

6

Campi vettoriali

■ 1 CAMPI VETTORIALI E INTEGRALI DI LINEA DI SECONDA SPECIE

1.1 Linee di campo

Come abbiamo visto nel capitolo 4, paragrafo 1.3, un *campo vettoriale* è una funzione che a ogni punto dello spazio fisico e in ogni istante assegna un vettore, che può avere il significato di *velocità*, di *forza* agente nel punto assegnato (campo gravitazionale, campo elettrostatico...) o altri ancora. Se il campo *non varia nel tempo* si dice *stazionario*.

Volendo tenere distinti tempo e spazio, un campo vettoriale è rappresentabile con una funzione $\mathbf{F} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo di tempo e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme di punti dello spazio. Si noti come gli spazi \mathbb{R}^n ed \mathbb{R}^m siano "pensati" in due modi differenti: il primo come insieme di punti dello spazio, il secondo come insieme di vettori.

In questo contesto, una funzione $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ viene anche detta *campo scalare*. Così, per esempio, si può dire che nella descrizione termodinamica di un gas, la temperatura $\theta = \theta(t, x, y, z)$ e la pressione $p = p(t, x, y, z)$ sono campi scalari, mentre la velocità delle particelle $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$ è un campo vettoriale.

Salvo avviso contrario lavoreremo prevalentemente con campi stazionari in 3 dimensioni. La riduzione a $n = 2$ non dovrebbe comportare difficoltà al lettore. Tutto quanto diremo per campi vettoriali $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vale, salvo avviso contrario, per campi $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con n qualsiasi.

Per un campo stazionario $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ useremo una delle due notazioni:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

oppure

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

dove le componenti $F_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sono campi scalari. In generale assumeremo che Ω sia un *aperto连通* ed $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, cioè abbia componenti derivabili con continuità in Ω .

DEFINIZIONE 6.1 Dato un campo vettoriale $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, chiameremo *linea di campo* di \mathbf{F} una qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto

a \mathbf{F} . Se \mathbf{F} rappresenta un campo di forza, le linee di campo si dicono anche *linee di forza*; se è un campo di velocità, si dicono *linee di flusso*.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una linea del campo \mathbf{F} ; il fatto che nel punto $\mathbf{r}(t)$ il campo \mathbf{F} sia tangente alla linea significa che il vettore $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ è parallelo al vettore $\mathbf{r}'(t)$; esiste dunque una funzione (scalare) $\lambda(t)$ tale che

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

Per determinare le linee di campo occorre dunque risolvere il *sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\begin{cases} x' = \lambda F_1(x, y, z) \\ y' = \lambda F_2(x, y, z) \\ z' = \lambda F_3(x, y, z) \end{cases}$$

equivalente a

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}.$$

Imponendo una "condizione iniziale", ossia il passaggio della curva per un punto (x_0, y_0, z_0) , il sistema avrà in generale un'unica soluzione (locale), purché il campo sia ben definito, regolare e non nullo¹. Come conseguenza si ottiene che, in generale, *per ogni punto dello spazio passa una e una sola linea di campo*. Le linee di campo costituiscono dunque una famiglia di linee, a due a due prive di intersezioni.

Esempio

Consideriamo il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -k \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3} \quad k > 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Per determinare le linee di campo occorre risolvere il sistema:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

ovvero

$$\begin{cases} \log|x| = \log|y| + a \\ \log|z| = \log|y| + b \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = k_1 y \\ z = k_2 y \end{cases}$$

Nell'esempio precedente, le linee di campo sono semplicemente le semirette con estremo nell'origine. Più precisamente, data la natura del campo \mathbf{F} , esse sono attratte dall'origine, che perciò si dice *pozzo* per le linee del campo. Un punto da cui le linee

¹ Questo seguirà dai risultati generali sul problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che discuteremo nel capitolo 8, paragrafo 2.

di campo *nascono* si dice invece *sorgente*. Pozzi e sorgenti sono *punti singolari* per il campo, ovvero punti in cui il campo non è definito, oppure non è regolare, oppure si annulla (altrimenti, per quanto notato in precedenza, per quei punti dovrebbe passare un'unica linea del campo).

ESEMPPIO

Consideriamo il campo piano di velocità $\mathbf{v} = (-y, x)$. Le linee di campo si ottengono risolvendo l'equazione

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

ossia

$$x dx = -y dy$$

che dà

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + c,$$

ossia

$$x^2 + y^2 = 2c.$$

Perciò le linee di campo sono circonferenze concentriche; per ogni punto del piano ne passa una e una sola, a eccezione dell'origine, in cui la linea degenera in un punto: si noti che il campo si annulla proprio in questo punto. Questo punto singolare non è né un pozzo né una sorgente.

ESEMPIO Sia $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare (differenziabile) e sia $\mathbf{F} = \nabla U$. Allora $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale. Le linee di campo hanno la direzione di ∇U che, lo ricordiamo, è perpendicolare in ogni punto alle linee di livello di U . Le linee di campo di \mathbf{F} sono ortogonali alle curve di livello del campo scalare U .

1.2 Gradiente, rotore e divergenza

Oltre all'operatore gradiente e all'operatore di Laplace, definiti su campi scalari rispettivamente dalle formule

$$\text{grad } = \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

altri due operatori differenziali di estrema importanza sia teorica che applicativa sono il *rotore* e la *divergenza*. Cominciamo a introdurli insieme ad alcune formule di uso frequente, riservandoci di ritornare sulla loro interpretazione fisica più avanti.

L'operatore rotore

Quest'operatore agisce su campi vettoriali tridimensionali.

DEFINIZIONE 6.2 Sia $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$. Si definisce *rotore* di \mathbf{F} il campo:

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

■

Il simbolo $\nabla \times \mathbf{F}$ rappresenta il prodotto vettoriale formale tra l'operatore ∇ e il campo \mathbf{F} .

Se $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, il campo \mathbf{F} si dice *irrotazionale*. Nel caso particolare di un campo piano $\mathbf{F}(x, y) = iF_1(x, y) + jF_2(x, y)$, si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

In questo caso, quindi, $\nabla \times \mathbf{F}$ è perpendicolare al piano in cui "vive" il campo \mathbf{F} ; si noti che il concetto di rotore ha senso solo se ambientato nello spazio \mathbb{R}^3 .

Il vettore $\nabla \times \mathbf{F}$, calcolato in un punto p , fornisce una misura di quanto il campo \mathbf{F} "ruoti" attorno al punto p .

ESEMPIO

Consideriamo il campo di velocità di un fluido in moto rotatorio uniforme attorno all'asse z . Se $\Omega = \Omega k$ è il vettore velocità angolare e $\mathbf{r}(x, y) = xi + yj$ è il vettore posizione del punto rispetto all'asse di rotazione, la velocità nel punto (x, y) è data da:

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} = -y\Omega \mathbf{i} + x\Omega \mathbf{j}.$$

Il rotore del campo di velocità è allora:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y\Omega) - \frac{\partial}{\partial y}(x\Omega) \right) \mathbf{k} = 2\Omega \mathbf{k}$$

ovvero

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$$

Il vettore velocità angolare è quindi $\frac{1}{2}$ del rotore della velocità. Generalizzando questo esempio, se \mathbf{v} è il campo di velocità in un mezzo continuo (per esempio un fluido), il vettore $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ ha il significato di velocità angolare locale del moto; è un indice della vorticosità locale del moto (ma si veda l'esercizio 1).

L'operatore divergenza

Un altro operatore differenziale che agisce sui campi vettoriali è l'operatore divergenza.

DEFINIZIONE 6.3 Sia $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale $C^1(\Omega)$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. Si definisce *divergenza* di \mathbf{F} il campo scalare:

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

■

Per esempio, se $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ è un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 ,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ risulta un campo scalare, cioè una funzione reale di 3 variabili. Il simbolo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ denota il prodotto scalare formale dell'operatore ∇ e il campo \mathbf{F} .

Anche la divergenza di un campo, come il rotore, ha un significato fisico, che si potrà comprendere più avanti, quando incontreremo il teorema della divergenza (v. paragrafo 5). Per ora possiamo dire, senza darne una giustificazione, che la divergenza di un campo segnala punto per punto l'intensità delle sorgenti (o pozzi) del campo stesso: per esempio, la divergenza del campo gravitazionale segnala la densità di materia nel punto (sorgente del campo), la divergenza del campo "corrente di calore" segnala la presenza di sorgenti (o pozzi) di calore in un mezzo ecc.

Un campo a divergenza nulla in Ω si dice *solenoidale* in Ω .

Esempio

 Calcoliamo la divergenza del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine; abbiamo visto che il campo è:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -k \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3}.$$

Calcoliamo, per $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= -k \left\{ \partial_x \left(\frac{x}{r^3} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{r^3} \right) + \partial_z \left(\frac{z}{r^3} \right) \right\} = \\ &= -k \left\{ \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} + \frac{r^3 - 3y^2 r}{r^6} + \frac{r^3 - 3z^2 r}{r^6} \right\} = \\ &= -\frac{k}{r^6} \{3r^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)r\} = 0.\end{aligned}$$

Pertanto, fuori dall'unico punto in cui c'è una massa, la divergenza del campo gravitazionale è nulla. Nel punto in cui si trova la massa puntiforme, la divergenza non è definita, perché il campo stesso non è definito (il modulo del campo tende a ∞ nell'origine). Si può concludere che il campo è solenoideale fuori dall'origine.

Identità differenziali

Vogliamo ora segnalare alcune importanti relazioni tra gli operatori gradiente, rotore, divergenza. Va sempre tenuto presente che:

- l'operatore gradiente trasforma un campo scalare in un campo vettoriale;
- l'operatore rotore trasforma un campo vettoriale (tridimensionale) in un altro campo vettoriale (tridimensionale);
- l'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale in un campo scalare.

Ciò significa che se \mathbf{F} è un campo vettoriale e u è un campo scalare, entrambi di classe $C^2(\Omega)$, si possono calcolare le seguenti composizioni di operatori:

$$\text{div rot } \mathbf{F} \quad \text{rot grad } u \quad \text{div grad } u \quad \text{grad div } \mathbf{F}$$

mentre non hanno senso, per esempio, le scritture $\text{rot div } \mathbf{F}$, $\text{grad rot } \mathbf{F}$ ecc.

Alcune di queste composizioni hanno un risultato notevole:

PROPOSIZIONE 6.1 Siano u, \mathbf{F} , rispettivamente, un campo scalare e un campo vettoriale (tridimensionale) di classe $C^2(\Omega)$. Allora:

$$(1.1) \quad \nabla \times (\nabla u) = \text{rot grad } u = 0$$

$$(1.2) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

$$(1.3) \quad \nabla \cdot (\nabla u) = \text{div grad } u = \Delta u.$$

La (1.3) vale per $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con n qualunque.

DIMOSTRAZIONE.

(??). Sia $\mathbf{F} = \nabla u$. Allora:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

per il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste.

(1.2).

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

ancora per l'uguaglianza delle derivate seconde miste.

(1.3).

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

Vi sono molte altre identità differenziali che riguardano l'azione di questi operatori su due campi scalari o vettoriali. Ne scriviamo qualcuna:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot (f \mathbf{G}) &= \nabla f \cdot \mathbf{G} + f (\nabla \cdot \mathbf{G}) \\ \nabla \cdot (f \nabla g) &= f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla \cdot (f \nabla \times \mathbf{G}) &= \nabla f \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (f \mathbf{G}) &= \nabla f \times \mathbf{G} + f (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (f \nabla g) &= \nabla f \times \nabla g \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \Delta \mathbf{G} \end{aligned}$$

Qui f, g sono campi scalari, \mathbf{G} è un campo vettoriale, tutti i campi sono derivabili quante volte occorre. Il lettore è invitato a verificare le (1.4) per esercizio². Tutte le identità seguono applicando le definizioni degli operatori differenziali, la regola di derivazione del prodotto e le identità scritte nella Proposizione 6.1. Per il rotore, è utile usare la definizione come determinante formale.

²Nell'ultima delle (1.4), il simbolo $\Delta \mathbf{G}$ indica il vettore ottenuto applicando l'operatore Δ a ciascuna componente di \mathbf{G} .

1.3 Integrale di linea di un campo vettoriale. Lavoro e circuitazione.

Un concetto fisico fondamentale legato ai campi vettoriali, soprattutto nella loro interpretazione come campi di forza, è quello di lavoro. Il *lavoro elementare compiuto da una forza F* dovuto a uno spostamento infinitesimo $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ del suo punto di applicazione è, per definizione,

$$dL = \mathbf{F} \cdot dr = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Questa scrittura formale acquista un significato compiuto nella seguente:

DEFINIZIONE 6.4 (LAVORO DI UN CAMPO VETTORIALE) Sia γ un arco di curva regolare a tratti, parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = ix(t) + jy(t) + kz(t)$, $t \in [a, b]$. Definiamo *integrale di linea (o lavoro) di F lungo γ* l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot dr &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

La quantità $\mathbf{F} \cdot dr$ si può riscrivere anche nella forma $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dt$, dove \mathbf{T} è il versore tangente alla curva. ■

L'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot dr$ rappresenta pertanto il lavoro totale compiuto da \mathbf{F} per spostare il suo punto di applicazione da $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(b)$ lungo γ . Altre interpretazioni altrettanto significative sono comunque possibili, a seconda della natura del campo \mathbf{F} . Se la curva γ è semplice e chiusa, si usa il simbolo $\oint \mathbf{F} \cdot dr$ e si chiama *circuitazione del campo F*.

Esempio

Consideriamo il campo di velocità piano:

$$\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Calcoliamo:

- a) la circuitazione di \mathbf{v} lungo la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine, percorsa in verso antiorario;
- b) l'integrale di linea lungo l'arco di spirale $\rho = \theta$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Parametrizziamo la circonferenza con

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Pertanto

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

e la circuitazione è

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot dr &= \int_0^{2\pi} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

b) Parametrizziamo l'arco di spirale con

$$\mathbf{r}(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta).$$

Perciò

$$\mathbf{r}'(\theta) = (\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [-\theta \sin \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta) + \theta \cos \theta (\sin \theta + \theta \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{8\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Essendo riconducibile a un integrale di Riemann, l'integrale di linea di un campo vettoriale possiede le proprietà di linearità rispetto all'integrandi e di additività rispetto all'unione di curve, perfettamente analoghe a quelle dell'integrale di linea introdotto nel capitolo 2, paragrafo 5. Tuttavia, tra i due integrali sussiste un'importante differenza e per questo motivo vengono denominati, rispettivamente, *integrale di linea di prima e di seconda specie*. Confrontiamo i due integrali:

– l'integrale di linea di *prima specie* di una funzione continua f , lungo una curva γ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, è (cap 2, par 5):

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

– l'integrale di linea di *seconda specie*, lungo γ , del campo \mathbf{F} , definito sopra, è:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Si osservi il diverso modo in cui il vettore tangente alla curva è coinvolto nell'integrale. Questa differenza ha una importante conseguenza:

- l'integrale di prima specie è invariante per cambiamenti di parametrizzazione della curva, anche quando la nuova parametrizzazione ne cambia l'orientazione: il risultato cioè non cambia cambiando il verso di percorrenza della curva;
- l'integrale di seconda specie, invece, cambia di segno se si cambia l'orientazione sulla curva, mentre continua a essere invariante per cambiamenti di parametro che non alterino l'orientazione: *il segno dell'integrale, dunque, dipende dal verso di percorrenza della curva.*³

È corretto quindi parlare di lavoro di un campo lungo una curva orientata (per esempio "lungo una circonferenza percorsa in senso antiorario"). Si ricordi che la

³Quando nell'integrale $\int_a^b f(x) dx$ introduciamo la convenzione

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

stiamo in realtà considerando l'integrale di Riemann come un integrale di linea di seconda specie, lungo l'asse x orientato.

parametrizzazione della curva induce un'orientazione; per cambiarla, occorre cambiare parametrizzazione. Per esempio, la circonferenza unitaria percorsa in senso orario ha la parametrizzazione:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Naturalmente un campo vettoriale potrebbe avere qualche componente nulla, o qualche componente che è sempre ortogonale alla curva su cui si integra, nel qual caso l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si riduce ad avere solo uno o due dei tre addendi $\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Più in generale, per un qualsiasi campo scalare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definito almeno nei punti della curva regolare γ , possiamo dare direttamente la definizione di

$$\int_{\gamma} F dx = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)) x'(t) dt,$$

e analogamente per $\int_{\gamma} F dy$ e $\int_{\gamma} F dz$.

1.4 Campi conservativi e potenziali

L'esempio 1.6 mostra che, in generale, la circuitazione di un campo vettoriale è non nulla. Come vedremo, ciò equivale ad affermare che l'integrale di linea lungo un arco di curva di estremi p_0 e p_1 non dipende solo dagli estremi bensì anche dal cammino percorso per congiungerli. Vi sono tuttavia speciali campi vettoriali, detti *conservativi*, per i quali la circuitazione è nulla. Precisamente, abbiamo la:

DEFINIZIONE 6.5 Un campo vettoriale $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *conservativo* in Ω se $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ ed esiste una funzione $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, detta *potenziale* di \mathbf{F} , tale che $U \in C^2(\Omega)$ e $\mathbf{F} = \nabla U$ in Ω , cioè

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

■

Lo scalare $E_{pot} = -U$ rappresenta l'*energia potenziale* associata al campo. Coerentemente col suo significato fisico, il potenziale U , se esiste, è univocamente definito nell'aperto Ω , a meno di una costante additiva, purché Ω sia connesso.

L'aggettivo *conservativo* deriva dal fatto che, se una particella è in moto lungo una curva di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ sotto l'azione di una forza data da $\mathbf{F} = \nabla U$, allora l'*energia meccanica totale* E_{tot} della particella si conserva durante il moto. Infatti, si ha:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - U$$

dove m è la massa della particella e $v = v(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ la sua velocità scalare. Scriviamo $E_{cin} = \frac{1}{2}m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$ e ricordiamo che, per la seconda legge della dinamica, $\mathbf{F} = ma = m\mathbf{r}''$; differenziando E_{tot} , si ha:

$$dE_{tot} = m\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' - dU = m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' dt - \nabla U \cdot \mathbf{r}' dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt = 0$$

e quindi E_{tot} non varia.

Molti campi di interesse fisico sono conservativi e, quando questo si verifica, il campo ha notevoli proprietà che ne facilitano lo studio. Incontreremo un po' alla volta queste proprietà.

Esempio

■ Il campo gravitazionale di una massa puntiforme (vedi esempio 1.1) è conservativo nello spazio privato dell'origine. Infatti,

$$-\frac{k(x, y, z)}{r^3} = \nabla \left(\frac{k}{r} \right) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

come si verifica subito. Il potenziale gravitazionale è dunque:

$$U(x, y, z) = \frac{k}{r}.$$

Si noti che le linee di campo (rette uscenti dall'origine) sono normali in ogni punto alle *superfici equipotenziali*, cioè alle superfici $U = \text{cost.}$, che in questo caso sono sfere centrate nell'origine.

Vediamo come si calcola il lavoro per un campo conservativo. In tutto il seguito assumiamo sempre che Ω sia un *aperto connesso*.

LEMMA 6.1 *Sia $\mathbf{F} = \nabla U$ un campo conservativo in Ω e sia γ una curva regolare a tratti, orientata e contenuta in Ω , parametrizzata da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Siano $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a)$, $\mathbf{q} = \mathbf{r}(b)$ gli estremi della curva. Il lavoro di \mathbf{F} lungo γ è dato da:*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{p}).$$

Il lavoro, quindi, dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, la circuitazione di un campo conservativo è nulla.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, è regolare, si ha:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) dt = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)) = U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Se \mathbf{r} è C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a, b]$ nell'unione di N intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ con $j = 1, \dots, N$, in modo che $t_1 = a$ e $t_{N+1} = b$ e che $\mathbf{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$. Applicando la (1.5) a ognuno degli intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ e sommando i singoli contributi, si trova:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^N [U(\mathbf{r}(t_{j+1})) - U(\mathbf{r}(t_j))] = U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{p})$$

che conclude la dimostrazione. ◊

In realtà, la condizione che la circuitazione sia nulla lungo *ogni curva semplice e chiusa* contenuta in Ω caratterizza i campi conservativi. Vale infatti il seguente importante teorema.

TEOREMA 6.2 Sia $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$. Le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

(a) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1, γ_2 contenute in Ω e aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale (e per il resto disgiunte),

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(b) Per ogni curva chiusa γ , semplice regolare a tratti e contenuta in Ω ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(c) \mathbf{F} è conservativo.

Confrontando l'enunciato di questo teorema col Lemma precedente si nota che: l'annullarsi del lavoro lungo qualunque curva *semplice*, chiusa e regolare a tratti implica la conservatività del campo, che a sua volta implica l'annullarsi del lavoro lungo qualunque curva chiusa e regolare a tratti (anche non semplice).

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione $(c) \Rightarrow (b)$ è contenuta nel lemma 6.1. Facciamo vedere che $(a) \Rightarrow (c)$ e che $(b) \Rightarrow (a)$.

(a) \Rightarrow (c). Siano $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $p = (x, y, z)$ due punti in Ω e $\gamma \subset \Omega$ una curva orientata di estremi p_0 e p . Pensando p_0 fissato, per l'ipotesi (a), l'integrale curvilineo lungo γ dipende solo da p e quindi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(x, y, z).$$

Vogliamo dimostrare che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \text{ in } \Omega,$$

Congiungiamo p al punto $(x + \Delta x, y, z)$ con un segmento rettilineo Γ di equazioni parametriche

$$x(t) = x + t\Delta x, \quad y(t) = y, \quad z(t) = z, \quad t \in [0, 1],$$

come mostrato in figura 6.1.

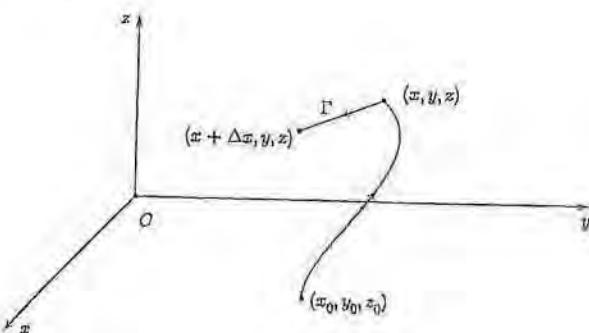


Figura 6.1.

Essendo $x'(t) = \Delta x$, $y'(t) = z'(t) = 0$, usando le proprietà di additività dell'integrale di linea, possiamo scrivere:

$$U(x + \Delta x, y, z) = U(x, y, z) + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(x, y, z) + \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) \Delta x dt.$$

Ne segue che

$$\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) dt.$$

Essendo F_1 continua, passando al limite sotto il segno di integrale per $\Delta x \rightarrow 0$, si ottiene $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$.

In modo analogo si dimostra che:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \text{ e } \frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \text{ in } \Omega,$$

per cui U è una funzione potenziale per il campo \mathbf{F} che risulta pertanto conservativo.

(b) \Rightarrow (a) Siano γ_1, γ_2 curve regolari a tratti contenute in Ω e aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale, per il resto disgiunte. Cambiamo l'orientazione di γ_2 e chiamiamo γ_2^* la nuova curva. Sappiamo che

$$\int_{\gamma_2^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Definiamo poi la curva semplice e chiusa $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^*$, che risulta regolare a tratti. Usando (b) e l'additività dell'integrale di linea, si ha:

$$0 = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

da cui (a). ♦

OSSERVAZIONE Sottolineiamo che la dimostrazione di (a) \Rightarrow (c) indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo \mathbf{F} , qualora questo risulti conservativo. La ricetta generale è la seguente: si fissa un punto p_0 in Ω e lo si congiunge con una curva γ qualsiasi, purché contenuta in Ω , con un punto generico $p = (x, y, z)$. Un potenziale, in particolare quello che si annulla in p_0 , è dato da:

$$U(x, y, z) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Un metodo più diretto per costruire un potenziale sarà indicato più avanti, in alcuni esempi.

Il teorema implica che, se si riesce a trovare una curva semplice e chiusa $\gamma \subset \Omega$ tale che

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0,$$

allora \mathbf{F} non è conservativo. Il seguente esempio in 2 dimensioni, che riprenderemo anche in seguito, è particolarmente significativo.

Esempio

 Siano $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ e

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Calcoliamo la circuitazione di \mathbf{F} lungo la circonferenza unitaria, centrata nell'origine, di equazioni parametriche $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Si ha, essendo $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [-\sin t (-\sin t) + \cos t (\cos t)] dt = 2\pi.$$

Concludiamo che \mathbf{F} non è conservativo in Ω .

1.5 Campi irrotazionali. Insiemi semplicemente connessi

Un campo avente rotore nullo in tutto il suo dominio si dice *irrotazionale*. Tra campi irrotazionali e campi conservativi esiste uno stretto legame, che tuttavia va illustrato con precisione.

Innanzitutto, se \mathbf{F} è conservativo e U è un suo potenziale, si ha $\mathbf{F} = \nabla U$ e allora (cfr. (1.1)) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Pertanto:

PROPOSIZIONE 6.2 Se \mathbf{F} è conservativo in Ω , allora è irrotazionale in Ω .

Sorge spontanea la domanda: è vero il viceversa? Cioè: se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in Ω , allora \mathbf{F} è conservativo in Ω ?

In generale la risposta è negativa. Riprendiamo infatti l'esempio 1.8. Abbiamo constatato che

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Tuttavia, si ha:

$$F_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ e } F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ed essendo un campo piano, la condizione di irrotazionalità equivale a:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}.$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

e perciò $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Pertanto, la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che \mathbf{F} sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto Ω in cui il campo è irrotazionale.

La nozione chiave è quella di *aperto semplicemente connesso*, di cui daremo solo una definizione intuitiva, ma sufficiente ai nostri scopi. Ricordiamo che un aperto Ω si

dice *connesso* (vedi capitolo 3, paragrafo 3.1) se, presi due punti di Ω , esiste un arco di curva continuo che congiunge questi due punti ed è interamente contenuto in Ω .

DEFINIZIONE 6.6 L'aperto Ω si dice *semplicemente connesso* se è connesso e inoltre soddisfa la condizione seguente: *ogni curva semplice, chiusa e interamente contenuta in Ω , può essere ridotta mediante una deformazione continua a un unico punto, senza mai uscire da Ω .*

Vediamo alcuni esempi tipici.

Esempio

Nel piano:

- sono semplicemente connessi: cerchi, ellissi, poligoni, semipiani e tutte le figure piane che si possono ottenere da queste deformandole con continuità; il piano stesso o il piano privato di una semiretta.
- non sono semplicemente connessi: il piano o un cerchio (ellisse, poligono) privato di un punto; una corona circolare; ogni insieme che presenta "un buco".

Nello spazio:

- sono semplicemente connessi: sfere, ellisoidi, poliedri convessi e tutti i solidi che si possono ottenere da questi deformandoli con continuità; una corona-sferica, un semispazio, lo spazio privato di un numero finito di punti.
- non sono semplicemente connessi: il toro, la sfera privata di un diametro, lo spazio privato di una retta.

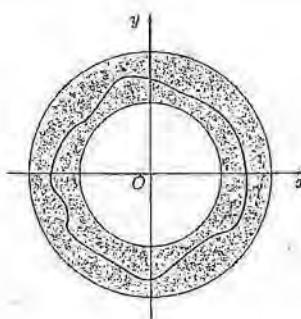


Figura 6.2. La corona circolare non è semplicemente connessa: la curva γ non si può contrarre a un punto senza uscire dalla corona.

Chiarita questa nozione, possiamo enunciare un risultato profondo, che non dimostreremo:

TEOREMA 6.3 *Sia $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, irrotazionale in Ω . Se Ω è semplicemente connesso, allora \mathbf{F} è conservativo in Ω .*

Naturalmente la condizione topologica su Ω è solo sufficiente. Vi sono campi conservativi anche in insiemi non semplicemente connessi (si veda l'esempio 1.11).

OSSERVAZIONE Sia $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in un aperto Ω qualunque (anche non connesso). Ogni punto di Ω ha un intorno sferico B_R contenuto in Ω e B_R è semplicemente connesso. Si può sempre applicare il teorema in B_R e dedurne che in questo intorno (dunque localmente) il campo è conservativo. Si dice allora che il campo \mathbf{F} è *localmente conservativo* e che quindi esiste un *potenziale locale*.

Vediamo una serie di esempi che illustrano i concetti presentati finora.

Esempio

Controlliamo se il campo

$$\mathbf{F} = -iy + jx$$

è conservativo o almeno localmente conservativo nel piano. Calcoliamone poi la circuitazione lungo l'ellisse γ

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo $\nabla \times \mathbf{F}$. Poiché:

$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 1 - (-1) = 2$$

il campo non è irrotazionale in alcuna regione del piano. Pertanto non è conservativo e non c'è ragione di aspettarsi che il lavoro lungo un cammino chiuso sia nullo (naturalmente, potrebbe anche esserlo per qualche cammino speciale): occorre dunque calcolarlo in base alla definizione. Essendo

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, b \cos t),$$

si trova:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [-b \sin t \cdot (-a \sin t) + a \cos t \cdot b \cos t] dt = 2\pi ab.$$

In $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ consideriamo il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Controlliamo prima se il campo è conservativo in Ω e poi calcoliamo:

a) la circuitazione lungo l'ellisse di equazione $3x^2 - xy + 10y^2 = 1$, percorsa in senso antiorario;

b) il lavoro lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = 1 + x^2$, $x \in [0, 2]$;

c) il lavoro lungo un qualsiasi arco di una qualsiasi circonferenza centrata in $(0, 0)$.

Calcoliamo innanzitutto $\nabla \times \mathbf{F}$. Abbiamo:

$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \equiv 0$$

per cui $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in Ω ed \mathbf{F} è localmente conservativo. Per calcolare un potenziale $U = U(x, y)$ osserviamo che deve essere:

$$U_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \text{ perciò } U = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_1(y)$$

poiché la "costante d'integrazione" è una quantità costante rispetto a x (la variabile d'integrazione) e quindi è funzione della sola y . Analogamente:

$$U_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \text{ perciò } U = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_2(x).$$

Scegliendo $c_1(y) = c_2(x) = 0$ si trova il potenziale

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

che soddisfa entrambe le richieste in tutto Ω .

Perciò \mathbf{F} è effettivamente conservativo in tale insieme, anche se Ω non è semplicemente connesso. Di conseguenza:

a) la circuitazione lungo qualunque curva chiusa, in particolare lungo l'ellisse indicata, è nulla;

b) poiché l'arco di parabola ha estremi $p = (0, 1)$; $q = (2, 5)$, il lavoro è dato da:

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(q) - U(p) = \frac{1}{2} \log 29;$$

c) il lavoro lungo qualsiasi arco della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio R è nullo, perché gli estremi di questo arco hanno lo stesso potenziale $\frac{1}{2} \log(R^2)$. Questo è un fatto generale: se un campo è conservativo, è nullo non solo il lavoro lungo un cammino chiuso, ma anche il lavoro lungo un cammino che ha i suoi estremi sulla stessa linea equipotenziale.

 Calcoliamo il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

- a) sulla circonferenza unitaria di centro $(1, 2)$, in senso antiorario;
- b) sulla curva raffigurata nella figura seguente.

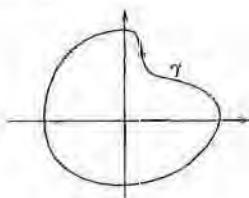


Figura 6.3.

a) Abbiamo visto (esempio 1.8) che questo campo è irrotazionale in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, non è conservativo in tutto Ω , ma lo è in qualsiasi aperto semplicemente connesso⁴ $A \subset \Omega$.

Per esempio, \mathbf{F} è conservativo nel piano privato di una qualsiasi semiretta uscente dall'origine e poiché la circonferenza unitaria di centro $(1, 2)$ è contenuta nel piano privato della semiretta $\{y = 0, x > 0\}$, il lavoro lungo questa curva è nullo.

⁴Un potenziale nei semipiani $x > 0$ e $x < 0$ è dato da

$$U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

come si controlla facilmente.

b) Infine, affermiamo che la circuitazione lungo la curva γ in figura è uguale alla circuitazione lungo la circonferenza unitaria γ_0 centrata nell'origine e perciò uguale a 2π , come calcolato nell'esempio 1.8.

Per spiegare questa affermazione si osservi la figura 6.4. La curva Γ disegnata non circonda l'origine e infatti è contenuta nel piano privato del semiasse positivo delle ascisse, che costituisce una regione semplicemente connessa. Il campo è conservativo in questa regione e quindi la circuitazione lungo la curva è nulla. D'altro canto, ci si convince facilmente che

$$0 = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\gamma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

poiché, per via della diversa orientazione, i due segmenti rettilinei danno invece contributi uguali e contrari al calcolo dell'integrale e quindi sono ininfluenti. Ne segue che il lavoro lungo γ è uguale al lavoro lungo γ_0 .

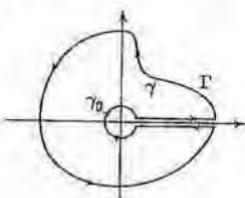


Figura 6.4.

OSSERVAZIONE In generale, se \mathbf{F} è un campo irrotazionale in un aperto Ω qualsiasi (anche non semplicemente connesso), diciamo che due cammini contenuti in Ω sono equivalenti se si possono deformare uno nell'altro con continuità *senza mai uscire da* Ω . In tal caso, con un'argomentazione simile a quella usata nell'ultimo esempio, si vede che il lavoro di \mathbf{F} lungo i due cammini è lo stesso.

Esempio

Esempio Nell'aperto $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$ consideriamo il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (xy - \sin z)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right)\mathbf{k}.$$

Controlliamo se è irrotazionale. Abbiamo:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 - \partial_z F_2 = x - x \equiv 0 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 = -\cos z - (-\cos z) \equiv 0 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_3 = \frac{e^y}{z^2} - \frac{e^y}{z^2} \equiv 0 \end{cases}$$

perciò $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ e quindi \mathbf{F} è localmente conservativo.

Cerchiamo un potenziale locale. Questa volta procediamo imponendo una dopo l'altra le condizioni⁵:

$$(1.6) \quad U_x = xy - \sin z, \quad U_y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \quad U_z = \frac{e^y}{z^2} - x \cos z.$$

⁵Si può controllare che questo metodo coincide con quello indicato nell'osservazione alla fine del paragrafo 1.4 quando si scelga come curva γ di integrazione una spezzata di tre segmenti paralleli agli assi coordinati.

Dalla prima ricaviamo

$$(1.7) \quad U(x, y, z) = \int (xy - \sin z) dx = \frac{1}{2}x^2y - x \sin z + a(y, z)$$

con a da determinarsi. Essendo $U_y = \frac{1}{2}x^2 + a_y(y, z)$, dalla seconda delle (1.6) abbiamo:

$$a_y(y, z) = -\frac{e^y}{z}$$

da cui

$$a(y, z) = -\frac{e^y}{z} + b(z).$$

Finora abbiamo dunque:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - x \sin z - \frac{e^y}{z} + b(z),$$

con b da determinarsi.

Essendo $U_z = -x \cos z + \frac{e^y}{z^2} + b'(z)$, imponendo la terza delle (1.6) troviamo:

$$b'(z) = 0$$

da cui $b(z) = k$, costante. In conclusione, i potenziali locali hanno la forma

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - x \sin z - \frac{e^y}{z} + k.$$

Il campo è effettivamente conservativo, separatamente, in ciascuno dei due semispazi $x > 0, z < 0$, poiché questi sono semplicemente connessi.

1.6 Campi solenoidali e potenziale vettore

Abbiamo visto la relazione esistente tra campi *irrotazionali* e campi *conservativi*: se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in un aperto Ω , \mathbf{F} è localmente conservativo e cioè si può scrivere localmente come $\mathbf{F} = \nabla U$; lo scalare U è un potenziale di \mathbf{F} ed è definito univocamente a meno di costanti additive. Se Ω è semplicemente connesso, allora \mathbf{F} è anche conservativo globalmente, cioè U è un potenziale in tutto Ω .

L'importanza dei campi conservativi risiede nell'invarianza dei loro integrali di linea rispetto a deformazioni continue del cammino di integrazione, che costituisce una versione del principio di conservazione dell'energia meccanica.

Questioni analoghe si presentano esplorando la relazione che sussiste tra i campi *solenoidali*, l'equazione $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ e i campi che si possono esprimere come *rotore di un altro campo vettoriale*, cioè per i quali esiste \mathbf{V} tale che $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{F}$. Il campo \mathbf{V} prende il nome di *potenziale vettore di \mathbf{F}* .

Osserviamo subito che:

PROPOSIZIONE 6.3 *Sia $\mathbf{V} \in C^2(\Omega)$ un potenziale vettore di \mathbf{F} in Ω . Allora $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in Ω .*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{V}$ si ha [cfr. (1.2)] $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$.

In altri termini, solo i campi solenoidali possono ammettere potenziale vettore. È poi importante osservare che, se \mathbf{V} è un potenziale vettore di \mathbf{F} in Ω e ψ è una funzione

scalare regolare in Ω , allora $\mathbf{V} + \nabla\psi$ è ancora un potenziale vettore di \mathbb{F} in Ω , essendo $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$. Dunque un potenziale vettore, se esiste, non è unico. Questo grado di libertà nella determinazione di \mathbf{V} risulta molto utile nelle applicazioni, specialmente all'elettromagnetismo.

Si presenta spontanea la domanda: è vero che se $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in Ω , allora \mathbf{F} ha un potenziale vettore in Ω ?

La risposta è positiva a livello locale, nel senso che esiste un potenziale vettore in ogni intorno sferico $B \subset \Omega$ di ogni punto di Ω , ma è ancora negativa a livello globale. Precisamente, abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 6.4 Sia $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ tale che $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in Ω . Allora esiste localmente un potenziale vettore \mathbf{V} di \mathbf{F} . In particolare, si può scegliere \mathbf{V} con una componente nulla; per esempio, se $B \subset \Omega$ è un intorno sferico del punto (x_0, y_0, z_0) , si può scegliere

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

dove

$$(1.8) \quad V_2(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_3(s, y, z) ds$$

e

$$(1.9) \quad V_3(x, y, z) = - \int_{x_0}^x F_2(s, y, z) ds + \int_{y_0}^y F_1(x_0, s, z) ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a controllare che (1.8) e (1.9) definiscono effettivamente un potenziale vettore di \mathbf{F} . Abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial V_2}{\partial x} \mathbf{k}$$

e quindi, usando (1.8) e (1.9), troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} &= - \int_{x_0}^x \frac{\partial F_2}{\partial y}(s, y, z) ds + F_1(x_0, y, z) - \int_{x_0}^x \frac{\partial F_3}{\partial z}(s, y, z) ds = \\ &= F_1(x_0, y, z) - \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial y}(s, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(s, y, z) \right\} ds = \end{aligned}$$

essendo, per l'ipotesi $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -\frac{\partial F_1}{\partial x}$

$$= F_1(x_0, y, z) + \int_{x_0}^x \frac{\partial F_1}{\partial x}(s, y, z) ds = F_1(x, y, z).$$

Inoltre,

$$-\frac{\partial V_3}{\partial x} = F_2(x, y, z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = F_3(x, y, z).$$

Ne segue che $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{F}$.

Esempio

ESEMPI Sia $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Si può controllare che $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, perciò \mathbf{F} possiede localmente un potenziale vettore. Per calcolarlo, scegliamo $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Le (1.8) e (1.9) danno:

$$V_1 = 0, V_2(x, y, z) = - \int_0^x 2ds = -2x, V_3(x, y, z) = \int_0^x yzds = xyz$$

(notando che $F_1(0, y, z) = 0$) e quindi $\nabla(x, y, z) = -2x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$.

Vediamo due esempi che illustrano qualche utilizzo dei concetti precedenti.

