Fondamenti di Matematica (Canale I)

Ingegneria Informatica e Automatica
Sapienza Università di Roma.

Appello del 12.06.2023

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Istruzioni. Il compito è diviso in 2 parti: una di teoria e una di esercizi. La parte di teoria consiste nella dimostrazione di due teoremi e in ulteriori 2 domande (eventualmente con risposta multipla). La seconda parte consiste in 5 esercizi. Il tempo totale per la risoluzione del compito è di **3 ore**. Non è ammesso l'uso di calcolatrici e di qualsiasi dispositivo elettronico. Si allega una tabella delle formule principali.

Punteggio. Il punteggio massimo è 90 (40 per la teoria, 50 per gli esercizi) che sarà poi diviso per 3 per dare un voto finale in 30-esimi. L'esame si supera con un voto totale di almeno 18/30. Sono incluse alcune domande opzionali (facoltative) che consentono di superare i 90 punti ed eventualmente ottenere la lode. Per gli studenti con DSA il voto sarà riscalato sul 70% del punteggio massimo (cioè 53 punti).

	Punti
D1.1	
D1.2	
D1.3	
D1.4	
Parz. D	
E2.1	
E2.2	
E2.3	
E2.4	
E2.5	
Parz. E	
Tot./90	
Voto/30	

1 Teoria [40 punti – necessari 20]

Domanda 1.1 (2+10 punti). *Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$.*

a) *Dare la definizione di punto di massimo e minimo assoluto (o globale) di f.*

b) *Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass sull'esistenza di minimi e massimi.*

c) (opzionale – 2 punto). *Mostrare con controesempi che le ipotesi del teorema di Weierstrass sono necessarie.*

Risposta:

a) $x_0 \in A$ è p.to di massimo per f se $\forall x \in A$ $f(x) \leq f(x_0)$

$x_0 \in A$ è p.to di minimo per f se $\forall x \in A$ $f(x_0) \leq f(x)$.

b) Enunciato

Se A è compatto e $f: A \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è dotata di punti di massimo e di minimo.

Dimostrazione

Proviamo solo l'esistenza del massimo. Sia $M = \sup_A f$

M può essere un numero reale o $+\infty$.

Prendiamo una successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri, tale che

$$b_n < M \quad e \quad b_n \to M \text{ per } n \to +\infty.$$

Si può, per esempio considerare:
$$b_n = \begin{cases} M - \frac{1}{n} & se\ M < +\infty \\ n & se\ M = +\infty. \end{cases}$$

Adesso, dato che $b_n < M$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore esiste $x_n \in A$ tale che $b_n < f(x_n) \leq M$. Allora per il teorema dei carabinieri, si ha $f(x_n) \to M$ per $n \to +\infty$.

La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di A e A è compatto, perciò si può estrarre una successione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge ad un elemento $\bar{x} \in A$.

Dato che f è continua in A, $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$.

Ma $(f(x_{n_k}))_{n \in \mathbb{N}}$ è estratta da $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $f(x_n) \to M$ per $n \to +\infty$.
Quindi si deve avere che $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = M$.
Allora, per il teorema di unicità del limite, risulta $f(\bar{x}) = M$.
In definitiva, $\forall x \in A : f(x) \leq M = f(\bar{x})$. Perciò $\bar{x}$ è p.to di massimo per f.

b) se A non è compatto, il teorema non è vero.

Si prenda $f: [0,1[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. La funzione è continua ma non ha massimo

se f non è continua il teorema non è vero.

Si prenda $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ 2 $f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ 0 & se\ x = 1, \end{cases}$

e, di nuovo, la funzione non ha massimo.

Domanda 1.2 (3+3+6 punti). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.*

a) *Dare la definizione di* primitiva di f.

b) *Quali ipotesi su f garantiscono l'esistenza di una sua primitiva?*

c) *Dimostrare che due primitive di f differiscono per una costante.*

d) (opzionale – 2 punti) *Se la funzione f è definita in un insieme che è una unione di due intervalli disgiunti, è sempre vero che due sue primitive differiscono per una costante? Giustificare la risposta.*

Risposta:

a) Una primitiva di f è una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ che sia derivabile in I e tale che $\forall x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

b) la continuità di f.

c) Siano F e G due primitive di f.

Allora $\forall x \in I$: $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Perciò, dal teorema di Lagrange, segue che

$$\forall x, y \in I \quad (F-G)(x) - (F-G)(y) = 0$$

e quindi $F-G$ è costante.

d) No, se l'insieme di definizione non è un intervallo, due primitive non è detto che differiscano per una costante.

Es. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $\underbrace{A = \mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{non è un intervallo}}$ e $\forall x \in A$ $f(x) = \frac{1}{x}$

Allora definiamo $F(x) = \log|x|$ e $G(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{se } x > 0 \\ \log|x| - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Evidentemente $F'(x) = G'(x) = f(x)$, ma $F - G$ non è costante su A.

