Lezione 33

Proposizione (operazioni che preservano la convessità)
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni convesse (definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$). Allora
(i) $f+g$ è convessa
(ii) se $\alpha \geq 0$, allora αf è convessa
(iii) $\max\{f, g\}$ è convessa

Dim: Siano $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0,1]$ e poniamo $x = (1-t)x_1 + tx_2$.
Allora
(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) + (1-t)g(x_1) + t_2 g(x_2)$

$$= (1-t)(f(x_1) + g(x_1)) + t(f(x_2) + g(x_2))$$

$$= (1-t)(f+g)(x_1) + t(f+g)(x_2)$$

(ii): se $\alpha \geq 0$, allora moltiplicando per α la disuguaglianza

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)\ ,\quad \text{si ha}$$

$$\alpha f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\alpha f(x_1) + t\alpha f(x_2)$$

e quindi αf è convessa

(iii) Poniamo $h = \max\{f, g\} = f \vee g$. Quindi $f \leq h$ e $g \leq h$.

e
$$\begin{cases} f(x) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2) \leq (1-t) h(x_1) + t h(x_2) \\ g(x) \leq (1-t) g(x_1) + t g(x_2) \leq (1-t) h(x_1) + t h(x_2) \end{cases}$$

Perciò dato che $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ si ha

$$h(x) \leq (1-t) h(x_1) + t h(x_2)$$

<u>Esempi</u>.

1) Le funzioni affini $f(x) = ax + b$ sono convesse e concave. Infatti

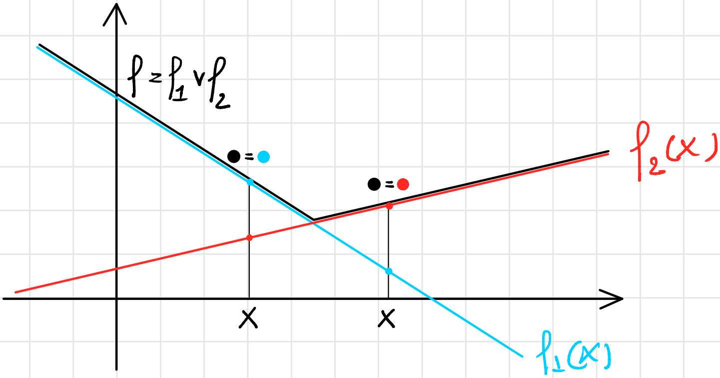
$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= a[(1-t)x_1 + tx_2] + b \\ &= a(1-t)x_1 + a t x_2 + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(ax_1 + b) + t(ax_2 + b). \\ &= (1-t) f(x_1) + t f(x_2) \end{aligned}$$

2) Il massimo tra due funzioni affini

$$f_1(x) = a_1 x + b_1, \qquad f_2(x) = a_2 x + b_2,$$

cioè la funzione
$$\begin{aligned} f(x) &= \max\{f_1(x), f_2(x)\} \\ &= \max\{a_1 x + b, a_2 x + b\}, \end{aligned}$$

è convessa



Per esempio sono convesse le funzioni

$|x| = \max\{x, -x\}$

$(x)_+ = \max\{0, x\}$

$(x)_- = \max\{0, -x\}$.

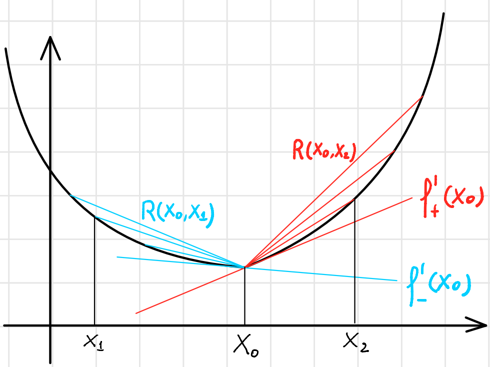
Teorema (derivabilità delle funzioni convesse)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione convessa (definita in un intervallo I). Allora

1) f è derivabile a sinistra e a destra nei punti interni ad I e risulta $\forall x_0 \in \mathring{I}$: $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

2) f è continua nei punti interni ad I

Illustrazione del punto 1)



$R(x_0, x_1) \leq R(x_0, x_2)$

$x_1 < x_0 < x_2$

le pendenze delle corde a sinistra di x_0 sono inferiori delle pendenze delle corde a destra di x_0

Dim: 1) Sia $x_0 \in \mathring{I}$. Sappiamo che la funzione

$$x \in I_{x_0} \to R(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è crescente.