Esempio

ESEMPI *Magnetostatica.* Indichiamo con $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, il campo densità di corrente dovuto a una determinata distribuzione di cariche nello spazio. Il campo magnetico \mathbf{B} da esso generato è dato, in unità standard, dalla formula

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{x},$$

dove μ_0 è la *permeabilità magnetica* nel vuoto. Abbiamo visto nell'esempio 1.5 (cambiando un poco le notazioni) che, se fissiamo \mathbf{y} , il campo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

è solenoidale e pertanto anche $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ lo è, come si vede calcolando $\nabla \cdot \mathbf{B}$ derivando sotto il segno di integrale rispetto a \mathbf{x} . Cerchiamo un potenziale vettore. Scriviamo:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right),$$

dove le derivate sono rispetto a \mathbf{x} . Usando ora l'identità $\mathbf{G} \times \nabla f = -\nabla \times (f\mathbf{G}) + f (\nabla \times \mathbf{G})$ (vedi la quarta delle formule (1.4)), possiamo scrivere⁶

$$\mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

e, successivamente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x}.$$

Il vettore (che si chiama *potenziale newtoniano di $\mu_0\mathbf{j}$*)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x}$$

è dunque un potenziale vettore di \mathbf{B} . Si può dimostrare (ma la prova non è elementare) che $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$.

ESEMPI *Equazioni di Maxwell.* Le equazioni di Maxwell, nel vuoto e in assenza di sorgenti, sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

⁶Ricordare che le derivate sono fatte rispetto a \mathbf{x} , perciò $\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{y}) = 0$.

(1.10)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

(1.11)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(1.12)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dove \mathbf{E} indica il campo elettrico e c_0 la velocità della luce nel vuoto. Qui tutti i campi sono variabili nel tempo.

Essendo solenoidale, \mathbf{B} ha un potenziale vettore (locale) \mathbf{A} , $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, per cui possiamo riscrivere la (1.11) nella forma seguente:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

che mostra l'irrotationalità del vettore $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Esiste quindi un potenziale scalare φ tale che

$$\mathbf{E} = \nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vediamo dunque che \mathbf{B} ed \mathbf{E} possono essere espressi in termini del potenziale vettore \mathbf{A} e del potenziale scalare φ .

Sostituendo nella (1.10), otteniamo:

$$\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Per avere un'equazione nelle sole φ e \mathbf{A} , usiamo il grado di libertà nella scelta del potenziale vettore scegliendo $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla g$, $g = g(\mathbf{x}, t)$, in modo che valga la seguente condizione di Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Con questa scelta del potenziale vettore, la (1.10) diventa:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

che è l'equazione delle onde in dimensione 3. Infine, la (1.12) diventa:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}') = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \right)$$

ossia, per l'identità $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \Delta \mathbf{G}$,

$$-\Delta \mathbf{A}' + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} = 0$$

per cui anche \mathbf{A}' è soluzione dell'equazione vettoriale delle onde

$$\Delta \mathbf{A}' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} = 0.$$

Abbiamo dimostrato che un campo \mathbf{F} solenoidale in un aperto Ω ammette sempre localmente un potenziale vettore \mathbf{V} . D'altra parte, proprio il campo (vedi esempio 1.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\rho^3} \quad (\rho = |\mathbf{x}|)$$

che è solenoidale in $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, non ammette potenziale vettore in tutto Ω . Dimostreremo questo fatto più avanti, usando il teorema del rotore. Lo stesso campo è invece conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, come si è visto nell'Esempio 1.7.

Per garantire che $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ diventi anche sufficiente per l'esistenza di un potenziale vettore in tutto Ω intervengono ancora le proprietà topologiche di Ω . Non è più sufficiente che Ω sia semplicemente connesso: infatti $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ lo è, ma abbiamo appena visto che non basta. Una condizione topologica sufficiente è la seguente: Ω è connesso e per ogni superficie $\Sigma \subset \Omega$, chiusa e regolare, frontiera di un dominio tridimensionale D , si ha $D \subset \Omega$. Diciamo allora che Ω è fortemente connesso. Vale allora il seguente risultato che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 6.5 *Sia $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ tale che $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in Ω . Se Ω è fortemente connesso allora esiste $\mathbf{V} \in C^2(\Omega)$ tale che $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{F}$ in tutto Ω .*

1.7 Il linguaggio delle forme differenziali

I concetti di *lavoro di un campo vettoriale*, *campo conservativo*, *campo irrotazionale*, possono essere espressi equivalentemente usando un diverso linguaggio, quello delle *forme differenziali*. La teoria delle forme differenziali è in realtà una teoria matematica profonda e complessa, che permette di dimostrare risultati molto generali; qui ci interessa soltanto segnalare allo studente una terminologia alternativa per indicare concetti che già conosce. Il motivo è che entrambi i linguaggi sono molto usati nella letteratura scientifica, e vanno pertanto conosciuti. Si può dire che il linguaggio dei campi vettoriali corrisponde più al punto di vista fisico, mentre quello delle forme differenziali corrisponde più al punto di vista matematico.

Linguaggio dei campi vettoriali	Linguaggio delle forme differenziali
Sia $\mathbf{F} = I\mathbf{i} + J\mathbf{j} + K\mathbf{k}$	
Lavoro elementare di \mathbf{F}	Forma differenziale. $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$
$dL := F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$	
Lavoro del campo \mathbf{F} sul cammino γ	Integrale della forma differenziale ω sul cammino γ $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt$
\mathbf{F} è conservativo	ω è esatta $\exists U : \mathbf{F} = \nabla U$
\mathbf{F} è irrotazionale	ω è chiusa $\text{rot } \mathbf{F} = 0$
"Un campo conservativo è irrotazionale"	"Una forma differenziale esatta è chiusa."
"Un campo irrotazionale in un aperto semplicemente connesso è conservativo."	"Una forma differenziale chiusa in un aperto semplicemente connesso è esatta."

Esercizi

1. Sia $\mathbf{v}(x, y) = yi$ il campo di velocità di un fluido in moto stazionario nel piano x, y .

- Determinare le linee di campo e dedurne che il fluido sembra *non ruotare*.
- Calcolare il rotore di \mathbf{v} . Interpretare il risultato tenendo conto del punto a).

2. Il potenziale gravitazionale generato da una sfera omogenea di raggio R è:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \delta & \text{se } r \geq R \\ 2\pi\delta(R^2 - \frac{r^2}{3}) & \text{se } r < R \end{cases}$$

dove δ è una costante (la densità della sfera) e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dopo aver calcolato il campo gravitazionale $\mathbf{F} = \nabla U$, si calcoli la divergenza del campo, verificando che essa è nulla nei punti dello spazio privi di materia e costante nella regione dello spazio in cui vi è una densità costante e positiva di materia.

3. Come l'esercizio precedente, nel caso del potenziale gravitazionale generato da uno strato sferico di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 :

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\delta(R_2^3 - R_1^3)\frac{1}{r} & \text{se } r > R_2 \\ 2\pi\delta\left(R_2^2 - \frac{r^2}{3}\right) - \frac{4}{3}\pi\delta\frac{R_1^3}{r} & \text{se } R_1 < r \leq R_2 \\ 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2) & \text{se } r \leq R_1 \end{cases}$$

4. Dimostrare tutte le identità differenziali (1.4).

5. Dimostrare che il lavoro di un campo vettoriale non cambia se si riparametrizza la curva mediante un cambiamento di parametro regolare che conserva il verso di percorrenza, mentre cambia di segno se viene cambiato il verso di percorrenza.

6. Dato il campo vettoriale piano $\mathbf{F} = xi - yj$:
verificare che è solenoide in tutto il piano;
cercare un potenziale vettore di \mathbf{F} .

Suggerimento: cercare un potenziale ψ indipendente dalla variabile z .

7. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = -yi + x^2 j$ lungo il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ percorsa in senso antiorario.

8. Sia $\mathbf{F} = yi + xj$. Determinare le linee integrali del campo e disegnarne alcune. Verificare che il campo è conservativo in \mathbb{R}^2 e calcolarne il potenziale. Determinare le linee equipotenziali e disegnarne alcune. Calcolare il lavoro lungo il segmento $y = 2x$, $x \in (-1, 3)$.

9. Stabilire se il campo

$$\mathbf{F} = \frac{y}{z}i + \frac{x}{z}j - \frac{xy}{z^2}k$$

è conservativo nel semispazio $z > 0$, determinando in caso affermativo un potenziale. Il campo è solenoide nel semispazio $z > 0$?

10. Se il potenziale eletrostatico $U(x, y, z)$ di una carica puntiforme posta nell'origine anziché essere $U = k/r$ fosse $U = k/r^\alpha$ per qualche esponente $\alpha > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, il campo ∇U sarebbe ancora conservativo (per definizione!). Sarebbe ancora solenoide, fuori dall'origine? (Questo argomento può essere utilizzato per dimostrare sperimentalmente che l'esponente "vero" è esattamente, e non solo approssimativamente, 1).

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = 3x^2y^2z\mathbf{i} + (2x^3yz + z)\mathbf{j} + (x^3y^2 + y)\mathbf{k}$$

e l'arco di curva

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

a) Si calcoli il lavoro di \mathbf{F} lungo Γ , applicando la definizione (cioè calcolando un opportuno integrale).

b) Si verifichi che il campo \mathbf{F} è irrotazionale in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 e se ne deduca che è conservativo.

c) Si determini un potenziale $U(x, y, z)$ di \mathbf{F} in \mathbb{R}^3 .

d) Si calcoli il lavoro di \mathbf{F} lungo l'arco di curva Γ' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t(2 - t^2) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ z = t(3 - 2t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

utilizzando il potenziale calcolato al punto precedente.

e) Si calcoli la divergenza di \mathbf{F} e si dica se esiste un insieme aperto di \mathbb{R}^3 in cui il campo è solenoidale.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + (xe^y + z \cos(yz))\mathbf{j} + (y \cos(yz))\mathbf{k}.$$

a) Si dica se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione.

b) Si dica se il campo è conservativo nel suo insieme di definizione, determinando in caso affermativo un potenziale.

c) Si calcoli il lavoro del campo lungo la semicirconferenza che giace sul semipiano $z = 0, y > 0$ e ha per estremi i punti $(0, 0, 0), (1, \log 2, 0)$.

Applicando l'identità $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \Delta \mathbf{G}$ alle equazioni di Maxwell (1.11) e (1.12), verificare che anche i campi elettrico e magnetico sono soluzioni dell'equazione vettoriale delle onde (si veda l'esempio 1.16).

2 FORMULA DI GAUSS-GREEN NEL PIANO

In questo paragrafo ci occupiamo della relazione tra integrali doppi e integrali di linea. I risultati di questo paragrafo sono casi particolari dei teoremi della divergenza e del rotore, che tratteremo nei paragrafi 5 e 6.

Cominciamo a considerare domini D semplici rispetto a entrambi gli assi⁷ (fig. 6.5) e un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ di classe $C^1(D)$, cioè continuo insieme alle sue derivate del prim'ordine fino alla frontiera di D . Diciamo che il bordo di D , ∂D , è orientato positivamente quando su di esso è fissato il verso di percorrenza antiorario. In tale caso, descrivendo la frontiera nel verso positivo, si lasciano i punti di D a sinistra. Nel caso opposto, ∂D è orientato negativamente. Per sottolineare l'orientazione useremo i simboli ∂^+D o ∂^-D , rispettivamente. Vale il seguente lemma.

⁷Il concetto di dominio semplice è stato definito nel capitolo 5, paragrafo 1.2. A ogni modo, questo concetto viene richiamato esplicitamente nell'enunciato del prossimo lemma.

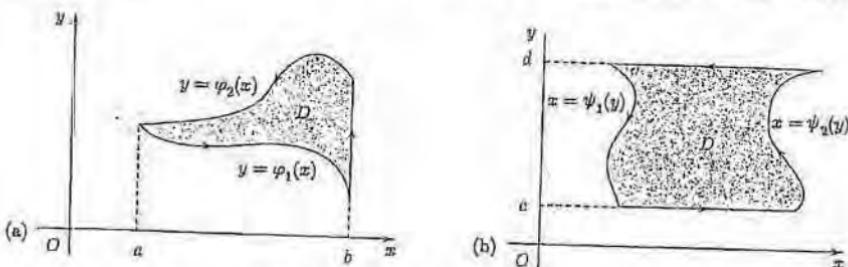


Figura 6.5. a) Dominio y -semplice con orientazione positiva. b) Dominio x -semplice con orientazione positiva.

LEMMA 6.6 Sia $\mathbf{F} \in C^1(D)$.

a) Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ con φ_1, φ_2 continue in $[a, b]$, allora

$$(2.1) \quad \iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial D} P dx.$$

b) Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ con ψ_1 e ψ_2 continue in $[c, d]$, allora

$$(2.2) \quad \iint_D Q_x dx dy = \int_{\partial D} Q dy.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazioni di a) e b) sono analoghe. Proviamo la a).

Si ha, ricordando il teorema di riduzione per integrali doppi:

$$(2.3) \quad \iint_D P_y dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P_y dy = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx$$

D'altra parte, essendo $dx = 0$ sui tratti rettilinei del bordo:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \int_{\partial D} P dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] \end{aligned}$$

Dalle (2.3) e (2.4) si ottiene la (2.1). ◊

Il seguente teorema è la versione più semplice del teorema di Gauss-Green⁸ nel piano.

TEOREMA 6.7 (FORMULA DI GAUSS-GREEN) Sia D un dominio limitato in \mathbb{R}^2 che sia semplice rispetto a entrambi gli assi. Se $\mathbf{F} = P_i + Q_j \in C^1(D)$, allora vale la formula

$$(2.5) \quad \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

⁸George Green, matematico inglese (1793-1841).

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi del teorema valgono entrambe le (2.1) e (2.2) del lemma. Sottraendo membro a membro la (2.1) dalla (2.2) si ottiene la (2.5). \diamond

La formula (2.5) vale per domini molto più generali di quelli considerati finora. Per esempio, domini D esprimibili come unione di un numero finito di domini semplici rispetto a entrambi gli assi, a due a due disgiunti. Chiameremo questi domini *s-decomponibili*⁹.

L'orientazione positiva di ∂D si ottiene orientando le singole curve che compongono il bordo in modo tale che, percorrendole, si lasci il dominio alla propria sinistra.

Il caso tipico è quello in cui ∂D è unione di una curva γ e di N curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ interne a γ , come in figura 6.6.

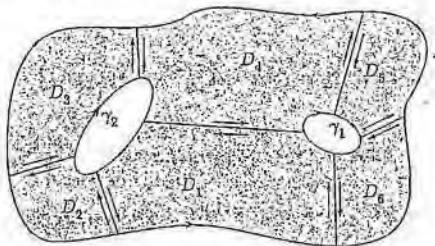


Figura 6.6. Dominio *s*-decomponibile per il teorema di Gauss-Green.

L'orientazione positiva di ∂D richiede il senso antiorario per γ e quello orario per $\gamma_1, \dots, \gamma_N$.

Se $D = \bigcup_{j=1}^k D_j$, D_j semplice rispetto a entrambi gli assi, per ogni $j = 1, \dots, k$, usando la (2.5) su ciascun D_j , si ha:

$$(2.6) \quad \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} (Q_x - P_y) dx dy = \sum_{j=1}^k \int_{\partial^+ D_j} P dx + Q dy.$$

Osserviamo ora che gli archi di curva che fanno parte del bordo di due domini adiacenti compaiono due volte nella somma a destra della (2.6) con orientazione opposta e perciò si elidono (fig. 6). Rimangono gli archi di curva che compongono $\partial^+ D$. Dunque

$$\sum_{j=1}^k \int_{\partial^+ D_j} P dx + Q dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy,$$

da cui la (2.5).

⁹La *s* sta per *semplicemente*. Si noti che questi domini sono più particolari dei domini regolari che abbiamo definito, nel capitolo 5, come quei domini unione di un numero finito di domini semplici rispetto ad almeno un asse.

Si noti che nel caso di domini come quello in figura 6.6 la (2.6) si può scrivere più semplicemente nella forma seguente:

$$(2.7) \quad \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\gamma_2} P dx + Q dy$$

con ovvio significato dei simboli.

Esempio

 Sia D il dominio indicato in figura 6.7 e \mathbf{F} il campo vettoriale di componenti $P(x, y) = y^2$ e $Q(x, y) = x^2$. Si voglia calcolare $\int_{\partial+D} y^2 dx + x^2 dy$. Usando il teorema di Gauss-Green si ha:

$$\int_{\partial+D} y^2 dx + x^2 dy = \iint_D (2x - 2y) dx dy = 0$$

essendo D simmetrico rispetto alla bisettrice, mentre $2x - 2y$ cambia segno scambiando x con y .

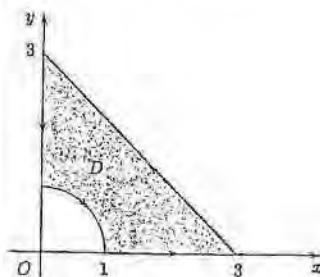


Figura 6.7. Dominio s-decomponibile per il teorema di Gauss-Green.

Calcolo di aree mediante integrali curvilinei

Le formule (2.1), (2.2) o (2.5) possono essere usate per calcolare l'area di un dominio D , ammissibile per il teorema 6.7, mediante un integrale curvilineo esteso a ∂D . Infatti, scegliendo $P(x, y) = y$ nella (2.1), otteniamo:

$$(2.8) \quad \text{area}(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\partial+D} y dx.$$

Scegliendo $Q(x, y) = x$ nella (2.2), otteniamo:

$$(2.9) \quad \text{area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial+D} x dy.$$

Infine, sommando le (2.8) e (2.9) e dividendo poi per due, si ricava:

$$(2.10) \quad \text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial+D} x dy - y dx.$$

ESEMPIO

Sia D l'interno dell'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. L'orientazione positiva del bordo si ottiene con la parametrizzazione

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ y(\theta) = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Dalla (2.10):

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab(\cos \theta)^2 + ab(\sin \theta)^2] d\theta = \pi ab.$$

ESEMPIO

Usare il teorema di Gauss-Green per valutare l'integrale:

$$\oint_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy)$$

dove:

- (i) γ è il bordo del quadrato di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$;
- (ii) γ è l'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

ESEMPIO Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana (astroide) di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

utilizzando la formula (2.10).

ESEMPIO Sia γ una curva chiusa semplice e regolare di equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Se γ è la frontiera di D , dimostrare che:

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

3 AREA E INTEGRALI DI SUPERFICIE

3.1 Area di una superficie

Come abbiamo visto, una volta poste le basi del concetto di integrale doppio, è abbastanza naturale generalizzare quest'idea a dimensioni superiori. Altrettanto naturale è generalizzare il discorso in un'altra direzione: integrare una funzione su un oggetto geometrico bidimensionale "curvo" anziché piatto, cioè su una *superficie*, anziché in un insieme del piano.

Le possibili applicazioni dovrebbero essere evidenti: anzitutto, il calcolo dell'area di una superficie; quello della massa totale dislocata su una superficie, che si può vedere come l'integrale (esteso a tutta la superficie) della funzione densità superficiale; analogo discorso vale per il calcolo della carica elettrica totale su una superficie metallica a partire dalla funzione densità superficiale di carica.

Alla definizione di area di una superficie Σ si potrebbe pervenire con un procedimento simile a quello usato per definire la lunghezza di una curva e cioè: approssimare la superficie con una superficie poliedrica "appoggiata" sulla superficie, per la quale la nozione di area è quella della geometria elementare, per poi definire area di Σ il limite delle aree delle superfici poliedriche approssimanti, al tendere a zero del massimo diametro delle facce. Tale procedimento è tuttavia piuttosto delicato e pertanto daremo una definizione più diretta di elemento di area, con una giustificazione intuitiva.

Consideriamo una superficie regolare Σ descritta da tre equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2$$

o dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2;$$

supponiamo che la superficie sia *semplice*, cioè tale che a ogni punto (u, v) interno a T corrisponda un solo punto su Σ . In generale T è un dominio s -decomponibile, secondo la definizione data nel paragrafo 2.

Sappiamo che il vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ è un vettore normale al piano tangente alla superficie. D'altra parte, usando le proprietà del prodotto vettoriale (vedi capitolo 2, paragrafo 1), possiamo affermare che il modulo del vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori. Quest'area uguaglia in prima approssimazione l'area del "parallelogramma curvilineo" disegnato sulla superficie e compreso tra la quattro linee coordinate

$$u = u_0, u = u_0 + du, v = v_0, v = v_0 + dv$$

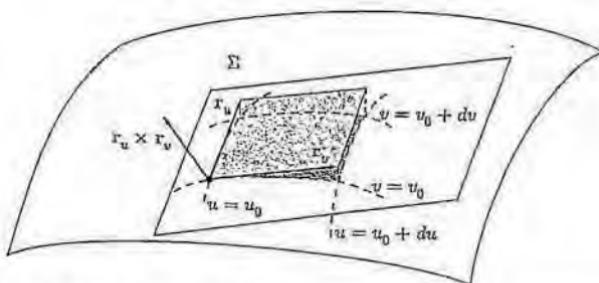


Figura 6.8. I lati del parallelogramma curvilineo sono approssimati a meno di infinitesimi di ordine superiore a du e dv da quelli del parallelogramma rettilineo individuato dai vettori $\mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{r}_v dv$.

È allora ragionevole chiamare *elemento d'area sulla superficie* la quantità

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

e dare la seguente:

DEFINIZIONE 6.7 L'area di Σ è assegnata dalla formula

$$a(\Sigma) = \iint_{\Sigma} dS = \iint_T |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

■

Si può controllare che $a(\Sigma)$ non dipende dalla parametrizzazione scelta per Σ , come del resto è ragionevole che sia, trattandosi di un'area. Si osservi anche che, per definizione di superficie regolare parametrizzata, l'elemento d'area non si annulla mai.

ESEMPIO

ESEMPIO L'elemento d'area sulla superficie della sfera di raggio R è:

$$dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \quad (\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

e quindi

$$a(\Sigma) = \iint_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^2 \sin \varphi \, d\varphi = 4\pi R^2.$$

Area di una superficie cartesiana

Per una superficie cartesiana, cioè che è grafico di una funzione di due variabili $z = g(x, y)$, $(x, y) \in T$, si ha:

$$\mathbf{r}(x, y) = xi + yj + g(x, y)k$$

e

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -g_x i - g_y j + k, \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + |\nabla g|^2};$$

allora la formula per l'area diventa:

$$a(\Sigma) = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla g|^2} dx dy.$$

ESEMPIO

ESEMPIO Consideriamo il *paraboloido ellittico*

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2},$$

con $(x, y) \in T$ dove

$$T = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 8\}.$$

L'elemento d'area è

$$dS = \sqrt{1 + (x^2 + y^2)} dx dy$$

e quindi, passando a coordinate polari, si trova:

$$\begin{aligned} a(\Sigma) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3} (1 + \rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{52}{3}\pi. \end{aligned}$$

Esempio Calcoliamo l'area della superficie del toro, definito dall'equazione parametrica:

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (R + r \cos \varphi) \cos \theta \mathbf{i} + (R + r \cos \varphi) \sin \theta \mathbf{j} + r \sin \varphi \mathbf{k},$$

con $r < R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha:

$$\mathbf{r}_\varphi = -r \sin \varphi \cos \theta \mathbf{i} - r \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + r \cos \varphi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -(R + r \cos \varphi) \sin \theta \mathbf{i} + (R + r \cos \varphi) \cos \theta \mathbf{j}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \\ -(R + r \cos \varphi) \sin \theta & (R + r \cos \varphi) \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -r(R + r \cos \varphi) \cos \varphi \cos \theta \mathbf{i} - r(R + r \cos \varphi) \cos \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \\ &\quad + r \sin \varphi(R + r \cos \varphi) \mathbf{k} \end{aligned}$$

e il suo elemento d'area risulta:

$$dS = r(R + r \cos \varphi) d\varphi d\theta.$$

Parciò l'area della superficie è:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} r(R + r \cos \varphi) d\varphi \right) d\theta = \\ &= 2\pi \left(2\pi rR + r^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) = 4\pi^2 rR, \end{aligned}$$

risultato che si può scrivere anche nella forma più espressiva $(2\pi r) \cdot (2\pi R)$: l'area della superficie del toro è il prodotto delle lunghezze di due circonferenze di raggi r, R .

Area di una superficie di rotazione

Calcoliamo l'elemento d'area per le superfici di rotazione della forma¹⁰

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) \cos \theta & x'(t) \sin \theta & z'(t) \\ -x(t) \sin \theta & x(t) \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -x(t) z'(t) \cos \theta \mathbf{i} - x(t) z'(t) \sin \theta \mathbf{j} + x(t) x'(t) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

l'elemento d'area risulta:

$$dS = |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt d\theta.$$

¹⁰v. capitolo 4, paragrafo 3.

Le formule precedenti vanno ovviamente modificate se l'asse di rotazione è l'asse x , o y , anziché l'asse z .

ESEMPIO

ESEMPIO Calcoliamo l'area della superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva $x = z^3$, per $z \in [0, 1]$:

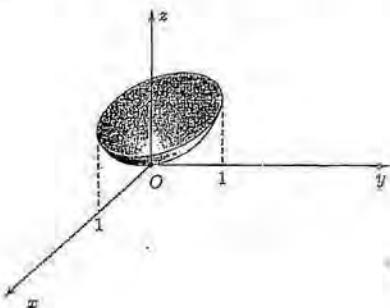


Figura 6.9.

Ponendo $x(t) = t^3, z(t) = t$, si ha:

$$dS = t^3 \sqrt{1 + 9t^4} dt d\theta$$

e l'area della superficie è:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4} dt = 2\pi \left[\frac{1}{54} (1 + 9t^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Elemento d'area di superfici in forma implicita

Per le superfici Σ definite da equazioni del tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

con, per esempio, $F_x \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite¹¹ si ha localmente:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y); \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \end{aligned}$$

e pertanto l'elemento d'area su Σ è dato da:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} dx dy = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dx dy.$$

¹¹V. capitolo 3, paragrafo 8, teorema 3.26.

3.2 Integrale di superficie di una funzione continua

Se F è una funzione continua, definita in una regione dello spazio contenente la superficie Σ , la sua restrizione sulla superficie è $\tilde{F}(u, v) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ed è naturale definire l'integrale di F su Σ mediante la formula:

$$\iint_{\Sigma} F dS = \iint_T \tilde{F}(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

L'integrale di superficie di F viene dunque espresso mediante un integrale doppio nel dominio piano T , che si calcola con le tecniche studiate nel capitolo 5.

Esempio

 Sia Σ la semisfera superiore di raggio 2 e centro $(0, 0, 0)$; calcoliamo l'integrale di superficie:

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 z dS.$$

Le equazioni parametriche della semisfera sono:

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y(\varphi, \theta) = 2 \sin \varphi \sin \theta \\ z(\varphi, \theta) = 2 \cos \varphi \end{cases} \quad \text{con } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi],$$

mentre $dS = 4 \sin \varphi d\varphi d\theta$. Allora:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \varphi \cos \theta)^2 2 \cos \varphi d\sin \varphi d\varphi \right) d\theta = \\ &= 32 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \right) = \\ &= 32\pi \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} = 8\pi. \end{aligned}$$

 *Integrale di una superficie cartesiana.* Se Σ è il grafico di $z = g(x, y)$, $(x, y) \in T$, l'integrale di superficie di $F = F(x, y, z)$ in questo caso è:

$$\iint_T F(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dx dy.$$

Per esempio, l'integrale dell'esempio 3.5 poteva essere calcolato anche per questa via: la semisfera superiore ha equazione cartesiana:

$$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}.$$

Essendo

$$\nabla g(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}} \right),$$

l'elemento d'area diventa:

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{4 - (x^2 + y^2)}} dx dy = \frac{2dx dy}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$$

e l'integrale di superficie è:

$$\begin{aligned} & \iint_{\{x^2+y^2<4\}} x^2 \sqrt{4-(x^2+y^2)} \frac{2dx dy}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} = \\ & = 2 \iint_{\{x^2+y^2<4\}} x^2 dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi. \end{aligned}$$

Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia

Nello spazio tridimensionale, sia Σ una superficie materiale non omogenea di densità superficiale ρ e sia $\mathbf{r} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di Σ ,

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Allora la massa totale di Σ è data da:

$$m = \iint_{\Sigma} \rho dS = \iint_T \rho(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Se il corpo è omogeneo ($\rho = \text{costante}$) si ritrova:

$$m = \rho \cdot a(\Sigma).$$

Il baricentro di Σ è il punto $B \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dove

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} x \rho dS = \frac{1}{m} \iint_T x(u, v) \rho(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \\ \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} y \rho dS = \frac{1}{m} \iint_T y(u, v) \rho(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \\ \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} z \rho dS = \frac{1}{m} \iint_T z(u, v) \rho(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \end{cases}$$

Se la superficie è omogenea ($\rho = \text{costante}$), il baricentro si dice centroide e ha coordinate:

$$\bar{x} = \frac{\rho}{m} \iint_{\Sigma} x dS = \frac{1}{a(\Sigma)} \iint_T x(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \frac{\iint_T x(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv}{\iint_T |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv},$$

con analoghe espressioni per \bar{y}, \bar{z} .

Calcoliamo ora il momento d'inerzia di Σ rispetto a un asse fissato. Se $\delta(x, y, z)$ indica la distanza di (x, y, z) da quest'asse, si ha:

$$I = \iint_{\Sigma} \delta^2 \rho dS = \iint_T \delta^2(\mathbf{r}(u, v)) \rho(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Se il corpo è omogeneo,

$$I = \frac{m}{a(\Sigma)} \iint_{\Sigma} \delta^2 dS = m \frac{\iint_T \delta^2(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv}{\iint_T |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv}.$$

Osserviamo che, anche in questo caso, il momento d'inerzia ha le dimensioni di massa $\times [lunghezza]^2$.

- Calcolare l'area della porzione di paraboloida $z = x^2 + y^2$ per $x^2 + y^2 < r^2$.
- Calcolare la massa totale di una superficie sferica di raggio R la cui densità è funzione della latitudine, al modo seguente: $f(\varphi, \theta) = k\varphi(\pi - \varphi)$, con k costante.
- Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva $z = x^2$, $x \in [1, 2]$.
- Calcolare il baricentro e il momento d'inerzia della superficie laterale di un cono omogeneo di massa M , raggio R e altezza h . Fare lo stesso poi per la superficie completa del cono (aggiungere cioè anche la base).
- Calcolare il momento d'inerzia di una superficie sferica omogenea di raggio R e massa M , rispetto a un asse passante per il centro.
- Sia Σ la semisfera superiore di centro l'origine e raggio 1. Calcolare:

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + z) dS.$$

- Calcolare l'area della porzione di superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = u \cos t \\ y = u \sin t \\ z = t \end{cases} \quad u \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Con l'aiuto di un computer, tracciare il grafico della superficie dell'esercizio precedente.
- Calcolare l'integrale di superficie:

$$\iint_{\Sigma} \frac{x^2 - z}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} dS,$$

dove Σ è la porzione di grafico della funzione $z = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in T$ e

$$T = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\},$$

4 INTEGRALE DI SUPERFICIE DI UN CAMPO VETTORIALE. FLUSO

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{F} e una superficie Σ , trasversale alle linee di campo. L'integrale su Σ della componente di \mathbf{F} normale a Σ rappresenta il *flusso di \mathbf{F} attraverso Σ* e gioca un ruolo importante nella formulazione di molte leggi fisiche, nonché in numerose applicazioni. Questo integrale è dunque un integrale di superficie di una funzione scalare, ma per definirlo correttamente occorrono ingredienti un po' diversi rispetto a prima e precisamente:

- una superficie regolare Σ ;
- un campo vettoriale \mathbf{F} , definito almeno nei punti della superficie;
- una scelta coerente del versore normale n su *tutta* la superficie.

L'ultimo punto conduce alle nozioni di *orientazione* e di *bordo* di una superficie.

4.1 Superficie orientate. Bordo di una superficie. Superficie regolari a pezzi

Sia Σ una superficie regolare parametrizzata da

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2,$$

dove T è un dominio s -decomponibile. I versori

$$\mathbf{n} = \text{vers}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$$

e $-\mathbf{n}$ sono entrambi normali alla superficie Σ e la scelta di uno dei due corrisponde intuitivamente a privilegiare uno dei "due lati" di Σ . Per esempio, possiamo pensare al "lato interno" oppure al "lato esterno" di una superficie sferica. Più precisamente, la scelta di uno dei due versori normali è legata al concetto di *orientazione* di Σ .

DEFINIZIONE 6.8 Una superficie regolare Σ si dice *orientabile* se, per ogni curva continua chiusa che giace sulla superficie, parametrizzata da $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Sigma$, si ha che $\mathbf{n}(\mathbf{r}(b)) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(a))$.

In altre parole, se seguiamo il versore normale alla superficie lungo una curva chiusa che giace sulla superficie, dopo un giro completo il versore normale risulta ancora puntato nello stesso verso.

La scelta di \mathbf{n} o di $-\mathbf{n}$ come versore normale determina l'*orientazione* di Σ ; si dice *superficie orientata* una superficie su cui sia stata scelta una delle due orientazioni possibili. ■

Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane. Per una superficie di equazione $z = g(x, y)$, si ha:

$$\mathbf{n} = \frac{-g_x\mathbf{i} - g_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}},$$

e questo versore normale risulta essere rivolto sempre *verso l'alto* (cioè forma un angolo acuto col versore dell'asse z), mentre $-\mathbf{n}$ punta sempre *verso il basso*.

Invece, per una superficie come la sfera o il toro, il versore \mathbf{n} risulta puntare sempre *verso l'interno* o sempre *verso l'esterno* della superficie, a seconda di quale dei due parametri chiamiamo u e quale v ; questo, naturalmente, è arbitrario. In questo senso siamo noi che scegliamo un'orientazione sulla superficie. Si parla in questo caso di *normale interna* o *esterna* (o anche *entrante* o *uscente*), rispettivamente.

Tutti questi sono esempi in cui una scelta coerente di un'orientazione su tutta la superficie è possibile. Non sempre è così: esistono *superfici non orientabili*, come il *nastro di Möbius* (fig. 6.10): comunque si scelga l'orientazione del versore \mathbf{n} in un punto, muovendolo con continuità lungo una linea meridiana, possiamo ritrovarci nello stesso punto con orientazione opposta (si veda l'esercizio 36).

Veniamo ora al *bordo* di una superficie orientata. Si tratta di una nozione piuttosto delicata, per cui, rinunciando alla massima generalità, preferiamo concentrarci su alcuni casi particolari.

Supponiamo che T sia s -decomponibile; questo in particolare implica che T è chiuso (perché unione di un numero finito di insiemi chiusi).

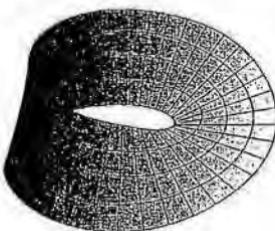


Figura 6.10.

a) Se $r = r(u, v)$ realizza una corrispondenza biunivoca tra T e Σ , questo garantisce che Σ non presenta autointersezioni. Inoltre, poiché T è s -decomponibile, la frontiera di T è unione di una curva γ_0 e di N curve $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ interne a γ_0 , (fig. 6.11). Il *bordo* di Σ , che indichiamo con $\partial\Sigma$, è allora dato dall'unione delle immagini $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ delle curve $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N$.

Un'orientazione di Σ , ottenuta scegliendone uno dei due lati, induce un'orientazione, che chiameremo *positiva*, su ciascuna delle curve che ne compongono il bordo: *si sceglie il verso di percorrenza di ogni Γ_j , $j = 0, 1, \dots, N$, in modo che, percorrendole rimanendo sul lato di Σ scelto come positivo, si lasciano i punti di Σ alla sinistra* (fig. 6.11). Quando il bordo di una superficie è orientato positivamente, useremo il simbolo $\partial^+ \Sigma$.

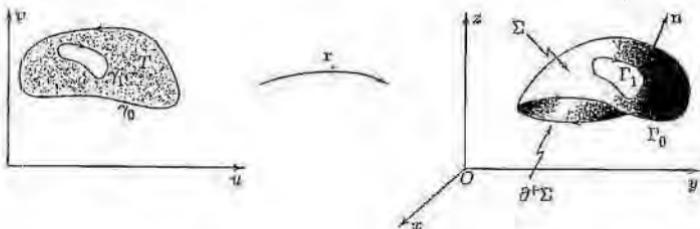


Figura 6.11. Superficie con bordo orientato positivamente.

b) Se $r = r(u, v)$ è *biunivoca* solo all'interno di T , il *bordo* di Σ è contenuto nell'unione delle immagini $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ delle curve $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N$, ma alcune delle curve γ_j possono non far parte del bordo.

Per la semisfera dell'esempio 3.5 si ha $T = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ e l'immagine del bordo di T è il cerchio equatoriale.

Per il toro, $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e l'immagine del ∂T è l'unione del cerchio Γ_1 nel piano $z = 0$, di raggio $(R + r)$ e centrato nell'origine, di equazione

$$r(0, \theta) = r(2\pi, \theta) = (R + r) \cos \theta \mathbf{i} + (R + r) \sin \theta \mathbf{j}$$

e del cerchio nel piano $x = R$, di raggio r e centrato nel punto $(1, 0, 0)$, di equazione

$$r(\varphi, 0) = r(\varphi, 2\pi) = (R + r \cos \varphi) \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{k}.$$

Chiaramente, queste curve non costituiscono il bordo del toro, che infatti è una superficie *priva di bordo*.

Le superfici prive di bordo si dicono *chiuse* e alcune di esse si incontrano comunemente. Esempi tipici sono la sfera, l'ellissoide, il cilindro illimitato, che dividono lo spazio in due regioni disgiunte (interno ed esterno) e risultano pertanto orientabili (scegliendo la normale entrante o quella uscente).

Esistono tuttavia superfici *chiuse e non orientabili*, come quella un poco "patologica" illustrata in figura 6.12, che prende il nome di *otre di Klein*.

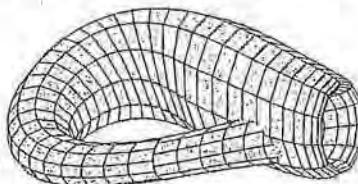


Figura 6.12. L'*otre di Klein*. È una superficie chiusa ma non si può parlare di *interno* o *esterno* alla superficie.

Nei seguenti avremo bisogno di considerare superfici *regolari a pezzi*, come un parallelepipedo, che lungo gli spigoli non è dotato di versore normale; che cosa significa in questo caso "scegliere coerentemente n"? Che cos'è il bordo?

DEFINIZIONE 6.9 Σ è una superficie *regolare a pezzi* se esiste un numero finito di curve regolari a tratti, dette spigoli, $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, contenute in Σ , che suddividono Σ in un numero finito N_0 di superfici regolari Σ_j , dette facce.

Il *bordo* di una superficie regolare a pezzi è costituito dall'unione dei bordi delle facce Σ_j con esclusione degli spigoli che appartengono al bordo di due facce adiacenti.

Se una superficie è regolare a pezzi, mediante una deformazione continua può essere trasformata in una superficie regolare. Per esempio, un parallelepipedo può essere trasformato in una superficie regolare con una piccola deformazione continua che ne smussi gli spigoli. Diremo che una superficie regolare a pezzi è orientabile quando la superficie regolare che si ottiene con una deformazione continua della superficie di partenza è orientabile, nel senso della definizione 6.8.

Se una superficie regolare a pezzi è *chiusa*, è sufficiente parlare di "normale entrante" o "normale uscente", per individuare un'orientazione coerente sulle varie "facce". Non dovrebbe essere difficile per il lettore capire come orientare

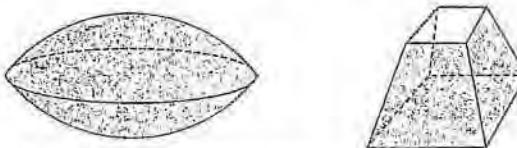


Figura 6.13. Esempi di superfici C^∞ a pezzi: guscio formato da due calotte sferiche (superficie chiusa) e superficie laterale di un tronco di piramide ($\partial\Sigma$ è l'unione dei bordi di due quadrilateri, basi del tronco).

coerentemente le facce di una superficie regolare a pezzi, non chiusa (naturalmente, nei casi in cui ciò sia possibile).