Domanda 1.3 (4+4 punti).

a) *Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = x^3$ in un generico punto x e calcolare il limite quando l'incremento h tende a zero.*

b) *Supponiamo che $f(x) = 3e^{x-1} + 2x^2$. Dare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.*

Risposta (dare adeguata giustificazione):

a)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + h^3 + 3x^2 h + 3xh^2 \cancel{- x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{h^2}_{\downarrow 0} + 3x^2 + \underbrace{3xh}_{\downarrow 0} = 3x^2.$$

b) La retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico di f ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Perciò nel caso in esame

$$\begin{cases} f(1) = 3 + 2 = 5 \\ f'(x) = 3e^{x-1} + 4x \Rightarrow f'(1) = 7. \end{cases}$$

Quindi si ha $y = 5 + 7(x-1) = 7x - 2$

Domanda 1.4 (5+3 punti).

a) *Il numero complesso* $z = \frac{3+i}{3-i}$

1) *è reale*
2) *ha parte reale strettamente negativa*
3) *è puramente immaginario*
~~4)~~ *ha parte reale strettamente positiva.*

b) *e cosa si può dire del numero iz?*

Risposta:

a)

$$z = \frac{3+i}{3-i} = \frac{3+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{(3+i)^2}{9-i^2} = \frac{9+i^2+6i}{10}$$

$$= \frac{8+6i}{10} = \underbrace{\frac{4}{5}}_{>0} + \frac{3}{5}i$$

b)

$$iz = i\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right) = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}i^2 = \underbrace{-\frac{3}{5}}_{<0} + \frac{4}{5}i$$

In questo caso la parte reale è strett. negativa.

2 Esercizi [50 punti – 25 necessari]

Esercizio 2.1 (10 punti). *Utilizzando gli sviluppi di McLaurin (si veda il formulario in fondo), calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - x^2 - 1}{x \operatorname{sen} x - x^2}$$

Risoluzione: (giustificare la risposta):

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

Quindi $e^{(x^2)} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ per $x \to 0$.

$\Rightarrow e^{(x^2)} - x^2 - 1 = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ per $x \to 0$.

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x \operatorname{sen} x - x^2 = x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4) - x^2 = -\frac{x^4}{3!} + o(x^4)$ per $x \to 0$

In definitiva il numeratore $e^{(x^2)} - x^2 - 1 \sim x^4/2$ per $x \to 0$

il denominatore $x \operatorname{sen} x - x^2 \sim -\frac{x^4}{6}$ per $x \to 0$

Perciò $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - x^2 - 1}{x \operatorname{sen} x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/2}{-x^4/6} = -3$.

Esercizio 2.2 (8 punti). *Sia data la serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad a_n := \frac{n+3}{n^2-2n+4}.$$

a) *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

1) la serie è a termini positivi ed è convergente.

~~2)~~ *la serie è a termini positivi ed è divergente.*

3) la serie non verifica la condizione necessaria per la convergenza.

b) (opzionale – 4 punti) *Studiare la monotonia della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e stabilire se la serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.*

Risoluzione (giustificare la risposta):

a) Verifichiamo che a_n è positivo.

Bisogna controllare il denominatore

$$n^2-2n+4 = (n-1)^2+2 \geq 2.$$

Poi, $$a_n = \frac{n+3}{n^2-2n+4} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+3/n}{1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}} \sim \frac{1}{n}.$$

1

Perciò la serie è asintotica alla serie armonica e quindi diverge.

b) Dobbiamo verificare il criterio di Leibniz.

1. Dato che $a_n \sim \frac{1}{n}$, si ha $a_n \to 0$.

2. monotonia: Vediamo dove la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+4}$ è decrescente

$$\sqrt{19} = \sqrt{\frac{19\cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{171}{9}} \approx \frac{13}{3} = \frac{12}{3}+\frac{1}{3} = 4+\frac{1}{3} = 4{,}33.$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+4-(x+3)(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{-x^2-6x+10}{(x^2-2x+4)^2} = -\frac{x^2+6x-10}{(x^2-2x+4)^2}$$

$p(x) = x^2+6x-10$, $\Delta = 36+40 = 76$ $(8^2 < \Delta < 9^2)$

$p(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{-6-\sqrt{76}}{2}$ e per $x > \frac{-6+\sqrt{\Delta}}{2} = -3+\sqrt{19} > 1$

Quindi f è decrescente in $[\underbrace{-3+\sqrt{19}}_{\sim 1}, +\infty[$ e allore

$\forall n \geq 2$ $a_{n+1} \leq a_n$. $\Rightarrow$ La serie è convergente.

Esercizio 2.3 (6 punti). *Dato l'insieme* $A = \{\frac{2n+3}{5n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$, *stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera.*

a) $\min A = \frac{2}{5}$ e $\max A = 1$.

b) $\inf A = \frac{2}{5}$ e $\sup A = +\infty$.

X *c)* $\inf A = \frac{2}{5}$ e $\sup A = 1$

d) $\inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta):

$$\frac{2}{5} \leq \frac{2n+3}{5n} = \frac{2}{5} + \frac{1}{n}\frac{3}{5} \leq \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$\frac{2}{5}$ è minorante di A e 1 è maggiorante di A.

