_0}) \not\subseteq V}$$

Sia $(U_n)_{n\in\mathbb{R}}$ succ. di intorni di x_0.

tale che
$$U_n = \begin{cases}]x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1}[& \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ ]n, +\infty] & \text{se } x_0 = +\infty \\ [+\infty, -n[& \text{se } x_0 = -\infty. \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad f(U_n \cap A_{x_0}) \not\subset V$

cioè $\quad \exists\, a_n \in \overline{U}_n \cap A_{x_0}$ t.c. $f(a_n) \notin V$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di elementi di A

t.c. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad f(a_n) \notin V$

$$
\text{e} \quad a_n \in \overline{U}_n \Rightarrow \begin{cases} \text{se } x_0 \in \mathbb{R} & |x_0 - a_n| < \frac{1}{n+1} \\ \text{se } x_0 = +\infty & a_n > n \\ \text{se } x_0 = -\infty & a_n < -n \end{cases}
$$

Perciò in ogni caso, per confronto risulta $a_n \to x_0$.

Ma essendo $f(a_n) \notin V$, risulta $f(a_n) \not\to l$. □

Teorema (continuità)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ allora sono equivalenti

a) f è continua in x_0

b) $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \quad a_n \to x_0 \Rightarrow f(a_n) \to f(x_0)$.

<u>**Dim:**</u> a) $\Rightarrow$ b) : Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di A tale che $a_n \to x_0$.

Proviamo che $f(a_n) \to f(x_0)$.

Sia V intorno di $f(x_0)$.

Allora, dato che f è continua in x_0, esiste U intorno di x_0 tale che $f(U \cap A) \subset V$.

Adesso, dato che $a_n \to x_0$, essendo U intorno di x_0, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \nu : a_n \in U \text{ e quindi } f(a_n) \in V$$

b) $\Rightarrow$ a): si procede per assurdo come nel caso dei limiti.

Supponiamo che $\exists\, V$ intorno di $f(x_0)$ tale che

$$\forall U \text{ intorno di } x_0 \quad f(U \cap A) \not\subset V.$$

Si sceglie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e allora $\exists\, a_n \in U \cap A$ t.c. $f(a_n) \notin V$ e si prova che $a_n \to x_0$, mentre $f(a_n) \not\to l$. $\square$

<u>Teorema di Bolzano-Weierstrass.</u>

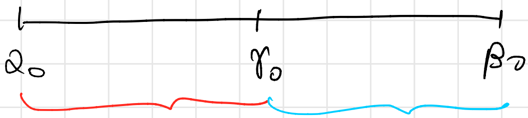
Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale limitata.

Allora esiste una sottosuccessione convergente.

Dim: $\exists\ I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ $\alpha_0 < \beta_0$ t.c. $\underline{\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in I_0}$.

Poniamo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$$



$[\alpha_0, \gamma_0]$ $\quad [\gamma_0, \beta_0]$

uno dei due sottoinsiemi $\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [\alpha_0, \gamma_0] \}$ $\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [\gamma_0, \beta_0] \}$ è infinito

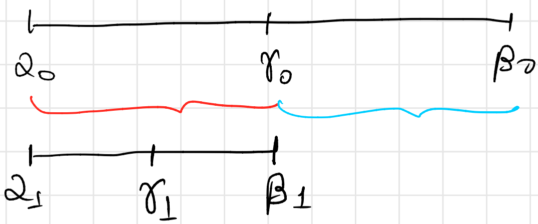
$a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8, \dots a_n, \dots$

lo chiamo $\mathbb{N}_1$ e chiamo con $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ l'intervallo corrispondente

$$I_1 = \begin{cases} [\alpha_0, \gamma_0] \\ \text{o} \\ [\gamma_0, \beta_0] \end{cases} \qquad |I_1| = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}$$

Perciò ho che $\mathbb{N}_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_1 \}$ è infinito

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$$



Uno dei due insiemi d'indici

$\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [\alpha_1, \gamma_1] \}$ e $\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [\gamma_1, \beta_1] \}$

è infinito.