4.2 Flusso

Veniamo ora alla definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

In *fluidodinamica* il flusso di un fluido, (per esempio l'acqua in un canale) rappresenta la *portata*. Più precisamente, sia v il campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume d'acqua che attraversa nell'unità di tempo una certa superficie ideale. Questa quantità è detta *portata*. Rappresentiamo un elemento infinitesimo di superficie, dS , e il suo versore normale, n ; consideriamo il prodotto scalare di v con n , che misura l'avanzamento istantaneo dell'acqua in quel punto, rispetto alla superficie: se moltiplichiamo questo numero per l'area infinitesima dS , otterremo il volume infinitesimo d'acqua che fluisce attraverso la superficie nel punto, nell'unità di tempo:

$$v \cdot n \, dS = \frac{dV}{dt}.$$

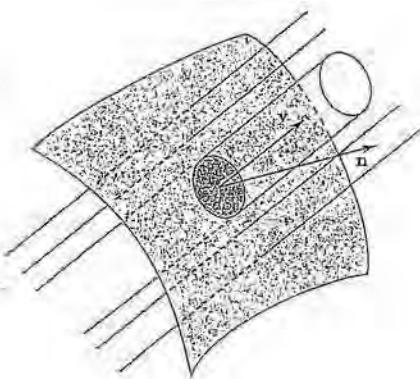


Figura 6.14.

Se vogliamo ottenere il *flusso totale del campo v attraverso la superficie orientata Σ* , basta integrare questi flussi elementari, ottenendo l'integrale di superficie:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} v \cdot n \, dS$$

Altri ambiti in cui la nozione di flusso si presenta naturalmente sono i seguenti. In *elettrodinamica*: se j è il vettore densità di corrente elettrica, il suo flusso attraverso Σ dà la corrente che transita per quella sezione; in *termodinamica*: se j è il vettore densità di flusso di calore, il suo flusso attraverso Σ dà la quantità di calore che attraversa Σ nell'unità di tempo.

In generale:

DEFINIZIONE 6.10 Dati una superficie regolare orientata Σ con versore normale n e un campo vettoriale F di classe C^1 in un intorno di Σ , si definisce *flusso del vettore* F attraverso Σ nella direzione e verso di n l'integrale

$$\Phi(F; \Sigma) = \iint_{\Sigma} F \cdot n \, dS.$$



Per il calcolo dell'integrale, se

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k \quad (u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2$$

è la parametrizzazione usata per Σ , essendo

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \quad \text{e} \quad dS = |r_u \times r_v| \, du \, dv,$$

si ottiene, posto $\tilde{F}(u, v) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$:

$$\Phi(F; \Sigma) = \iint_T \tilde{F} \cdot (r_u \times r_v) \, du \, dv.$$

Notiamo che se si cambia l'orientazione sulla superficie (ovvero il segno del vettore $(r_u \times r_v)$), il flusso cambia segno.

Per una superficie cartesiana, di equazione $z = g(x, y)$ con $g(x, y) \in T$, se si sceglie la normale verso l'alto, si ha:

$$n = \frac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy$$

e quindi si trova, posto $\tilde{F}(x, y) = F(x, y, g(x, y))$:

$$\Phi(F; \Sigma) = \iint_T [-\tilde{F}_1 g_x - \tilde{F}_2 g_y + \tilde{F}_3] \, dx \, dy.$$

ESERCIZIO

Calcoliamo il flusso uscente dalla superficie sferica di raggio R e centro l'origine, per il campo $F(x, y) = xi + yk$.

Scriviamo la superficie in forma cartesiana, come unione delle due semisfere S^+ , S^- .

La semisfera superiore S^+ è definita da

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad \text{per } x^2 + y^2 < R^2$$

con versore uscente n che punta verso l'alto. Abbiamo:

$$-g_x i - g_y j + k = \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} i + \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} j + k$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\Phi(F, S^+) &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} + y \right) dx dy = (\text{per simmetria}) \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{x^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta \int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^R \rho^2 \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho &= [-\rho^2 \sqrt{R^2-\rho^2}]_0^R + \int_0^R 2\rho \sqrt{R^2-\rho^2} d\rho = \\ &= \left[-\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2}{3}R^3.\end{aligned}$$

Quindi $\Phi(F, S^+) = \frac{2}{3}\pi R^3$.

La semisfera inferiore S^- è definita da

$$z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad \text{per } x^2 + y^2 < R^2$$

con versore uscente n che punta verso il basso (attenzione a questo punto: la scelta di n sull'intera superficie dev'essere coerente), perciò abbiamo:

$$g_x i + g_y j - k = \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} i + \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} j - k$$

e quindi, usando i calcoli precedenti:

$$\begin{aligned}\Phi(F, S^-) &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} - y \right) dx dy = (\text{per simmetria}) \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{x^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} dx dy = \frac{2}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

Il flusso totale uscente è dunque uguale a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Invitiamo il lettore a eseguire il calcolo del flusso usando la rappresentazione parametrica della sfera.

Vediamo ora un altro esempio, tecnicamente più semplice e di interesse applicativo.

Esempio

[4.2] Sia

$$\mathbf{E} = \kappa q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

con $\mathbf{r}(x, y, z) = xi + yj + zk$ e κ costante, il campo elettrostatico \mathbf{E} generato da una carica puntiforme q posta nell'origine. Calcoliamo il flusso di \mathbf{E} uscente dalla sfera Σ_R con centro nell'origine e raggio R .

La normale esterna alla sfera è

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

perciò, osservando che $\Sigma_R = \{(x, y, z) : |\mathbf{r}(x, y, z)| = R\}$, il flusso è dato da:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{F}, \Sigma_R) &= \iint_{\{|\mathbf{r}|=R\}} \kappa q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} dS = \iint_{\{|\mathbf{r}|=R\}} \kappa q \frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^4} dS = \frac{\kappa q}{R^2} \iint_{\{|\mathbf{r}|=R\}} dS \\ &= \frac{\kappa q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = (4\pi\kappa) q.\end{aligned}$$

Pertanto, il flusso è proporzionale alla carica q e la costante non dipende dal raggio della sfera. Il risultato ottenuto è semplice ma significativo e permette di dimostrare un risultato molto più generale, noto come *teorema di Gauss dell'elettrostatica*: *data nello spazio una distribuzione continua di carica, il flusso del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa Σ è pari a $4\pi\kappa q_{\text{tot}}$, dove q_{tot} è la carica totale racchiusa nella regione delimitata da Σ .*

5 TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Il teorema della divergenza ha svolto un ruolo fondamentale per gli sviluppi classici e moderni dell'Analisi Matematica e delle scienze applicate.

Da un punto di vista matematico, questo risultato riunisce molti dei concetti sviluppati fin qui: derivate parziali, superfici, integrali di superficie, campi vettoriali, flusso di un campo vettoriale.

Da un punto di vista applicativo, questo teorema si trova nella "cassetta degli attrezzi" di pressoché ogni branca della fisica matematica: in particolare, è alla base della deduzione matematica di molte equazioni fondamentali della fisica e della possibilità di trasformare relazioni di tipo integrale in altre di tipo differenziale o viceversa. Tutto ciò potrà essere illustrato solo in minima parte in questo testo, ma proseguendo i suoi studi, il lettore avrà certamente modo di riscontrare quanto qui affermato.

TEOREMA 6.8 (DELLA DIVERGENZA, O DI GAUSS) *Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitato, semplice rispetto a tutti e tre gli assi cartesiani, la cui frontiera è una superficie regolare a pezzi e orientabile; indichiamo con \mathbf{n}_e il versore normale esterno a ∂D e sia $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ un campo vettoriale $C^1(D)$. Allora vale la formula:*

$$(5.1) \quad \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

dove, ricordiamo,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Il teorema afferma che *il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie chiusa uguaglia l'integrale della divergenza del campo nella regione racchiusa dalla superficie stessa.*

Volendo dare subito un'interpretazione di questo teorema, possiamo dire che la (5.1) rappresenta un'*equazione di bilancio*: la divergenza di un campo vettoriale è una misura dell'intensità delle sorgenti (o dei pozzi, a seconda del segno) del campo; usando, per esempio, il linguaggio della meccanica dei fluidi, l'integrale della divergenza del campo velocità è il bilancio complessivo di quanta acqua zampilla dalle sorgenti, meno quanta acqua viene inghiottita nei pozzi, nella regione racchiusa dalla

superficie, nell'unità di tempo. D'altro canto, il flusso della velocità attraverso la superficie chiusa rappresenta il saldo totale di quanta acqua esce dalla regione racchiusa dalla superficie, meno quanta acqua vi entra, nell'unità di tempo: è naturale che le due quantità debbano coincidere (la differenza tra ciò che esce e ciò che entra deve essere stata prodotta all'interno).

Esempio

Calcolare il flusso uscente dalla superficie sferica Σ_R di raggio R e centro nell'origine, per il campo $\mathbf{F} = xi + yk$.

È quanto abbiamo già fatto nell'esempio 4.1. Calcoliamo lo stesso flusso utilizzando stavolta il teorema della divergenza. Abbiamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1$$

e quindi

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma_R) = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2 < R^2\}} 1 \, dx \, dy \, dz = \text{Volume della sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Per dimostrare il teorema, cominciamo a stabilire il seguente lemma valido in un dominio semplice rispetto all'asse z , ovvero

$$D = \{(x, y, z) : \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y), (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}$$

dove B è un aperto limitato e semplicemente connesso del piano e φ_1, φ_2 sono funzioni di classe $C^1(\bar{B})$.

LEMMA 6.9 Nelle ipotesi precedenti, vale la formula:

$$(5.2) \quad \iiint_D (F_3)_z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} F_3 \, \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} \, dS.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'integrale a sinistra. Dalla formula di riduzione degli integrali tripli, si ha:

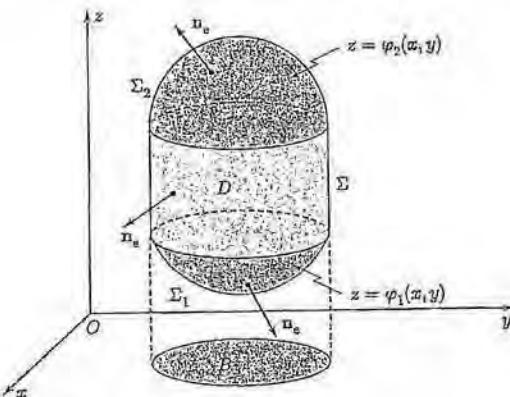
$$(5.3) \quad \begin{aligned} \iiint_D (F_3)_z \, dx \, dy \, dz &= \iint_B dx \, dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} (F_3)_z \, dz = \\ &= \iint_B [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Per l'integrale a destra, osserviamo che ∂D è l'unione di tre superfici:

1. Σ_1 , di equazione $z = \varphi_1(x, y)$ con normale esterna ed elemento d'area dati da:

$$\mathbf{n}_e = \frac{\varphi_1_x \mathbf{i} + \varphi_1_y \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi_1|^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + |\nabla \varphi_1|^2} \, dx \, dy$$

e quindi, su Σ_1 , si ha $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} \, dS = -dx \, dy$.

Figura 6.15. Dominio semplice rispetto all'asse x .

2. Σ_2 , di equazione $z = \varphi_2(x, y)$ con normale esterna ed elemento d'area dati da:

$$\mathbf{n}_e = \frac{-\varphi_{2x}\mathbf{i} - \varphi_{2y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi_2|^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + |\nabla \varphi_2|^2} dx dy$$

e quindi, su Σ_2 , si ha $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} dS = dx dy$.

3. Infine, Σ , la parte laterale dove $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} = 0$.

Deduciamo che:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} F_3 \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} dS &= \iint_{\Sigma_2} F_3 \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} dS + \iint_{\Sigma_1} F_3 \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{k} dS = \\ &= \iint_B [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy \end{aligned}$$

e dalla (5.3) segue la tesi.

In modo analogo si può dimostrare che, se D è semplice rispetto all'asse y , allora:

$$(5.4) \quad \iiint_D (F_2)_y dx dy dz = \iint_{\partial D} F_2 \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{j} dS,$$

mentre, se è semplice rispetto all'asse x , allora:

$$(5.5) \quad \iiint_D (F_1)_x dx dy dz = \iint_{\partial D} F_1 \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{i} dS.$$

Sommendo le (5.2), (5.4), (5.5) otteniamo il teorema della divergenza.

OSSERVAZIONE (SIGNIFICATO DELL'OPERATORE DIVERGENZA) Applichiamo il teorema della divergenza a una sfera $B_r(p_0)$, con centro in un punto p_0 e raggio r

arbitrariamente piccolo, e dividiamo ambo i membri per il volume della sfera (che indichiamo con $|B_r(p_0)|$); abbiamo:

$$\frac{1}{|B_r(p_0)|} \iiint_{\{B_r(p_0)\}} \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \frac{1}{|B_r(p_0)|} \iint_{\partial B_r(p_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e dS.$$

Facciamo ora tendere a zero r . Il primo membro, per il teorema della media, tende a $\operatorname{div} \mathbf{F}(p_0)$ e quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(p_0)|} \iint_{\partial B_r(p_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e dS.$$

Questa formula indica che la *divergenza di un campo è la densità di flusso del campo uscente dal punto per unità di volume*. È questo il significato rigoroso delle affermazioni un po' vaghe fatte in precedenza sulle relazioni tra divergenza di un campo e "pozzi e sorgenti" del medesimo.

Il teorema della divergenza, in realtà, è valido per una classe di domini molto più vasta di quelli semplici rispetto a una terna di assi cartesiani. Con una tecnica che ormai dovrebbe essere familiare allo studente, si può estendere la validità del teorema a domini D limitati, che siano inoltre decomponibili in un numero finito di sottodomini semplici rispetto ai tre assi e la cui frontiera sia costituita dall'unione di un numero finito di superfici Σ_j regolari a pezzi, orientabili, chiuse e disgiunte. Un caso tipico è quello di una "scatola" D privata di N sferette come in figura 6.16.

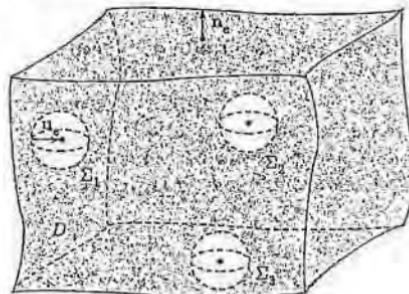


Figura 6.16. Dominio ammissibile per il teorema della divergenza.

L'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico

Come visto nell'esempio 4.2, il teorema di Gauss dell'elettrostatica afferma che il flusso del campo elettrico \mathbf{E} uscente da una superficie chiusa $\Sigma = \partial D$ uguaglia $4\pi\kappa q$, dove q è la carica totale in D :

$$\iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e dS = 4\pi\kappa q_{\text{tot}},$$

Vogliamo trasformare questa uguaglianza fra due quantità "globali" (cioè che coinvolgono tutto D) in un'uguaglianza *puntuale* tra due funzioni. Otterremo un'equazione differenziale. Il ragionamento è tipico:

1) Si applica l'identità precedente a una generica regione D .

2) Si riscrive la carica totale contenuta in D come l'integrale su D della densità di carica ρ :

$$q_{\text{tot}} = \iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz$$

e quindi

$$\iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = 4\pi\kappa \iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz.$$

3) Per ottenere un'uguaglianza tra due integrali di volume, si trasforma il primo membro usando il teorema della divergenza; il risultato è:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E} \, dx \, dy \, dz = 4\pi\kappa \iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz.$$

4) Poiché l'identità precedente si può riscrivere nella forma

$$\iiint_D [\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\kappa\rho] \, dx \, dy \, dz = 0$$

e questo deve valere per qualunque regione D (comunque piccola), l'unica possibilità è che l'integrandi stessa sia zero, ossia valga l'identità:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\kappa\rho.$$

Questa è l'*equazione differenziale* che traduce, punto per punto, il contenuto del teorema di Gauss dell'elettrostatica. È una delle quattro fondamentali equazioni di Maxwell, che reggono la teoria dell'elettromagnetismo.

5) Ricordiamo ora che il campo elettrostatico è conservativo, cioè si può scrivere $\mathbf{E} = \nabla U$ dove U è il potenziale elettrostatico; perciò $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \nabla U = \Delta U$. Si ottiene quindi che il potenziale elettrostatico soddisfa l'*equazione seguente*, detta di Poisson:

$$\Delta U = 4\pi\kappa\rho$$

dove $4\pi\kappa$ è una costante e ρ è la densità di carica.

Equazione di continuità

In questo paragrafo è significativo usare campi scalari e vettoriali *non stazionari*. Sia $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$ la velocità di un fluido, $\rho = \rho(t, x, y, z)$ la sua densità e D un elemento di volume occupato dal fluido. Se dS è una piccola porzione di superficie contenuta in ∂D con normale \mathbf{n} , abbiamo già visto che la massa di fluido che attraversa quella sezione nell'unità di tempo sarà $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$. Integrando su ∂D , si ottiene il flusso netto uscente di $\rho \mathbf{v}$ attraverso ∂D . Per il teorema della divergenza, vale l'identità:

$$\iiint_D \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

D'altra parte la quantità di fluido uscita da D nell'unità di tempo è anche uguale a $-\frac{dm}{dt}$ dove m è la massa totale del fluido contenuto in D (nell'ipotesi che, all'interno

della regione D non ci sia "creazione" né "distruzione" di massa). La massa totale m si può calcolare come integrale in D della densità:

$$m = \iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Perciò, se si assume di poter derivare sotto il segno di integrale¹², si ha:

$$-\frac{dm}{dt} = -\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz.$$

Abbiamo dunque:

$$\iiint_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right] \, dx \, dy \, dz = 0$$

e, per l'arbitrarietà di D , si deduce

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

che si chiama *equazione di continuità* ed esprime il principio di conservazione della massa.

Se interpretiamo ρ come densità di carica elettrica e v come velocità della carica, l'equazione di continuità si rilegge come principio di conservazione della carica elettrica, che è una legge dell'elettrodinamica.

Qualche altra conseguenza e applicazione del teorema della divergenza sarà discussa negli esercizi.

6 TEOREMA DEL ROTORE

Introduciamo ora un altro risultato fondamentale con profonde implicazioni.

TEOREMA 6.10 (DEL ROTORE, O DI STOKES) *Sia Σ una superficie regolare orientabile, orientata con il versore normale n , dotata di bordo $\partial^+ \Sigma$ orientato positivamente¹³. Supponiamo inoltre che $\partial^+ \Sigma$ sia una curva regolare, o l'unione di più curve regolari, e sia T il versore tangente a $\partial^+ \Sigma$. Se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ è un campo vettoriale regolare definito in un intorno di Σ , allora vale la formula:*

$$(6.1) \quad \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot n \, dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} F \cdot T \, ds$$

Detto in parole: il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso Σ uguaglia la circuitazione del campo lungo il bordo della superficie stessa, se orientato positivamente.

Si noti che per poter calcolare il rotore di F nei punti di Σ è necessario che il campo sia definito in una regione tridimensionale che contiene la superficie al suo interno. Il lavoro di un campo lungo un cammino orientato è stato definito nel paragrafo 1.3. Il

¹²Ciò è giustificato se la densità del fluido è una funzione regolare.

¹³Si veda il paragrafo 4.1 per le definizioni.

teorema vale anche per superfici regolari a pezzi, il cui bordo sia costituito da curve regolari a pezzi; risultano dunque ammissibili anche superfici come un tronco di cono o di piramide.

Il teorema vale anche nel caso particolare di una superficie orientabile chiusa, quindi priva di bordo: in questo caso il secondo membro della (6.1) sarà nullo.

Omettiamo la dimostrazione del teorema. Ci limitiamo a osservare che, scrivendo

$$\mathbf{n} = \cos(n, i)\mathbf{i} + \cos(n, j)\mathbf{j} + \cos(n, k)\mathbf{k}$$

e osservando che

$$\mathbf{T} ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

la (6.1) si può scrivere nella forma più esplicita seguente:

$$(6.2) \quad \iint_{\Sigma} \{(R_y - Q_z) \cos(n, i) + (P_z - R_x) \cos(n, j) + (Q_x - P_y) \cos(n, k)\} dS = \\ = \oint_{\partial^+ \Sigma} P dx + Q dy + R dz,$$

Nel caso particolare in cui la superficie Σ coincide con un dominio D del piano xy (con frontiera regolare) ed \mathbf{F} sia un campo vettoriale piano,

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

si ha $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (Q_x - P_y)$, e la (6.2) si riscrive:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial^+ D} P dx + Q dy,$$

ossia ritroviamo il *teorema di Gauss-Green*, provato nel paragrafo 2, di cui quindi il teorema di Stokes risulta essere una generalizzazione.

Esempio

ESEMPIO Calcoliamo il flusso del rotore di $\mathbf{F} = xi + yk$, attraverso la superficie Σ_R (quarto di sfera) orientata verso l'alto:

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \text{con} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Utilizziamo sia il calcolo diretto che il calcolo, alternativo, mediante la circuitazione del campo sul bordo.

Abbiamo:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{n} = i \sin \varphi \cos \theta + j \sin \varphi \sin \theta + k \cos \varphi$$

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma_R) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \theta R^2 \sin \varphi d\varphi =$$

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} R^2.$$

Calcoliamo, in alternativa, la circuitazione del campo lungo il bordo di Σ_R ; il bordo è unione di due semicirconferenze percorse in verso opportuno. La prima ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e dà il contributo:

$$L_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [R \cos t(-R \sin t) + (R \sin t) \cdot 0] dt = 0 \text{ (per simmetria).}$$

La seconda è

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = R \cos t \\ z(t) = R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e dà il contributo:

$$L_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [0 + R \cos t(R \cos t)] dt = \frac{\pi}{2} R^2.$$

I due risultati coincidono, come previsto, in base al teorema di Stokes.

Esempio Come applicazione del teorema di Stokes, dimostriamo che il campo $\mathbf{F}(x) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, solenoidale in $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ non può ammettere potenziale vettore in tutto Ω . Supponiamo per assurdo che esista $\mathbf{V} \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{F}$ in Ω . Per il teorema di Stokes, se Σ è una superficie regolare, orientata, abbiamo

$$(6.3) \quad \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Scegliamo come Σ_r la superficie sferica di raggio unitario con centro nell'origine, privata della calotta di raggio r e centro nel polo nord $(0, 0, 1)$, come mostrato in figura 6.17.

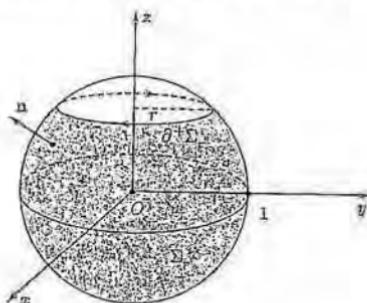


Figura 6.17.

Su Σ_r scegliamo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_e = xi + yj + zk$. Di conseguenza $\partial^+ \Sigma_r$ è costituito dal bordo della calotta percorso in senso orario.

Essendo $|\mathbf{x}| = 1$ su Σ , si ha $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 1$ e pertanto

$$\iint_{\Sigma_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = a(\Sigma_r)$$

e quindi, dalla (6.3) si ha:

$$(6.4) \quad a(\Sigma_r) = \oint_{\partial^+ \Sigma_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

Facciamo tendere r a zero. Allora l'area della calotta tende a zero cosicché $a(\Sigma_r) \rightarrow 4\pi$.

D'altra parte, se M è il massimo di $|\mathbf{V}|$ sul bordo della sfera, possiamo scrivere:

$$\left| \oint_{\partial^+ \Sigma_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \, ds \right| \leq M \left| \oint_{\partial^+ \Sigma_r} ds \right| = M l(\partial \Sigma_r).$$

Ma se $r \rightarrow 0$, $l(\partial \Sigma_r) \rightarrow 0$ e si ottiene così una contraddizione con la (6.4).

 La legge di Neumann dell'elettromagnetismo afferma che un campo magnetico \mathbf{B} , variabile nel tempo, induce un campo elettrico \mathbf{E} , in base alla legge:

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

dove Φ_B è il flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie Σ orientata e $C = \partial^+ \Sigma$. Così formulata, la legge coinvolge grandezze globali (il flusso attraverso un'intera superficie, il lavoro del campo elettrico lungo un cammino). Si vuole dare una formulazione alternativa di questa legge, che sia vera punto per punto. Per il teorema di Stokes, il secondo membro uguaglia

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Il primo membro si può invece riscrivere come

$$-\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Dall'uguaglianza

$$-\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

che deve valere per ogni superficie Σ , segue l'uguaglianza delle funzioni integrande:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}.$$

Questa è una delle quattro equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo; è un'equazione differenziale che lega, punto per punto, i campi vettoriali \mathbf{B}, \mathbf{E} . Il teorema di Stokes è servito per dedurla a partire dalla legge di Neumann.

OSSERVAZIONE (SIGNIFICATO DELL'OPERATORE ROTORE) Fissiamo un punto p_0 nello spazio, un versore \mathbf{n} spiccato da p_0 . Sia poi $D_r(p_0)$ un disco di centro p_0 , raggio r e versore normale \mathbf{n} . Applichiamo a $D_r(p_0)$ la (6.1) e dividiamo per l'area del disco. Otteniamo:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r(p_0)} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial^+ D_r(p_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Facendo tendere r a zero, il primo membro tende, per il teorema della media, a $[(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] (p_0)$. Otteniamo quindi:

$$[(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] (p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial^+ D_r(p_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

ossia: la componente del rotore di un campo rispetto al versore \mathbf{n} in un punto p di una superficie è uguale alla densità superficiale di circuitazione del campo attorno a p , nel piano perpendicolare a \mathbf{n} .

Campi irrotazionali

Se un campo \mathbf{F} è irrotazionale in una certa regione dello spazio, il flusso del rotore di \mathbf{F} lungo una qualsiasi superficie Σ regolare e con bordo è nullo. Ritroviamo così il risultato che la circuitazione di \mathbf{F} lungo $\partial\Sigma$ è nulla.

Il teorema di Stokes implica qualcosa in più. Se, per esempio, \mathbf{F} è un campo irrotazionale, ma non conservativo, nel piano privato dell'origine e Σ è una corona circolare centrata nell'origine, il teorema implica che il lavoro di \mathbf{F} lungo il bordo orientato della corona circolare è nullo. Questo significa che il lavoro di \mathbf{F} sulla circonferenza interna è uguale a quello sulla circonferenza esterna (se sono percorse nello stesso verso).



Sia

$$\mathbf{E} = kq \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, k, q costanti; sia D_R il disco di centro $(0, a, 0)$ e raggio R , disposto perpendicolarmente all'asse y . Calcolare il flusso di \mathbf{E} attraverso D_R , orientato nel verso delle y crescenti.

Suggerimenti: parametrizzare D_R con le equazioni

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = a \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \in [0, R] \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

e osservare che $|\mathbf{r}| = \sqrt{\rho^2 + a^2}$.

Sia Σ la superficie (chiusa) del cilindro V descritto da $x^2 + y^2 \leq R$ e $0 \leq z \leq h$. Calcolare il flusso uscente da V del campo vettoriale

$$\mathbf{v} = xi - yj + zk$$

- direttamente dalla definizione di flusso;
- utilizzando il teorema della divergenza.

Sia Σ la superficie della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, orientata verso l'alto, e sia

$$\mathbf{F} = yi + zj - xk.$$

Calcolare il flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso Σ :

- direttamente dalla definizione;
- utilizzando il teorema del rotore.

Sia

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j.$$

Utilizzando il teorema di Stokes, mostrare che il lavoro del campo \mathbf{F} lungo l'ellisse con centro nell'origine e semiasse 3 e 4 è lungo la circonferenza unitaria con centro nell'origine, percorse entrambe in senso antiorario, è lo stesso. Calcolare poi tale lavoro.

Il campo \mathbf{B} ha la proprietà che il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. Quanto vale $\nabla \cdot \mathbf{B}$? (Questa proprietà è vera per il campo magnetico).

Quanto vale il flusso di $\nabla \times \mathbf{F}$ attraverso una superficie chiusa? Rispondere riscrivendo il flusso del rotore:

- mediante il teorema del rotore;
- mediante il teorema della divergenza (e ricordando un'opportuna identità).

Questo esercizio richiede di imitare il metodo seguito nell'esempio 6.8, per ricavare ora una formulazione differenziale (equazione di Maxwell) della legge di Ampère generalizzata. Siano: \mathbf{B} il campo magnetico, \mathbf{E} il campo elettrico, \mathbf{j} la densità di flusso di corrente elettrica, I l'intensità di corrente elettrica. Il punto di partenza è l'identità:

$$\oint_{S+\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \, ds = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E}, \Sigma)}{dt}$$

dove: μ_0, ε_0 sono costanti; Σ è una generica superficie regolare con bordo, orientata con il versore normale \mathbf{n} e infine

$$I = \Phi(\mathbf{j}, \Sigma).$$

Utilizzando tutti questi fatti e il teorema di Stokes, ricavare dall'equazione di partenza un'equazione differenziale (senza più integrali) che coinvolga $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}$. Tutti questi sono campi vettoriali variabili nel tempo.

(Questo esercizio richiede di utilizzare le tecniche del paragrafo 5). Sia $u = (t, x, y, z)$ la temperatura di un corpo D che non possiede all'interno sorgenti o pozzi di calore, \mathbf{j} la densità di flusso di calore, $\rho = \rho(x, y, z)$ la densità del corpo. L'equazione di bilancio dell'energia fornisce:

$$\iint_D \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = - \iiint_D c_v \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dy \, dz$$

dove c_v è il calore specifico a volume costante. La legge di Fourier della conduzione del calore afferma che

$$\mathbf{j} = -k \nabla u$$

con $k > 0$, costante di diffusività. Utilizzando questi fatti, il teorema della divergenza e il fatto che la relazione precedente debba valere per qualsiasi regione D dello spazio, dedurne un'equazione differenziale a cui è soggetta la temperatura u (equazione di diffusione del calore).

Siano f, g due funzioni reali di tre variabili; applicando il teorema della divergenza al campo $f \nabla g$ su un dominio regolare D , dimostrare che:

$$\iiint_D f \Delta g \, dx \, dy \, dz + \iiint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} f \nabla g \cdot \mathbf{n}_e \, dS.$$

Dedurre poi da questa identità il seguente risultato: se f è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{in } D \\ f = 0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

allora f è identicamente nulla in D .

 Siano f, g due funzioni reali di tre variabili; applicando il teorema della divergenza al campo $fg\mathbf{i}$ su un dominio regolare D , dimostrare la seguente formula di integrazione per parti in più dimensioni:

$$\iiint_D f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial D} fg n_x dS - \iiint_D g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz$$

dove n_x è la prima componente del versore \mathbf{n}_e . Formule analoghe valgono per le derivate rispetto a y, z .

 Il nastro di Möbius può essere parametrizzato dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t, \theta) = \left(r + t \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \\ y(t, \theta) = \left(r + t \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \\ z(t, \theta) = t \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad t \in [-l, l] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

dove r, l sono fissati, con $r > l$.

Assumiamo che $r = 3, l = 1$. Calcolare il vettore normale $\mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_\theta$ per $t = 0$ e θ che varia tra 0 e 2π , ossia lungo la circonferenza equatoriale di raggio r sul piano $z = 0$. Constatare che il vettore normale non ritorna, dopo un giro completo, al valore iniziale. Dedurre che la superficie non è orientabile.

 Si consideri il campo vettoriale tridimensionale:

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}(z - y) + \mathbf{j}x(1 + z^2) + \mathbf{k}xy.$$

a) Calcolare la circuitazione di \mathbf{F} lungo l'ellisse che giace nel piano $z = 0$ e ha equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

percorsa in senso antiorario.

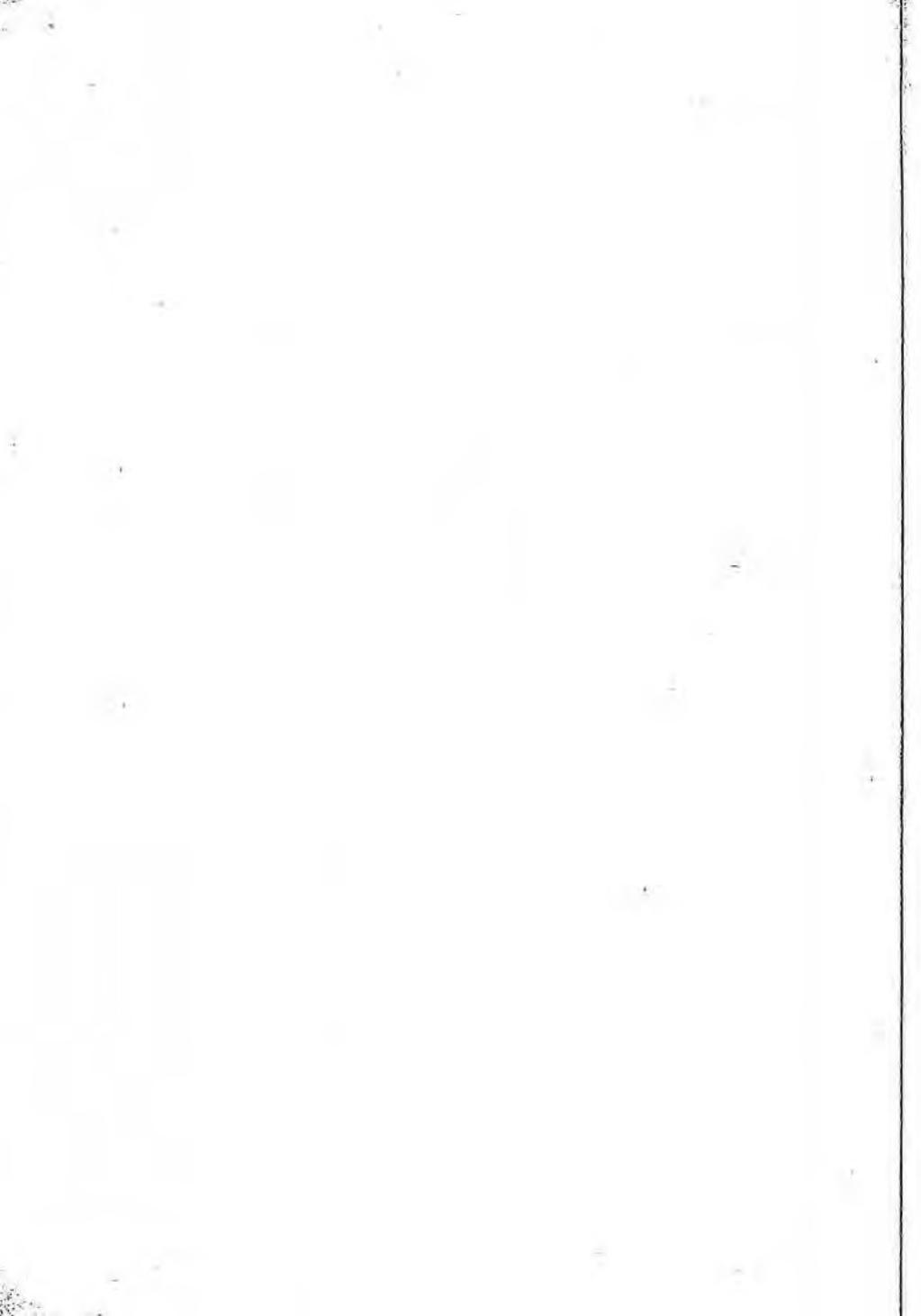
b) Calcolare $\nabla \times \mathbf{F}$.

c) Scrivere esplicitamente l'integrale doppio che assegna il flusso di $\nabla \times \mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) \text{ per } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$$

orientata con la normale verso l'alto. (Non si richiede di calcolare l'integrale doppio, ma solo di scriverlo, esplicitamente).

d) Si può dire quanto vale il flusso di cui al punto precedente, senza calcolare l'integrale doppio corrispondente?



7

Serie di potenze e serie di Fourier

■ 1 SERIE DI FUNZIONI E CONVERGENZA TOTALE

Supponiamo che su un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$ siano definite le funzioni

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Per ogni $x \in I$ si può considerare la successione di numeri reali $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$; a partire da questa successione si può poi considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

che, per ciascun $x \in I$ fissato, può essere una serie convergente, divergente o irregolare. Esprimeremo questo fatto dicendo che la *serie di funzioni* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, diverge o è irregolare in un certo punto $x \in I$. Particolarmenete interessante è il caso in cui la serie converge in tutti i punti di un intervallo $I^* \subseteq I$; in tal caso la somma della serie è una nuova funzione f , definita in I^* . Diremo allora che la serie di funzioni *converge puntualmente* in I^* .

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di serie di funzioni:

- la *serie geometrica*,

$$(1.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

- la *serie esponenziale*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e altre serie di Taylor di funzioni derivabili infinite volte.¹ Si tratta in tutti i casi di serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

in cui le funzioni $f_n(x)$ hanno la forma $a_n x^n$ e perciò si chiamano *serie di potenze*.

¹V. volume 1, capitolo 5, paragrafo 2.1.

In questo capitolo introdurremo le nozioni fondamentali su queste serie e studieremo un'altra classe importante di serie di funzioni: le *serie di Fourier*. Prima però conviene dare qualche risultato di carattere generale sulle serie di funzioni.

Un problema tipico che si pone per le serie di funzioni è: quali sono le proprietà che la somma f della serie "eredita" dai termini f_n ? Per esempio:

Se le f_n sono continue, anche f lo è?

Se le f_n sono derivabili, anche f lo è? E si può calcolare f' "derivando la serie termine a termine", cioè estendendo alla "somma infinita" la linearità della derivata? Questo significa scambiare le operazioni di somma e di derivazione:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Analogamente, si può calcolare l'integrale di $f(x)$ "integrandi termine a termine", cioè estendendo alla "somma infinita" la linearità dell'integrale? Questo significa scambiare le operazioni di somma e di integrazione:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Non ci si può in generale aspettare che la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, senza altre ipotesi, garantisca la risposta affermativa alle domande precedenti. Illustriamo questa problematica mediante alcuni esempi.



DEFINIZIONE *Derivabilità termine a termine della serie geometrica.* Consideriamo la serie geometrica (1.1). Sappiamo che per la sua somma parziale n -esima vale l'identità elementare:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Derivando ambo i membri di quest'uguaglianza (il primo membro ora è una somma finita) otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

che per $|x| < 1$ e $n \rightarrow \infty$ dà, essendo $nx^{n+1} \rightarrow 0$ e $(n+1)x^n \rightarrow 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(x-1)^2},$$

Poiché d'altro canto la somma trovata $\frac{1}{(x-1)^2}$ non è altro che la derivata di $\frac{1}{1-x}$, ne deduciamo che in questo caso particolare è vero che

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

ossia la serie geometrica si può derivare termine a termine, per $|z| < 1$.

Si noti che il ragionamento di questo esempio non si può ripetere in generale, in quanto si basa sulla conoscenza di un'espressione semplice ed esplicita per la somma parziale n -esima della serie.

 *Una serie non derivabile termine a termine.* Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n},$$

Si vede subito che la serie converge in ogni punto x , perché converge assolutamente:

$$\left| \frac{\sin(3^n x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Osserviamo che ciascuna funzione $f_n(x) = \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$ è infinitamente derivabile in tutto \mathbb{R} . Tuttavia la serie delle derivate,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cos(3^n x)}{2^n},$$

non è convergente. Per esempio, in $x = 0$ dà $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$, che diverge. Quindi, questa particolare serie non è certamente derivabile termine a termine. In realtà, non sappiamo nemmeno dire, a questo punto del discorso, se la somma della serie sia una funzione derivabile o meno².

 *Una serie non integrabile termine a termine.* Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una qualsiasi enumerazione dei numeri razionali³ dell'intervallo $[0, 1]$ e definiamo

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che ogni funzione f_n è diversa da zero in un solo punto di $[0, 1]$, quindi è continua salvo un punto, ed è integrabile, con integrale zero. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

evidentemente converge alla funzione di Dirichlet⁴

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

²Una funzione di questo tipo in effetti fu utilizzata da Weierstrass nel 1872 per esibire un esempio di funzione continua su un intervallo ma in nessun punto derivabile. L'esempio di Weierstrass è il seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n \pi x)}{2^n}$$

³Per esempio, possiamo disporre in successione i razionali di $[0, 1]$ in questo modo:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

ordinandoli cioè secondo l'ordine crescente del denominatore, quindi del numeratore, ed evitando di ripetere frazioni equivalenti a quelle già scritte.