Perciò per il teorema sui limiti delle funzioni monotone si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} R(x_0, x) = \sup_{x < x_0} R(x_0, x) \leq \inf_{x > x_0} R(x_0, x) = \lim_{x \to x_0^+} R(x_0, x)$$

Quindi i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale in x_0 esistono finiti e perciò f è derivabile a sinistra e a destra in x_0 e risulta

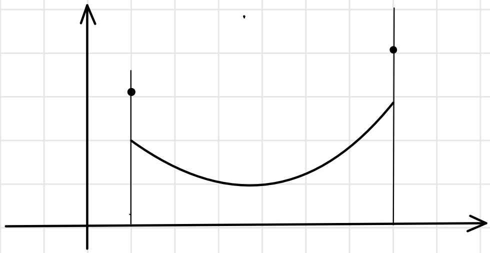
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} R(x_0, x) \leq \lim_{x \to x_0^+} R(x_0, x) = f'_+(x_0)$$

---

2) Dato che f è derivabile a sinistra e a destra in $x_0 \in \mathring{I}$, allora f è continua a sinistra e a destra in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Perciò $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi f è continua in x_0 $\square$

Osserv: una funzione convessa può essere discontinua al più agli estremi dell'intervallo di definizione



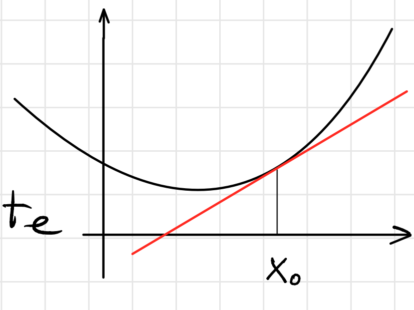
Teorema (criterio di convessità per funzioni derivabili)

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto I. Allora sono equivalenti

(i) f è (strettamente) convessa

(ii) $\forall x, x_0 \in I$, con $x \neq x_0$: $f(x) \underset{(>)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

[le tangenti al grafico di f si trovano sotto il grafico]



(iii) f' è (strettamente) crescente

Dim:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sia $x_0 \in I$. Dato che

$$x \in I_{x_0} \to R(x_0, x) \text{ è (strett.) crescente,}$$

per il teorema sui limiti delle funzioni monotone, si ha $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} R(x_0, x) = \sup\limits_{x < x_0} R(x_0, x) = f'(x_0) \\ \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} R(x_0, x) = \inf\limits_{x > x_0} R(x_0, x) = f'(x_0) \end{cases}$

Allora $\forall x \in I_{x_0}$: $\begin{cases} x < x_0 \quad R(x_0, x) \le f'(x_0) \quad (<) \\ x > x_0 \quad R(x_0, x) \ge f'(x_0) \quad (>) \end{cases}$

Quindi

se $x < x_0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0) \quad (<)$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{x - x_0 < 0} \quad f(x) - f(x_0) \ge f'(x_0)(x - x_0) \quad (>)$$

Se $x > x_0$ $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0) \quad (>)$

$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \ge f'(x_0)(x - x_0) \quad (>)$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

Allora $\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \ge f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad (>) \\ f(x_2) - f(x_1) \ge f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (>) \end{cases}$

e sommando,

$$0 \ge (f'(x_1) - f'(x_2)) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\ge 0} \quad (>)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_1) - f'(x_2) \le 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_1) \le f'(x_2) \quad (<)$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$

e $x \in I$ con $x_1 < x < x_2$.

Per il teorema di Lagrange $\exists\, c_1 \in]x_1, x[$ e $c_2 \in]x, x_2[$

tali che $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \underset{(<)}{\leq} f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Perciò $(x_2-x)(f(x)-f(x_1)) \leq (x-x_1)(f(x_2)-f(x))$

$\Longleftrightarrow$

$$[(x_2-x_1)-(x_1-x)](f(x)-f(x_1)) \leq (x-x_1)[(f(x_2)-f(x_1))-(f(x)-f(x_1))]$$

$(x_2-x_1)(f(x)-f(x_1)) \leq (x-x_1)(f(x_2)-f(x_1))$

$\Longleftrightarrow$ $$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1). \qquad \square$$