Chiamo con $\mathbb{N}_2$ tale insieme d'indici e con $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ l'intervallo corrispondente

$$I_2 = \begin{cases} [\alpha_1, \gamma_1] \\ o \\ [\gamma_1, \beta_1] \end{cases} \qquad |I_2| = \frac{|I_1|}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{4}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_2 \} \text{ è infinito.}$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$$

Procedendo in questo modo si definisce ricorsivamente una successione di intervalli chiusi $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_k \} \text{ è infinito} \\ I_{k+1} \subset I_k \\ |I_k| = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2^k} \end{cases}$$

$(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ e sono incapsulati. $\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^k} = 0.$

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{x_0\} \quad \text{con } x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$n_0 = 0$$

$$n_1 = \min \underbrace{\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_1 \text{ e } n > n_0 \}}_{\neq \emptyset}$$

$$n_2 = \min \underbrace{\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_2 \text{ e } n > n_1 \}}_{\neq \emptyset}$$

$\vdots$

$$n_k = \min \underbrace{\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_k \text{ e } n > n_{k-1} \}}_{\neq \emptyset}$$

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ succ. strett. cresc. e $a_{n_k} \in I_k$.

$$0 \leq |a_{n_k} - x| \leq |I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$$

$a_{n_k} \to x$, cioè $a_{n_k} \to x$ per $k \to +\infty$ $\square$

Proposizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti

a) $x \in \bar{A}$

b) $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ t.c. $a_n \to x$

Dim:

a) $\Rightarrow$ b) $\forall$ V intorno di x : $V \cap A \neq \emptyset$

Sia $V_n =]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[$ con $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n \cap A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A$ t.c.

$$|a_n - x| < \frac{1}{n+1}$$

Quindi chiaramente $a_n \to x$.

b) $\Rightarrow$ a):

Sia V intorno di x, allora $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ n > \nu : a_n \in V.$$

Perciò $a_{\nu+1} \in A \cap V \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset$

Proposizione $A \subset \mathbb{R}$. Sono equivalenti

a) A è chiuso

b) $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}: a_n \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in A$.

(Se il limite di successioni convergenti di elementi di A appartiene ad A)

Dim:

a) $\Rightarrow$ b): Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ t.c. $a_n \to x \in \mathbb{R}$.

Dalla proposizione precedente risulta che $x \in \bar{A}$

Ma A è chiuso e quindi, per definizione, $A = \bar{A}$.

Perciò $x \in A$.

b) $\Rightarrow$ a) Sia $x \in \bar{A}$. Per la prop. precedente esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di elementi di a tale che $a_n \to x$. Ma allora l'ipotesi b) garantisce che $x \in A$. Si è quindi provato che $\bar{A} \subset A$.

In generale vale $A \subset \bar{A}$, perciò $A = \bar{A}$. $\Rightarrow$ A è chiuso.

Il metodo di bisezione.

Sia $P(I)$ una proprietà che dipende da un intervallo chiuso e limitato $I \subseteq \mathbb{R}$.

$P(I)$ è un'affermazione che può essere vera o falsa per l'intervallo I.

Supponiamo che la proprietà P sia tale che se è vera per un intervallo I, allora è vera per almeno uno dei due sottointervalli che si ottengono bisecando l'intervallo I nel punto medio di I.