⁴già incontrata nel volume 1, capitolo 6, paragrafo 2.2.

Questa funzione f è discontinua in tutti i punti di $[0, 1]$ e non è integrabile! In particolare, l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx \text{ non vale,}$$

in quanto il primo membro vale zero (ogni integrale è nullo) mentre l'integrale a secondo membro non esiste.

Esiste però un modo abbastanza semplice per "rafforzare" la convergenza in modo che tutto funzioni bene. Lo esprimiamo attraverso la definizione di *convergenza totale*.

DEFINIZIONE 7.1 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I se esiste una successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ di numeri reali positivi tali che:

i) $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.



Osserviamo che la convergenza totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in I implica la convergenza assoluta, e quindi la convergenza semplice⁵, della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in I$. Pertanto risulta ben definita la funzione, somma della serie,

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

La convergenza totale è un'ipotesi piuttosto forte. Rivediamo da questo punto di vista i precedenti esempi.

ESEMPIO

Il lettore verifichi le seguenti affermazioni.

- (a) La serie geometrica (v. Esempio 1.1) converge totalmente in $[-\delta, \delta]$ per ogni $\delta < 1$, ma non converge totalmente in $(-1, 1)$.
- (b) La serie dell'Esempio 1.2 converge totalmente, mentre la serie delle derivate non è neppure convergente.
- (c) La serie dell'Esempio 1.3 non converge totalmente.

Vediamo alcuni teoremi generali che mostrano le buone proprietà che si possono dedurre dall'ipotesi di convergenza totale.

⁵Ricordiamo che, per una serie numerica con termini a segno variabile, la convergenza assoluta implica la convergenza semplice (v. volume 1, capitolo 5, Teorema 5.3).

TEOREMA 7.1 (CONTINUITÀ DELLA SOMMA) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in I$ per $n = 1, 2, 3, \dots$ e supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga totalmente in I . Allora la somma della serie, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, è una funzione continua in x_0 . In particolare, se le f_n sono continue in I , anche f è continua in I .

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in I$ e proviamo che $f(x) \rightarrow f(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, ossia che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Scriviamo perciò:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) =$$

poiché le due serie sono convergenti

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = \sum_{n=1}^N [f_n(x) - f_n(x_0)] + \sum_{n=N+1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] \\ &\equiv A_N(x) + B_N(x) \end{aligned}$$

per un certo intero N che fisseremo in seguito. L'ipotesi di convergenza totale implica:

$$|B_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|f_n(x)| + |f_n(x_0)|) \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

(con a_n come nella definizione 7.1). Ricordiamo ora che il resto di una serie convergente è infinitesimo⁶. Questo significa che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un N_0 tale che:

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n < \varepsilon \text{ e quindi } |B_{N_0}(x)| < 2\varepsilon.$$

Fissiamo ora $N = N_0$. Allora:

$$|A_{N_0}(x)| \leq \sum_{n=1}^{N_0} |f_n(x) - f_n(x_0)|.$$

D'altra canto, ciascuna delle funzioni f_n per $n = 1, 2, \dots, N_0$ per ipotesi è continua in x_0 , perciò $A_{N_0}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$. In particolare esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |A_{N_0}(x)| < \varepsilon.$$

In conclusione, abbiamo trovato $\delta > 0$ tale che:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |A_{N_0}(x)| + |B_{N_0}(x)| < 3\varepsilon$$

e la tesi è dimostrata.

⁶v. volume 1, capitolo 5, Teorema 5.2.

TEOREMA 7.2 (DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in I per $n = 1, 2, 3, \dots$ e supponiamo che:

(i) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga per ogni $x \in I$;

(ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converga totalmente in I :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f'_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ per ogni } x \in I.$$

Allora, detta $f(x)$ la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, si ha che f è derivabile in I e

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \text{ per ogni } x \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in I$ e mostriamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Consideriamo quindi:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) =$$

poiché le serie convergono

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right] + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right] \equiv \\ &\equiv A_N + B_N \end{aligned}$$

per un certo intero N da scegliersi in seguito⁷. Consideriamo prima B_N . Applicando il teorema di Lagrange a ogni addendo della serie, otteniamo che, per ogni n , esiste un numero $\theta_n \in (0, 1)$ per cui si ha:

$$B_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} [f'_n(x + \theta_n h) - f'_n(x)].$$

Sfruttando ora l'ipotesi di convergenza totale della serie delle derivate, scriviamo:

$$|B_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f'_n(x + \theta_n h) - f'_n(x)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

⁷In realtà A_N e B_N dipendono anche da x e h , ma per non appesantire la scrittura eviteremo di indicarle con $A_N(x, h)$, $B_N(x, h)$.

Poiché il resto di una serie convergente è infinitesimo, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un N_0 tale che:

$$|B_{N_0}| \leq 2 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Fissiamo $N = N_0$ e occupiamoci ora di A_{N_0} . Poiché f_n è derivabile in x , possiamo scrivere:

$$f_n(x+h) - f_n(x) = f'_n(x)h + \omega_n(h)$$

con $\frac{\omega_n(h)}{h} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. (Abbiamo applicato il teorema di linearizzazione delle funzioni derivabili⁸). Sostituendo questa identità a ogni addendo di A_{N_0} , abbiamo:

$$A_{N_0} = \sum_{n=1}^{N_0} \left[\frac{\omega_n(h)}{h} \right].$$

Dunque A_{N_0} è somma di un numero finito di funzioni che tendono a zero per $h \rightarrow 0$, pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|A_{N_0}| < \varepsilon \text{ per } |h| < \delta.$$

Abbiamo quindi provato che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \right| \leq |A_{N_0}| + |B_{N_0}| < 2\varepsilon \text{ se } |h| < \delta,$$

che è la tesi. \diamond

TEOREMA 7.3 (INTEGRABILITÀ TERMINE A TERMINE) Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue per $n = 1, 2, 3, \dots$ e supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga totalmente in $[a, b]$ a una funzione f (continua, per il teorema 7.1). Allora la serie è integrabile termine a termine, cioè:

$$(1.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Provare la (1.2) equivale a mostrare che:

$$(1.3) \quad A_n \equiv \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Poiché l'integrale è lineare su somme finite, possiamo scrivere

$$A_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right] dx = \int_a^b \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right] dx.$$

Ora, dall'ipotesi di convergenza totale abbiamo:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

⁸V. volume 1, capitolo 4, paragrafo 7.1.

(con a_k come nella definizione 7.1). Integrando, otteniamo:

$$|A_n| \leq \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| dx \leq (b-a) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$ (perché è il resto di una serie convergente); abbiamo quindi provato la (1.3). \diamond

■ 2 SERIE DI POTENZE

2.1 Proprietà fondamentali delle serie di potenze

DEFINIZIONE 7.2 Si dice *serie di potenze di centro* $x_0 \in \mathbb{R}$ una serie di funzioni del tipo:

$$(2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è una successione a valori reali e x è variabile reale. Gli a_n si dicono *coefficienti della serie di potenze*. \blacksquare

Per le serie di potenze, l'insieme degli x per cui si ha convergenza è sempre un intervallo, detto intervallo di convergenza; la metà della lunghezza di questo intervallo si dice raggio di convergenza. Precisamente:

TEOREMA 7.4 (RAGGIO DI CONVERGENZA) Consideriamo la serie (2.1) e supponiamo che esista il limite

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad \text{Poniamo} \quad R = \begin{cases} 1/l & \text{se } l \neq 0, \infty \\ +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = \infty. \end{cases}$$

Allora:

- se $|x - x_0| < R$, la serie (2.1) converge (assolutamente);
- se $|x - x_0| > R$, la serie (2.1) non converge.

OSSERVAZIONE Notiamo che nel caso $|x - x_0| > R$ la serie, a seconda dei casi, può sia divergere che essere irregolare.

Se $R = 0$, la serie converge solo per $x = x_0$; se $R = \infty$, la serie converge per ogni x reale.

Per $x = x_0 \pm R$ (gli estremi dell'intervallo di convergenza), il teorema non afferma nulla e in effetti la serie può convergere, divergere o essere irregolare, a seconda dei casi; ci occuperemo successivamente di questo problema.

DIMOSTRAZIONE. Sia $|x - x_0| < R$ e mostriamo che la serie a termini positivi $\sum_n |a_n (x - x_0)^n|$ converge, sfruttando il criterio della radice per le serie a termini non negativi⁹:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1,$$

perciò la serie (2.1) converge (assolutamente).

⁹v. volume 1, capitolo 5, paragrafo 1.2.

Sia ora $|x - x_0| > R$. Ragionando come sopra, si ottiene che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \frac{|x - x_0|}{R} > 1.$$

Per quanto osservato nella dimostrazione del criterio della radice, questo implica che $|a_n(x - x_0)^n| \rightarrow \infty$; dunque anche $a_n(x - x_0)^n$ non tende a zero e la serie $\sum a_n(x - x_0)^n$ non converge. \diamond

Il teorema precedente suggerisce la seguente:

DEFINIZIONE 7.3 Data una serie di potenze (2.1), si dice *raggio di convergenza della serie* un numero $R \in [0, \infty]$ con le proprietà espresse dal teorema precedente, ossia tale che, se $|x - x_0| < R$, la serie (2.1) converge e, se $|x - x_0| > R$, la serie (2.1) non converge. \blacksquare

Si noti che il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ potrebbe non esistere, perciò dal teorema precedente non segue automaticamente che esista sempre un numero con queste proprietà; tuttavia, si può dimostrare¹⁰ che è proprio così: *per ogni serie di potenze esiste uno (e un solo) raggio di convergenza $R \in [0, \infty]$.*

Per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze si può utilizzare anche il seguente criterio, alternativo al precedente:

TEOREMA 7.5 (CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SERIE DI POTENZE) Consideriamo la serie (2.1) e supponiamo che esista, finito o infinito, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l.$$

Allora il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$R = \frac{1}{l}$$

(con la solita convenzione $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$).

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente: si applica questa volta il criterio del rapporto per le serie numeriche a termini positivi¹¹ alla serie $\sum |a_n(x - x_0)^n|$ e si ragiona di conseguenza.

Esempio

ESEMPIO Calcoliamo il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$\text{a. } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x - 3)^n \quad \text{b. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \quad \text{c. } \sum_{n=0}^{\infty} n! (x - 1)^n$$

¹⁰Per farlo occorrerebbe però introdurre il concetto di *limite superiore di una successione*. Preferiamo non entrare in questi dettagli.

¹¹v. ancora volume 1, capitolo 5, paragrafo 1.2.

a. È una serie di potenze di centro $x_0 = 3$. Abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{n}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

ricordando che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (vedi volume 1, capitolo 3, Esempio 1.21). Dunque $R = 2$: la serie converge per $|x - 3| < 2$, cioè per $x \in (1, 5)$.

b. È una serie di potenze di centro 0. Data la presenza dei fattoriali, qui conviene invece usare il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$$

perciò $R = \infty$: la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c. È una serie di potenze di centro $x_0 = 1$. Ancora col criterio del rapporto, abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Perciò $R = 0$: la serie converge solo per $x = 1$.

OSSERVAZIONE Raggio di convergenza di una serie lacunare. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}.$$

Come si vede dal confronto con la serie geometrica, questa converge a $1/\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$ per $|x| < \sqrt{3}$. Notiamo che i coefficienti della serie sono:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^{n/2}} & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

per cui formalmente non esiste né

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{né} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Una serie di potenze che abbia infiniti coefficienti a_n nulli si dice *serie lacunare*. Si può dimostrare che, se esiste il limite l della sottosuccessione di $\sqrt[n]{|a_n|}$ costituita dai soli termini non nulli, il numero $R = 1/l$ è ancora il raggio di convergenza della serie (come nell'esempio che abbiamo appena fatto).

Nel caso particolare di serie contenenti solo potenze di esponente pari o dispari, la cosa più semplice è vedere la serie come una serie completa di potenze di x^2 , che converge per $x^2 < R$ e quindi $|x| < \sqrt{R}$. Nell'esempio precedente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{3^n} \text{ con } t = x^2, \text{ converge per } |t| < 3, \text{ cioè } |x| < \sqrt{3}.$$

Il seguente teorema raccoglie le principali proprietà delle serie di potenze, che, come vedremo, seguono facilmente combinando i risultati generali sulle serie di funzioni totalmente convergenti (v. paragrafo 1) con le proprietà appena viste che riguardano il raggio di convergenza di una serie di potenze.

TEOREMA 7.6 (PROPRIETÀ DELLE SERIE DI POTENZE) Consideriamo la serie (2.1) e supponiamo che il suo raggio di convergenza R sia positivo (finito o infinito). Allora:

1. Per ogni numero $r \in (0, R)$, la serie (2.1) converge totalmente nell'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$.
2. La somma della serie (2.1) è una funzione continua nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. La somma della serie (2.1) è una funzione derivabile nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e la serie può essere derivata termine a termine:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Inoltre, la serie derivata è anch'essa una serie di potenze di centro x_0 , con lo stesso raggio di convergenza R di quella di partenza.

4. Il processo descritto al punto precedente può essere iterato indefinitamente; pertanto la somma di una serie di potenze è una funzione derivabile infinite volte nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.
5. La somma della serie (2.1) ammette primitiva nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$, che può essere calcolata termine a termine:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + c.$$

Inoltre, la primitiva è anch'essa esprimibile come serie di potenze di centro x_0 , con lo stesso raggio di convergenza R di quella di partenza.

6. Per ogni intervallo $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, la somma della serie (2.1) è integrabile in $[a, b]$ e si può integrare termine a termine:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx.$$

DIMOSTRAZIONE.

1. Sia $r \in (0, R)$. Dalla dimostrazione del teorema sul raggio di convergenza, si vede che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

converge. Quindi per $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ si ha

$$|a_n (x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n,$$

e la serie (2.1) converge totalmente.

2. Poiché le funzioni

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$$

sono continue in \mathbb{R} , per il punto 1 e il Teorema 7.1 si ha che la somma della serie di potenze è una funzione f continua in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r < R$ e perciò è continua in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

3. Consideriamo la serie delle derivate:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

(si noti che ora la somma parte da 1 perché la derivata del termine costante a_0 è zero). Calcoliamo il raggio di convergenza della serie derivata, supponendo che quello della serie di partenza sia¹²

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Per la serie derivata, dobbiamo quindi calcolare il limite di

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \sim R^{\frac{n+1}{n}} \rightarrow R$$

Dunque, la serie derivata è un'altra serie di potenze avente lo stesso raggio di convergenza di quella di partenza. In particolare, sarà totalmente convergente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r < R$, perciò la somma della serie di potenze è una funzione derivabile e si può derivare termine a termine la serie, in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$ (per $r < R$) e quindi in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

4. Il punto precedente può essere ora applicato alla somma della serie derivata e il processo si può iterare indefinitamente, da cui l'asserto.

5. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} (x - x_0)^n + c$$

e ragioniamo come nella dimostrazione del punto 3: ne deduciamo che questa ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza e, ancora per il punto 3, è derivabile termine a termine; d'altro canto, la sua serie derivata è la serie di partenza, perciò questa serie ne è la primitiva.

6. Per il punto 1, la serie di partenza converge totalmente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r < R$. Allora, per il Teorema 7.3, la serie è integrabile termine a termine in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per qualche $r < R$, ossia in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Esempio

I prossimi esempi mostrano come la possibilità di integrare e derivare termine a termine le serie sia uno strumento potente che permette talvolta di calcolare la somma di una serie o di sviluppare in serie una funzione data.

¹²In questa dimostrazione supporremo che sia possibile calcolare il raggio di convergenza mediante il criterio della radice. La nostra conclusione vale comunque in generale.

Vogliamo sviluppare in serie di potenze la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Naturalmente potremmo calcolare le derivate della funzione in 0 e scriverne la serie di Taylor, ma possiamo anche procedere in altro modo. Sfruttiamo il fatto che $f'(x) = 1/(1+x^2)$ e questa funzione si può sviluppare in serie di potenze utilizzando la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad \text{con } t = -x^2.$$

Si trova:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

convergente per $|x| < 1$. Integrando termine a termine in $[0, x]$, si trova:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Con lo stesso metodo possiamo ottenere lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$. Utilizzando la serie geometrica, scriviamo, per $|t| < 1$,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

e integrando termine a termine in $[0, x]$ si ha, per $|x| < 1$,

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Le proprietà appena viste delle serie di potenze rivelano la forza e il limite, al tempo stesso, di questo strumento di approssimazione. La forza sta nella facilità d'uso: una serie di potenze si può derivare e antiderivare termine a termine "finché si vuole" e l'intervallo di convergenza non cambia in queste operazioni. La limitazione sta nel fatto che questo strumento è adatto solo ad approssimare funzioni estremamente regolari: per quanto detto, se volessimo approssimare una funzione discontinua, o continua ma non derivabile, per esempio, non potremmo mai sperare di scriverla come somma di una serie di potenze, perché queste serie rappresentano solo funzioni infinitamente derivabili.

Ecco il motivo per cui in matematica si studiano anche altri tipi di serie di funzioni, sempre costruite a partire da funzioni elementari molto regolari, ma tali da poter avere come somma anche funzioni meno regolari: queste serie avranno però la proprietà di convergere "meno facilmente" delle serie di potenze. Avremo quindi una teoria più flessibile, quanto alle applicazioni, che pagheremo con una maggior difficoltà nell'indagare la convergenza di tali serie; tale è, per esempio, la teoria delle serie di Fourier.

Comportamento di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza
 Terminiamo questa discussione sui concetti di base delle serie di potenze discutendo il problema della convergenza negli estremi dell'intervallo.

Esempio

(1) La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ha raggio di convergenza $R = 1$. Osserviamo che per $x = 1$ la serie diverge; per $x = -1$ è irregolare. In entrambi i casi, non converge.

(ii) La serie di Taylor della funzione $\log(1+x)$ è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

(v. Esempio 2.3) e, vista come serie di potenze, ha raggio $R = 1$. Osserviamo che per $x = 1$ la serie converge (criterio di Leibniz per le serie a segni alterni), mentre per $x = -1$ la serie diverge (serie armonica).

Come si vede, agli estremi dell'intervallo la serie può convergere, divergere, oscillare. Nel caso converga, ci si può chiedere che relazione ci sia tra la somma di quella serie nell'estremo dell'intervallo e all'interno. Per esempio, per la serie di Taylor di $\log(1+x)$ ciò significa chiedersi se vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$$

(che si ottiene per $x = 1$, estremo dell'intervallo di convergenza). Risponde a questa domanda il prossimo teorema, che non dimostriamo:

TEOREMA 7.7 (DI ABEL) *Sia $R \in (0, \infty)$ il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e supponiamo che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \text{ converga.}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right).$$

Analogamente, se converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n,$$

allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \rightarrow (-R)^+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right).$$

Esempio

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\log(1+x)) = \log 2.$

(ii) Nell'Esempio 2.2 abbiamo calcolato lo sviluppo

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ per } |x| < 1.$$

D'altro canto, l'ultima serie converge anche per $x = 1$ (criterio di Leibniz), quindi, in base al teorema di Abel, possiamo calcolare:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg x = \frac{\pi}{4},$$

risultato interessante perché fornisce una rappresentazione di π come serie a segni alterni¹³:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

2.2 Serie di Taylor e serie di potenze

Vogliamo ora confrontare la nozione di *serie di Taylor*, introdotta nello studio del calcolo differenziale per funzioni di una variabile¹⁴, con quella di *serie di potenze*, introdotta in questo paragrafo.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile infinite volte in $x = 0$, possiamo scrivere il suo sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x),$$

per ogni x in un intorno I di 0, con

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

per un opportuno punto $c \in (0, x)$, dipendente da x e da n . Se si riesce a dimostrare che, per ogni $x \in I$, $E_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora f si può rappresentare in *serie di MacLaurin*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \forall x \in I,$$

¹³Ricordiamo che una serie a segni alterni consente di controllare la somma della serie tra due somme parziali successive. Per esempio:

$$4 \sum_{k=0}^{99999} \frac{(-1)^k}{2k+1} < \pi < 4 \sum_{k=0}^{100000} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

cioè

$$3,14158 < \pi < 3,14160.$$

¹⁴y, volume 1, capitolo 5, paragrafo 2.

In tal caso diciamo che f è sviluppabile in serie di MacLaurin. In particolare, f si può vedere come somma di una serie di potenze, da cui si deduce anche che l'intervallo I è necessariamente del tipo $(-R, R)$ (eventualmente comprendendo anche uno o due estremi).

Si noti che la verifica della condizione $E_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ richiede qualche informazione sul comportamento delle derivate di f in un intorno di $x = 0$ e non solo in quel punto. Come vedremo con alcuni esempi, dalla sola conoscenza delle derivate di f nel punto si può concludere poco, in generale.

Rovesciamo ora, in un certo senso, il discorso. Consideriamo una serie di potenze

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

e supponiamo che abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora, nell'intervallo $(-R, R)$, la somma della serie è una funzione $f(x)$ infinitamente derivabile. Chiediamoci: questa funzione f è sviluppabile in serie di MacLaurin? La risposta è: sì e la sua serie di MacLaurin è la (2.2) stessa. In altre parole, se poniamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \forall x \in (-R, R)$$

e calcoliamo le derivate di f nell'origine, troviamo:

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

perciò

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Questi ragionamenti mostrano che la classe delle funzioni sviluppabili in serie di MacLaurin coincide con la classe delle serie di potenze di centro nell'origine, aventi raggio di convergenza positiva.

Le due nozioni di serie di potenze e serie di MacLaurin rappresentano dunque due punti di vista diversi sullo stesso oggetto: dal primo punto di vista, si parte da una funzione $f(x)$, assegnata in qualche forma analitica, e se ne calcola la serie di MacLaurin; dal secondo punto di vista, si parte dalla serie di potenze e la si riconosce come serie di MacLaurin di una certa funzione.

In modo del tutto analogo, le funzioni sviluppabili in serie di Taylor di centro x_0 per x in un intorno di x_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

sono tutte e sole le serie di potenze centrate in x_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Queste funzioni si dicono anche analitiche. Più precisamente:

DEFINIZIONE 7.4 Una funzione si dice *analitica* in un intervallo (a, b) se per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di potenze (ovvero in serie di Taylor) di centro x_0 , con raggio di convergenza positivo.

■

Le funzioni trascendenti elementari

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{Sh} x, \operatorname{Ch} x$$

sono esempi di funzioni analitiche in tutto \mathbb{R} ; le funzioni

$$\log(1+x), (1+x)^\alpha$$

sono invece analitiche¹⁵ in $(-1, +\infty)$.

Ricordiamo ancora una volta i loro sviluppi in $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{per } |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{per } |x| < 1$$

$$\operatorname{con} \left(\frac{\alpha}{n} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Funzioni C^∞ , ma non analitiche

Non tutte le funzioni derivabili infinite volte in un punto sono analitiche in un intorno di quel punto.

Infatti, ragionando, per fissare le idee, nell'origine, una volta calcolate le derivate $f^{(k)}(0)$ per ogni $k \geq 0$, possiamo sempre scrivere formalmente la serie di MacLaurin

¹⁵ Ricordiamo che, in base alla definizione, questo significa che per ogni $x_0 \in (-1, +\infty)$ la funzione è sviluppabile in serie di potenze di centro x_0 a raggio positivo; naturalmente non esiste una singola serie di potenze che converga in tutto $(-1, +\infty)$. Infatti, l'insieme di convergenza di una serie di potenze può essere un segmento o l'intera retta, ma non una semiretta.

di f ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ma:

(1) non è detto che questa serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo;

(2) non è detto che, se questa serie ha raggio di convergenza positivo, la sua somma coincida con f .

Esempio

 Una funzione f la cui serie di Taylor non converge a f . Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Il lettore è invitato a verificare che f è infinitamente derivabile in tutto \mathbb{R} e

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{per ogni } k.$$

Dunque, la serie di MacLaurin di f è la serie identicamente nulla, che ovviamente converge, ma non rappresenta f . La funzione f è quindi infinitamente derivabile in tutto \mathbb{R} , ma non è analitica in nessun intorno dell'origine. Questo mostra (2).

OSSERVAZIONE L'esistenza di esempi come il precedente mostra che il solo fatto di saper calcolare tutte le derivate di una funzione in un punto e di ottenere una serie di Taylor con raggio di convergenza positivo ancora non garantisce che la serie di Taylor rappresenti la funzione di partenza. Per garantire questo fatto, occorre qualche informazione sulle derivate della funzione in un intorno del punto stesso, come già osservato.

Esempio

 Una funzione f la cui serie di Taylor non converge. Sia

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt.$$

La funzione¹⁶ g è definita come integrale generalizzato dipendente dal parametro x . Si vede subito che per ogni $x \geq 0$ l'integrale generalizzato converge, perciò risulta ben definita $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che

$$g(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

¹⁶ chiamata talvolta funzione di Stieltjes.

Si può dimostrare che g è infinitamente derivabile sotto il segno di integrale, perciò:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -t \frac{e^{-t}}{(1+tx)^2} dt; \quad g'(0) = \int_0^{+\infty} -te^{-t} dt = -1;$$

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} 2t^2 \frac{e^{-t}}{(1+tx)^3} dt; \quad g''(0) = 2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2 \cdot 2;$$

$$g'''(x) = \int_0^{+\infty} -3 \cdot 2t^3 \frac{e^{-t}}{(1+tx)^4} dt; \quad g'''(0) = -3 \cdot 2 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = -3! \cdot 3!$$

e in generale

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k (k!)^2,$$

per cui la serie di MacLaurin di g è

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! x^k,$$

che ha raggio di convergenza nullo. Notiamo che la funzione g è definita solo per $x \geq 0$, perciò le sue derivate in zero sono in realtà derivate destre e non possiamo dire che g sia C^∞ in un intorno dell'origine. Se però ora definiamo

$$f(x) = g(x^2),$$

otteniamo una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, la cui serie di MacLaurin è

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! x^{2k},$$

che ha ancora raggio di convergenza nullo. Di nuovo, troviamo una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ che non è analitica in nessun intorno dell'origine, questa volta perché la serie di MacLaurin non converge (mentre nell'esempio precedente, converge a una funzione diversa da f). Questo esempio illustra la situazione (1).

Per quanto questo esempio possa apparire artificioso, funzioni come g appaiono naturalmente in diversi problemi fisici (per esempio di meccanica quantistica), in cui una certa grandezza è espressa da un integrale dipendente da un parametro, che converge solo per valori del parametro maggiori o uguali a una certa soglia.

Esercizi

Provare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n$$

converge totalmente in \mathbb{R} . Qual è la sua somma? Suggerimento: dimostrare che $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{x}{2}$.

Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{2^n}$$

rappresenta una funzione continua su tutto \mathbb{R} . La serie si può derivare termine a termine?

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

- a) Determinare l'insieme I dei punti in cui converge puntualmente.
- b) Stabilire se la serie converge totalmente in I oppure, in caso contrario, stabilire in quali intervalli contenuti in I la serie converge totalmente.
- c) Stabilire se la somma $f(x)$ della serie è una funzione continua in I oppure in quale sottointervallo è continua.
- d) Lo stesso per la derivabilità di f .

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 2^n}{3^n + (-1)^n 2^n} x^{2n}. \end{aligned}$$

Per ciascuna delle serie precedenti per cui il raggio di convergenza è positivo e finito, si controlli il comportamento della serie negli estremi dell'intervalle di convergenza, stabilendo se essa converge, diverge o oscilla.

Esempio

Dimostrare le seguenti identità, valide per $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= \frac{x + x^2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Suggerimento: per cominciare, derivare termine a termine la serie geometrica (come già visto nell'Esempio 1.1); per provare la seconda identità occorre anche utilizzare la prima. Da questo esercizio dovrebbe risultare chiaro come, con un procedimento iterativo e molta pazienza, si può calcolare la somma di $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ per qualsiasi intero positivo k .

Ricavare lo sviluppo in serie di potenze della funzione *seno integrale*, definita da:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Suggerimento: dalla serie di potenze di $\sin t$ scrivere quella dell'integrandi, quindi integrare termine a termine.

Sfruttando la serie di MacLaurin della funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

si scriva lo sviluppo in serie di

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{per } |x| < 1.$$

Integrando poi termine a termine questa serie di potenze in $[0, x]$ per $|x| < 1$, si ottenga lo sviluppo di MacLaurin della funzione $h(x) = \arcsin x$.

Valutando infine la serie di $\arcsin x$ in $x = 1/\sqrt{2}$, si ricavi uno sviluppo in serie del numero π .

 Sfruttando opportunamente le serie di MacLaurin delle funzioni trascendenti elementari, si calcoli la somma delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{(2n+1)!}$$

3 SERIE TRIGONOMETRICHE E SERIE DI FOURIER

3.1 Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π (in breve: 2π -periodiche); le funzioni $\sin 3x$, $\cos 3x$ sono invece $\frac{2\pi}{3}$ -periodiche; in generale $\sin nx$, $\cos nx$ sono funzioni $\frac{2\pi}{n}$ -periodiche. Una combinazione lineare di alcune di queste funzioni, per esempio

$$2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x - 4 \cos 7x,$$

è ancora (almeno) 2π -periodica.

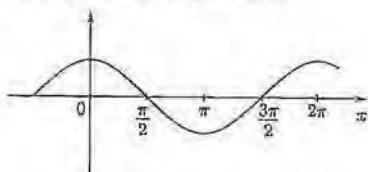


Figura 7.1. $x \mapsto \cos x$.

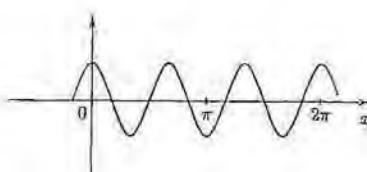


Figura 7.2. $x \mapsto \cos 3x$.

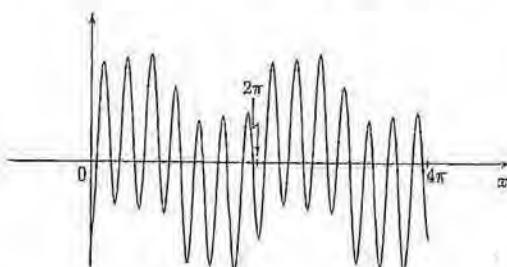


Figura 7.3. $x \mapsto 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x - 4 \cos 7x$.

Anche il grafico di figura 7.4 è quello di una funzione 2π -periodica. Nessuno si aspetterebbe però che anch'essa risulti dalla sovrapposizione di funzioni del tipo $\sin nx$ e $\cos nx$. Proprio questa invece fu la straordinaria intuizione di Fourier: che "ogni

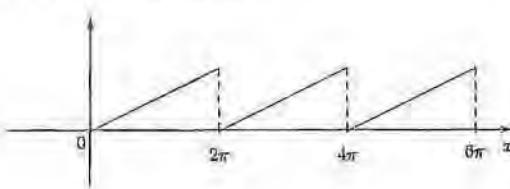


Figura 7.4.

funzione" 2π -periodica potesse essere rappresentata da una somma, eventualmente infinita, di funzioni periodiche elementari del tipo

$$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

più eventualmente la funzione costante. Precisiamo il discorso.

DEFINIZIONE 7.5 Si dice *polinomio trigonometrico di ordine n* una funzione del tipo:

$$(3.1) \quad P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dove a_k, b_k sono numeri reali o complessi, assegnati.

Si dice *serie trigonometrica* l'analogia espressione dove la somma finita sia sostituita da una serie:

$$(3.2) \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Queste serie risultano di grandissima utilità in svariate applicazioni, tra cui l'elaborazione o la compressione di segnali periodici di vario tipo, o di immagini, e la risoluzione esplicita di equazioni alle derivate parziali in domini spaziali di geometria piuttosto semplice.

Sono polinomi trigonometrici, per esempio:

$$P_3(x) = 2 + \cos x - 2 \cos 3x + \sqrt{2} \sin 2x, \quad P_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{ecc.}$$

Sono serie trigonometriche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos kx}{k^2+1} + (-1)^k \frac{\sin kx}{k!} \right\} \quad \text{ecc.}$$

La definizione data di serie trigonometrica è puramente formale: come per ogni serie di funzioni, non è detto che converga né, in caso affermativo, che la sua somma sia una funzione con buone proprietà (paragonabili a quelle dei polinomi trigonometrici, che sono infinitamente derivabili). L'unica cosa per ora ovvia è che, se una serie trigonometrica (3.2) converge, la sua somma è una funzione periodica di periodo 2π .

Convergenza delle serie trigonometriche

Consideriamo una serie trigonometrica (3.2). Se i coefficienti a_k, b_k non tendono a zero, certamente la serie non converge. Se tendono a zero abbastanza velocemente, in modo che le serie $\sum |a_k|, \sum |b_k|$ convergano, per il Teorema 7.1 la serie (3.2) converge totalmente in \mathbb{R} , a una funzione continua; infatti:

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|.$$

Quando questa condizione non è verificata, perché a_k e b_k tendono a zero troppo lentamente, per studiare la convergenza della serie può essere utile il seguente criterio, che dimostreremo nei Complementi:

PROPOSIZIONE 7.1 *Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali positivi che tende monotonicamente a zero. Allora:*

(a) *Le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in (0, 2\pi)$. Negli estremi 0, 2π la serie di coseni può convergere o no, mentre la serie di seni è identicamente nulla.

(b) *Le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \pi$. In $x = \pi$ la serie di coseni può convergere o no, mentre la serie di seni è identicamente nulla.

Si noti che, anche in caso di convergenza, non è garantito che la somma della serie sia una funzione continua.

Esempio

 Le serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \quad \text{ecc.}$$

convergono per ogni $x \in (0, 2\pi)$, in base alla proposizione. Si noti che non sarebbe possibile dimostrarne la convergenza in base al criterio della convergenza totale, perché le serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n, \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergono.

Osserviamo che cosa accade in $x = 0$: le serie di seni sono identicamente nulle; le serie di coseni in questo caso divergono. Analogamente le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \quad \text{ecc.}$$

convergono per $x \in [0, 2\pi], x \neq \pi$. In $x = \pi$ la serie di seni è identicamente nulla, quella di coseni diverge.

Derivazione di una serie trigonometrica

Osserviamo ora che la serie delle derivate della (3.2) è:

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \{-ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)\},$$

che è ancora una serie trigonometrica, avente coefficienti

$$\begin{cases} a'_k = kb_k \\ b'_k = -ka_k \end{cases}$$

Si vede subito che questa serie converge più difficilmente di quella di partenza: i suoi coefficienti sono più grandi in valore assoluto. In generale, ci aspettiamo che la serie (3.2) possa convergere, ma non essere derivabile termine a termine; lo sarà, per esempio, se i suoi coefficienti tendono a zero così rapidamente che anche $\sum |ka_k|, \sum |kb_k|$ convergono.

Da queste poche considerazioni ci possiamo aspettare che una serie trigonometrica convergente possa rappresentare funzioni regolari, oppure funzioni continue ma non derivabili, o anche funzioni discontinue. Le serie trigonometriche si presentano quindi come uno strumento più adatto delle serie di potenze a rappresentare funzioni anche non regolari. L'altra faccia della medaglia è che in generale sarà più delicato garantire la convergenza e la possibilità di operare su di esse, per esempio, derivando termine a termine.

Osserviamo ora i grafici delle somme parziali di alcune serie trigonometriche con diversa rapidità di convergenza, per esemplificare le proprietà appena stabilite. Si noti che, più lenta è la convergenza, più "tremolante" è il grafico; il che suggerisce che la serie delle derivate non converge.

ESERCIZIO

RISOLUZIONE

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$$

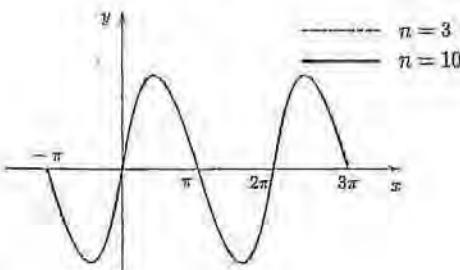


Figura 7.5. Grafico delle somme parziali per $n = 3, n = 10$.

Il termine generale va a zero rapidamente; sia la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ che la serie delle derivate convergono totalmente (in particolare, la serie si può derivare termine a termine); la somma parziale per $n = 10$ rappresenta una funzione molto "liscia" ed è quasi indistinguibile da quella per $n = 3$.



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

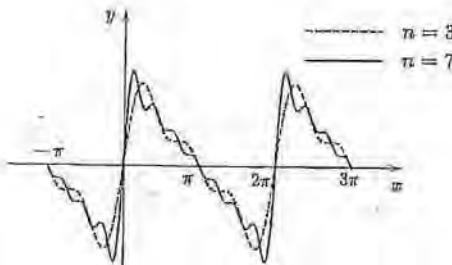


Figura 7.6. Grafico delle somme parziali per $n = 3, n = 7$.

Il termine generale tende a zero lentamente, la serie converge (per la proposizione 7.1, perché $1/k$ è positivo, decrescente e tende a zero) ma non totalmente; la somma potrebbe essere una funzione discontinua (vedremo in seguito che è proprio così); la serie delle derivate, poi, diverge.

Nel seguito di questo capitolo ci occuperemo del problema di determinare una serie trigonometrica che converga, in un senso opportuno, a una *assegnata* funzione. Questo significa poter approssimare la funzione con un polinomio trigonometrico (somma parziale della serie). Per capire come si individua un polinomio trigonometrico candidato naturale ad approssimare una funzione assegnata e per dimostrare che le cose vanno effettivamente così, si rivela molto utile un punto di vista geometrico, che sfrutta la geometria degli spazi vettoriali con prodotto scalare e in particolare l'idea di ortogonalità. A questo argomento dedichiamo quindi ora una breve parentesi, prima di entrare nel cuore del problema.

3.2 Richiami sugli spazi vettoriali con prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale reale, di dimensione finita o infinita. Diciamo che V è dotato di un *prodotto scalare*, o *prodotto interno*, se esiste un'operazione che associa a ogni coppia di vettori $u, v \in V$ un numero reale, indicato col simbolo $\langle u, v \rangle$, che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= \langle v, v \rangle \\ \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda u, v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \\ \langle u, u \rangle &\geq 0 \text{ e } \langle u, u \rangle = 0 \text{ se e solo se } u = 0.\end{aligned}$$

Se poniamo, per ogni $u \in V$,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

si dimostra che $\|\cdot\|$ risulta essere una norma, cioè soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\|u\| &\geq 0 \text{ e } \|u\| = 0 \text{ se e solo se } u = 0; \\ \|\lambda u\| &= |\lambda| \|u\|; \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|\end{aligned}$$

per ogni $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio

 Negli spazi \mathbb{R}^n il prodotto scalare usuale è definito da

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{se } u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

e la norma che esso induce è il modulo del vettore:

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = |u|.$$

 Nello spazio $C[0, 2\pi]$, se definiamo

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt,$$

si verifica che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare, che induce la norma:

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

In uno spazio vettoriale con prodotto interno, diciamo che due vettori sono *ortogonali* quando il loro prodotto scalare è nullo. In simboli:

$$u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0.$$

Vale il

TEOREMA 7.8 (di PITAGORA) Se $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ sono a due a due ortogonali, allora

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di norma e bilinearità del prodotto scalare:

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n u_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle u_i, u_j \rangle$$

poiché i vettori sono ortogonali a due a due, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ per $i \neq j$, quindi:

$$= \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2.$$



Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 7.2 Se V_0 è un sottospazio di dimensione finita di V , V_0 possiede sempre una base ortonormale, cioè una base

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

tale che i vettori e_i siano a due a due ortogonali e ciascuno di norma unitaria. Sinteticamente, si scrive¹⁷:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

L'esistenza di una base ortonormale in un sottospazio di dimensione finita si può dimostrare mediante il classico *metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*. Nel caso che ci interesserà nel seguito, tuttavia, sapremo esibire esplicitamente tale base, senza bisogno di ricorrere ad argomenti astratti. Perciò non dimostriamo questa proposizione.

