Complementi alla lezione 47

Formula di Leibniz per π

Partiamo da $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$,

da cui segue $\displaystyle\frac{1}{1-q} = \sum_{k=1}^{n} q^k + \frac{q^{n+1}}{1-q} \quad \forall q \neq 1.$

Scriviamo la formula per $q = -x^2$ (che è $\neq 1$)

$$(*) \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$

D'altra parte integrando la $(*)$ termine a termine si ha

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\,dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \overbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1}}_{= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}}^{S_n} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$$

serie armonica a segni alterni

e quindi

$$\frac{\pi}{4} - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\pi}{4} - S_n \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{x^2}\, dx = \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

Si è quindi provato che $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$

Esercizi sugli integrali impropri

1) $$\int_1^{+\infty} \frac{2x-3}{x^2+1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1} = \frac{x}{x^2}\frac{(2-3/x)}{1+1/x^2} = \frac{1}{x}\cdot \underbrace{\frac{2-3/x}{1+1/x^2}}_{\to 2}$$

Perciò $f(x) \simeq \frac{1}{x}$ e quindi l'integrale 1 non è convergente

2) $$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \underbrace{\frac{\log x}{x^{1/2}}}_{\to 0} \Rightarrow f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

e perciò l'integrale improprio è convergente.

3) $$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{x^{3/2}} \frac{\cancel{1}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \xrightarrow{} 1/2 \simeq \frac{1}{x^{3/2}}$$

l'integrale improprio è convergente

4) $\int_0^1 x \log x \, dx$ $\qquad \lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{y\to +\infty} \frac{\log y^{-1}}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y} = 0$

$x \log x$ è prolungabile per cont. in 0.

$$\int_0^1 \log x \, D\frac{x^2}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} \, dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = -\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

5) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \, dx$ $\qquad$ ($\operatorname{sen} x \geq 0$ per $x \in [0,1]$)

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow{} 1 \Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \to 0$$

Quindi l'integrale è divergente.

6) $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{3/2}} \, dx$

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \cancelto{1}{\frac{e^{-x}-1}{-x}} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}} \quad \text{per } x \to 0 .$$

Perciò l'integrale è convergente

f) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x}\, dx$

$$\int_a^{1/2} \frac{1}{x\log x}\, dx = \int_a^{1/2} \frac{D\log x}{\log x}\, dx = \Big[\log|\log x|\Big]_a^{1/2}$$

$$= \big(\log|\log 1/2| - \log|\log a|\big) \to -\infty \quad \text{per } a \to 0$$

8) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^2-x)e^{-x}\, dx$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int (x^2-x)e^{-x}\, dx = \int (x-x^2)\, De^{-x}\, dx$$

$$= (x-x^2)e^{-x} - \int (1-2x)e^{-x}\, dx$$

$$= (x-x^2)e^{-x} + \int (1-2x)\, De^{-x}\, dx$$

$$= (x-x^2)e^{-x} + (1-2x)e^{-x} + 2\int e^{-x}\, dx$$

$$= (x-x^2)e^{-x} + (1-2x)e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= [x - x^2 + 1 - 2x - 2]e^{-x} + c$$

$$= -(x^2 + x + 1)e^{-x} + c$$

Allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^2 - x)e^{-x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \left[-(x^2+x+1)e^{-x}\right]_0^{\beta}$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \left(-(\beta^2+\beta+1)e^{-\beta} + 1\right)$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{\beta^2+\beta+1}{e^{\beta}} + 1 = 1$$

9) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$= \int \frac{De^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left(\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\right)_{y=e^x}$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + c$$

In definitiva $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} e^x\right]_0^{\beta}$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} e^{\beta} - \operatorname{arctg} 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

10) Studiare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^2+1) - 2\log x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^2+1) - \log x^2} = \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{x}\right)}{(1/x)^5}}_{\to 1} \cdot \frac{x^2}{x^5} \underbrace{\frac{1/x^2}{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{\to 1}.$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^3} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Perciò l'integrale è convergente

11) $$\int_1^{+\infty} \frac{e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\, dx$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+e^{2x^2}} = \frac{e^{x^2}}{e^{2x^2}} \underbrace{\frac{1}{e^{-2x^2}+1}}_{\to 1}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$$

Dato che e^{-x^2} è integrabile in senso improprio, allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty[$

12) $$\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5 + \operatorname{sen} e^x}}\, dx$$

$$f(x) = \frac{\dfrac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5 + \operatorname{sen} e^x}}}{\sqrt[3]{x^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} e^x}{x^5}}}}_{\to \frac{\pi}{2} \text{ per } x \to +\infty} \cdot \frac{x}{x^{5/3}} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

Quindi l'integrale è divergente

13) $$\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|^p}{x^2}\, dx = (*)$$

$$(*) = \underbrace{\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen} x|^p}{x^2}\,dx}_{①} \quad \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|^p}{x^2}\,dx}_{②}$$

$$② \leq \int \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty .$$

① per $x \in \,]0,1]$: $\quad f(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)^p}{x^2} = \underbrace{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^p}_{\to 1} \cdot x^{p-2} \sim x^{p-2}$

Se $p-2 \geq 0$ la funzione x^{p-2} è continua su $[0,1]$ e quindi è integrabile

Se $p-2 < 0$, allora

$$x^{p-2} = \frac{1}{x^{2-p}} \text{ è integrabile su }]0,1] \iff 2-p < 1 \iff p > 1$$