Corollario (2° criterio di convessità)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I con derivata continua in I e derivabile due volte in $\mathring{I}$. Allora sono equivalenti:

1) f convessa (concava) in $I \Longleftrightarrow \forall x \in \mathring{I}: f''(x) \geq 0$ (≤ 0)

2) Se $\forall x \in \mathring{I}: f''(x) \geq 0$ ($\leq$) e $\{x \in \mathring{I} \mid f''(x)\}$ non contiene intervalli non banali, allora f è strettamente crescente (decrescente)

Dim: segue dai criteri di monotonia applicati alla funzione derivata $f': I \to \mathbb{R}$. $\square$

Esempi

1) $P_4(x) = x^4$. Sappiamo che $P_4''(x) = 12x^2$.
Perciò $P_4''(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e P_4'' si annulla solo in 0.
Quindi per il corollario precedente possiamo concludere che la funzione potenza P_4 è strett. convessa.
(la stessa conclusione è vera per P_n con n pari)

2) Consideriamo la funzione $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$f(x) = -\log x$. Allora $f'(x) = -\frac{1}{x}$ e $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$
Quindi $-\log$ è una funzione strettamente convessa

3) Sia $P_a: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ con $P_a(x) = x^a$ e $a > 0$, la funzione potenza con esponente a.
Sappiamo che $P_a'(x) = a x^{a-1}$
Quindi $\begin{cases} a > 1 \Rightarrow P_a' \text{ è strett. crescente in } \mathbb{R}_+ \\ a = 1 \Rightarrow P_a' \text{ è costante} \\ a < 1 \Rightarrow P_a' \text{ è strett. decrescente in } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

Perciò $\quad \alpha > 1 \Rightarrow P_\alpha$ è strett. convessa in $\mathbb{R}_+$

$\alpha = 1 \Rightarrow P_\alpha$ è lineare quindi è convessa e concava

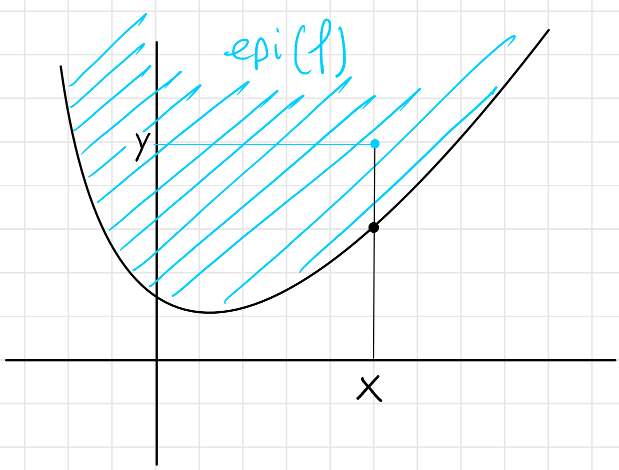
$\alpha < 1 \Rightarrow P_\alpha$ è strett. concava in $\mathbb{R}_+^*$.

FUNZIONI CONVESSE E INSIEMI CONVESSI

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si chiama epigrafico di f l'insieme

$$\text{epi}(f) = \{ (x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x) \}$$

L'epigrafico di f è un sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$ costituito dai punti che sono sopra al grafico.



Si ha la seguente caratterizzazione delle funzioni convesse

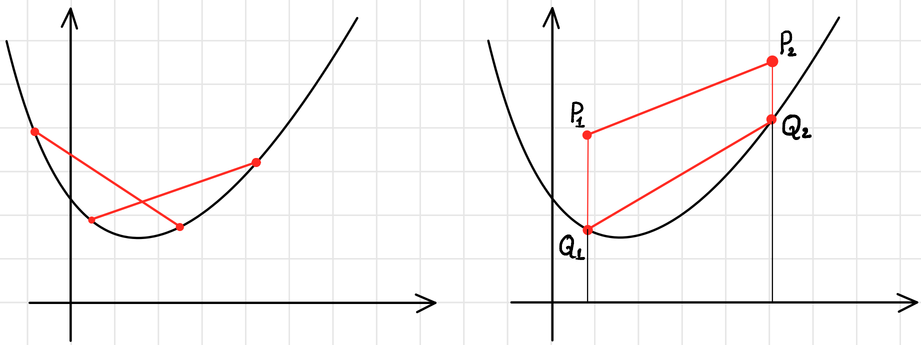
Teorema

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.