Supponiamo ora di avere un sottospazio V_0 finito dimensionale di V , un elemento $u \in V$ e di voler trovare l'elemento $u_0 \in V_0$ che meglio approssima u (nella distanza della norma di V). Geometricamente, è evidente che tale elemento u_0 sarà la proiezione ortogonale di u su V_0 . Questo fatto può essere enunciato con precisione e dimostrato facilmente:

TEOREMA 7.9 (DELLA PROIEZIONE) Nelle ipotesi precedenti, detta $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V_0 , la proiezione di u su V_0 è il vettore

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

e ha le seguenti proprietà:

- (i) $u - u_0$ è ortogonale a ogni elemento di V_0 ;
- (ii) $\|u_0\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$;
- (iii) u_0 è l'elemento di V_0 che rende minima la quantità $\|u - v\|$ al variare di v in V_0 .

DIMOSTRAZIONE. (i) Proviamo che $u_0 \perp e_j$ per $j = 1, 2, \dots, n$. Per linearità, seguirà che u_0 è ortogonale a tutte le combinazioni lineari di e_1, e_2, \dots, e_n , cioè a tutti gli elementi di V_0 . Si ha:

$$\begin{aligned} \langle u - u_0, e_j \rangle &= \left\langle u - \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle u, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \langle u, e_j \rangle - \langle u, e_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

perché $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

¹⁷utilizzando il simbolo di Kronecker δ_{ij} , definito come sopra.

(ii) Scriviamo $u = (u - u_0) + u_0$. Per il punto (i) è $(u - u_0) \perp u_0$, perciò per il teorema di Pitagora si ha

$$\|u\|^2 = \|u - u_0\|^2 + \|u_0\|^2 \geq \|u_0\|^2.$$

D'altro canto, per l'ortonormalità dei vettori e_i e il teorema di Pitagora si ha:

$$\|u_0\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2.$$

(iii) Se $v \in V_0$, scriviamo $u - v = (u - u_0) + (u_0 - v)$. Poiché $(u_0 - v) \in V_0$, $(u - u_0) \perp (u_0 - v)$ e ancora il teorema di Pitagora dà

$$\|u - v\|^2 = \|u - u_0\|^2 + \|u_0 - v\|^2 \geq \|u - u_0\|^2$$

che mostra appunto che u_0 rende minima la distanza da u , tra tutti gli elementi di V_0 . \diamond

3.3 Coefficienti e serie di Fourier di una funzione.

Approssimazione in media quadratica

Una serie trigonometrica (3.2), se converge, ha per somma una funzione periodica di periodo 2π . Quindi le funzioni che vorremo sviluppare in serie trigonometrica saranno funzioni definite su tutto \mathbb{R} e periodiche di periodo 2π . Una funzione di questo genere è individuata ovviamente dai suoi valori in un qualunque intervallo di periodicità, cioè di ampiezza 2π . In altri termini, è sufficiente assegnare una funzione "base", f , definita per esempio in $[0, 2\pi]$, e pensare al suo prolungamento periodico, ottenuto riproducendo copie di f sugli intervalli $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, $k \neq 0$.

In alternativa, potremmo avere una funzione che originariamente è definita solo su un intervallo, per esempio $[0, 2\pi]$, e volerla approssimare mediante polinomi trigonometrici. Implicitamente, questo significa che stiamo pensando di prolungare la funzione a tutto \mathbb{R} , estendendola in modo 2π -periodico al di fuori dell'intervallo originario; la funzione che approssimeremo sarà in questo caso la funzione periodizzata.

In questo paragrafo ci porremo da questo secondo punto di vista (ricordando che, comunque, è del tutto equivalente al primo). Ci chiediamo quindi:

data una funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, sotto quali condizioni si può vedere f come somma di una serie trigonometrica e come si determinano i coefficienti a_k, b_k di tale serie?

Consideriamo lo spazio vettoriale V costituito dalle funzioni $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili¹⁸ (quindi in particolare limitate), munito del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt,$$

e della relativa norma:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

¹⁸In senso ordinario, non in senso generalizzato. (Si veda il volume 1, capitolo 6).

Ricordiamo che la norma a sua volta induce una nozione di *distanza* tra le funzioni:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Lo spazio V contiene in particolare $C[0, 2\pi]$.

Rispetto a questa struttura di spazio vettoriale con prodotto scalare, le funzioni $\cos kx, \sin kx$ risultano avere proprietà notevoli:

PROPOSIZIONE 7.3 *Le funzioni trigonometriche $\sin kx, \cos kx$ soddisfano le seguenti relazioni integrali (dette relazioni di ortogonalità), per ogni $k, h = 1, 2, 3, \dots$:*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 dx &= \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \sin hx dx &= \int_0^{2\pi} \cos kx \cos hx dx = 0 \text{ se } h \neq k \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cos hx dx &= \int_0^{2\pi} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \cos hx dx = 0. \end{aligned}$$

La verifica di queste relazioni si basa sui metodi elementari di integrazione¹⁹.

Il risultato di questa proposizione è facile da ricordare: il prodotto di due funzioni qualsiasi (diverse) tra quelle del sistema trigonometrico $\sin(kx), \cos(hx)$ ha integrale nullo su un periodo; invece, il quadrato di una di queste ha per integrale la metà della lunghezza del periodo. Fa eccezione la costante 1 (formalmente, $\cos(0x)$), che ovviamente ha integrale 2π .

Il contenuto della proposizione precedente si può parafrasare dicendo che le funzioni:

$$(3.4) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

costituiscono un *sistema ortonormale* nello spazio vettoriale V , ovvero queste funzioni sono "vettori" a due a due ortogonali, ciascuno di norma 1.

Un polinomio trigonometrico di grado $\leq n$ è una combinazione lineare dei $2n+1$ vettori (3.4) per $k = 1, 2, \dots, n$, ovvero è un generico elemento del sottospazio vettoriale V_n generato da questi $2n+1$ vettori, che costituiscono una *base ortonormale* di V_n .

È immediato a questo punto interpretare il teorema della proiezione, discusso nel paragrafo precedente nel contesto di uno spazio vettoriale astratto, in termini del problema di approssimazione che ci interessa.

Data una qualsiasi funzione $f \in V$, il polinomio trigonometrico di grado $\leq n$ che meglio approssima f , ovvero che rende minima la distanza $d(s_n, f)$ sopra definita, è la proiezione $S_n f$ di f su V_n .

¹⁹v. volume 1, capitolo 6, paragrafo 5.4.

Poiché conosciamo una base ortonormale di V_n , è facile calcolare tale proiezione ortogonale. Se indichiamo sinteticamente con e_i i vettori della base di V_n ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$), tale proiezione sarà:

$$S_n f = \sum_{i=0}^{2n} \langle f, e_i \rangle e_i$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right] = \\ (3.5) \quad &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots \\ (3.6) \quad b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \quad \text{per } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

I coefficienti a_k, b_k , definiti dalle (3.6), si dicono *coefficienti di Fourier di f*; il polinomio trigonometrico $S_n f(x)$ si dice n -esima somma di Fourier di f e la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

si dice *serie di Fourier di f*. Si scrive anche:

$$(3.7) \quad f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

per indicare che la serie trigonometrica a secondo membro è la serie di Fourier associata a f .

Il prossimo teorema raccoglie ciò che sappiamo finora su $S_n f$ in base al teorema della proiezione.

TEOREMA 7.10 *Sia $f \in V$, siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier assegnati da (3.6) e $S_n f(x)$ l' n -esima somma di Fourier di f , data da (3.5). Allora:*

1. La norma di $S_n f$ si calcola dai coefficienti di Fourier al seguente modo:

$$(3.8) \quad - \|S_n f\|^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

2. Vale la diseguaglianza di Bessel:

$$\|S_n f\|^2 \leq \|f\|^2.$$

3. La serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

converge.

4. Vale il Lemma di Riemann-Lebesgue: per $k \rightarrow \infty$

$$a_k \rightarrow 0; \quad b_k \rightarrow 0.$$

5. $S_n f$ è, tra i polinomi trigonometrici di grado $\leq n$, quello che rende minima la distanza da f , cioè la quantità $\|f - p_n\|$ (al variare di p_n in V_n).

6. Lo scarto quadratrico medio tra f e $S_n f$ si calcola al seguente modo:

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n f(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

DIMOSTRAZIONE.

1. Segue dal teorema di Pitagora, sfruttando l'ortogonalità delle funzioni trigonometriche e la loro norma:

$$\begin{aligned} \|S_n f\|^2 &= \left\| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\|^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} a_0 \right)^2 \|1\|^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 \|\cos kx\|^2 + b_k^2 \|\sin kx\|^2) = \\ &= \frac{a_0^2}{4} \cdot 2\pi + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

che è la (3.8).

2. È il punto (ii) del teorema 7.9, nella nostra situazione.
 3. Segue dai due punti precedenti, passando al limite per $n \rightarrow \infty$. (Ricordare che una serie a termini non negativi con somme parziali limitate è convergente²⁰).
 4. Segue dal punto 3, perché il termine generale di una serie convergente è infinitesimo.

²⁰v. volume 1, capitolo 5, paragrafo 1.2.

5. È il punto (iii) del teorema 7.9, nella nostra situazione.

$$\begin{aligned} 6. \quad \|f - S_n f\|^2 &= \langle f - S_n f, f - S_n f \rangle = \langle f, f \rangle - 2 \langle f, S_n f \rangle + \langle S_n f, S_n f \rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \langle f, S_n f \rangle + \|S_n f\|^2. \end{aligned}$$

Ora osserviamo che, poiché $f - S_n f$ è ortogonale a tutti gli elementi di V_n , quindi in particolare a $S_n f$:

$$0 = \langle f - S_n f, S_n f \rangle = \langle f, S_n f \rangle - \langle S_n f, S_n f \rangle$$

da cui $\langle f, S_n f \rangle = \langle S_n f, S_n f \rangle = \|S_n f\|^2$. Perciò:

$$\begin{aligned} \|f - S_n f\|^2 &= \|f\|^2 - 2 \langle f, S_n f \rangle + \|S_n f\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - 2 \|S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n f\|^2 \end{aligned}$$

che è la tesi, tenendo conto del punto 1. \diamond

Il teorema precedente descrive esaurientemente le proprietà della somma parziale $S_n f(x)$, per ogni n fissato. Ora, l'intuizione geometrica dice che, al crescere di n , la somma parziale $S_n f(x)$ della serie di Fourier approssima sempre meglio la funzione f (che viene ricostruita attraverso un numero crescente di sue componenti ortogonalì). La domanda è: questa approssimazione migliora indefinitamente, fino a potersi affermare che la serie di Fourier associata a f rappresenta f ? Ossia, per $n \rightarrow \infty$, è vero che $S_n f \rightarrow f$ in qualche senso? Notiamo che il teorema precedente non contiene questa affermazione. Vale tuttavia il seguente risultato, che non dimostreremo:

TEOREMA 7.11. (CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER IN NORMA QUADRATICA) Sia $f \in V$, siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier assegnati da (3.6) e $S_n f(x)$ l' n -esima somma di Fourier di f , data da (3.5). Allora:

1.

$$(3.9) \quad \|f - S_n f\| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Più esplicitamente, questo significa che, per $n \rightarrow \infty$,

$$(3.10) \quad \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n f(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \rightarrow 0.$$

2. Vale l'uguaglianza di Parseval:

$$(3.11) \quad \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Si osservi che l'uguaglianza di Parseval segue dalla (3.10), mentre l'uguaglianza nella (3.10) è il punto 6 del teorema 7.10; il teorema dipende quindi unicamente dalla relazione (3.9) di convergenza.

Il contenuto del teorema si può esprimere dicendo che $S_n f \rightarrow f$ in media quadratica, o anche che la funzione f è sviluppabile in serie di Fourier in media quadratica; questo significa che f si può ottenere come somma della sua serie di Fourier, pur di interpretare la convergenza della serie nel senso appena spiegato. In particolare, non è detto che $f(x)$ sia uguale per ogni x alla somma della serie: ci occuperemo nel paragrafo 3.6 del problema della convergenza puntuale.

Enunciamo anche il seguente risultato, che costituisce un passo importante della dimostrazione del teorema precedente e ha anche un significato indipendente:

TEOREMA 7.12 *Sia $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e integrabile e supponiamo che i coefficienti di Fourier di f siano tutti nulli. Allora f è identicamente nulla, tranne al più su un insieme di misura nulla²¹. Se f è anche continua, si può invece affermare che f è zero in tutti i punti.*

Per linearità, questo implica anche che se due funzioni limitate e integrabili hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora coincidono, salvo eventualmente un insieme di misura nulla; se inoltre le funzioni sono continue, coincidono in tutto $[0, 2\pi]$.

Questo risultato dice che i coefficienti di Fourier individuano univocamente la funzione di partenza, anche se ancora non sappiamo se la serie di Fourier converge o no, e in quale senso. Il teorema precedente viene citato come risultato di completezza del sistema trigonometrico; infatti, si può interpretare anche dicendo che il sistema trigonometrico è sufficiente a "catturare tutte le informazioni di una funzione". È chiaro inoltre che se la successione $S_n f$ tende a una funzione g , per esempio in media quadratica, i coefficienti di Fourier della funzione limite saranno uguali a quelli di f , con cui è costruita la successione $S_n f$. In base al teorema 7.12, questo in particolare implica che $g = f$, ossia: se la serie di Fourier di f converge, allora converge proprio a f . (Si noti che questa affermazione non è ovvia: come abbiamo visto nel paragrafo 2.2, al contrario, la serie di MacLaurin di f talvolta converge a una funzione diversa da f). Pertanto, per dimostrare il teorema 7.11 è sufficiente provare che la serie $S_n f$ converge in norma a una certa funzione $g \in V$. Questo tuttavia va al di là della strumentazione matematica in nostro possesso in questo corso, mentre diventa un risultato relativamente semplice nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue.

3.4 Esempi e osservazioni sul calcolo dei coefficienti di Fourier

Premettiamo il seguente

LEMMA 7.13 (INTEGRALI SU PERIODI EQUIVALENTI PER FUNZIONI PERIODICHE) *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ è:*

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

²¹Ricordiamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}$ ha misura nulla se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di intervalli $\{I_n\} \subset \mathbb{R}$ la cui unione contiene E e la cui lunghezza complessiva è $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$. Questa nozione è analoga a quella di insieme di misura nulla nel piano, che abbiamo definito nel contesto della teoria degli integrali doppi (v. capitolo 5, paragrafo 1.2).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima $a \in (0, T)$. Allora:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx =$$

eseguendo nel secondo integrale la sostituzione $x = T + t$

$$= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(T+t) dt =$$

poiché f è T -periodica

$$= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

per l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.

Sia ora a qualsiasi. Per un certo intero k , sarà $a \in [kT, (k+1)T)$. Eseguendo nell'integrale la sostituzione $x = t + kT$, si ha:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{a-kT}^{a-kT+T} f(t+kT) dt =$$

per la periodicità di f

$$\int_{a-kT}^{a-kT+T} f(t) dt.$$

D'altra canto $a - kT \in [0, T)$, perciò per quanto sopra dimostrato questo integrale uguaglia:

$$\int_0^T f(t) dt.$$

Il lemma implica che se f è una funzione definita su tutto \mathbb{R} e 2π -periodica, i suoi coefficienti di Fourier si possono calcolare anche mediante gli integrali:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

o su qualunque altro intervallo di ampiezza 2π . Questo fatto è utile anche in vista della prossima:

OSSERVAZIONE (COEFFICIENTI DI FOURIER DI FUNZIONI PARI O DISPARI) Supponiamo che la funzione $f(x)$ che vogliamo sviluppare in serie di Fourier sia 2π -periodica e simmetrica (pari o dispari), allora le funzioni $f(x) \cos hx$ e $f(x) \sin hx$ sono anch'esse simmetriche. Il calcolo dei coefficienti di Fourier si semplifica conseguentemente:

se f è dispari,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} a_h &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos hx dx = 0; \\ b_h &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin hx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin hx dx. \end{aligned}$$

Analogamente, se f è pari,

$$(3.13) \quad a_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos hx dx \quad b_h = 0.$$

Esempio

Esempio Calcoliamo i coefficienti di Fourier dell'onda quadra:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{per } 0 < x < \pi \\ -A & \text{per } -\pi < x < 0 \end{cases} \quad \text{prolungata periodicamente.}$$

Per definizione si ha:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \operatorname{sgn}(x) \cos kx \, dx = 0$$

(integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico);

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \operatorname{sgn}(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2A}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2A}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 2n \\ \frac{4A}{\pi(2n+1)} & \text{per } k = 2n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x).$$

A titolo d'esempio, tracciamo il grafico di f insieme a quello della somma n -esima della sua serie di Fourier, per qualche valore di n :

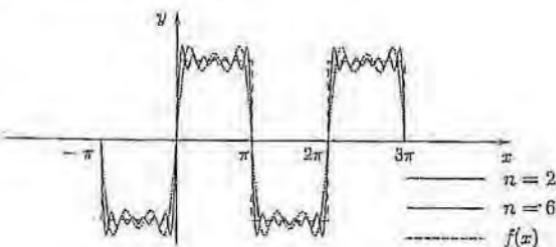


Figura 7.7. Grafico di $f(x)$ e di $s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$ per $n = 2$ e $n = 6$; qui $A = 1$.

Per evidenziare il fatto che l'approssimazione è nel senso dello scarto quadratico, osserviamo il grafico di $|f(x) - S_n(x)|^2$ per $n = 6$. Si nota che l'integrale di questa funzione (cioè E_n) è molto piccolo (fig. 7.8).

Periodi diversi da 2π

Naturalmente, l'intervallo $[0, 2\pi]$ non ha niente di speciale rispetto a qualunque altro intervallo della retta. Una funzione definita, per esempio, sull'intervallo $[0, T]$ si può periodizzare definendola su tutto \mathbb{R} come funzione periodica di periodo T . Il sistema di funzioni trigonometriche con periodo (multiplo di) T è

$$(3.14) \quad 1; \quad \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right); \quad \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

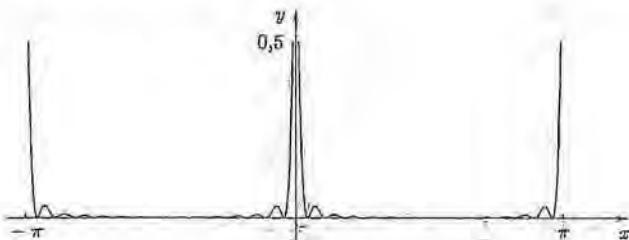


Figura 7.8.

I risultati della proposizione 7.3 rimangono veri nella forma sintetica in cui sono stati enunciati: l'integrale su $(0, T)$ di due funzioni diverse, tra le (3.14), è nullo; l'integrale su $(0, T)$ del quadrato di una di esse vale $T/2$ (tranne per la costante 1 che ha integrale T).

Le formule (3.6) per il calcolo dei coefficienti di Fourier vanno sostituite corrispondentemente da:

$$(3.15) \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega kx) dx \text{ per ogni } k \geq 0$$

$$(3.16) \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega kx) dx \text{ per ogni } k \geq 1$$

dove si è posto come di consueto $\omega = 2\pi/T$; la serie di Fourier associata a f ha ora la forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx).$$

L'uguaglianza di Parseval (3.11) assume la forma:

$$(3.17) \quad \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{T}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

Esempio

ESEMPIO Sia

$$f(x) = \text{mant}(x) = x - [x]$$

(dove $[x]$ è la parte intera). La funzione mantissa di x si può definire anche come:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in [0, 1] \\ \text{prolungata in } \mathbb{R} \text{ periodica di periodo 1.} & \end{cases}$$

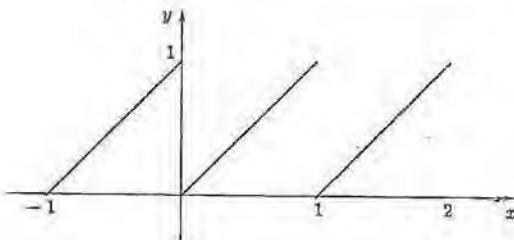


Figura 7.9.

Calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier su $[0, 1]$. Con semplici integrazioni per parti si ottiene:

$$a_h = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi h x) dx = 0 \quad \text{per } h > 0; \quad a_0 = 1$$

$$b_h = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi h x) dx = -\frac{1}{\pi h}.$$

Quindi:

$$x \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi h x}{h} \quad \text{in } [0, 1].$$

Il grafico di $f(x)$ insieme alla somma parziale della sua serie di Fourier, fino a $n = 6$, è rappresentato in figura 7.10.

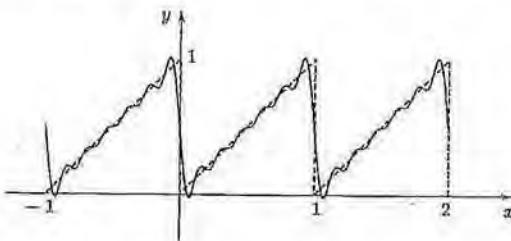


Figura 7.10.

3.5 Forma esponenziale complessa delle serie di Fourier

L'identità di Eulero

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

suggerisce che una serie di Fourier possa esprimersi in forma più compatta utilizzando gli esponenziali complessi e^{inx} , anziché le funzioni trigonometriche $\cos nx, \sin nx$. Effettivamente è così e questo può essere utile da vari punti di vista, sia teorici sia pratici.

Per capire che forma assumano le formule precedenti in questo contesto, consideriamo ora lo spazio vettoriale V^* delle funzioni $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrabili²². Per $f, g \in V^*$, definiamo

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

(dove $\overline{g(t)}$ indica il complesso coniugato di $g(t)$). Lo spazio V^* risulta uno spazio vettoriale *complejo* munito di prodotto scalare; questo, per definizione, significa che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soddisfa ora le seguenti proprietà²³, come si verifica immediatamente:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle},$$

che in particolare implica che $\langle u, u \rangle$ sia reale;

$$\begin{aligned}\langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \\ \langle \lambda u, v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

che, insieme alla prima, implica anche

$$\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{C};$$

e infine

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \text{ e } \langle u, u \rangle = 0 \text{ se e solo se } u = 0.$$

L'ultima proprietà implica in particolare che si può ancora definire una norma ponendo:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Tornando allo spazio di funzioni V^* , abbiamo:

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Consideriamo ora le funzioni esponenziali complesse e^{inx} per $n \in \mathbb{Z}$ (quindi ora n può essere anche un intero negativo). Ricordando che $\overline{(e^{inx})} = e^{-inx}$, si vede che queste soddisfano le seguenti relazioni di ortogonalità, per $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(n-m)x dx + i \int_0^{2\pi} \sin(n-m)x dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases}\end{aligned}$$

²²Ossia tali che le loro parti reale e immaginaria siano integrabili. Se $f = f_1 + if_2$ con $f_1, f_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, porremo per definizione:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f_1(t) dt + i \int_0^{2\pi} f_2(t) dt.$$

²³Queste proprietà sono leggermente diverse da quelle discusse nel paragrafo 3.3 per gli spazi vettoriali reali muniti di prodotto scalare e si riducono a quelle nel caso in cui le funzioni e gli scalari che utilizziamo siano reali.

Indicando ora con V_n^* (con $n \geq 1$) lo spazio vettoriale che ha per base ortonormale

$$\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \text{ per } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

vediamo che la proiezione di f su V_n^* è data da:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n \left\langle f, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \end{aligned}$$

avendo posto

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

La serie di Fourier di f in forma complessa è perciò

$$(3.18) \quad f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

Con le notazioni complesse abbiamo quindi un'unica successione $\widehat{f}(k)$ di coefficienti di Fourier di f , anziché due successioni a_k, b_k . Questa successione, in compenso, è indicata sugli interi relativi anziché sui soli interi positivi.

Si noti che, per definizione, la somma n -esima di una serie del tipo $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ (detta *serie bilatera*) è la somma $\sum_{k=-n}^n$, per n intero positivo.

Notiamo anche che i coefficienti di Fourier $\widehat{f}(k)$ assumeranno in generale valori complessi, anche se la funzione di partenza è reale. Confrontando la (3.18) con le (3.6) si vede subito che valgono le seguenti relazioni, che permettono di passare dai coefficienti calcolati in forma trigonometrica a quelli calcolati in forma esponenziale complessa e viceversa:

per $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$a_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$$

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

$$b_k = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$$

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_0 = 2\widehat{f}(0).$$

Per esempio, per una funzione f a valori reali e simmetrica pari, risulta $b_k = 0$ e a_k reale, per cui $\widehat{f}(k)$ sono reali; per una funzione f a valori reali e simmetrica dispari, $\widehat{f}(k)$ risulteranno immaginari puri; per una funzione reale non simmetrica, $\widehat{f}(k)$ saranno in generale complessi.

Scriviamo esplicitamente la forma che assumono con notazioni complesse le relazioni notevoli che abbiamo visto nei teoremi 7.10, 7.11:

$$\|S_n f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2 \text{ (diseguaglianza di Bessel)}$$

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \text{ (uguaglianza di Parseval)}$$

$\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \pm\infty$ (lemma di Riemann-Lebesgue).

Anche per le serie di Fourier in forma esponenziale, tutto può essere adattato a un intervallo diverso da $[0, 2\pi]$.

Riportiamo, per comodità del lettore, la forma assunta dalle precedenti relazioni per funzioni T -periodiche, ovvero definite su $[0, T]$ e periodizzate.

Sistema ortonormale adattato a $[0, T]$:

$$\frac{e^{i\omega kx}}{\sqrt{T}} \text{ per } k \in \mathbb{Z}, \text{ con } \omega = 2\pi/T.$$

Coefficienti di Fourier:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

Serie di Fourier:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{i\omega kx}.$$

Uguaglianza di Parseval:

$$\|f\|^2 = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

3.6 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Abbiamo visto che la successione $S_n f$ delle somme di Fourier di f converge a f in media quadratica, ossia in un opportuno senso integrale. È importante stabilire se la convergenza si abbia anche in senso puntuale. In questo paragrafo enunceremo un paio di risultati positivi sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Vedremo che, sotto ipotesi di sufficiente regolarità di $f(x)$, si potrà garantire che la serie di Fourier converge, e converga proprio a $f(x)$; inoltre, sotto qualche ipotesi ulteriore, sarà possibile anche derivare la serie termine a termine.

Per enunciare un primo classico risultato di convergenza puntuale delle serie di Fourier, premettiamo la seguente:

DEFINIZIONE 7.6 Si dice che $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è *regolare a tratti* se $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata in $[0, T]$ e l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è continua e derivabile; inoltre agli estremi di ciascun intervallino esistono finiti i limiti sia di $f(x)$ che di $f'(x)$. □

In particolare, le ipotesi di questo teorema ammettono che f possieda un numero finito di punti di discontinuità a salto e di punti angolosi, mentre non sono ammessi asintoti verticali né punti a tangente verticale, come cuspidi. Ne segue in particolare che:

la funzione f è integrabile, perciò i coefficienti di Fourier sono ben definiti; in ogni punto x_0 esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \equiv f(x_0^+)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \equiv f(x_0^-)$.

TEOREMA 7.14 (CONVERGENZA PUNTUALE, FUNZIONI REGOLARI A TRATTI)
 Se $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è regolare a tratti, allora la serie di Fourier converge in ogni punto $x_0 \in (0, T)$ alla media dei due limiti destro e sinistro:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(\omega k x_0) + b_k \sin(\omega k x_0)\} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

con $\omega = 2\pi/T$; nei due estremi dell'intervallo 0 e T la serie converge invece a $\frac{f(0^+) + f(T^-)}{2}$.

In particolare, in ogni punto di $(0, T)$ in cui f è continua, la serie di Fourier converge a $f(x)$; negli estremi questo è vero solo se $f(0) = f(T)$.

DIMOSTRAZIONE. Per semplificare le notazioni, supponiamo che il periodo sia $T = 1$. Inoltre, per la dimostrazione è più comodo usare la scrittura complessa della serie di Fourier. Perciò, posto

$$\hat{f}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \quad \text{per } k \in \mathbb{Z},$$

la nostra tesi è:

$$S_n f(x_0) \equiv \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} \rightarrow \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Eseguendo eventualmente una traslazione sull'asse x e una sull'asse y , possiamo ricondursi al caso in cui

$$(3.19) \quad x_0 = 0 \quad \text{e} \quad f(0^+) = -f(0^-).$$

Sotto queste ipotesi, la tesi si riscrive allora come:

$$S_n f(0) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Si ha:

$$(3.20) \quad S_n f(0) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) = \sum_{k=-n}^n \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Osservando che

$$\sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k x},$$

la (3.20) si può riscrivere come

$$S_n f(0) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k x} dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} dx \right\} =$$

eseguendo nel secondo integrale il cambio di variabile $x \mapsto -x$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k x} dx + \int_{-1/2}^{1/2} f(-x) \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k x} dx \right\} = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k x} dx = \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x) + f(-x)}{2} e^{-2\pi i k x} dx = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = S_n g(0), \end{aligned}$$

avendo posto

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Notiamo che la funzione g è anch'essa regolare a tratti, inoltre nell'origine è continua (a differenza di f) e vale zero, per la (3.19). Proveremo ora che:

$$(3.21) \quad S_n g(0) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Definiamo la funzione:

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^{2\pi i x} - 1}.$$

La funzione h è certamente regolare a tratti in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, tranne al più il punto $x = 0$, che ora studiamo. Per $x \rightarrow 0$,

$$h(x) \sim \frac{g(x)}{2\pi i x} \rightarrow \begin{cases} \frac{g'(0^+)}{2\pi i} & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ \frac{g'(0^-)}{2\pi i} & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

dove abbiamo applicato il teorema di De L'Hospital e l'ipotesi di regolarità a tratti di f (quindi di g), che assicura l'esistenza dei limiti finiti $g'(0^+)$, $g'(0^-)$. Poiché h è regolare a tratti fuori dall'origine e limitata anche in un intorno di $x = 0$, in particolare è limitata e integrabile in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (si noti che invece potrebbe non essere regolare a tratti in tutto $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Per il lemma di Riemann-Lebesgue (v. teorema 7.10) sappiamo allora che

$$(3.22) \quad \widehat{h}(k) \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \pm\infty.$$

Sfruttando questa informazione, dimostriamo ora la (3.21). Esprimiamo anzitutto i coefficienti $\widehat{g}(k)$ in termini di $\widehat{h}(k)$

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} h(x) (e^{2\pi i k x} - 1) e^{-2\pi i k x} dx = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} h(x) e^{-2\pi i (k-1)x} dx - \int_{-1/2}^{1/2} h(x) e^{-2\pi i k x} dx = \\ &= \widehat{h}(k-1) - \widehat{h}(k). \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} S_n g(0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = \sum_{k=-n}^n [\widehat{h}(k-1) - \widehat{h}(k)] = \\ &= [\widehat{h}(-n-1) - \widehat{h}(-n)] + [\widehat{h}(-n) - \widehat{h}(-n+1)] + \cdots + [\widehat{h}(n-1) - \widehat{h}(n)] = \end{aligned}$$

(si tratta di una *somma telescopica*²⁴, in cui gli addendi si cancellano due a due)

$$= \widehat{h}(-n-1) - \widehat{h}(n) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty, \text{ per (3.22).}$$

Questo conclude la dimostrazione.

Un altro criterio di convergenza puntuale, che non dimostriamo, è il seguente:

TEOREMA 7.15 (CONVERGENZA PUNTUALE, FUNZIONI MONOTONE A TRATTI)

Sia $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata in $[0, T]$ e monotona a tratti (ossia l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è crescente oppure decrescente). Allora vale la stessa conclusione del teorema precedente.

Dai due teoremi precedenti segue in particolare che:

Se f è continua e monotona in tutto $[0, T]$ oppure continua in tutto $[0, T]$ e regolare a tratti, la serie di Fourier converge puntualmente a f in ogni punto di $(0, T)$; converge anche agli estremi se vale la condizione di raccordo $f(0) = f(T)$ (che ha il significato di garantire la continuità in \mathbb{R} della funzione periodizzata).

Il risultato appena enunciato può essere raffinato in vari modi, indebolendone le ipotesi; segnaliamo tuttavia che la sola continuità di f (anche unita alla condizione di raccordo $f(0) = f(T)$) è insufficiente a garantire la convergenza puntuale della serie di Fourier in tutto l'intervallo. Segnaliamo in proposito che esistono esempi (non facili da costruire) di funzioni continue la cui serie di Fourier diverge in un punto, o anche in molti punti; ciò che si può garantire in positivo, in conseguenza di teoremi profondi di analisi armonica, è che, data una funzione f continua e periodica in \mathbb{R} , l'insieme dei punti in cui la serie di Fourier di f non converge ha misura nulla²⁵.

Derivabilità termine a termine delle serie di Fourier

Occupiamoci ora del problema di derivare termine a termine una serie di Fourier. L'importanza di poter effettuare questa operazione sarà mostrata, per esempio, nelle applicazioni alle equazioni differenziali, che discuteremo nel paragrafo 3.8. Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \{a_h \cos hx + b_h \sin hx\}$$

Abbiamo visto nel paragrafo 3.1 che, se

$$\sum_{h=1}^{\infty} h |a_h|, \quad \sum_{h=1}^{\infty} h |b_h| < \infty$$

allora sia la serie di f che la serie derivata convergono totalmente, perciò la serie si può derivare termine a termine. Questo è stato stabilito da un'analisi diretta dei coefficienti

²⁴v. volume 1, capitolo 5, paragrafo 1.1, Esempio 1.3.

²⁵Ovvero, come già ricordato, per ogni $\epsilon > 0$ tale insieme può essere ricoperto dall'unione di una successione I_n di intervalli di lunghezza complessiva minore di ϵ .

della serie. Spesso, invece, è utile poter affermare *a priori*, in base alle proprietà di regolarità di f , il fatto che la sua serie di Fourier si possa derivare termine a termine.

TEOREMA 7.16 (DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE DELLE SERIE DI FOURIER)
 Sia $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, di classe $C^1[0, T]$ e sia f' regolare a tratti (per esempio, $f \in C^2[0, T]$); inoltre, sia $f(0) = f(T)$. Allora la serie di Fourier di f si può derivare termine a termine in $(0, T)$; se inoltre è anche $f'(0) = f'(T)$, la serie di Fourier di f si può derivare termine a termine in tutto $[0, T]$.

Si noti che le condizioni di raccordo $f(0) = f(T)$ e $f'(0) = f'(T)$, unite all'ipotesi $f \in C^1[0, T]$ implicano che la periodizzata di f sia $C^1(\mathbb{R})$. Si presti attenzione a questo fatto generale:

Se una funzione f regolare in $[0, 2\pi]$ viene periodizzata a tutto \mathbb{R} , non è detto che la sua periodizzata sia regolare in \mathbb{R} .

Ciò che occorre garantire per poter affermare l'ultima cosa sono appunto le condizioni di raccordo agli estremi (su f e sulla sua derivata). Il teorema di derivabilità termine a termine richiede che la periodizzata di f (e non solo f) sia sufficientemente regolare.

Grosso modo, per derivare termine a termine la serie di Fourier di f , è necessario che f possieda due derivate e che inoltre soddisfi almeno la condizione di raccordo continuo $f(0) = f(T)$.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier alla funzione f' ; questo è lecito perché f' è regolare a tratti per ipotesi. Poiché f' è anche continua per ipotesi (perché $f \in C^1[0, T]$), la serie di Fourier di f' convergerà a $f'(x)$ per ogni $x \in (0, T)$:

$$(3.23) \quad f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos k\omega x + b'_k \sin k\omega x)$$

con $\omega = 2\pi/T$, dove abbiamo indicato con a'_k, b'_k i coefficienti di Fourier di f' . Calcoliamo ora questi coefficienti, per esprimere in funzione di quelli di f . Sfruttando la condizione di raccordo $f(T) = f(0)$, si ha:

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(x) dx = \frac{2}{T} [f(T) - f(0)] = 0 \\ a'_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(x) \cos k\omega x dx = \frac{2}{T} \left\{ [f(x) \cos k\omega x]_0^T + k\omega \int_0^T f(x) \sin k\omega x dx \right\} = \\ &= \frac{2}{T} \left\{ [f(T) - f(0)] + k\omega \int_0^T f(x) \sin k\omega x dx \right\} = k\omega b_k \\ b'_k &= (\text{con calcoli analoghi}) = -k\omega a_k. \end{aligned}$$

Perciò possiamo riscrivere lo sviluppo di f' nella forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega b_k \cos k\omega x - k\omega a_k \sin k\omega x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)' \end{aligned}$$

e questo significa appunto che la serie di Fourier di f si può derivare termine a termine in $(0, T)$. Osserviamo ora che, se vale anche l'ipotesi $f'(0) = f'(T)$, in base al teorema 7.15 (applicato a f') lo sviluppo (3.23) vale anche per $x = 0$ e $x = T$ e di conseguenza la nostra conclusione vale anche in questi punti.

Si noti, nella dimostrazione precedente, l'importanza della condizione di raccordo $f(T) = f(0)$: se questa non è soddisfatta, non può valere la derivazione termine a termine.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione e^x su $[0, 2\pi]$. Per il teorema 7.15 (o 7.14), la sua serie converge a e^x per ogni $x \in (0, 2\pi)$; per $x = 0, 2\pi$, la serie converge alla media dei valori di f nei due estremi: $\frac{1}{2}(e^{2\pi} + 1)$. Il teorema 7.16 non è applicabile perché non vale la condizione di raccordo $f(0) = f(2\pi)$.

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} a_h &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos hx \, dx. \\ \int_0^{2\pi} e^x \cos hx \, dx &= (\text{per parti}) \quad [e^x \cos hx]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x h \sin hx \, dx = \\ &= e^{2\pi} - 1 + h[e^x \sin hx]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x h \cos hx \, dx = \\ &= e^{2\pi} - 1 - h^2 \int_0^{2\pi} e^x \cos hx \, dx \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos hx \, dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + h^2} \quad \text{e quindi} \quad a_h = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + h^2}.$$

Con calcoli simili, si trova:

$$b_h = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{2\pi}}{1 + h^2}.$$

Quindi:

$$e^x \sim \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + h^2} \cos hx + \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{2\pi}}{1 + h^2} \sin hx \right).$$

Notiamo che la serie dei coseni converge totalmente, mentre la serie dei seni converge solo semplicemente; quest'ultima, poi, certamente non può essere derivata termine a termine. (Lo studente si renda conto del perché di ogni affermazione fatta).

Facciamo tracciare da un computer il grafico della somma parziale fino a $n = 5$, insieme al grafico di e^x , rappresentati in figura 7.11.

Si nota che la massima imprecisione si ha agli estremi dell'intervallo; questo è naturale perché la funzione e^x non soddisfa la condizione $f(0) = f(2\pi)$, mentre la sua serie di Fourier sì. In altre parole, la serie di Fourier non può convergere totalmente, altrimenti rappresenterebbe una funzione continua su \mathbb{R} , mentre il prolungamento periodico della funzione base uguale a e^x su $[0, 2\pi]$ è discontinua in tutti i punti $2k\pi$.

ESEMPIO Riprendiamo l'esempio 3.7: abbiamo calcolato lo sviluppo di $\text{mant}(x)$ su $[0, 1]$. Per il teorema 7.15 (o 7.14), la serie converge a $\text{mant}(x)$ per ogni $x \in (0, 1)$; per $x = 0, 1$, la serie

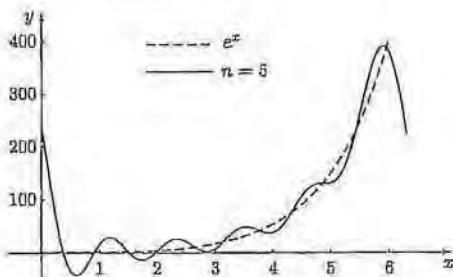


Figura 7.11.

converge alla media dei valori di f nei due estremi: $\frac{1}{2}$. Il grafico (fig. 7.10) conferma questi fatti. Di nuovo, il teorema 7.16 non è applicabile.