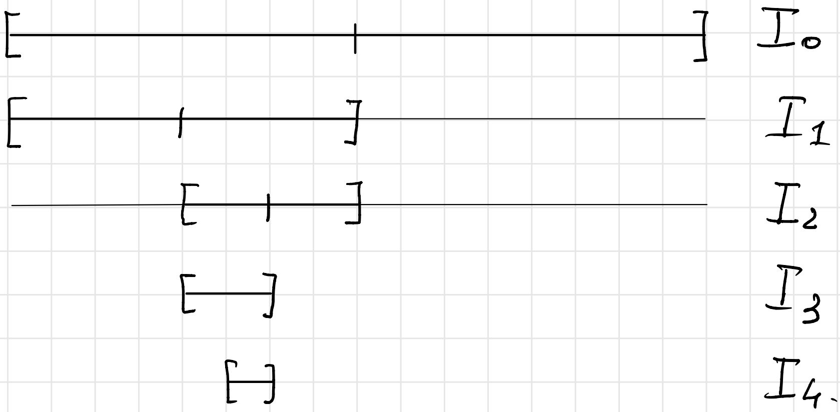
$$\begin{cases} I = [a,b] \\ P(I) \text{ vera} \end{cases} \Longrightarrow \quad P\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) \text{ è vera}$$

$$\text{o } P\left(\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right) \text{ è vera.}$$

(proprietà che passa ad almeno uno dei due sottointervalli ottenuti per bisezione di I)

Allora se $P(I_0)$ è vera.

chiamo con I_1 quella delle due metà di I_0 per cui $P(I_1)$ è vera, poi chiamo con I_2 quella delle due metà di I_1 per cui $P(I_2)$ è vera.



Si costruisce in questo modo una successione di intervalli incapsulati $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ per cui risulta che

$$\forall k\in\mathbb{N}: \begin{cases} P(I_k) \text{ è vera} \\ |I_{k+1}| = \dfrac{|I_k|}{2} \end{cases}$$

Quindi $|I_k| = \dfrac{|I_{k-1}|}{2} = \dfrac{|I_{k-2}|}{2^2} \dots = \dfrac{|I_0|}{2^k}$

Allora $\inf_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = 0$

e per il principio degli intervalli incapsulati risulta

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{x_0\}.$$

Esempi

1) Esistenza della radice n-esima $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Sia $y \in \mathbb{R}_+$ allora $\exists\, x \in \mathbb{R}_+$ t.c. $x^n = y$.

Dim: Possiamo limitarci al caso che $0 < y < 1$, perché se $y > 1$ allora $\frac{1}{y} < 1$ e per questo esiste $x > 0$ t.c. $x^n = \frac{1}{y}$ e quindi $y = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

Se $I = [a, b]$ $\quad P(I) : a^n \leq y \leq b^n$

$$P([a,b]) \text{ è vera } \Rightarrow \begin{cases} P\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) \text{ è vera} \\ \text{oppure} \\ P\left(\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right) \text{ è vera.} \end{cases}$$

$c = \frac{a+b}{2}$ $\quad a \leq c \leq b \Rightarrow a^n \leq c^n \leq b^n$

quindi $y \leq c^n$ oppure $c^n \leq y$

nel primo caso $a^n \leq y \leq c^n$

nel secondo caso $c^n \leq y \leq b^n$.

Mi basta partire con un $I_0 = [a_0, b_0]$ in modo che $a_0^n \leq y \leq b_0^n$.

Dato che $0 < y < 1$, allora prendo $I_0 = [y, 1]$

infatti $y^n \leq y \leq 1 = 1^n$

Perciò esiste una successione $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $I_k = [a_k, b_k]$

$$a_k^n \leq y \leq b_k^n$$

e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{x_0\}$ $\quad x_0 \in I_k \Rightarrow a_k \leq x_0 \leq b_k$

$$\Rightarrow a_k^n \leq x_0^n \leq b_k^n.$$

$$|x_0^n - y| \leq b_k^n - a_k^n \overset{(*)}{\leq} (b_k - a_k)n = |I_k|\, n = \frac{n|I_0|}{2^k}$$

$$\Rightarrow |x_0^n - y| \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{n b_0^n}{2^k} = 0 \Rightarrow x_0^n = y.$$

Nella disuguaglianza $(*)$ si è usato il seguente risultato

Se $a, b \in [0,1]$ $a \leq b$, allora $b^n - a^n \leq (b-a)n$.