Allora sono equivalenti:

(i) f è convessa

(ii) $\mathrm{epi}(f)$ è un insieme convesso di $\mathbb{R}^2$.



Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii): Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathrm{epi}(f)$.

Allora i punti $Q_1 = (x_1, f(x_1))$ $Q_2 = (x_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi}(f)$

si trovano "sotto" i punti P_1 e P_2 (cioè $f(x_1) \leq y_1$ e $f(x_2) \leq y_2$)

e quindi il segmento P_1P_2 è sopra il segmento Q_1Q_2.

Infatti: $$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) = \underbrace{\left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}_{\geq 0} y_1 + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{\geq} y_2$$

$$\geq \left(1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$= f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(f(x_2)-f(x_1)\right) \geq f(x)$$

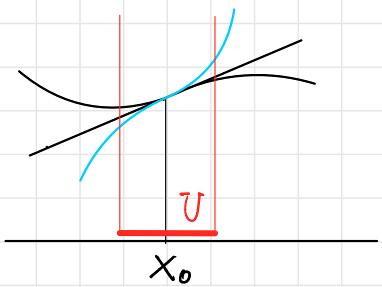
Perciò ogni punto del segmento P_1P_2 appartiene a epi(f) $\square$

PUNTI DI FLESSO

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{I}$ un punto di derivabilità di f oppure $f'(x_0) = \pm\infty$ (quindi esiste la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e eventualmente è verticale).

Il punto x_0 si dice di flesso per f se esiste un intorno $U =]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$ tale che

$$\begin{cases} f \text{ è strett. convessa (concava) in }]x_0-\delta, x_0] \\ f \text{ è strett. concava (convessa) in } [x_0, x_0+\delta[\end{cases}$$



Proposizione (criteri per flessi)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e $x_0 \in \mathring{I}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) x_0 è p.to di flesso per f.

(ii) esiste un intorno $U =]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$ t.c.

$$\begin{cases} f' \text{ è strett. crescente (decrescente) in }]x_0-\delta, x_0] \\ f' \text{ è strett. decrescente (crescente) in } [x_0, x_0+\delta[\end{cases}$$

Perciò se è vera (i), allora x_0 è punto di estremo locale proprio per f'.

Dim: segue direttamente dal teorema precedente sui criteri di convessità che

$$\begin{cases} f \text{ è strett. convessa in }]x_0-\delta, x_0] \Leftrightarrow f' \text{ è strett. crescente in }]x_0-\delta, x_0] \\ f \text{ è strett. concava in }]x_0-\delta, x_0] \Leftrightarrow f' \text{ è strett. decrescente in }]x_0-\delta, x_0] \end{cases}$$

È chiaro poi che da (ii) segue che x_0 è p.to di massimo (minimo) locale proprio per f'. $\square$

Corollario

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I ed è derivabile 2 volte in $x_0 \in \mathring{I}$. Allora

$$\boxed{x_0 \text{ p.to di flesso per } f \implies f''(x_0) = 0}$$

<u>Dim:</u> Per la proposizione precedente x_0 è p.to di estremo locale (proprio) per f'.
La derivata $f': I \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathring{I}$
Perciò per la regola di Fermat (applicata a f') risulta $f''(x_0) = 0$ $\square$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2} D(-x^2) = -2x e^{-x^2}$

$f'(x) > 0 \iff x < 0$

Quindi f è strett. cresc. in $]-\infty, 0]$ e strett. decrescente in $[0, +\infty[$. Quindi 0 è un punto di massimo per f e $f(0) = 1$.

Calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = (-2)e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

$$f''(x) > 0 \iff 2x^2-1 > 0 \iff x < -1/\sqrt{2} \vee x > 1/\sqrt{2}.$$

$$f'' \quad \begin{array}{ccccc} + & -\frac{1}{\sqrt{2}} & - & \frac{1}{\sqrt{2}} & + \end{array}$$

Quindi f' è
$$\begin{cases} \text{strett. cresc in } \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \text{strett. decrescente in } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \text{strett. crescente in } \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[\end{cases}$$

e allora

f è
$$\begin{cases} \text{strett. convessa in } \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \text{strett. concava in } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \text{strett. convessa in } \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[\end{cases}$$

e $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$