Esempio Studiamo la sviluppabilità in serie di Fourier di $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$.

La funzione è $C^2([-\pi, \pi])$, soddisfa la condizione $f(-\pi) = f(\pi)$, mentre non soddisfa la condizione $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Perciò: la serie di Fourier di f converge a x^2 in tutto $[-\pi, \pi]$; la serie si può derivare termine a termine in tutto $(-\pi, \pi)$.

Data la simmetria pari di f , si ha:

$$b_h = 0$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_h &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos hx \, dx = \text{(con due integrazioni per parti)} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{h^2} \cos h\pi = (-1)^h \frac{4}{h^2}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$(3.24) \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{4}{h^2} \cos hx \quad \text{per ogni } x \in [-\pi, \pi]$$

Osserviamo il grafico di x^2 su $[-\pi, \pi]$ insieme alla somma parziale per $n = 3$ della sua serie di Fourier:

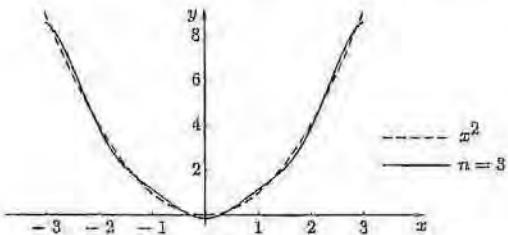


Figura 7.12.

Come si vede, già per $n = 3$ l'approssimazione è buona.

Se nella (3.24), che vale per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, sostituiamo $x = 0$, otteniamo:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{4}{h^2}$$

da cui leggiamo la somma della serie numerica:

$$(3.25) \quad \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{h^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Se invece sostituiamo $x = \pi$, otteniamo (poiché $\cos h\pi = (-1)^h$):

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{4}{h^2}$$

ossia:

$$(3.26) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Se deriviamo termine a termine la (3.24), come è lecito fare per ogni $x \in (-\pi, \pi)$, otteniamo:

$$2x = - \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{4}{h} \sin hx$$

ossia

$$(3.27) \quad x = -2 \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{h} \sin hx \quad \text{per ogni } x \in (-\pi, \pi).$$

Abbiamo quindi ottenuto lo sviluppo di Fourier di un'altra funzione. Osserviamo il grafico di $f'(x) := 2x$ insieme alla somma parziale per $n = 3$ della serie di Fourier derivata termine a termine:

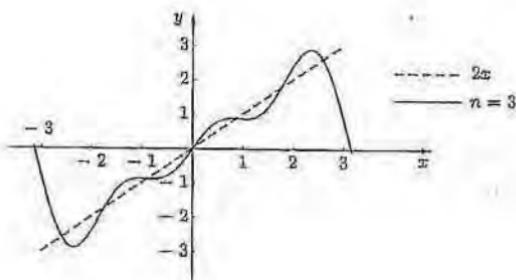


Figura 7.13.

OSSERVAZIONE Le identità (3.25)-(3.26) trovate sono un esempio significativo di serie numeriche la cui somma si riesce a calcolare in modo esatto vedendo quelle serie come serie di Fourier di funzioni note, calcolate in un punto fissato. È questo un fenomeno abbastanza tipico: le serie numeriche che si sanno sommare in modo esatto sono quasi sempre serie di funzioni calcolate in un punto particolare, come già visto a proposito delle serie di Taylor.

Velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier

Il fatto di poter derivare termine a termine una serie di Fourier ci dà informazioni sull'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.

Se f è solo integrabile, sappiamo che $a_n, b_n \rightarrow 0$ (lemma di Riemann-Lebesgue, v. teorema 7.10, punto 4).

Se f è $C^1(\mathbb{R})$ (e T -periodica), allora f' è integrabile in $[0, T]$, quindi la serie di Fourier di f' converge in media quadratica. Ma, come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 7.16,

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-kwa_k \sin kwx + kb_k w \cos kwx),$$

perciò il teorema 7.10 implica che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

e in particolare $k^2 (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow 0$, da cui si legge che

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

L'affermazione appena fatta si può raffinare: se f è continua in \mathbb{R} , T -periodica e regolare a tratti, è ancora vero che f' è integrabile in $[0, T]$ e vale ancora il passaggio di integrazione per parti necessario a mostrare che i coefficienti di Fourier di f' sono $kb_k w$ e $-kwa_k$. Di conseguenza rimane vera la nostra conclusione.

Questo ragionamento si può inoltre iterare, arrivando al seguente:

TEOREMA 7.17 Sia f una funzione T -periodica. Per un certo intero $s \geq 1$ sia $f \in C^{s-1}(\mathbb{R})$ e $f^{(s-1)}$ sia regolare a tratti in $[0, T]$. Allora

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^s}\right) \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^s}\right) \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

In sostanza: maggiore è la regolarità di f , maggiore sarà la rapidità di convergenza a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

3.7 Alcune interpretazioni fisiche

Mostriamo ora brevemente alcune applicazioni e interpretazioni fisiche dei concetti fin qui introdotti sulle serie di Fourier.

Serie di Fourier e analisi armonica di un segnale periodico

L'operazione di scomporre una funzione periodica f di periodo T in somma (finita o infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo $\cos nwt$ e $\sin nwt$ (con $\omega = 2\pi/T$) costituisce l'*analisi armonica* della funzione f : il termine

$$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

si chiama *armonica fondamentale*; il termine $a_n \cos nwt + b_n \sin nwt$ ($n = 2, 3, \dots$) si chiama *armonica n -esima*. Questa terminologia è derivata dall'acustica. Si noti che il primo coefficiente

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

è il *valore medio* di $f(t)$.

Quando un diapason, colpito, si mette a vibrare, le sue vibrazioni possono essere descritte da una funzione periodica semplice come

$$x(t) = a \cos \omega t \quad \text{oppure} \quad a \sin \omega t$$

(x/t) misura lo spostamento, al tempo t , di un corno del diapason dalla sua posizione di riposo).

Il numero positivo a misura l'*ampiezza* dell'oscillazione (spostamento massimo) e viene percepito dall'orecchio come *intensità* o *volume di suono*; $1/T = \omega/2\pi$ è la *frequenza* tipica del diapason: essa viene percepita dall'orecchio come *altezza* del suono. Il diapason ha la proprietà di emettere suoni *puri*, cioè suoni di una determinata frequenza.

In generale i suoni emessi dagli strumenti musicali (per esempio, una corda del pianoforte) non sono puri, ma risultano dalla sovrapposizione di diverse armoniche. Ciò è dovuto al fatto che una corda fissata agli estremi può oscillare in diversi modi, cioè con diverse frequenze: queste frequenze (teoricamente infinite) sono multipli di una *frequenza fondamentale* propria della corda (la corda di un *do* può vibrare, oltre che con la frequenza propria di quella nota, anche con frequenza doppia, corrispondente al *do* dell'ottava superiore, o tripla, corrispondente al *sol* dell'ottava superiore e così via). La vibrazione effettiva di un dato punto della corda risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni corrispondenti ai singoli modi: essa è perciò descritta da una somma (teoricamente infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo:

$$a_n \cos(n\omega t) \quad \text{oppure} \quad b_n \sin(n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

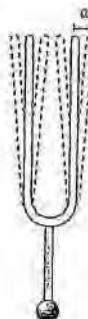


Figura 7.14.

(cioè da una serie di Fourier). Ci si può chiedere perché sia necessario sovrapporre vibrazioni fondamentali di tipo sia sinusoidale che cosinusoidale. L'identità trigono-

metrica²⁶

$$a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(\omega n t - \varphi_n)$$

con $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$

mostra che in realtà ogni armonica $a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)$ si può esprimere come una sola cosinusoide (o sinusoide), a patto però di inserire in essa una fase φ_n . L'ampiezza complessiva di questa armonica risulta quindi $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

In altre parole, possiamo anche dire: una vibrazione periodica si può vedere come sovrapposizione di vibrazioni elementari tutte di tipo cosinusoidale, che hanno frequenze multiple di una frequenza fondamentale, ampiezze diverse e sono inoltre sfasate tra loro.

La stessa terminologia (ampiezza, frequenza, armoniche...) viene utilizzata al di fuori dell'ambito acustico, nell'analisi di segnali (periodici) di vario tipo, per esempio elettromagnetici.

Il fatto che i coefficienti di Fourier tendano a zero per $n \rightarrow \infty$ (lemma di Riemann-Lebesgue) corrisponde al fatto che, in pratica (cioè dal punto di vista sia fisico che dell'approssimazione numerica), solo le prime armoniche sono rilevanti nella descrizione di un segnale periodico: quelle successive hanno ampiezza talmente piccola da essere praticamente trascurabili. Più numerose sono le armoniche presenti (in modo rilevante) in un segnale, più il segnale potrà avere una forma complicata e irregolare, per la presenza di molte armoniche di alta frequenza, che oscillano rapidamente. Viceversa, la presenza di pochi termini nello sviluppo di Fourier significa la presenza delle sole basse frequenze, perciò un segnale lentamente variabile e dalla forma "liscia".

Abbiamo anche visto che, più regolare è una funzione periodica (cioè maggiore il numero di derivate che possiede su tutto \mathbb{R}), più rapida è la convergenza a zero dei suoi coefficienti di Fourier. Per quanto detto, questo fatto significa in pratica che è minore il numero di termini effettivamente presenti nello sviluppo. Quindi:

funzione molto regolare \implies poche armoniche significative
nello sviluppo di Fourier

funzione poco regolare \implies molte armoniche di alta frequenza
nello sviluppo di Fourier.

Energia di un segnale. Interpretazione fisica dell'uguaglianza di Parseval

Supponiamo che $f(t)$ rappresenti l'ampiezza all'istante t di un segnale T -periodico nel tempo (segnale acustico, o elettromagnetico, o altro); la sua energia è allora data da:

$$E(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$$

cioè dal valore efficace di f in un periodo. Se f viene sviluppata in serie di Fourier, ogni singola armonica possiede la sua energia: precisamente, chiamiamo *energia*

²⁶v. volume 1, capitolo 2, paragrafo 3.4.

dell'armonica di ordine n (≥ 1) l'espressione:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{T} \int_0^T [a_n \cos nwt + b_n \sin nwt]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [a_n^2 (\cos nwt)^2 + b_n^2 (\sin nwt)^2 + 2a_n b_n \cos nwt \sin nwt] dt = \\ &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}. \end{aligned}$$

(per la proposizione 7.3)

Si noti che, per $n = 0$, risulta:

$$E_0 = \frac{a_0^2}{4} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right)^2.$$

L'uguaglianza di Parseval (3.17) si riscrive così:

$$E(f) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n$$

e ha dunque un'interpretazione fisica notevole: l'*energia del segnale si ottiene come somma delle energie delle singole armoniche* (compresa l'energia dell'armonica zero, che è il quadrato del valore medio).

3.8 Applicazioni alle equazioni differenziali della fisica matematica.

Metodo di separazione delle variabili

L'*equazione della corda vibrante*

Accenniamo, per cominciare, a uno dei problemi da cui storicamente è nato l'utilizzo delle serie di Fourier: lo studio dell'*equazione della corda vibrante*.

Consideriamo una corda vibrante illimitata disposta lungo l'asse x ; sia $y(t, x)$ l'altezza al tempo t del punto che, a riposo, occupa la posizione x ; questa funzione soddisfa l'*equazione a derivate parziali*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{con } a \text{ costante}).$$

All'*equazione precedente vanno accoppiate le condizioni iniziali che precisano posizione e velocità iniziali della corda*:

$$\begin{cases} y(0, x) = \varphi(x) \\ \partial_t y(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

con φ, ψ assegnate.

Nel 1749 D'Alembert mostrò che l'*equazione precedente è soddisfatta da*

$$y(t, x) = \frac{f(x+at) + g(x-at)}{2}$$

per qualsiasi coppia di funzioni f, g due volte derivabili²⁷.

²⁷Nel capitolo 4, paragrafo 5.2, abbiamo mostrato in dettaglio questo fatto, in un esempio.

Nel 1753 Daniel Bernoulli propose invece la seguente soluzione per l'equazione delle onde, questa volta per una corda fissata agli estremi, $x = \pm\pi$:

$$(3.28) \quad y(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin kx \cos akt + d_k \sin kx \sin akt).$$

Si osservi che ogni somma parziale della serie soddisfa l'equazione differenziale, per qualsiasi scelta dei coefficienti c_k, d_k :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{k=1}^n c_k \sin kx \cos akt \right) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{k=1}^n c_k \sin kx \cos akt \right) = \\ & = \sum_{k=1}^n c_k \left[\sin kx \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cos akt) - a^2 \cos akt \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sin kx) \right] = 0 \end{aligned}$$

(e analogamente per l'addendo contenente d_k). Inoltre, $y(t, \pm\pi) = 0$ (condizione che esprime il fatto che gli estremi della corda sono fissati); infine,

$$\begin{aligned} (3.29) \quad y(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx = \varphi(x) \\ \partial_t y(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k k a \sin kx = \psi(x) \end{aligned}$$

perciò i dati iniziali φ, ψ devono potersi scrivere in questo modo.

Ciascun termine della serie (3.28) ha un significato fisico: rappresenta una vibrazione stazionaria, o *modo normale* di vibrazione della corda. L'ipotesi di Bernoulli è quindi che qualsiasi vibrazione reale possa vedersi come sovrapposizione di infinite vibrazioni stazionarie. Ma questo implicherebbe che, assegnata comunque la configurazione iniziale $\varphi(x)$ della corda, si possa scrivere $\varphi(x)$ come serie di seni (3.29) (e analogamente per la ψ). A questo punto, storicamente, si aprì una lunga discussione tra i sostenitori dell'uno e dell'altro metodo di soluzione, a proposito di quale metodo fosse più generale, sotto quali ipotesi rappresentasse la soluzione e perfino su cosa si dovesse intendere per *funzione*. La prima risposta rigorosa a queste domande fu data nel 1829 da Dirichlet, che precisò un insieme di condizioni sufficienti affinché una funzione data sia sviluppabile in serie trigonometrica; contestualmente, Dirichlet diede la definizione moderna di funzione come corrispondenza univoca tra due insiemi numerici, a prescindere dalla *forma analitica* della legge che realizza questa corrispondenza. Dirichlet chiarì le ipotesi precise di un teorema che era stato anticipato (senza prova rigorosa) da Fourier, a cui si attribuisce usualmente il merito di essere stato il primo a intuire la portata generale del metodo degli sviluppi in serie trigonometrica, che da lui prese il nome.²⁸

Come si vede, c'è quindi una ragione fisica per ritenere che una funzione (ragionevole) si possa sviluppare in serie di seni; inoltre, è necessario determinare i coefficienti di questo sviluppo per poter scrivere la soluzione del problema che interessa.

²⁸ Fourier introdusse questi sviluppi in serie nello studio di un altro problema fisico-matematico: la diffusione del calore, problema a cui accenneremo più avanti in questo stesso paragrafo.

Mostriamo ora, con un po' più di dettaglio analitico, un altro paio di esempi classici di applicazioni delle serie di Fourier alla risoluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali a derivate parziali, importanti per la fisica matematica. Avremo modo così di illustrare il *metodo di separazione delle variabili* e l'utilizzo congiunto di molti strumenti e tecniche studiate in tutto il corso.

Problema di Dirichlet sul cerchio per l'equazione di Laplace

Consideriamo il seguente problema: determinare una funzione $u(x, y)$ che risolve:

$$(3.30) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = f(x, y) & \text{per } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

In altre parole, vogliamo determinare una funzione u che soddisfa l'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ all'interno del cerchio unitario e sul bordo del cerchio assuma il dato f assegnato. Si tratta di un problema che può avere vari significati fisici, come la determinazione della configurazione a riposo di una membrana elastica circolare fissata al bordo a una certa sagoma, o la determinazione della temperatura stazionaria di una lastra circolare isolata, nota la temperatura sul bordo.

Riscriviamo anzitutto il problema in coordinate polari. Si tratta allora di cercare una funzione $u(\rho, \theta)$ che risolve la seguente equazione²⁹ e condizione al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 & \text{per } \rho \in [0, 1); \theta \in [0, 2\pi) \\ u(1, \theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di separazione delle variabili, che consiste nel cercare soluzioni a variabili separate, del tipo

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta).$$

Sostituendo questa funzione nell'equazione differenziale, abbiamo:

$$R''(\rho)T(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)T''(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)T(\theta) = 0,$$

che riscriviamo nella forma:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)},$$

Ora, poiché il primo membro è una funzione della sola ρ e il secondo è funzione della sola θ , l'unica possibilità è che ciascuno dei due membri sia costante. Poniamo perciò, per una certa costante λ ,

$$\begin{cases} -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \lambda \\ \rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = \lambda \end{cases}$$

²⁹Nel capitolo 4, paragrafo 5.2, abbiamo infatti mostrato come si scrive l'operatore di Laplace in coordinate polari.

ossia

$$\begin{cases} -T''(\theta) = \lambda T(\theta) \\ \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = \lambda R(\rho). \end{cases}$$

La prima è un'equazione differenziale lineare del second'ordine a coefficienti costanti, che quindi può avere soluzioni trigonometriche o esponenziali. Dovendo essere però $T(\theta)$ una funzione 2π -periodica, l'unica possibilità è che abbia soluzioni trigonometriche del tipo

$$T(\theta) = a \cos k\theta + b \sin k\theta,$$

il che significa che $\lambda = k^2$ per qualche intero $k = 0, 1, 2, \dots$. Sostituendo questo valore nell'equazione per R , abbiamo:

$$(3.31) \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = k^2 R(\rho) \quad \text{per } \rho \in [0, 1].$$

Questa è un'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti; tuttavia, è di un tipo particolare che sappiamo risolvere. Si tratta infatti di un'*equazione di Eulero*³⁰, di cui possiamo cercare soluzioni del tipo

$$R(\rho) = \rho^\alpha,$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Sostituendo nella (3.31), si trova:

$$\begin{aligned} \rho^2 \alpha(\alpha-1) \rho^{\alpha-2} + \rho \alpha \rho^{\alpha-1} &= k^2 \rho^\alpha \\ \alpha(\alpha-1) + \alpha &= k^2 \\ \alpha &= \pm k \end{aligned}$$

che dà le due soluzioni

$$R(\rho) = \rho^k, \quad R(\rho) = \rho^{-k}, \quad \text{per } k \neq 0,$$

mentre per $k = 0$ la (3.31) ha le due soluzioni

$$R(\rho) = 1, \quad R(\rho) = \log \rho.$$

Le soluzioni $R(\rho) = \rho^{-k}$, $R(\rho) = \log \rho$ non sono accettabili perché illimitate per $\rho \rightarrow 0$. Complessivamente otteniamo perciò le seguenti soluzioni a variabili separate:

$$u_k(\rho, \theta) = \rho^k \{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\}, \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Queste sono infinite soluzioni dell'equazione differenziale nel cerchio. Notiamo che u_k non soddisfa in generale il dato al bordo. Osserviamo però che, essendo l'equazione differenziale lineare e omogenea, ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione. Per ottenere una soluzione che assuma anche il dato al bordo, si considera allora la serie infinita

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\}$$

³⁰v. capitolo 1, esercizio 42.

e si cercano coefficienti a_k, b_k per cui sia vero che $u(1, \theta) = f(\theta)$. Imponendo questa condizione, si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\} = f(\theta),$$

che mostra che i coefficienti a_k, b_k vanno scelti come coefficienti di Fourier di f . In altre parole, la soluzione del problema (3.30) è assegnata da:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\}, \text{ con}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta.$$

Tutto questo è finora piuttosto formale: per rendere rigorosi tutti i passaggi effettuati e poter quindi affermare un risultato preciso sulla soluzione del problema di Dirichlet, occorre fare opportune ipotesi di regolarità su f . Tuttavia qui ci interessava principalmente dare un'idea di questa tecnica risolutiva, perciò non ci soffermiamo su questi aspetti. Quest'osservazione vale anche per il prossimo esempio dell'equazione del calore.

Equazione del calore sul segmento

Consideriamo il problema di determinare la temperatura $u(t, x)$ di una sbarra omogenea, rappresentata dal segmento $[0, \pi]$, all'istante t e nel punto x , supponendo che la temperatura agli estremi sia costantemente tenuta uguale a zero, che la temperatura iniziale sia una funzione $u_0(x)$ nota e che non ci siano sorgenti o pozzi di calore all'interno della sbarra. Sotto queste ipotesi, u risolve il problema:

$$(3.32) \quad \begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0 & \text{per } x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

dove la costante positiva κ è un coefficiente di conducibilità (espresso in opportune unità di misura). Proprio questo è il problema che portò Fourier a studiare gli sviluppi in serie trigonometriche.

Possiamo affrontarlo mediante il metodo di separazione delle variabili, illustrato nell'esempio precedente.

Cerchiamo dunque soluzioni a variabili separate, del tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

che sostituite nell'equazione danno:

$$X(x)T'(t) - \kappa X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

per un'opportuna costante λ (si veda il ragionamento che abbiamo fatto nell'esempio precedente).

Ora, l'equazione

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{ per } x \in (0, \pi)$$

insieme alle condizioni $X(0) = X(\pi)$, necessarie per avere una soluzione u nulla agli estremi, come richiesto dal problema, implica:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin kx \text{ per } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \\ \lambda &= -k^2 \end{aligned}$$

che, sostituita nell'equazione in t , dà:

$$T'(t) = -k^2 \kappa T(t)$$

ossia

$$T(t) = c_k e^{-k^2 \kappa t}.$$

Ora cerchiamo una soluzione u che sia sovrapposizione delle infinite soluzioni a variabili separate, con coefficienti c_k da determinarsi in modo che u soddisfi anche la condizione iniziale. Si trova:

$$(3.33) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \kappa t} \sin kx$$

con

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx = u_0(x).$$

I coefficienti c_k sono dunque determinati dal fatto che devono assegnare lo sviluppo di Fourier di f in serie di soli seni. Per chiarire quest'ultimo punto, si noti che il sistema di funzioni $\cos kx, \sin kx$ è il sistema ortogonale relativo a un intervallo di ampiezza 2π , mentre la nostra funzione è definita solo su $[0, \pi]$. Possiamo allora definirla su tutto $[-\pi, \pi]$ facendo una riflessione dispari, ossia ponendo $f(-x) = -f(x)$ per $x \in [0, \pi]$. Questo fa sì che la funzione così prolungata abbia uno sviluppo di Fourier in cui compaiono solo le funzioni $\sin kx$ (come desiderato), sviluppo che, valendo in tutto $[-\pi, \pi]$, varrà in particolare in $[0, \pi]$. Tenendo conto della formula per il calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione dispari, si ha allora:

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin kx dx,$$

che sostituiti nella (3.33) danno la soluzione cercata del problema (3.32).

Esempio

 La soluzione del problema (3.32), con $u_0(x) = x(\pi - x)$ e $\kappa = 1$, si trova calcolando i coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx dx = \text{con calcoli di routine} \\ &= \frac{4}{\pi k^3} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{8}{\pi k^3} & \text{per } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } k \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

e, quindi, sostituendoli nella formula risolutiva (3.33):

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2 t} \sin kx.$$

Un grafico della somma dei primi termini di questa serie è dato in figura 7.15.

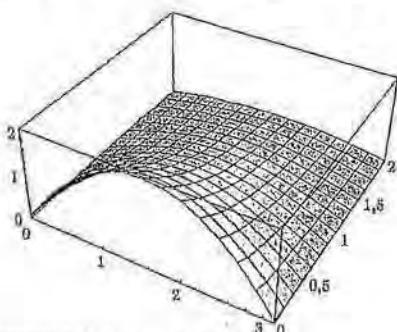


Figura 7.15. Grafico della somma dei primi termini della serie che rappresenta la soluzione del problema dell'Esempio 3.11.

Sviluppo in serie di seni o di coseni

L'ultimo esempio mostra che talvolta nelle applicazioni è utile sviluppare una funzione su un intervallo in serie di soli seni (o coseni), anche se a priori la funzione non ha le proprietà di simmetria che giustificano l'annullarsi dei coefficienti dei coseni (o seni, rispettivamente). Vogliamo ora puntualizzare in generale come si procede in casi come questo.

Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ definita a priori solo sull'intervallo $[0, T]$. Possiamo definire f su tutto $[-T, T]$ facendone una riflessione pari, cioè definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, T] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0] \end{cases}$$

e ottenendo così una funzione pari su $[-T, T]$; questa funzione può essere quindi prolungata su tutto \mathbb{R} come funzione $2T$ -periodica; i coefficienti di Fourier di \tilde{f} saranno dunque dati da:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \tilde{f}(x) \cos \omega k x dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega k x dx, \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$b_k = 0.$$

Si osservi che la funzione \tilde{f} è continua in 0 solo se $f(0) = 0$; in compenso, \tilde{f} soddisfa sempre la condizione di raccordo $\tilde{f}(T) = \tilde{f}(-T)$, proprio perché è pari.

Se la serie di Fourier di \tilde{f} converge, in particolare in $[0, T]$ rappresenterà f : ciò significa che abbiamo trovato un metodo per sviluppare una funzione definita su un intervallo $[0, T]$ in serie di soli coseni, se lo preferiamo, anziché in serie di seni e coseni.

Analogamente, la funzione f definita su $[0, T]$ potrebbe essere prolungata su tutto $[-T, T]$ effettuando una riflessione dispari:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, T] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-T, 0]. \end{cases}$$

La serie di Fourier di \tilde{f} in $[-T, T]$ avrà coefficienti:

$$a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \tilde{f}(x) \sin \omega k x dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega k x dx, \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

ossia sarà una serie di soli seni, che ristretta all'intervallo $[0, T]$ rappresenta f .

Le prossime figure illustrano il significato grafico dell'operazione di riflessione pari o dispari e successiva estensiva estensione periodica.

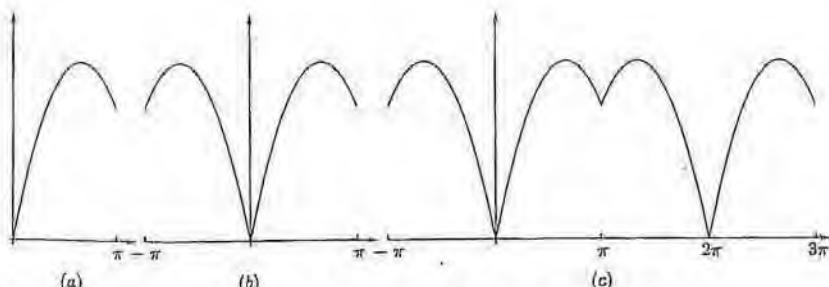


Figura 7.16. a) Funzione di partenza. b) Riflessa pari. c) Estensione 2π -periodica su \mathbb{R} .

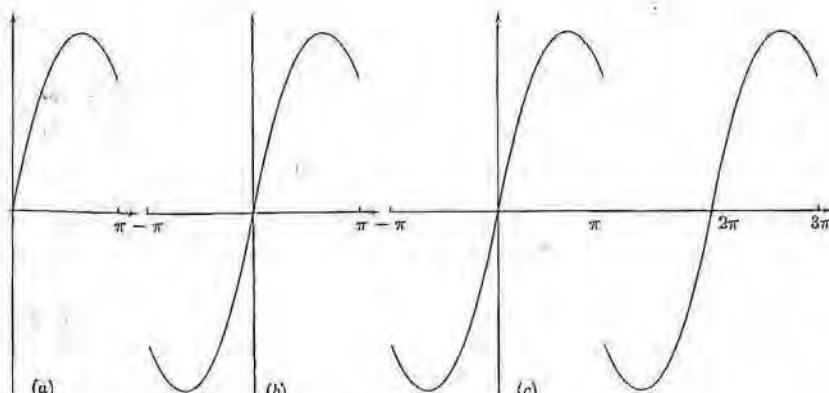


Figura 7.17. a) Funzione di partenza. b) Riflessa dispari. c) Estensione 2π -periodica su \mathbb{R} .

Esempio

ESEMPIO Abbiamo calcolato in precedenza (esempio 3.8) lo sviluppo di Fourier della funzione e^x su $[0, 2\pi]$, trovando:

$$(3.34) \quad e^x \sim \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{2\pi} - 1}{1+h^2} \cos hx + \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{2\pi}}{1+h^2} \sin hx \right\}$$

La stessa funzione potrebbe essere rappresentata in serie di soli seni o soli coseni. Per esempio, calcoliamo lo sviluppo di e^x in serie di soli seni, su $[0, 2\pi]$. Questo significa pensare di fare una riflessione dispari di e^x in $[-2\pi, 2\pi]$ e prolungare per periodicità la funzione così ottenuta. Il procedimento che abbiamo appena descritto per l'intervallo $[0, \pi]$ va adattato all'intervallo $[0, 2\pi]$. In sostanza, consideriamo $[0, 2\pi]$ come metà di $[-2\pi, 2\pi]$, che ora è pensato come periodo fondamentale; le funzioni trigonometriche adattate a questo intervallo sono:

$$\cos\left(\frac{hx}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{hx}{2}\right).$$

Avremo:

$$a_h = 0; b_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin\left(\frac{hx}{2}\right) dx = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{1 - e^{2\pi}(-1)^h}{4+h^2} \right)$$

e quindi

$$(3.35) \quad e^x \sim \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2h}{\pi} \left(\frac{1 - e^{2\pi}(-1)^h}{4+h^2} \right) \sin\left(\frac{hx}{2}\right).$$

Si confrontino (3.34) e (3.35): sono due diversi sviluppi di e^x validi su $(0, 2\pi)$. Il primo è uno sviluppo in serie di $\sin hx, \cos hx$; il secondo è uno sviluppo in serie di $\sin \frac{hx}{2}$. Rappresentiamo la funzione e^x su $(0, 2\pi)$, insieme alla somma parziale fino a $n = 10$ del suo sviluppo in serie di soli seni:

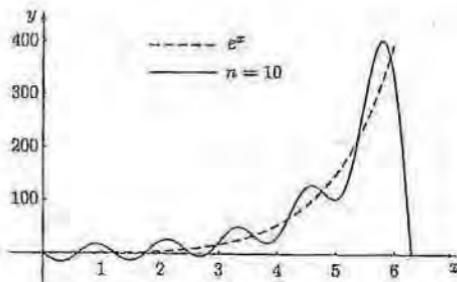


Figura 7.18.

Si confronti col grafico dello sviluppo in seni e coseni, riportato nell'esempio 3.8.

Esercizi

ESEMPIO Stabilire per ciascuna delle seguenti serie trigonometriche se non converge, converge puntualmente, converge totalmente in $[0, 2\pi]$ o in un sottointervallo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + k}{1+k^2} \cos kx.$$

Sfruttando i risultati che abbiamo esposto, dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si può affermare che la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$$

- a) converge puntualmente in $[0, 2\pi]$;
- b) rappresenta una funzione continua in \mathbb{R} ;
- c) è derivabile termine a termine.

Sfruttando le identità trigonometriche

$$(\cos x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

è possibile riscrivere sotto forma di polinomio trigonometrico qualsiasi funzione del tipo

$$(\sin x)^r (\cos x)^s, \text{ con } r, s \text{ interi } \geq 0.$$

Sfruttando questa osservazione (quindi *senza calcolare integrali!*), scrivere gli sviluppi di Fourier su $[0, 2\pi]$ delle funzioni:

- | | | | | | |
|-----|---------------------|-----|---------------------------|-----|--------------|
| (a) | $\cos^2 x \sin x$ | (b) | $(\cos x)^4$ | (c) | $(\sin x)^3$ |
| (d) | $\sin x (\cos x)^3$ | (e) | $(\sin x)^3 (\cos x)^2$. | | |

Sfruttando opportunamente lo sviluppo di Fourier (3.27), calcolare la somma della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Si consideri la funzione $f(x) = |x|$ su $[-\pi, \pi]$. In base ai risultati visti, si può affermare che la serie di Fourier di f converge a $|x|$? Calcolare quindi lo sviluppo di Fourier di $f(x)$ e verificare che effettivamente la serie converge totalmente. Infine, porre $x = 0$ nello sviluppo in serie trovato e ottenere la somma di una serie numerica notevole.

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \pi] \\ 1 & \text{in } (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

periodizzata di periodo 2π . In base ai risultati visti, dire che cosa si può affermare a priori sulla serie di Fourier di f . Calcolare poi lo sviluppo di Fourier su tale intervallo. Con l'ausilio di un computer, tracciare il grafico di $f(x)$ e delle somme parziali della sua serie di Fourier per i primi valori di n .

Sia $f(x) = x^2$ in $[0, 2\pi]$. In base ai risultati visti, che cosa si può affermare a priori sulla serie di Fourier di f su tale intervallo? Calcolare poi lo sviluppo di Fourier. Con l'ausilio di un computer, tracciare il grafico di $f(x)$ e delle somme parziali della sua serie di Fourier per i primi valori di n .

Suggerimento: si confronti con l'Esempio 3.10, notando che la funzione f nei due casi è diversa: per evidenziarla, disegnare il grafico delle funzioni che prolungano periodicamente f nei due casi.

10 Sia $f(x) = x^2(2\pi - x)^2$ in $[0, 2\pi]$. In base ai risultati visti, che cosa si può affermare a priori sulla serie di Fourier di f su tale intervallo e in particolare sulla sua derivabilità termine a termine e sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier?

11 Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \pi] \\ x - \pi & \text{in } (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

In base ai risultati visti, che cosa si può affermare a priori sulla serie di Fourier di f ? Calcolare poi lo sviluppo di Fourier su tale intervallo. Con l'ausilio di un computer, tracciare il grafico di $f(x)$ e delle somme parziali della sua serie di Fourier per i primi valori di n .

12 Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico della funzione x^4 per $x \in [-\pi, \pi]$. Dedurre la formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

13 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni sull'intervallo $[-2\pi, 4\pi]$:

- a) $f(x) = e^{-|x|}$ su $[0, 2\pi]$, prolungata 2π -periodica.
- b) $f(x) = e^{-|x|}$ su $[-\pi, \pi]$, prolungata 2π -periodica.
- c) $f(x) = e^{-|x|}$ su $[0, \pi]$, riflessa pari su $[-\pi, \pi]$ e poi prolungata 2π -periodica.
- d) $f(x) = e^{-|x|}$ su $[0, \pi]$, riflessa dispari su $[-\pi, \pi]$ e poi prolungata 2π -periodica.

14 Calcolare i coefficienti di Fourier delle seguenti funzioni e scrivere esplicitamente la corrispondente serie di Fourier, prestando attenzione a come la funzione è definita e a quale è il suo periodo:

- (a) $f(x) = x^3$ per $x \in [0, 1]$, periodizzata di periodo $T = 1$.
- (b) $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 1]$, riflessa dispari in $[-1, 0]$ e periodizzata di periodo $T = 2$.
- (c) $f(x) = x^3$ per $x \in [0, 1]$, riflessa pari in $[-1, 0]$ e periodizzata di periodo $T = 2$.

15 Dimostrare il seguente fatto, che può risultare utile nel calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione definita a tratti.

Se $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni C^1 a tratti in $[0, T]$ e continue in $[0, T]$ (quindi possono avere punti angolosi ma non punti di discontinuità), allora vale la "solita" formula di integrazione per parti:

$$\int_0^T f(x) g'(x) dx = (fg)(T) - (fg)(0) - \int_0^T f'(x) g(x) dx.$$

Suggerimento: mostrare prima che per una funzione di questo tipo vale il teorema fondamentale del calcolo integrale $\int_0^T f'(x) dx = f(T) - f(0)$, riscrivendo il primo integrale come somma di integrali sugli intervalli in cui f è C^1 e applicando a ogni addendo il teorema fondamentale del calcolo (per funzioni C^1).

Utilizzare poi il risultato precedente per calcolare i coefficienti di Fourier della funzione definita sull'intervallo $(-3, 3)$ come in figura 7.19 e periodizzata di periodo 6.

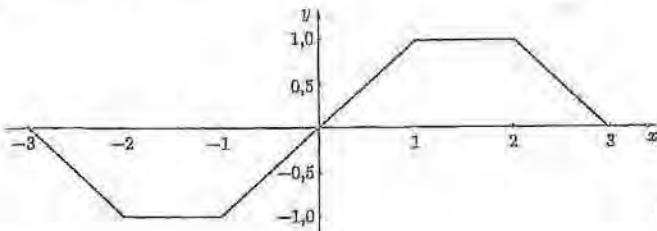


Figura 7.19.

Calcolare i coefficienti di Fourier in forma complessa e scrivere esplicitamente la corrispondente serie di Fourier, prestando attenzione a come la funzione è definita e a quale è il suo periodo.

- (a) $f(x) = x$ per $x \in [-\pi, \pi]$, periodizzata di periodo $T = 2\pi$.
- (b) $f(x) = x$ per $x \in [0, 2\pi]$, periodizzata di periodo $T = 2\pi$.
- (c) $f(x) = |x|$ per $x \in [-1, 1]$, periodizzata di periodo $T = 2$.

Calcolare i seguenti sviluppi in serie di Fourier:

- (a) $f(x) = x$ su $[0, 2\pi]$, prolungata 2π -periodica.
- (b) $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$, prolungata 2π -periodica.
- (c) $f(x) = x$ su $[0, \pi]$, in serie di soli coseni.

Scrivere lo sviluppo di $f(x) = \cos x$ in $[0, \pi]$, in serie di soli seni.

Facendo riferimento all'esempio dell'equazione del calore, illustrato nel paragrafo 3.8, si consideri la serie di funzioni:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin kx, \quad \text{per } t > 0, x \in [0, \pi].$$

Sfruttando il teorema 7.2, si provi che, se $\{c_k\}$ è una successione qualunque, purché limitata, di coefficienti reali, è possibile calcolare le derivate parziali u_t e u_{xx} , per $t > 0, x \in [0, \pi]$, derivando la serie termine a termine. Mostrare che, sotto queste ipotesi, u risolve, per $t > 0, x \in [0, \pi]$, l'*equazione del calore* $u_t - u_{xx} = 0$, con le condizioni agli estremi $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$.

Facendo riferimento all'esempio dell'equazione di Laplace nel cerchio (v. paragrafo 3.8), scrivere esplicitamente la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } \rho < 1 \\ u(1, \theta) = \cos^2 \theta & \text{per } \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Facciamo riferimento ancora all'esempio dell'equazione di Laplace nel cerchio (v. paragrafo 3.8). Le funzioni di due variabili che, in coordinate polari, si scrivono

$$\rho^k \cos k\theta, \quad \rho^k \sin k\theta, \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

si dicono armoniche elementari nel piano. Sfruttando la forma esponenziale dei numeri complessi, si verifichi che queste funzioni sono la parte reale e immaginaria di z^k , se $z = x + iy$. Si sfrutti questa relazione per scrivere le armoniche elementari come funzioni di x, y , per i primi valori di k . (Per esempio, $k = 2, 3, 4$). Si verifichi esplicitamente che queste funzioni risolvono l'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in \mathbb{R}^2 .

4 COMPLEMENTI

4.1 Il metodo di Frobenius per la soluzione delle equazioni differenziali

Illustriamo ora, su un esempio specifico che ha particolare interesse nelle applicazioni, un metodo di risoluzione per certe classi di equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti che utilizza gli sviluppi in serie di potenze e prende il nome di *metodo di Frobenius*.

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$(4.1) \quad u''(t) + \frac{u'(t)}{t} + u(t) = 0.$$

La (4.1) si dice *equazione di Bessel*³¹ ed emerge in svariati problemi di fisica matematica. Per risolverla, cerchiamo una soluzione della (4.1) che si possa scrivere come serie di potenze:

$$(4.2) \quad u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

dove i coefficienti c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sono da determinarsi.