La dimostrazione di questo risultato procede nel modo seguente.

In generale vale

$$b^n - a^n = (b-a)\underbrace{(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})}_{(**)}$$

Infatti

$$(b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})$$

$$= b^n + \cancel{ab^{n-1}} + \cdots + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cancel{a^{n-1}b}$$

$$- \cancel{ab^{n-1}} - \cdots - \cancel{a^{n-2}b^2} - \cancel{a^{n-1}b} - a^n$$

Adesso, dato che $a, b \leq 1$, allora termini in $(**)$ sono tutti ≤ 1 e sono in numero di n. Quindi

$$b^n - a^n \leq (b-a)(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ termini}}) = (b-a)n.$$

2) Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata.
Allora esiste $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ estratta che è convergente.

Dim: Consideriamo la proprietà

$$P(I):\ \{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I\} \text{ è infinito}$$

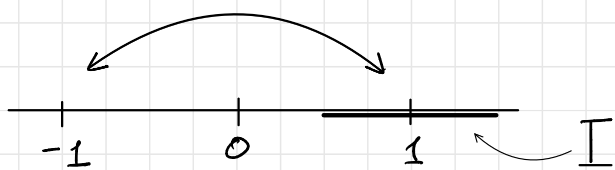
in altri termini: $a_n \in I$ per un numero infinito d'indici.

(si dice anche che "$a_n \in I$ frequentemente")

Esempi

1) se $a_n = (-1)^n$ (cioè: $\underset{0}{1}, \underset{1}{-1}, \underset{2}{1}, \underset{3}{-1}, \underset{4}{1}, \dots$)

e consideriamo l'intervallo $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$



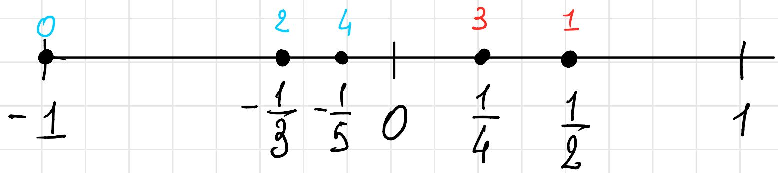
la successione salta da 1 e -1 e viceversa

Chiaramente $a_n \in I$ frequentemente, perché succede per tutti gli indici pari che sono infiniti

2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ (cioè: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$)

$\quad\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

e consideriamo l'intervallo $I = [0,1]$.



Allora $a_n \in [0,1]$ frequentemente, perché succede per tutti gli indici dispari che sono infiniti.

Mentre non è vero che $a_n \in [10^{-8}, 1]$ frequentemente perché soltanto per un numero finito di indici

3) $a_n = (-1)^{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor}$ (cioè $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$)

$\quad\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$

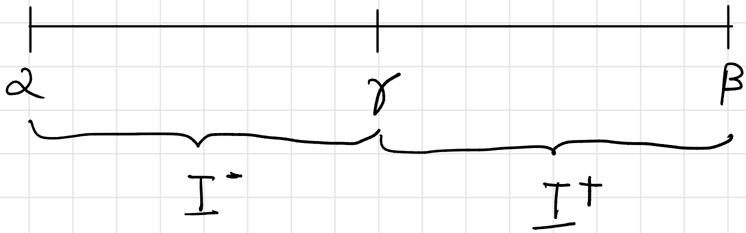
e risulta $a_n \in [-1, 0]$ frequentemente perché succede per tutti gli indici del tipo $n = 2 + k \cdot 3$ che sono infiniti

---

Adesso supponiamo che $P(I)$ sia vera per un certo intervallo chiuso e limitato $I = [\alpha, \beta]$.