In realtà per $n=1$, $\frac{2n+3}{5n} = 1$ e quindi $1 = \max A = \sup A$

(un massimo è anche estremo superiore)

Poi, dato che $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{n}\frac{3}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, per il teorema sui limiti delle successioni monotone,

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{5}\right) = \inf A$. Ma $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{n}\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}$

e quindi $\inf A = \frac{2}{5}$.

Esercizio 2.4 (12 punti). *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^2 e^{3x}(3x+4)dx$$

(Suggerimento: per parti).

Risoluzione:

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^{3x}(3x+4)\,dx = \int D\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)(3x+4)\,dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(3x+4) - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 3\,dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(3x+4) - \int e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(3x+4) - \frac{e^{3x}}{3}$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(3x+4-1) = e^{3x}(x+1).$$

Allora

$$\int_0^2 e^{3x}(3x+4)\,dx = \Big[e^{3x}(x+1)\Big]_0^2 = 3e^6-1.$$

Esercizio 2.5 (10+4 punti). *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \log x$$

e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

a) *insieme di definizione, studio del segno della funzione, limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, studio del segno della derivata prima, monotonia e determinazione degli estremi locali e assoluti.*

b) *studio della derivata seconda e determinazione dei punti di flesso e degli intervalli di convessità e concavità.*

Risoluzione:

a) Il dominio è $A =]0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\Big(1 + \overbrace{x\log x}^{\to 0}\Big) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

$x=0$ è un asintoto verticale

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \log x = 0 + (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \frac{\log x}{x} = 0 + 0 = 0$$ (non ci sono asintoti obliqui)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$ Perciò $f'(x) > 0 \iff x > 1$

$0 \quad - \quad 1 \quad +$

f è strett. decrescente in $]0,1]$ e strett. crescente in $[1,+\infty[$

1 è p.to di minimo assoluto per f.

Quindi $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) \geq f(1) = 1 > 0$.

$\Rightarrow$ la funzione è sempre positiva.

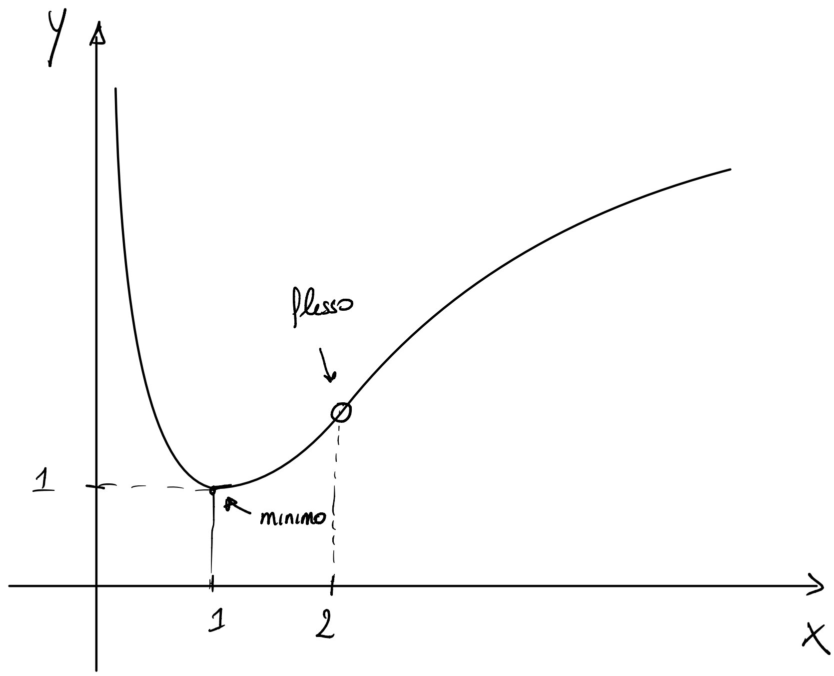
b) $f''(x) = \dfrac{x^2 - (x-1)2x}{x^4} = \dfrac{x - 2(x-1)}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3}$

Dato che $x^3 > 0$ per $x \in A$,

$$f''(x) > 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$$

Perciò f è convessa in $]0,2]$ e concava in $[2,+\infty[$.

2 è p.to di flesso



Formulario

Lista limiti notevoli

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^x = e^p$
5. $\lim_{x\to 0} \left(1+px\right)^{\frac{1}{x}} = e^p$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,$
10. $\lim_{x\to -\infty} |x|^p a^x = 0,$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$
12. $\lim_{x\to 0} x^p \log_a x = 0$
13. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Lista delle derivate delle principali funzioni elementari

1. $Dx^p = px^{p-1}\ (p \in \mathbb{R}).$
2. $D \operatorname{sen} x = \cos x$
3. $D \cos x = -\operatorname{sen} x$
4. $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
5. $De^x = e^x$
6. $Da^x = a^x \log a$
7. $D \log|x| = \frac{1}{x}$
8. $D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
11. $D \operatorname{senh} x = \cosh$
12. $D \cosh x = \operatorname{senh}$

Lista sviluppi di McLaurin ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0$.
6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ per $x \to 0$.

Integrali indefiniti delle principali funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
12. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctgh} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x + C$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$