Il procedimento consiste nel calcolare le derivate di $u(t)$ derivando termine a termine la (4.2) e quindi sostituire le serie che esprimono u, u', u'' nella (4.1). Imponendo che questa risulti soddisfatta identicamente in t , troveremo opportune condizioni sui coefficienti c_n che ci permetteranno di determinarli. Abbiamo:

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}; \quad u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}.$$

Sostituiamo nella (4.1):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

Moltiplichiamo tutto per t^2 e raggruppiamo i termini simili delle prime due serie:

$$c_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) + n] c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0.$$

Eseguiamo una traslazione di indici nella seconda serie e raggruppiamo i termini simili:

$$c_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 c_n + c_{n-2}) t^n = 0.$$

Affinché questa serie di potenze sia identicamente nulla devono annullarsi tutti i coefficienti, perciò:

$$(4.3) \quad c_1 = 0; \quad c_n = -\frac{1}{n^2} c_{n-2}.$$

Osserviamo le (4.3): c_0 è indeterminato; $c_1 = 0$; la relazione ricorsiva

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}$$

implica allora che tutti i coefficienti c_n con n dispari si annullano.

³¹dal nome di Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), matematico e astronomo tedesco.

Quelli con n pari si determinano ricorsivamente in funzione di c_0 :

$$\begin{aligned}c_2 &= -\frac{1}{2^2} c_0 \\c_4 &= \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} c_0 \\c_6 &= -\frac{1}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} c_0 \\&\dots\end{aligned}$$

Si capisce che la forma generale dei coefficienti è:

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} c_0$$

e quindi:

$$u(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k}.$$

Il fatto che la serie di potenze sia moltiplicata per un coefficiente indeterminato è naturale: l'equazione differenziale è lineare omogenea e, se u è soluzione, anche $c_0 u$ è soluzione, per ogni $c_0 \in \mathbb{R}$. La funzione

$$(4.4) \quad J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

si dice *funzione di Bessel di ordine zero* ed è un'importante *funzione speciale* della fisica matematica. Il lettore verifichi (per esempio calcolando il raggio di convergenza della (4.4) col criterio del rapporto) che la serie di potenze converge in tutto \mathbb{R} . Questa funzione soddisfa la (4.1) in tutto \mathbb{R} . Il grafico qualitativo di $J_0(t)$ è il seguente:

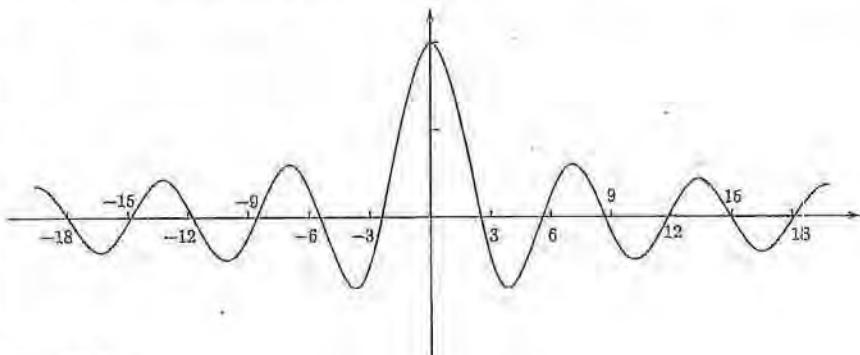


Figura 7.20.

Per ottenere l'integrale generale della (4.1) occorrerebbe determinare una seconda soluzione, indipendente dalla (4.4), ma tale seconda soluzione non ammette uno sviluppo in serie del tipo (4.2); non ce ne occuperemo.

Si rifletta sul fatto che ciò che ha reso applicabile il metodo è il fatto che i coefficienti non costanti dell'equazione differenziale fossero potenze di t .

Esercizi**Esercizio 1** Equazione e polinomi di Legendre Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

da risolversi per $x \in (-1, 1)$, con λ parametro reale che potrà essere fissato in seguito. Si tratta dell'*equazione di Legendre*, che compare in vari problemi di fisica matematica.

(a) Si cerchi una soluzione

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

e, utilizzando il metodo di Frobenius, si ricavi la seguente relazione iterativa sui coefficienti:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \quad \text{per } k \geq 2.$$

(b) La relazione precedente lascia i primi due coefficienti a_0, a_1 indeterminati. Si osservi che, ponendo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

si ottiene una serie contenente solo potenze pari o dispari (rispettivamente). Scegliendo inoltre $\lambda = n(n+1)$ per un intero positivo n fissato (pari o dispari, rispettivamente), tale serie termina, ossia fornisce in realtà un polinomio di grado n . Se quindi per ogni intero n facciamo questa scelta di λ, a_0 e a_1 , troviamo una successione di polinomi, detti *polinomi di Legendre*, soluzioni della corrispondente equazione differenziale.

(c) Scrivere esplicitamente i polinomi di Legendre $P_n(x)$ per $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione differenziale (di Legendre)³²⁾

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

da risolversi per $x \in (-1, 1)$ e valori reali del parametro λ , che si può riscrivere anche nella forma

$$((1-x^2)y')' + \lambda y = 0.$$

Dimostrare che due soluzioni $y_\lambda(x), y_\mu(x)$, relative rispettivamente a valori λ, μ del parametro diversi tra loro, sono ortogonali nello spazio vettoriale $C^2[-1, 1]$, munito del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

Suggerimento: scrivere

$$y_\mu \cdot \left[((1-x^2)y'_\lambda)' + \lambda y_\lambda \right] = 0$$

$$y_\lambda \cdot \left[((1-x^2)y'_\mu)' + \mu y_\mu \right] = 0$$

e poi...

Questo esercizio mostra che i polinomi di Legendre, calcolati nell'esercizio precedente, sono un sistema ortogonale nello spazio vettoriale qui considerato. Questo fatto è alla base di una tecnica di approssimazione di funzioni mediante polinomi sull'intervallo $(-1, 1)$.

³²⁾Si veda l'esercizio precedente.

4.2 Criteri per la convergenza delle serie trigonometriche

Vogliamo ora dimostrare la Proposizione 7.1, enunciata nel paragrafo 3.1, utile a garantire la convergenza puntuale di certe serie trigonometriche che non convergono totalmente. Cominciamo perciò a richiamare il Criterio di Dirichlet, che abbiamo già enunciato nel contesto delle serie numeriche³³, e che ora dimostreremo:

TEOREMA 7.18 (CRITERIO DI DIRICHLET) Siano $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}$ due successioni tali che:

1. $\{\gamma_n\}$ è a valori complessi e la sua successione delle somme parziali è limitata; in altre parole, esiste una costante $K > 0$ tale che, detta $C_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k$, risulta:

$$|C_n| \leq K \quad \forall n.$$

2. $\{\alpha_n\}$ è a valori reali positivi e tende monotonicamente a zero:

$$\alpha_n > 0 \quad \forall n; \quad \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Allora la serie $\sum \alpha_n \gamma_n$ è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Mostreremo che il resto della serie $\sum \alpha_n \gamma_n$ tende a zero, ossia che:

$$(4.5) \quad \sum_{n=N}^M \alpha_n \gamma_n \rightarrow 0 \text{ per } N, M \rightarrow +\infty.$$

Questo è equivalente al fatto che la successione delle somme parziali di questa serie sia una *successione di Cauchy*, ossia che, posto

$$s_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n \gamma_n,$$

risulti $s_M - s_N \rightarrow 0$ per $N, M \rightarrow +\infty$. A sua volta, questo fatto implica la convergenza della successione s_N (teorema di completezza³⁴ di \mathbb{R}^n), ossia la convergenza della serie $\sum \alpha_n \gamma_n$.

Per provare (4.5), scriviamo le seguenti identità tra sommatorie:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sum_{n=N}^M \alpha_n \gamma_n &= \sum_{n=N}^M \alpha_n (C_n - C_{n-1}) = \sum_{n=N}^M \alpha_n C_n - \sum_{n=N}^M \alpha_n C_{n-1} = \\ &= \sum_{n=N}^M \alpha_n C_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} \alpha_{n+1} C_n = \\ &= \alpha_M C_M - \alpha_N C_{N-1} + \sum_{n=N}^{M-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) C_n. \end{aligned}$$

Dunque possiamo maggiorare, tenendo conto della positività e monotonia di α_n :

$$\left| \sum_{n=N}^M \alpha_n \gamma_n \right| \leq \alpha_M |C_M| + \alpha_N |C_{N-1}| + \sum_{n=N}^{M-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) |C_n| \leq$$

³³v. volume 1, capitolo 5, Teorema 5.7.

³⁴v. capitolo 3, Complementi, paragrafo 9.1.

per la limitatezza di C_n

$$\leq K \left\{ \alpha_M + \alpha_N + \sum_{n=N}^{M-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \right\} =$$

ora la somma è diventata una somma telescopica, in cui gli addendi si cancellano a due a due

$$= K \{ \alpha_M + \alpha_N + \alpha_{M-1} - \alpha_{N+1} \} \rightarrow 0$$

per $N, M \rightarrow \infty$, perché $\alpha_n \rightarrow 0$. Ne segue l'asserto.

OSSERVAZIONE Nella (4.6) abbiamo dimostrato in particolare la seguente identità, che val la pena mettere in evidenza perché risulta utile anche in altri contesti:

$$(4.7) \quad \sum_{n=N}^M \alpha_n \gamma_n = \alpha_M C_M - \alpha_N C_{N-1} - \sum_{n=N}^{M-1} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) C_n.$$

La (4.7) vale per due qualsiasi successioni $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ a valori reali o complessi e per ogni coppia di interi $M > N \geq 0$, con $C_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k$. Essa prende il nome di *formula di sommazione per parti* e la sua analogia con la formula di integrazione per parti è evidente.

Come conseguenza del criterio di Dirichlet, possiamo ora provare la Proposizione 7.1, enunciata nel paragrafo 3.1. Ne riportiamo l'enunciato

PROPOSIZIONE 7.1 *Sia $\{\alpha_n\}$ una successione a valori reali positivi che tende monotonicamente a zero. Allora:*

(a) *Le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in (0, 2\pi)$. Negli estremi $0, 2\pi$ la serie di coseni può convergere o no, mentre la serie di seni è identicamente nulla.

(b) *Le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in [0, 2\pi], x \neq \pi$. In $x = \pi$ la serie di coseni può convergere o no, mentre la serie di seni è identicamente nulla.

Si noti che, anche in caso di convergenza, non è garantito che la somma della serie sia una funzione continua.

DIMOSTRAZIONE. (a) Applichiamo il criterio di Dirichlet alla successione a valori complessi

$$\gamma_n = e^{inx}.$$

Scrivendo:

$$C_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k = \sum_{k=0}^n \left(e^{inx} \right)^k = \frac{1 - e^{inx(n+1)}}{1 - e^{inx}}$$

si ha

$$|C_n| = \left| \frac{1 - e^{inx(n+1)}}{1 - e^{inx}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{inx}|}.$$

Pertanto per ogni $x \neq 2k\pi$, la successione C_n è limitata e possiamo affermare che converge la serie a termini complessi

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos nx + i \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Separando parte reale e parte immaginaria, si conclude che per ogni $x \neq 2k\pi$ convergono le due serie a termini reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

(b) Ragionando analogamente con

$$c_n = e^{in(x+\pi)}$$

si ha

$$|C_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i(x+\pi)}|},$$

che è limitata per $x \neq \pi + 2k\pi$ e si conclude in modo analogo, poiché

$$e^{in(x+\pi)} a_n = (-1)^n a_n (\cos nx + i \sin nx).$$

†

4.3 Fenomeno di Gibbs

Esaminiamo il grafico di una funzione discontinua insieme a quello della sua somma di Fourier n -esima.

Per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ in } [0, 2\pi], \text{ periodizzata in } \mathbb{R},$$

ha la seguente serie di Fourier (come si può facilmente controllare):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Il grafico in figura 7.21 mostra la funzione f insieme alla somma parziale $S_{10}f$, su $(-\pi, \pi)$. In accordo ai teoremi sulla convergenza puntuale, in $x = 0$ (punto di discontinuità a salto per la periodizzata di f) la serie converge a 0 (che è la media tra i limiti destro e sinistro in 0, ossia $\pm \frac{\pi}{2}$). Si osserva che, vicino al punto di salto, la somma $S_n f(x)$ non solo non approssima bene la funzione (perché $S_n f$ è continua e f no) ma addirittura presenta un'oscillazione maggiore di quella della funzione discontinua. Più precisamente, si può dimostrare che la differenza tra il massimo assunto da $S_n f$ in prossimità del punto di salto è maggiore di circa il 9% rispetto a quello di f , mentre ci si sarebbe potuto aspettare che $S_n f$, essendo più regolare di f , ne smussasse l'andamento, presentando un'oscillazione minore. Questo fenomeno, sgradito nelle applicazioni, si presenta costantemente nell'approssimazione di Fourier di una funzione con una discontinuità a salto; può essere previsto teoricamente e prende il nome di *fenomeno di Gibbs*. Vogliamo illustrarlo in modo quantitativamente preciso almeno su questo esempio specifico.

A questo scopo, confrontiamo la somma parziale di Fourier

$$S_n f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

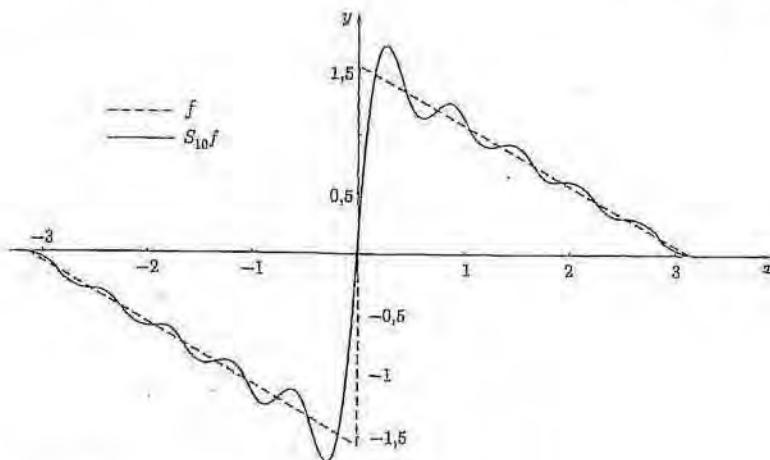


Figura 7.21. La funzione f e la sua somma $S_{10}f$.

con l'integrale definito

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt \text{ per } a > 0.$$

Dividendo l'intervallo $[0, a]$ in n parti uguali, possiamo vedere la somma n -esima di Fourier $S_n f(x)$ come una somma di Cauchy-Riemann di f in $[0, a]$:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \left(\text{per } x = \frac{a}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin \left(\frac{ka}{n} \right)}{\left(\frac{ka}{n} \right)} \cdot \frac{a}{n}. \end{aligned}$$

Perciò ci aspettiamo che

$$S_n f\left(\frac{a}{n}\right) \rightarrow \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt \text{ per } n \rightarrow \infty,$$

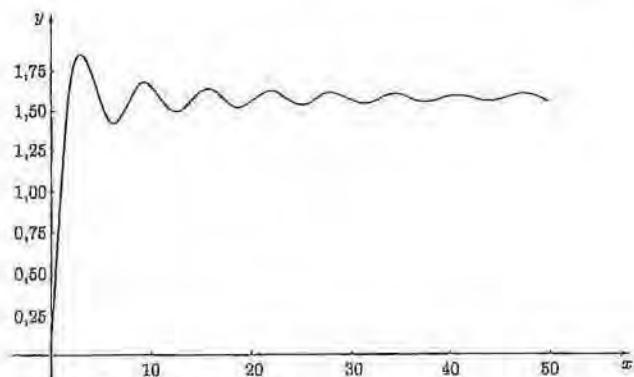
e questo è vero per ogni $a > 0$. Sceglieremo ora come a il punto di massimo assoluto della funzione integrale

$$g(a) = \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt.$$

Per individuare tale a , per prima cosa tracciamo mediante il computer il grafico della funzione integrale per $a > 0$ (fig. 7.22).

Dal grafico vediamo che il punto di massimo assoluto della funzione integrale, per $a > 0$, è il punto di massimo relativo di ascissa positiva minima. Calcoliamo tale punto derivando la funzione integrale:

$$g'(a) = \frac{\sin a}{a} = 0 \text{ per } a = k\pi, k = 1, 2, 3 \dots$$

Figura 7.22. Grafico della funzione integrale g .

perciò il punto di massimo assoluto di g è $a = \pi$ e il massimo assoluto è

$$g(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \simeq 1,85194$$

(valore che è stato ottenuto mediante integrazione numerica). Ci aspettiamo perciò che per n grande risulti

$$S_n f\left(\frac{\pi}{n}\right) \simeq 1,85194.$$

Questo significa che ogni somma parziale di Fourier di f (per n abbastanza grande) assume nel punto π/n (prossimo a 0) il valore $\simeq 1,85194$, mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \simeq 1,5708.$$

Per simmetria, per $x \rightarrow 0^-$ si avrà un analogo fenomeno, per cui complessivamente il rapporto tra il salto di $S_n f$ e il salto di f vicino all'origine è circa

$$\frac{2 \cdot 1,85194}{2 \cdot 1,5708} = 1,17898,$$

che significa che $S_n f$ ha un salto del 17,8% maggiore di quello di f ; la metà di questo valore, 8,9%, indica di quanto il massimo di $S_n f$ è maggiore del massimo di f vicino al salto; il valore è quello che si può prevedere teoricamente per una qualsiasi funzione regolare a tratti che abbia una discontinuità a salto, come abbiamo enunciato all'inizio nel paragrafo.

8

Teoria qualitativa di equazioni differenziali e sistemi

Le equazioni differenziali considerate nel capitolo 1 (equazioni del primo ordine lineari oppure a variabili separabili, del second'ordine lineari a coefficienti costanti) sono di tipo molto speciale e consentono di avere una rappresentazione dell'integrale generale in forma abbastanza esplicita. Questa circostanza non è però frequente nelle applicazioni; spesso le proprietà più rilevanti delle soluzioni di un problema differenziale (come l'esistenza, l'unicità, la stabilità, il comportamento asintotico ecc.) possono essere ottenute solo attraverso lo studio teorico qualitativo; queste informazioni sono fondamentali per procedere poi, con tecniche numeriche, oggi enormemente sviluppate, a una rappresentazione quantitativa.

In questo capitolo riprendiamo, da un punto di vista un po' più avanzato rispetto a quello adottato nel capitolo 1, lo studio delle equazioni differenziali: nel paragrafo 1 consideriamo le equazioni del prim'ordine, discutendo in particolare il problema di Cauchy (v. paragrafo 1.1) e trattando più estesamente le *equazioni autonome*, ossia quelle in cui nell'equazione non compare esplicitamente il tempo (v. paragrafo 1.3, dove viene introdotto il concetto di *diagramma di fase*); nel paragrafo 2 si considerano invece i *sistemi di n equazioni del prim'ordine*, a cui, come vedremo, si possono ricondurre anche le *equazioni di ordine n*; mostreremo come si estendano a questo contesto i risultati teorici fondamentali discussi nel caso delle equazioni del prim'ordine nel paragrafo 1.1. Quindi ci soffermeremo sullo studio dei sistemi autonomi, in particolare bidimensionali (paragrafo 4). Il problema della stabilità per i sistemi autonomi sarà affrontato prima, nel paragrafo 4.2, nel caso lineare (e in particolare bidimensionale) e poi più brevemente nel caso non lineare, nel paragrafo 4.3.

■ 1 EQUAZIONI DEL PRIM'ORDINE

1.1 Problema di Cauchy

Consideriamo un'equazione del prim'ordine in forma normale, cioè del tipo¹

$$(1.1) \quad y' = f(t, y).$$

¹Come già nel capitolo 1, nella trattazione teorica la variabile indipendente sarà indicata sempre con t e pensata come variabile tempo.

Piuttosto che prendere in esame la totalità delle soluzioni della (1.1), è più conveniente puntare l'attenzione sulle soluzioni del problema di Cauchy associato alla (1.1), cioè sulle funzioni che soddisfano la condizione supplementare (detta *condizione iniziale*)

$$(1.2) \quad y(t_0) = y_0$$

(con $y_0 \in \mathbb{R}$ assegnato) e che sono soluzioni della (1.1) almeno *localmente*, cioè in un intorno del punto in cui è assegnata la condizione iniziale².

Come abbiamo già affermato³, per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto larghe ipotesi, che il problema di Cauchy (1.1)-(1.2) ammetta un'unica soluzione. Esamineremo separatamente la questione dell'*esistenza* di almeno una soluzione (richiesta minima perché il problema possa descrivere l'evoluzione di un qualche fenomeno reale) e quella dell'*unicità* di questa soluzione (che mostra come l'evoluzione di un tale fenomeno sia univocamente determinata dalla sua dinamica [cioè dall'equazione (1.1) e dalla condizione iniziale (1.2)]).

Enunceremo ora, senza dimostrazione, alcuni risultati fondamentali della teoria classica delle equazioni differenziali. Il primo è il seguente:

TEOREMA 8.1 (DI PEANO, DI ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE) *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua; sia $(t_0, y_0) \in D$. Allora il problema di Cauchy (1.1)-(1.2) ammette almeno una soluzione, definita in un intorno di t_0 .*

Che la continuità di f sia una richiesta naturale, si vede osservando la semplice equazione

$$y' = f(t),$$

le cui soluzioni sono le primitive di f ; sappiamo che se f ha, per esempio, una discontinuità a salto, non ammette alcuna primitiva⁴.

D'altra parte, la sola continuità di f è sufficiente a garantire l'esistenza, ma non l'unicità, della soluzione del problema di Cauchy.

Esempio

■ ■ ■ Il problema

$$(1.3) \quad \begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette senz'altro la soluzione identicamente nulla $y(t) = 0$. Ne ammette, però, almeno un'altra; infatti l'equazione, a variabili separabili, può essere scritta nella forma:

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dt,$$

dalla quale per integrazione otteniamo

$$3y^{1/3} = t + c.$$

²Una soluzione dell'equazione è dunque una funzione y definita in un intorno I di t_0 , ivi derivabile e tale che risulti $y'(t) = f(t, y(t))$ per ogni $t \in I$.

³Capitolo 1, paragrafo 2.1.

⁴v., volume 1, capitolo 6, paragrafo 4.

La condizione $y(0) = 0$ richiede $c = 0$; la funzione

$$y(t) = \frac{t^3}{27}$$

è dunque anch'essa una soluzione del problema.

Come vedremo nel prossimo teorema, l'unicità della soluzione del problema di Cauchy può essere garantita aumentando le richieste di *regolarità* della funzione $f(t, y)$. Osserviamo che nel problema (1.3) la f è continua, ma la sua derivata $f_y = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ è discontinua e illimitata in un intorno del punto iniziale $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Per garantire l'unicità dovremo escludere questi fenomeni. Vale infatti il seguente risultato:

TEOREMA 8.2 (DI CAUCHY, DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE) *Siano f e $\partial f / \partial y$ continue in un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia $(t_0, y_0) \in D$. Allora esiste un intorno I di t_0 tale che il problema di Cauchy (1.1)-(1.2) ammette una e una sola soluzione definita in I .*

OSSERVAZIONE (CONDIZIONE DI LIPSCHITZ) La condizione $f_y \in C(D)$ può essere attenuata. Infatti, basta richiedere che il rapporto incrementale di f rispetto a y sia localmente limitato. Più precisamente, chiediamo che, per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$, esista una costante L_K tale che:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_K |y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

Se ciò accade diremo che f è *localmente lipschitziana*⁵ rispetto a y , uniformemente in t .

Dunque: se f è continua in D e localmente lipschitziana rispetto a y , uniformemente in t , vale ancora il teorema precedente.

Osserviamo che la continuità di f_y implica la locale lipschitzianità di f . Infatti, se f_y è continua in D , per il teorema di Weierstrass essa è limitata in K ; detto allora

$$L_K = \max_{(t,y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|,$$

per il teorema di Lagrange applicato alla funzione di una variabile $y \mapsto f(t, y)$ si ha, per ogni $(t, y_1), (t, y_2) \in K$ e un opportuno $\bar{y} \in (y_1, y_2)$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y})(y_1 - y_2) \right| \leq L_K |y_1 - y_2|,$$

dunque f risulta localmente lipschitziana rispetto a y , uniformemente in t . Il viceversa però non è in generale vero. Esempi standard di funzioni localmente lipschitziane (ma non derivabili) sono funzioni continue il cui grafico è regolare salvo un numero finito di punti angolosi.

⁵ dal nome del matematico tedesco Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903).

Esempio

In base al teorema 8.2 e all'osservazione precedente, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione. Essa è data da

$$y(t) = (e^{|t|} - 1) \operatorname{sgn}(t),$$

come si può verificare. Si noti che la funzione $f(t, y) = |y| + 1$ è continua e localmente lipschitziana in \mathbb{R}^2 , uniformemente in t ; tuttavia non ha derivata f_y continua in tutto \mathbb{R}^2 .

Mostriamo come i risultati enunciati nel capitolo 1, paragrafo 2, sul problema di Cauchy per le equazioni del prim'ordine lineari o a variabili separabili, si possono ritrovare come casi particolari dei teoremi appena enunciati.

Esempio

Cominciamo dalle *equazioni lineari del prim'ordine*:

$$y' = a(t)y + b(t),$$

per le quali si ha:

$$f(t, y) = a(t)y + b(t).$$

Se i coefficienti a, b sono continui in I , la funzione f è continua e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = a(t)$$

è pure continua; valgono perciò le ipotesi del teorema 8.2, che garantisce esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy. Per ritrovare completamente il risultato enunciato nel capitolo 1 (che garantiva l'esistenza di soluzione in tutta l'intervalle di continuità dei coefficienti, non solo in un intorno del punto iniziale), dovremo prima discutere un ulteriore risultato, di esistenza e unicità globale (si veda il prossimo teorema 8.3).

Consideriamo ora le *equazioni del prim'ordine a variabili separabili*:

$$y' = a(t)b(y),$$

per le quali si ha

$$f(t, y) = a(t)b(y).$$

Se a, b sono funzioni continue, f è continua e il teorema di Peano garantisce l'esistenza di soluzioni. Se $b \in C^1$, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = a(t)b'(y)$$

è continua, e valgono le ipotesi del teorema di Cauchy, che garantisce anche l'unicità locale. Infine, l'ipotesi $b \in C^1$ si può indebolire chiedendo che b abbia rapporto incrementale limitato (come osservato nel teorema 1.1, capitolo 1), il che significa che $f(t, y)$ è localmente lipschitziana, uniformemente in t .

OSSERVAZIONE (ULTERIORE REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE) Se $\varphi(t)$ è soluzione del problema di Cauchy (1.1)-(1.2) in un intervallo I , per definizione φ è almeno derivabile e quindi continua in I . Poiché $f(t, y)$ è continua, dall'identità

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

leggiamo che φ' è anche continua (perché per il teorema di continuità della funzione composta $f(t, \varphi(t))$ è continua). Quindi, in realtà φ è di classe $C^1(I)$. Una maggior regolarità di f implica poi un'ulteriore regolarità della soluzione φ ; ragionando iterativamente, si mostra che:

$$f \in C^k(D) \implies \varphi \in C^{k+1}(I);$$

$$f \in C^\infty(D) \implies \varphi \in C^\infty(I).$$

Intervallo massimale di esistenza della soluzione

Vogliamo ora capire che cosa si può dire in generale sull'intervallo in cui esiste la soluzione del problema di Cauchy. Introduciamo il problema col prossimo:

ESEMPIO

ESEMPIO Si considerino i seguenti due problemi:

$$y' + 2ty^2 = 0 \text{ con condizione}$$

$$(1.4) \quad y(0) = 1 \quad \text{oppure}$$

$$(1.5) \quad y(0) = -1.$$

La funzione $f(t, y)$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$; perciò i due problemi ammettono ognuno una sola soluzione, che sarà di classe C^∞ in base all'osservazione precedente. Poiché l'equazione è a variabili separabili, si scrive nella forma

$$-\frac{dy}{y^2} = 2t dt,$$

che per integrazione dà

$$\frac{1}{y} = t^2 + c;$$

dunque, l'integrale generale è

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + c}.$$

La condizione (1.4) implica $c = 1$, che dà la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

definita su tutta la retta e limitata; la condizione (1.5) implica $c = -1$, che dà la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - 1},$$

definita solo sull'intervallo $(-1, 1)$ e illimitata.

In generale, possiamo avere qualche informazione sull'intervallo in cui esiste la soluzione ragionando al modo seguente. Sia $t \mapsto \varphi(t; y_0)$ la soluzione⁶ del problema di Cauchy (1.1)-(1.2) e consideriamo un rettangolo

$$R = \{(t, y) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}, \quad a, b > 0,$$

centrato nel punto iniziale (t_0, y_0) e contenuto in D . Sia

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$$

(tale massimo esiste perché f è continua sull'insieme R chiuso e limitato). L'equazione (1.1) ci dice che $f(t, y)$ è la pendenza di φ nel punto (t, y) , cosicché M e $-M$ saranno la massima e minima pendenza possibile in R . Questo implica che il grafico di φ deve stare nel doppio settore delimitato dalle rette di equazione

$$y = y_0 + M(t - t_0) \quad \text{e} \quad y = y_0 - M(t - t_0).$$

Queste rette tagliano la frontiera di R nei punti di ascissa $t_0 \pm b/M$ se $b/M < a$, oppure in punti di ascissa $t_0 \pm a$ se $b/M \geq a$ (fig. 8.1 a) e b)).

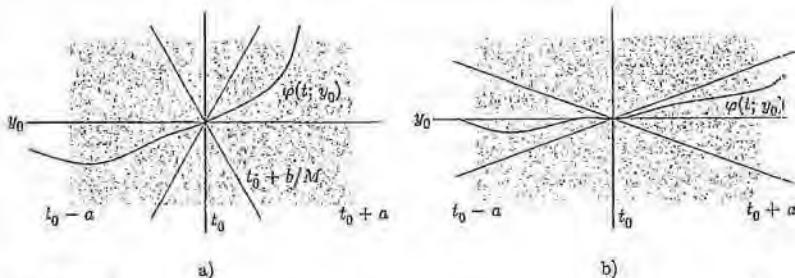


Figura 8.1.

Se poniamo

$$\delta = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

possiamo concludere che la soluzione è definita almeno nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

L'argomento può ora essere iterato. Consideriamo il punto

$$(t_1, y_1) = (t_0 + \delta, \varphi(t_0 + \delta; y_0))$$

che appartiene alla frontiera di R e quindi all'interno di D (essendo questo un aperto); esisterà allora un rettangolo chiuso R_1 centrato in (t_1, y_1) e contenuto in D , del tipo:

$$R_1 = \{(t, y) : t_1 - a_1 \leq t \leq t_1 + a_1, y_1 - b_1 \leq y \leq y_1 + b_1\}, \quad a_1, b_1 > 0.$$

⁶L'abbiamo indicata con $\varphi(t; y_0)$, anche se è una funzione della sola variabile t , per evidenziare che dipende dalla condizione iniziale y_0 .

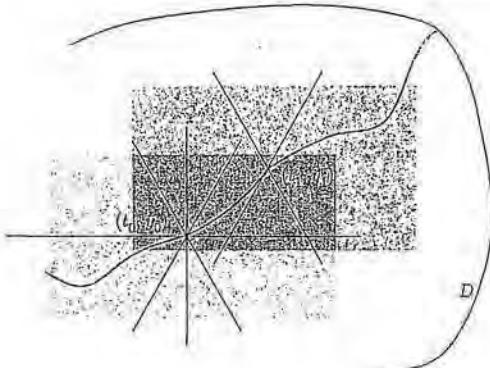


Figura 8.2.

Il teorema 8.2 ci assicura allora che il problema di Cauchy con punto iniziale (t_1, y_1) ha un'unica soluzione $\varphi(t; y_1)$ definita almeno in $I_1 = [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$ (con δ_1 opportuno). Tale soluzione, per l'unicità, deve coincidere con $\varphi(t; y_0)$ in $I \cap I_1 = [t_1 - \delta_1, t_0 + \delta_0]$. Perciò questa soluzione è un'estensione della precedente $\varphi(t; y_0)$, che risulta ora definita in $[t_0 - \delta_0, t_1 + \delta_1]$ (estensione destra, figura 8.2).

Iterando il procedimento, si arriva così a definire un intervallo massimale destro $[t_0, t_{\max}]$ di esistenza della soluzione $\varphi(t; y_0)$; analogamente si definisce un intervallo massimale sinistro $[t_{\min}, t_0]$, con $-\infty \leq t_{\min} < t_{\max} \leq +\infty$.

In conclusione:

nelle ipotesi del teorema 8.2, la soluzione del problema di Cauchy (1.1)-(1.2) è definita in un intervallo massimale (t_{\min}, t_{\max}) : al di fuori di questo intervallo la soluzione non esiste oppure esce dal dominio D .

Più precisamente, si può dimostrare che per $t \rightarrow t_{\min}^+$ e per $t \rightarrow t_{\max}^-$ il grafico della soluzione del problema di Cauchy si avvicina indefinitamente al bordo di D .

Si osservi, tuttavia, che anche nel caso in cui sia $D = \mathbb{R}^2$ questo non significa necessariamente che la soluzione sia definita su tutto \mathbb{R} : potrebbe anche tendere all'infinito per t tendente a un valore finito.

Dal punto di vista delle applicazioni, sarebbe utile avere informazioni sufficienti a garantire l'esistenza (e unicità) della soluzione in tutto un prefissato intervallo $[a, b]$ contenente il punto t_0 . A questa esigenza risponde (parzialmente) il prossimo

TEOREMA 8.3 (DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE) Siano f e f_y di classe $C^0(\overline{S})$, essendo \overline{S} la striscia

$$\overline{S} = [a, b] \times \mathbb{R};$$

inoltre esistano due numeri positivi h, k (in generale dipendenti da a, b) per cui risulti:

$$(1.6) \quad |f(t, y)| \leq h + k|y| \quad \text{per ogni } (t, y) \in \overline{S}.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione (1.1) è definita su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Si noti che le ipotesi di questo teorema implicano quelle del teorema 8.2 in $[a, b] \times [c, d]$ per ogni intervallo $[c, d] \subset \mathbb{R}$.

A sua volta, la condizione (1.6) è soddisfatta per esempio se:

i) f è limitata in \bar{S} :

$$(1.7) \quad |f(t, y)| \leq h \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}$$

(in questo caso vale la (1.6) con $k = 0$), oppure se

ii) f_y è limitata in \bar{S} :

$$(1.8) \quad |f_y(t, y)| \leq k \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}.$$

Infatti, se vale la (1.8), si può scrivere:

$$|f(t, y)| = \left| f(t, 0) + \int_0^y f_y(t, s) ds \right| \leq M + k|y|$$

con

$$M = \max_{[a, b]} |f(t, 0)|,$$

e quindi vale (1.6).

Tuttavia queste condizioni sono sufficienti, ma niente affatto necessarie per l'esistenza globale della soluzione del problema di Cauchy, come dimostra l'Esempio 1.5, con la condizione (1.4); in quel caso la (1.6) non vale, eppure la soluzione esiste su tutto \mathbb{R} .

Si osservi, infine, che per un'equazione lineare del prim'ordine (v. capitolo 1, paragrafo 2.3), si ha

$$f(t, y) = a(t)y + b(t),$$

perciò la (1.6) è soddisfatta se i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono continui nell'intervallo $[a, b]$. Ritroviamo quindi un risultato enunciato nel capitolo 1: *la soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del prim'ordine è definita su tutto l'intervallo in cui i coefficienti sono continui.* (Si confronti con quanto osservato nell'Esempio 1.3).

Vediamo invece un paio di esempi di applicazione del teorema precedente a equazioni non lineari:

Esempio

 Il problema

$$\begin{cases} y' = \cos(ty) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione (per ogni coppia di dati $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$), definita su tutta la retta e di classe C^∞ . Infatti, essendo

$$|\cos(ty)| \leq 1 \quad \text{per ogni } (t, y) \in \mathbb{R}^2,$$

la condizione (1.7) è soddisfatta in tutto il piano con $h = 1$.

 Il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{y^5}{1+y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione (per ogni coppia di dati $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$), definita su tutta la retta e di classe C^∞ . Infatti la condizione (1.6) è soddisfatta in tutto il piano con $h = 0$ e $k = 1$:

$$|f(t, y)| = |y| \frac{y^4}{1+y^4} \leq |y| \quad \text{per ogni } (t, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dipendenza continua dai dati

Un'altra questione molto naturale che riguarda la soluzione di un problema di Cauchy è la seguente. Supponiamo che f soddisfi le ipotesi per cui il problema (1.1)-(1.2) ha una e una sola soluzione. Sia per esempio $\varphi(t; y_0)$ la soluzione del problema con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, e supponiamo che sia definita in $(t_0 - T, t_0 + T)$. Se ora andiamo a risolvere il problema di Cauchy per la stessa equazione, ma con una condizione iniziale di poco diversa, ossia imponendo $y(t_0) = y_1$ con y_1 "vicina" a y_0 , la nuova soluzione $\varphi(t; y_1)$ sarà definita su un nuovo intervallo, diciamo $(t_0 - T_1, t_0 + T_1)$; potremo garantire che le due soluzioni $\varphi(t; y_0)$ e $\varphi(t; y_1)$ si mantengano "vicine" almeno su un intervallo comune di definizione? E inoltre, se andiamo a risolvere il problema di Cauchy con un'equazione leggermente diversa, ossia $y' = f_1(t, y)$ dove f_1 è una funzione "vicina" a f , potremo garantire ancora che la nuova soluzione si mantenga vicina alla precedente? Queste domande sono estremamente naturali per varie ragioni. Anzitutto, dal punto di vista applicativo, la condizione iniziale y_0 di un sistema fisico, così come la sua legge di evoluzione f , sono sempre note con una certa approssimazione; perciò è di vitale importanza sapere che, se sbagliamo di poco a valutare quantitativamente gli ingredienti y_0, f del nostro modello, sbagliheremo conseguentemente di poco nel calcolare la soluzione.

Inoltre, il fatto che il modello matematico che facciamo di un certo fenomeno fisico garantisca le proprietà di esistenza della soluzione, unicità della soluzione, dipendenza continua della soluzione dagli ingredienti del problema si può vedere come indice del fatto che il nostro modello è stato ben formulato. Se qualcuna di queste proprietà venisse a cadere, significherebbe o che stiamo cercando di descrivere un fenomeno intrinsecamente molto complesso e instabile, oppure che il nostro modello matematico è inadeguato per qualche aspetto e va modificato.

Il risultato di dipendenza continua si può formulare così:

TEOREMA 8.4 Siano $f_1(t, y), f_2(t, y)$ due funzioni continue in un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$, localmente lipschitziane rispetto a y , uniformemente in t . Siano $(t_0, y_1), (t_0, y_2) \in D$ e siano $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, rispettivamente, le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = y_2. \end{cases}$$

Allora, se nell'intervallo $[t_0, t_0 + T]$ entrambe le soluzioni sono definite, vale la diseguaglianza:

$$(1.9) \quad |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq (|y_1 - y_2| + (t - t_0) M) e^{L(t-t_0)} \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + T]$$

dove

$$M = \max_{(t,y) \in K} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|,$$

L è la costante di lipschitzianità di f_1 e f_2 su K , e K è un insieme chiuso e limitato contenuto in D e contenente i grafici delle soluzioni $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$.

Si osservi che la stima di dipendenza continua (1.9) esprime proprio il fatto che, se y_1 è vicino a y_2 (quindi $|y_1 - y_2|$ è piccolo) e f_1 è vicina a f_2 (quindi M è piccolo), allora $\varphi_1(t)$ è vicina a $\varphi_2(t)$ in $[t_0, t_0 + T]$. In particolare, per $t = t_0$ troviamo:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |y_1 - y_2|,$$

che dice nuovamente che la soluzione del problema di Cauchy è unica (infatti per $y_1 = y_2$ le due soluzioni coincidono); invece per $f_1 = f_2$ (e t qualsiasi) troviamo:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |y_1 - y_2| e^{L(t-t_0)} \leq |y_1 - y_2| e^{LT} \text{ per ogni } t \in [t_0, t_0 + T],$$

che dice che le due soluzioni si discostano per non più di $c|y_1 - y_2|$.

Il fatto che la costante c abbia la forma e^{LT} ha un significato profondo: ci dice che le soluzioni relative a condizioni iniziali diverse, ma vicine, si mantengono "ragionevolmente vicine" per intervalli di tempo limitati, ma possono allontanarsi senza alcun controllo per tempi lunghi: infatti, la costante di dipendenza continua cresce esponenzialmente con T .