Tagliamo l'intervallo I nel punto medio γ di α e β e consideriamo i due sottointervalli

$I_- = [\alpha, \gamma]$ e $I_+ = [\gamma, \beta]$



Allora risulta che

$(a_n \in I^-$ frequentemente$)$ oppure $(a_n \in I^+$ frequentemente$)$

perché se fosse

$$\begin{cases} a_n \in I^- \text{ per un numero finito di indici} \\ a_n \in I^+ \text{ per un numero finito di indici} \end{cases}$$

allora (essendo $I = I^- \cup I^+$) sarebbe $a_n \in I$ per un numero finito di indici, che è contro l'ipotesi che stiamo assumendo.

Questo fatto si può vedere anche ragionando in termini insiemistici. Infatti è chiaro che

$$a_n \in I \iff a_n \in I^- \vee a_n \in I^+$$

e quindi

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I^-\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I^+\}$$

Perciò se $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I\}$ è infinito, allora almeno uno dei due insiemi:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I^-\} \quad e \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I^+\}$$

deve essere infinito.

Perciò la proprietà $P(I)$ passa da I ad almeno uno dei due sottointervalli I^-, I^+.
Si può quindi applicare il metodo di bisezione se riusciamo a trovare un intervallo iniziale I_0 per cui $P(I_0)$ è vero.
Ma questo è chiaramente possibile perché la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata. Infatti per definizione di limitatezza esiste un minorante α_0 e un maggiorante β_0 della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e risulta $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_0 \le a_n \le \beta_0$.
Quindi si prende $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ e banalmente

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I\} = \mathbb{N} \text{ che è infinito.}$$

Allora partendo da I_0 si costruisce una successione di intervalli chiusi e limitati $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \begin{cases} I_{k+1} \subset I_k \\ |I_{k+1}| = \dfrac{|I_k|}{2} \\ a_n \in I_k \text{ frequentemente} \end{cases}$$

$[\iff \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_k\} \text{ è infinito}]$

e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{x_0\}$.

Dobbiamo adesso costruire una successione estratta $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in modo che $a_{n_k} \to x_0$.

Ricordiamo che definire una successione estratta significa specificare una successione strettamente crescente di numeri naturali $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ che sono gli indici selezionati per l'estrazione di alcuni termini della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si procede in questo modo: si prende

- $n_0 = 0$
- dato che $a_n \in I_1$ frequentemente, esiste sicuramente un indice n in modo che $a_n \in I_1$ e $n > n_0$ e chiamo con n_1 il più piccolo di tali indici.
  (cioè $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_1 \text{ e } n > n_0\}$)
- dato che $a_n \in I_2$ frequentemente, esiste sicuramente un indice n in modo che $a_n \in I_2$ e $n > n_1$ e chiamo con n_2 il più piccolo di tali indici.
  (cioè $n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I \text{ e } n > n_1\}$)

Si procede in questo modo, se si è definito n_{k-1} allora, essendo $a_n \in I_k$ frequentemente, esiste un indice n in modo che $a_n \in I_k$ e $n > n_{k-1}$ e chiamo con n_k il più piccolo di tali indici

(cioè $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I \text{ e } n > n_{k-1}\}$)

Si definisce così una successione di numeri naturali $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_{n_k} \in I_k \quad e \quad n_k > n_{k-1}. \qquad (*)$$

In modo formale la successione $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è definita per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_{k+1},\ n > n_k \} \end{cases}$$

Allora da $(*)$ risulta che $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è strett. crescente e quindi $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione estratta da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Per concludere, dato che $a_{n_k}, x_0 \in I_k$ risulta

$$\forall k \in \mathbb{N}: 0 \leq |a_{n_k} - x_0| \leq |I_k| = \frac{|I_0|}{2^k} \to 0$$

Per il teorema dei carabinieri si ottiene

$$|a_{n_k} - x_0| \to 0$$

che equivale a $a_{n_k} \to x_0$.