La dipendenza continua si ha quindi per tempi finiti, mentre per $t \rightarrow +\infty$ può accadere che soluzioni relative a condizioni iniziali vicine abbiano comportamenti radicalmente diversi⁷. È questo il motivo per cui lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni per tempi lunghi è un capitolo importante e profondo dell'analisi delle equazioni differenziali, la cui problematica non è affatto chiusa dal sapere che la soluzione per tempi finiti dipende con continuità dai dati. Nel seguito del capitolo daremo ampio spazio proprio a questo problema.

Esercizi

Per i seguenti problemi di Cauchy, trovare le soluzioni con i loro intervalli massimali di definizione.

$$(a) \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Per il problema

$$\begin{cases} y' = \arctg y - \frac{1}{t} \\ y(1) = b \quad (b > 0), \end{cases}$$

- (a) discutere unicità ed esistenza locale;
- (b) determinare l'intervallo massimale di esistenza;
- (c) tracciare il grafico qualitativo delle soluzioni.

Dato il problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = k \quad (k \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

- (a) trovare i valori di k per cui il problema ha esattamente una soluzione locale;
- (b) mostrare che per gli altri valori di k il problema ha più di una soluzione.

⁷si veda l'Esercizio 8.

Studiare esistenza e unicità di soluzione per il problema:

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 2t\sqrt{y} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Risolvere dettagliatamente il problema di Cauchy dell'esempio 1.2.

Dimostrare la seguente affermazione fatta in precedenza nell'osservazione a pagina 421: se φ è soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ e $f \in C^k(D)$, allora $\varphi \in C^{k+1}(I)$; se $f \in C^\infty(D)$, allora $\varphi \in C^\infty(I)$.

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = |t|(e^{ty} - 1) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Senza risolverlo, si dica qual è la massima regolarità che possiamo aspettarci dalla soluzione.

(i) Si considerino i due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = c_i \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono condizioni iniziali $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $|c_1 - c_2| < \varepsilon$ ma, detta φ_i le soluzioni dei rispettivi problemi, risulta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = +\infty.$$

Pertanto, la dipendenza continua della soluzione dalle condizioni iniziali vale solo per tempi finiti.

(ii) Si provi poi lo stesso per i due problemi:

$$\begin{cases} y' = c_i y \\ y(0) = 1 \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Pertanto, anche la dipendenza continua della legge di evoluzione vale solo per tempi finiti.

1.2 Alcune classi di equazioni del prim'ordine

Mostriamo ora alcune classi di equazioni del prim'ordine, diverse da quelle già incontrate nel capitolo 1, per le quali è possibile talvolta arrivare a una soluzione esplicita.

Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo:

$$y' = P(t)y + Q(t)y^\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ (altrimenti si tratta di un'equazione lineare, che conosciamo già). Supponiamo P, Q continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $\alpha > 0$, $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

Se $y \neq 0$, dividendo per y^α si ottiene

$$y^{-\alpha}y' = P(t)y^{1-\alpha} + Q(t).$$

Ponendo

$$z = y^{1-\alpha}$$

si ha:

$$z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y'$$

e perciò z è soluzione dell'equazione lineare

$$z' = (1 - \alpha) P(t) z + (1 - \alpha) Q(t).$$

Trovata z con la formula⁸

$$z(t) = ce^{-A(t)} + (1 - \alpha) e^{-A(t)} \int Q(t) e^{A(t)} dt,$$

dove $A(t) = (\alpha - 1) \int P(t) dt$, si trova:

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

(Nel caso in cui $(1 - \alpha)$ è un intero pari o un razionale con numeratore pari, c'è anche la soluzione $y = -z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$).



Integrare le seguenti equazioni di Bernoulli:

$$(a) \quad y' + y \sin t + y^\alpha \sin 2t = 0$$

$$(b) \quad (1 - t^2) y' - ty - aty^2 = 0$$

$$(c) \quad y - y' \cos t - y^2 (\cos t) (2 - \sin t) = 0$$

$$(d) \quad ty' + y (1 - ty^n) = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Equazioni differenziali esatte

Sono equazioni del tipo:

$$(1.10) \quad y' = -\frac{P(t, y)}{Q(t, y)},$$

dove P, Q sono continue in un dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $Q \neq 0$, e tali che la forma differenziale

$$\omega = P(t, y) dt + Q(t, y) dy$$

sia esatta, cioè $F = F(t, y)$, funzione potenziale⁹, tale che:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad \text{in } A.$$

Ricordiamo che, se A è semplicemente connesso in \mathbb{R}^2 e $\partial Q/\partial t, \partial P/\partial y$ sono continue in A , ω è esatta se e solo se, in A , risulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

⁸v. capitolo 1, formula (2.12).

⁹v. capitolo 6, paragrafo 1.4.

In tal caso, un potenziale F può essere calcolato con i metodi discussi nel capitolo 6, paragrafo 1.5. In particolare, possiamo scrivere:

$$F(t, y) = \int_{t_0}^t P(s, y) ds + \int_{y_0}^y Q(t_0, u) du.$$

Trovato F , l'integrale generale della (1.10) sarà assegnato, in forma implicita, dalla formula seguente:

$$F(t, y) = c.$$

In particolare, l'equazione

$$F(t, y) = 0$$

seleziona quella soluzione che soddisfa la condizione di Cauchy $y(t_0) = y_0$.

Esempio

 Si voglia risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{t+y}{t-3y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Qui $P(t, y) = t + y$, $Q(t, y) = t - 3y \neq 0$ nei due semipiani $t > 3y$ e $t < 3y$. Poiché il punto iniziale $(t_0, y_0) = (0, 1)$ appartiene al semipiano $t < 3y$, sceglieremo quest'ultimo come dominio A . Essendo poi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

la forma differenziale $\omega = (t+y) dt + (t-3y) dy$ è esatta in A . La soluzione è assegnata implicitamente dalla formula:

$$\int_0^t (s+y) ds + \int_1^y (-3u) du = 0$$

cioè

$$\frac{t^2}{2} + yt - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2} = 0$$

che, risolta in y , ricordando ancora che vogliamo $y(0) = 1$, dà:

$$y(t) = \frac{1}{3} \left(t + \sqrt{4t^2 + 9} \right),$$

soluzione del problema di Cauchy.

Equazioni differenziali omogenee

Sono equazioni del tipo:

$$(1.11) \quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

o, alternativamente, $y' = g(t, y)$ con g omogenea di grado zero¹⁰, ossia:

$$g(\lambda t, \lambda y) = g(t, y) \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

¹⁰V. capitolo 3, paragrafo 9.2.

Supponiamo f, g continue in un intervallo e in un aperto di \mathbb{R}^2 , rispettivamente. Ponendo

$$(1.12) \quad z(t) = \frac{y(t)}{t} \quad \text{ossia} \quad y(t) = tz(t)$$

si trova $y' = z + tz'$, che, sostituita nella (1.11), dà per z l'equazione:

$$z + tz' = f(z),$$

cioè l'equazione a variabili separabili

$$z' = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Risolta¹¹ l'equazione in z , si determina y dalla (1.12).

Esercizi

Integrare le seguenti equazioni omogenee:

$$(a) \quad y' = \frac{t^3 + y^3}{ty^2}; \quad (b) \quad y' = \frac{y}{t + \sqrt{t^2 + y^2}}.$$

1.3 Equazioni autonome. Diagrammi di fase. Stabilità

In questo paragrafo consideriamo le equazioni *autonome*, cioè del tipo

$$(1.13) \quad y' = f(y)$$

con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; assumeremo $f \in C^1(I)$. In altre parole, f non dipende esplicitamente da t .

Notiamo che questa è una particolare equazione a variabili separabili¹²; se impostiamo la risoluzione scrivendo

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dt,$$

otteniamo (indicando con g una primitiva di $1/f$):

$$g(y) = t + c$$

e quindi l'integrale generale ha la forma:

$$y(t) = h(t + c)$$

per h funzione opportuna e c costante arbitraria. Questo implica la seguente proprietà di *invarianza per traslazioni temporali*:

¹¹coi metodi visti nel capitolo 1, paragrafo 2.2.

¹²v. capitolo 1, paragrafo 2.2.

Se φ è una soluzione di (1.13) in (a, b) , anche $\psi(t) = \varphi(t + \tau)$, con $\tau \in \mathbb{R}$ fissato, è una soluzione in $(a - \tau, b - \tau)$.

Tenuto conto della precedente osservazione, nello studio del problema di Cauchy possiamo senz'altro assumere $t_0 = 0$; la soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = y_0$, cioè la soluzione che "parte" da y_0 , sarà indicata con $\varphi(t; y_0)$. Tale soluzione esiste senz'altro, almeno in un intorno di $t_0 = 0$, in base al teorema 8.2, o anche per quanto abbiamo dimostrato nel capitolo 1, paragrafo 4, riguardo alle equazioni a variabili separabili.

Diamo ora un'importante

DEFINIZIONE 8.1 Si dice *soluzione di equilibrio* o *stato stazionario* di (1.13) ogni (eventuale) zero di f : $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno stato stazionario se $f(\bar{y}) = 0$; a \bar{y} corrisponde allora la soluzione costante (soluzione di equilibrio) della (1.13)

$$y(t) = \bar{y} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$



Esempio

Consideriamo l'*equazione logistica*, studiata nell'esempio 2.6 del capitolo 1, cioè l'equazione (1.13) con

$$f(y) = \varepsilon y \left(1 - \frac{1}{k}y\right), \quad \text{con } \varepsilon, k > 0 \text{ costanti.}$$

Le soluzioni $y = 0$ e $y = k$ sono le soluzioni di equilibrio. Tutte le altre soluzioni che partono da uno stato $y_0 > 0$ (con $y_0 \neq k$) tendono a k per $t \rightarrow +\infty$. Infatti, come abbiamo visto, tali soluzioni sono date da:

$$(1.14) \quad y(t) = \frac{k y_0 e^{\varepsilon t}}{k - y_0 + y_0 e^{\varepsilon t}}.$$

Si può dire che la soluzione $y(t) = k$ "attrae" asintoticamente ogni altra soluzione. Al contrario, lo stato stazionario $y(t) = 0$ non ha questo potere di attrazione: ogni soluzione che parte da uno stato $y_0 \neq 0$, anche molto vicino a y_0 , se ne allontana, al crescere di t , per tendere a k .

La discussione dell'esempio precedente è stata sviluppata sulla base di un'esplicita rappresentazione delle soluzioni dell'equazione logistica (cioè la (1.14)) ma, per le equazioni autonome, anche quando formule esplicite per le soluzioni non sono disponibili, è possibile ricavare informazioni attraverso il cosiddetto *diagramma di fase*, strumento fondamentale che ora introdurremo.

Diagramma di fase

Rappresentiamo (fig. 8.3) su un piano, che chiameremo *piano delle fasi*, il grafico di f : sull'asse delle ascisse (detto *asse delle fasi*) collichiamo i valori della *variabile di stato* y ; le intersezioni del grafico di f con l'asse delle fasi ci danno gli stati di equilibrio (cfr. y_1 e y_2 in figura 8.3).

Per determinare il comportamento qualitativo delle soluzioni ragioniamo così. Indichiamo, come sopra, con $\varphi(t; y_0)$ la soluzione della (1.13) che parte dallo stato y_0 :

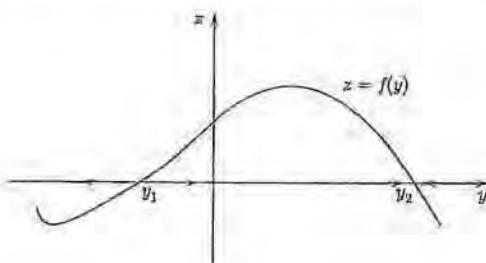


Figura 8.3.

con riferimento alla figura 8.3, se $y_0 < y_1$, essendo $f'(y_0) < 0$, sarà, in base alla (1.13), $f'(y_0) = \varphi'(0; y_0) < 0$; perciò φ parte con pendenza negativa e decresce lungo l'asse y allontanandosi da y_1 . Se $y_1 < y_0 < y_2$ risulta invece $f'(y_0) > 0$; perciò $\varphi(t; y_0)$ ora parte con pendenza positiva e aumenta lungo l'asse y , allontanandosi da y_1 e avvicinandosi a y_2 , senza però mai raggiungere y_2 (se ciò avvenisse al tempo $t = \tau$, avremmo due diverse soluzioni $\psi(t) = y_2$ e $\varphi(t; y_0)$ dello stesso problema di Cauchy, con condizione $y(\tau) = y_2$). Infine, se $y_0 > y_2$, la soluzione $\varphi(t; y_0)$, essendo $f'(y_0) < 0$, si avvicina indefinitamente a y_2 . La figura 8.3, che rappresenta graficamente la precedente discussione, si chiama *diagramma di fase* per l'equazione (1.13).

Stabilità

Possiamo ora precisare la nozione di *stabilità* di un punto di equilibrio.

DEFINIZIONE 8.2 Diremo che uno stato stazionario \bar{y} è:

- (i) *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|y_0 - \bar{y}| < \delta$, allora la soluzione $\varphi(t; y_0)$ esiste per ogni $t \geq 0$ e soddisfa

$$|\varphi(t; y_0) - \bar{y}| < \varepsilon \text{ per ogni } t \geq 0;$$

in altre parole: una soluzione che parte in prossimità di \bar{y} rimane sempre (cioè per ogni $t \geq 0$) vicino a \bar{y} .

- (ii) *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre esiste $\delta_1 > 0$ tale che, se $|y_0 - \bar{y}| < \delta_1$, allora risulta

$$(1.15) \quad \varphi(t; y_0) \rightarrow \bar{y} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty;$$

in questo caso il punto \bar{y} viene detto un *attrattore (locale)* e il più grande intorno U di \bar{y} tale che se $y_0 \in U$ vale la (1.15) si dice *bacino di attrazione* di \bar{y} ; se il bacino di attrazione di \bar{y} coincide col dominio di f , si dice che \bar{y} è un *attrattore globale*.

- (iii) Infine, diremo che uno stato stazionario \bar{y} è *instabile* se non è stabile, cioè se esistono soluzioni che, pur partendo in prossimità di \bar{y} , non rimangono sempre vicine a \bar{y} . Naturalmente ciò non significa che tutte le soluzioni si allontanino da \bar{y} ; se invece accade quest'ultima cosa, il punto di equilibrio si chiama *repulsore*. ■■■



ESEMPIO Consideriamo il caso elementare dell'equazione lineare autonoma

$$y' = ay + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ (costanti),}$$

$a \neq 0$. Dal diagramma di fase si vede subito che l'unico punto di equilibrio $\bar{y} = -b/a$ è un attrattore globale se $a < 0$, un repulsore se $a > 0$.

ESEMPIO Riprendiamo ancora l'Esempio 1.9 dell'equazione logistica. Si osserva che il punto $\bar{y} = 0$ è un repulsore, mentre $\bar{y} = k$ è un attrattore, con bacino di attrazione costituito dalla semiretta $(0, +\infty)$.

OSSERVAZIONE (DIPENDENZA CONTINUA E STABILITÀ) La dipendenza continua della soluzione di un problema di Cauchy dai dati iniziali, discussa nel paragrafo 1.1, ci permette di affermare che, se \bar{y} è uno stato stazionario, fissato un tempo $T > 0$ e un $\varepsilon > 0$ qualsiasi, qualunque soluzione parta da una condizione iniziale y_0 sufficientemente vicina a \bar{y} rimarrà fino al tempo T a distanza minore di ε da \bar{y} . Il problema della stabilità, tuttavia, riguarda il comportamento delle soluzioni "per tempi lunghi" (non solo $< T$), perciò non è in alcun modo risolto dal fatto di sapere che la soluzione dipende con continuità dalla condizione iniziale.

Anche se lo studio del diagramma di fase per equazioni autonome del primo ordine è generalmente abbastanza semplice, può essere utile avere un criterio generale di stabilità asintotica o di instabilità, di uso pratico immediato. Ciò si può ottenere rimpiazzando in vicinanza dei punti di equilibrio il grafico di f con la retta tangente al grafico (*metodo di linearizzazione*; ricordiamo che per ipotesi f è di classe C^1) e discutendo il caso lineare corrispondente. Vale infatti il seguente

TEOREMA 8.5 (CRITERIO DI STABILITÀ/INSTABILITÀ) Sia I un intervallo aperto, $\bar{y} \in I$, $f \in C^1(I)$, $f(\bar{y}) = 0$, $f'(\bar{y}) \neq 0$. Allora:

- i) se $f'(\bar{y}) < 0$, \bar{y} è asintoticamente stabile;
- ii) se $f'(\bar{y}) > 0$, \bar{y} è instabile.

DIMOSTRAZIONE. (i) Sia $f'(\bar{y}) < 0$. Poiché f' è continua, esiste un intorno $U = (\bar{y} - h, \bar{y} + h)$ di \bar{y} in cui f' resta negativa: $f'(t) \leq -k < 0$ per ogni $t \in U$. Per $y_0 \in U$, consideriamo la soluzione $\varphi(t; y_0)$ e proviamo che

$$\varphi(t; y_0) \rightarrow \bar{y} \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Supponiamo prima che $y_0 \in (\bar{y}, \bar{y} + h)$; allora $\varphi(0; y_0) > \bar{y}$. Questo implica che per ogni $t > 0$ per cui $\varphi(t; y_0)$ è definita, risulta $\varphi(t; y_0) > \bar{y}$; se così non fosse, per un certo istante $t^* > 0$ avremmo $\varphi(t^*; y_0) = \bar{y}$, e il problema di Cauchy con condizione $y(t^*) = \bar{y}$ avrebbe due soluzioni distinte (la costante \bar{y} e $\varphi(t^*; y_0)$), contro l'unicità di tale soluzione.

Osserviamo che risulta anche $\varphi(t; y_0) < y_0$ per ogni $t > 0$ per cui $\varphi(t; y_0)$ è definita. Infatti, per l'argomento appena visto, per nessun $t > 0$ può essere $\varphi(t; y_0) = y_0$, dunque $\varphi(t; y_0) - y_0$ è sempre positivo o sempre negativo per $t > 0$, e poiché

$$\varphi'(0; y_0) = f(\varphi(0; y_0)) = f(y_0) < 0,$$

dev'essere $\varphi(t; y_0) < y_0$ per ogni $t > 0$ per cui $\varphi(t; y_0)$ è definita.

Concludiamo che per ogni $t > 0$ per cui $\varphi(t; y_0)$ è definita, risulta:

$$\bar{y} \leq \varphi(t; y_0) < y_0.$$

Questo implica che in realtà $\varphi(t; y_0)$ è definita per ogni $t > 0$ (perché $\varphi(t; y_0)$ si può sempre prendere come nuova condizione iniziale per prolungare la soluzione oltre t).

Definiamo ora

$$w(t) = \varphi(t; y_0) - y_0.$$

Si ha, ricordando che $f(\bar{y}) = 0$ e applicando a w il teorema di Lagrange,

$$\begin{aligned} w'(t) &= \varphi'(t; y_0) = f(\varphi(t; y_0)) = f(\varphi(t; y_0)) - f(\bar{y}) = \\ &= f'(\xi(t)) [\varphi(t; y_0) - \bar{y}] = f'(\xi(t)) w(t) \end{aligned}$$

per qualche punto $\xi(t) \in (\bar{y}, \varphi(t; y_0))$. In particolare, $\xi(t) < \varphi(t; y_0) < y_0$, perciò

$$f'(\xi(t)) \leq -k < 0$$

e, poiché $w(t) > 0$,

$$w'(t) \leq -kw(t).$$

Integrando da 0 a t si ottiene:

$$0 < w(t) \leq (y_0 - \bar{y}) e^{-kt} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Perciò

$$\varphi(t; y_0) \rightarrow y_0 \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Se $y_0 \in (\bar{y} - h, \bar{y})$, l'argomento è simile e la conclusione la stessa.

(ii). Se $f'(\bar{y}) > 0$, ancora per continuità di f' esiste un intorno $V = (\bar{y} - k, \bar{y} + k)$ di \bar{y} in cui f' resta positiva. Per $y_0 \in V$, si considera la soluzione $\varphi(t; y_0)$; un argomento simile a quello già visto implica che per ogni $t > 0$ risulta:

$$\varphi(t; y_0) > y_0 > \bar{y}$$

pertanto $\varphi(t; y_0)$ non può tendere a \bar{y} per $t \rightarrow +\infty$ e \bar{y} è instabile.



Per le due equazioni seguenti tracciare e discutere il diagramma di fase:

$$(a) \quad y' = e^y - 1; \quad (b) \quad y' = 1 - e^y.$$

Quindi risolvere esplicitamente le equazioni con condizione iniziale $y(0) = y_0$ e determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione in dipendenza da y_0 .

Trovare gli stati stazionari dell'equazione

$$y' = y^2(y - 2)$$

a studiare la loro stabilità in base al diagramma di fase.

Trovare gli stati di equilibrio, al variare del parametro reale m , dell'equazione

$$y' = y^3 - 2y^2 + my$$

e studiare la loro stabilità.

 Trovare gli stati stazionari dell'equazione

$$y' = \sin y$$

e studiare la loro stabilità in base al diagramma di fase.

 Trovare gli stati stazionari dell'equazione

$$y' = \operatorname{tg} y$$

e studiare la loro stabilità in base al diagramma di fase. Quindi risolvere esplicitamente l'equazione con condizione iniziale $y(0) = y_0$ e determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione in dipendenza da y_0 .

2 PROBLEMA DI CAUCHY PER SISTEMI DI n EQUAZIONI DEL PRIM'ORDINE O EQUAZIONI DI ORDINE n

Generalizziamo ora la teoria vista nel paragrafo 1.1 per le equazioni del prim'ordine al caso più significativo dei sistemi di n equazioni del prim'ordine. Come vedremo subito, anche le equazioni di ordine n si possono riscrivere come sistemi di n equazioni del prim'ordine. Perciò la teoria che svilupperemo nel seguito si può anche vedere come il quadro teorico generale che fa da sfondo alle equazioni differenziali discusse nel capitolo 1 e ad altre non lineari.

Sistemi di equazioni del prim'ordine

Supponiamo che lo stato di un sistema fisico sia descritto da n variabili di stato $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, funzioni del tempo t , che raggrupperemo in un vettore di stato

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)).$$

L'evoluzione di $\mathbf{y}(t)$ sia governata da un sistema di equazioni del tipo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} y'_1(t) = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n(t) = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Scriveremo il sistema in forma compatta

$$(2.2) \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

dove il vettore $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ è una funzione

$$\mathbf{f}: D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Una soluzione di (2.1) nell'intervallo I è un vettore

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

le cui componenti sono funzioni continue e derivabili in I , le quali simultaneamente soddisfano il sistema (2.1) (cioè lo rendono un'identità per $t \in I$).

Equazioni di ordine n

Osserviamo che un'equazione differenziale di ordine n in forma normale

$$(2.3) \quad y^{(n)}(t) = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

nella funzione scalare incognita $y(t)$ può sempre essere scritta nella forma di un sistema del tipo (2.1) ponendo

$$(2.4) \quad y_1 = y; \quad y_2 = y'; \dots; \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Infatti le precedenti e la (2.3) implicano allora:

$$(2.5) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Perciò d'ora in poi svilupperemo il discorso teorico per i sistemi di n equazioni differenziali del prim'ordine, tenendo presente che i risultati riguardanti i sistemi si traducono anche in risultati riguardanti le equazioni differenziali di ordine n .

Negli esempi e negli esercizi illustreremo anche qualche caso in cui un sistema di equazioni di ordine superiore al primo può essere riscritto sotto forma di sistema di un numero sufficientemente grande di equazioni del prim'ordine.

Problema di Cauchy

Fissato un istante iniziale t_0 , il problema di Cauchy per il sistema (2.2) consiste nel cercare una soluzione locale di (2.2) (cioè definita in un non precisato intervallo I contenente t_0) tale che sia soddisfatta la condizione iniziale:

$$(2.6) \quad y(t_0) = y_0$$

con $y_0 \in \mathbb{R}^n$ vettore assegnato. Nel caso dell'equazione di ordine n (2.3), tenuto conto delle (2.4)-(2.5), il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione locale (funzione $y(t)$ derivabile n volte in I , con $t_0 \in I$, soddisfacente la (2.3)), tale che siano soddisfatte le n condizioni iniziali:

$$(2.7) \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Si faccia attenzione al fatto che y_0, y_1, \dots, y_{n-1} nella (2.7) indicano costanti assegnate, mentre y_1, y_2, \dots, y_n nella (2.1) indicano funzioni incognite.

Prima di continuare vediamo qualche esempio di modelli matematici, tra i più semplici e noti, che si incontrano in alcune scienze applicate e si formulano mediante equazioni differenziali o sistemi del tipo sopra illustrato.

ESEMPIO

2.1 Modello preda-predatore di Lotka-Volterra. Negli anni immediatamente successivi al primo conflitto mondiale, nel mare Adriatico si registrò un calo di una certa specie di pesce comestibile e un aumento del suo predatore. Si trattava di capire come mai l'assenza di pesca durante la guerra avesse favorito lo sviluppo del predatore e sfavorito quello della preda. La questione fu posta al matematico italiano Vito Volterra che, nel 1924 circa, risolse il problema con un modello divenuto celebre.

Posto $x = x(t)$ = numero di prede e $y = y(t)$ = numero di predatori, Volterra formulò le seguenti ipotesi, basate sulle informazioni dei biologi: il tasso (relativo) di crescita delle prede è costante in assenza di predatori ma decresce linearmente come funzione di y ; i predatori crescono a un tasso costante in assenza di prede, ma decrescono linearmente con x .

Il modello che ne deriva è il seguente:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx \end{cases}$$

con a, b, c, d costanti positive, che assume la forma (2.2) ponendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (x, y) \\ f_1(t, y) &= ax - bxy \\ f_2(t, y) &= -cy + dxy. \end{aligned}$$

Si osservi che $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ non dipende esplicitamente da t : il sistema è autonomo. Il sistema (2.8) era stato studiato già nel 1920 dal polacco Lotka in relazione a un problema di cinetica chimica, ma l'analisi di Volterra si spinse considerevolmente oltre: vi ritorneremo in dettaglio più avanti, nel paragrafo 4, parlando appunto dei sistemi autonomi.

2.2 Dinamica unidimensionale. L'equazione di Newton

$$(2.9) \quad y'' = F(t, y, y')$$

regola il moto unidimensionale di un corpo materiale puntiforme. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine; qui y, y', y'' hanno rispettivamente il significato di posizione, velocità e accelerazione. Il moto è completamente determinato se aggiungiamo alla (2.9) le condizioni iniziali:

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_1$$

(cioè la posizione e velocità iniziale del punto). Abbiamo già incontrato nel capitolo 1 alcuni importanti casi particolari di quest'equazione:

(i) l'equazione della caduta dei gravi nel vuoto

$$y'' = g$$

o in presenza dell'attrito dell'aria¹³

$$y'' = g - \frac{h}{m} y';$$

(ii) l'equazione dell'oscillatore armonico per le oscillazioni libere

$$y'' = -\omega^2 y,$$

¹³V. capitolo 1, esempio 2.7.

per le oscillazioni smorzate

$$y'' = -hy' - \omega^2 y$$

o forzate¹⁴

$$y'' = -hy' - \omega^2 y + f(t).$$

Vediamo ora un altro esempio di equazione di Newton:

EQUAZIONE DI VAN DER POL. Si tratta della celebre equazione proposta nel 1920 da van der Pol, matematico olandese esperto in aspetti teorici della radioingegneria:

$$y'' = -y + \epsilon(1-y^2)y' \quad \text{con } \epsilon > 0 \text{ costante.}$$

Essa si può interpretare come una perturbazione dell'oscillatore armonico (con $\omega^2 = 1$) mediante il termine forzante $\epsilon(1-y^2)y'$ che per valori grandi di y ($|y| > 1$) è una resistenza attiva (dissipa energia) e contrasta il moto, mentre per piccoli valori di y ($|y| < 1$) rappresenta una resistenza negativa (fornisce energia), che nei circuiti elettrici si realizza come feedback, o controllo retroattivo. Si presenta in questo caso l'interessante fenomeno delle oscillazioni *auto-sostenute*. Un'analisi dell'equazione di van der Pol sarà presentata più avanti nel paragrafo 4.3, esempio 4.9.

Moto dei pianeti. Supponiamo che nell'origine del sistema di riferimento in \mathbb{R}^3 sia posto un corpo di massa M (sole) il cui campo gravitazionale di forza per unità di massa è dato dal vettore

$$MG\nabla\left(\frac{1}{r}\right), \text{ dove } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e G è la costante di gravitazione. Il moto di un corpo di massa $m \ll M$ sotto l'influenza di questo campo di forze è dato dal sistema seguente, di 3 equazioni differenziali non lineari del secondo'ordine:

$$(2.10) \quad \begin{cases} x'' = -MG\frac{x}{r^3} \\ y'' = -MG\frac{y}{r^3} \\ z'' = -MG\frac{z}{r^3} \end{cases}$$

che può essere facilmente riscritto nella forma di sistema di 6 equazioni differenziali del prim'ordine (ponendo $x = y_1, x' = y_2, y = y_3, y' = y_4, z = y_5, z' = y_6$...), e quindi rientra anch'esso nella teoria che stiamo delineando. Nel capitolo 2, paragrafo 7.2, abbiamo già incontrato il sistema (2.10), e abbiamo mostrato come da esso si possono ricavare le leggi di Keplero sul moto dei pianeti.

Risultati fondamentali sul problema di Cauchy per i sistemi

I seguenti teoremi generalizzano al caso dei sistemi (e quindi delle equazioni di ordine superiore al primo) i teoremi 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 validi nel caso scalare (paragrafo 1.1).

TEOREMA 8.6 (DI PEANO, DI ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE) Sia $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua; sia $(t_0, y_0) \in D$. Allora il problema di Cauchy

$$(2.11) \quad \begin{cases} y(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione, definita in un intorno di t_0 .

¹⁴v. capitolo 1, esempio 3.2. Si veda anche la discussione dettagliata di quest'equazione e del suo significato fisico, svolta nel capitolo 1, paragrafo 3.6.

TEOREMA 8.7 (DI CAUCHY, DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE) Sia $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto,

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua, $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) continue in D e sia $(t_0, y_0) \in D$. Allora esiste un intorno I di t_0 tale che il problema di Cauchy (2.11) ammette una e una sola soluzione definita in I .

TEOREMA 8.8 (DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE) Sia

$$\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua in \bar{S} , $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) continue in \bar{S} ; inoltre esistono due numeri positivi h, k (in generale dipendenti da a, b) per cui risulti

$$(2.12) \quad |\mathbf{f}(t, y)| \leq h + k|y| \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $y'(t) = \mathbf{f}(t, y(t))$ è definita su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Come già osservato nel caso scalare, l'ipotesi (nei teoremi 8.7 e 8.8) che le derivate parziali rispetto alle variabili y_i siano definite e continue si può indebolire chiedendo semplicemente che $\mathbf{f}(t, y)$ sia localmente lipschitziana in y , uniformemente rispetto a t . Ciò significa che, per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$, esiste una costante L_K tale che:

$$|\mathbf{f}(t, y) - \mathbf{f}(t, z)| \leq L_K |y - z| \quad \text{per ogni } y, z \in K, \quad t \in I.$$

Ancora, sotto l'ipotesi di continuità di \mathbf{f} e delle sue derivate parziali rispetto alle y_i , la condizione (2.12), sufficiente per l'esistenza e unicità globale, è soddisfatta, in particolare nei due casi semplici: quando $\mathbf{f}(t, y)$ è limitata in y :

$$(2.13) \quad |\mathbf{f}(t, y)| \leq h \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}$$

e quando le sue derivate parziali rispetto alle y_i sono limitate:

$$(2.14) \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, y) \right| \leq k \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

TEOREMA 8.9 (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI) Siano $f_1(t, y), f_2(t, y)$ due funzioni continue in un aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, localmente lipschitziane rispetto a y , uniformemente in t . Siano $(t_0, y_1), (t_0, y_2) \in D$ e siano $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, rispettivamente, le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = y_2. \end{cases}$$

Allora, se nell'intervallo $[t_0, t_0 + T]$ entrambe le soluzioni sono definite, vale la diseguaglianza:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq (|y_1 - y_2| + (t - t_0) M) e^{L(t-t_0)} \quad \text{per ogni } t \in (t_0, t_0 + T)$$

dove

$$M = \max_{(t,y) \in K} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|,$$

L è la costante di lipschitzianità di f_1 e f_2 su K , e K è un insieme chiuso e limitato contenuto in D e contenente i grafici delle soluzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

Un caso notevole in cui possiamo applicare i risultati precedenti è il seguente:

Esempio

EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI. Consideriamo un sistema lineare del tipo:

$$(2.15) \quad \begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y'_2 = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

o, in forma matriciale,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

dove

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n; \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se a_{ij} e b_k sono funzioni di classe $C^0([a, b])$, la (2.14) è soddisfatta; infatti, in questo caso f è continua e

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, y) \right| = |a_{ik}(t)| \leq h \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S},$$

avendo posto

$$h = \max_{i,k=1,\dots,n} \max_{t \in [a,b]} |a_{ik}(t)|.$$

Dunque, la soluzione del problema di Cauchy per il sistema lineare (2.15) esiste ed è unica in tutto $[a, b]$. Se poi le funzioni a_{ij} e b_k sono continue in tutto \mathbb{R} , la soluzione sarà definita in tutto \mathbb{R} (perché è definita in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$).

Analogamente, per un'equazione lineare di ordine n

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y + a_1(t)y' + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

si ricava facilmente (riscrivendo l'equazione in forma di sistema di n equazioni del prim'ordine) che ogni soluzione è definita in tutto l'intervallo di continuità dei coefficienti.

OSSERVAZIONE (CONDIZIONI DIVERSE DA QUELLE INIZIALI) Concludiamo questo paragrafo segnalando che, nello studio dei modelli matematici nelle scienze applicate, si incontrano talvolta altri tipi di condizioni aggiuntive, diverse dalle condizioni iniziali

(2.6); un esempio è dato dalle cosiddette *condizioni ai limiti*, condizioni cioè che vengono prescritte agli estremi di un intervallo, come per esempio nel caso seguente:

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = A \\ y(b) = B. \end{cases}$$

In questo caso le condizioni chiedono alla soluzione di "passare" per i due punti $(a, A), (b, B)$ del piano (t, y) e perciò la soluzione deve essere definita in tutto l'intervallo $[a, b]$. Ciò conferisce a un problema ai limiti un aspetto di *globalità* che quello ai valori iniziali, a priori, non possiede. Per i suddetti motivi, la teoria utilizza metodologie di indagine molto diverse nei due tipi di problemi; noi non ce ne occuperemo.

Esercizi

 Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x' = tx \\ y' = ty + x. \end{cases}$$

Suggerimento: la prima equazione non dipende da y : risolverla e sostituire la x così trovata nella seconda equazione.

 Si consideri il seguente sistema di due equazioni del second'ordine in due funzioni incognite x_1, x_2 :

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_1(t) \\ m_2 x_2'' + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = F_2(t). \end{cases}$$

Significato fisico: due masse m_1, m_2 si muovono senza attrito su una retta orizzontale, avendo posizione x_1, x_2 ; tre molle di costanti elastiche k_1, k_2, k_3 collegano rispettivamente la prima massa a un punto fisso, le due masse tra loro, la seconda massa a un secondo punto fisso; la massa m_1 è soggetta a una forza esterna F_1 dipendente dal tempo.

- (i) Riscrivere il sistema nella forma di un sistema di 4 equazioni del prim'ordine.
- (ii) Nell'ipotesi $m_1 = m_2, k_1 = k_2 = k_3, F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv 0$ mostrare come, operando opportunamente sul sistema di partenza, se ne può ricavare un'equazione di 4° grado nella sola incognita x_1 , lineare a coefficienti costanti. Risolverla con i metodi esposti nel capitolo 1, paragrafo 4.2, quindi impostare la risoluzione dell'equazione in x_2 .

■ 3 COMPLEMENTI

3.1 Lemma di Gronwall e dipendenza continua

Dimostriamo ora il teorema 8.9 di dipendenza continua delle soluzioni dagli ingredienti del problema.

Premettiamo il seguente lemma, che esprime un'importante diseguaglianza dell'Analisi:

LEMMA 8.10 (DI GRONWALL) *Sia $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa, sia $t_0 \in I$ e supponiamo che per certe due costanti $a, b > 0$ sia:*

$$h(t) \leq a + b \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \text{per ogni } t \geq t_0, t \in I.$$

Allora

$$h(t) \leq ae^{b(t-t_0)} \quad \text{per ogni } t \geq t_0, t \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$w(t) = a + b \int_{t_0}^t h(s) ds,$$

allora $w \in C^1(I)$, $w'(t) = bh(t)$, perciò

$$w'(t) \leq bw(t) \quad \text{per ogni } t \geq t_0, t \in I.$$

Integrando in (t_0, t) , troviamo:

$$\int_{t_0}^t \frac{w'(s)}{w(s)} ds \leq b(t - t_0)$$

ossia (poiché $w(t_0) = a$)

$$w(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$$

e, poiché per ipotesi $h(t) \leq w(t)$, la tesi è provata. \diamond

Proviamo ora il teorema di dipendenza continua, di cui per comodità riportiamo l'enunciato.

TEOREMA 8.9 (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI) Siano $f_1(t, y)$, $f_2(t, y)$ due funzioni continue in un aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, localmente lipschitziane rispetto a y , uniformemente in t . Siano (t_0, y_1) , $(t_0, y_2) \in D$ e siano $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, rispettivamente, le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = y_2. \end{cases}$$

Allora, se nell'intervallo $[t_0, t_0 + T]$ entrambe le soluzioni sono definite, vale la disegualanza:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq (|y_1 - y_2| + (t - t_0)M) e^{L(t-t_0)} \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + T]$$

dove

$$M = \max_{(t, y) \in K} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|,$$

L è la costante di lipschitzianità di f_1 e f_2 su K , e K è un insieme chiuso e limitato contenuto in D e contenente i grafici delle soluzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo anzitutto¹⁵:

$$\varphi_i(t) = y_i + \int_{t_0}^t \varphi'_i(\tau) d\tau = y_i + \int_{t_0}^t f_i(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau, \quad \text{per } i = 1, 2.$$

¹⁵abbiamo usato il teorema fondamentale del calcolo integrale in forma vettoriale: v. capitolo 2, teorema 2.2.

Sottraendo membro a membro le due identità per $i = 1, 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) - \varphi_2(t) &= y_1 - y_2 + \int_{t_0}^t [f_1(\tau, \varphi_1(\tau)) - f_1(\tau, \varphi_2(\tau))] d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [f_1(\tau, \varphi_2(\tau)) - f_2(\tau, \varphi_2(\tau))] d\tau,\end{aligned}$$

da cui¹⁶:

$$\begin{aligned}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |y_1 - y_2| + \int_{t_0}^t |f_1(\tau, \varphi_1(\tau)) - f_1(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t |f_1(\tau, \varphi_2(\tau)) - f_2(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau\end{aligned}$$

per definizione di M e per la lipschitzianità di f_1

$$\leq |y_1 - y_2| + \int_{t_0}^t L |\varphi_2(\tau) - \varphi_2(\tau)| d\tau + M(t - t_0).$$

Abbiamo dunque ottenuto, per ogni $t \in (t_0, t_0 + T)$,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |y_1 - y_2| + M(t - t_0) + L \int_{t_0}^t |\varphi_2(\tau) - \varphi_2(\tau)| d\tau$$

da cui, per il lemma di Gronwall, segue la tesi.

◆

4 SISTEMI AUTONOMI BIDIMENSIONALI

4.1 Generalità

Un sistema (2.2) si dice *autonomo* se f non dipende esplicitamente da t , cioè se è della forma:

$$(4.1) \quad y' = f(y).$$

In questo paragrafo ci occuperemo dei sistemi di questo tipo *bidimensionali*, anche se alcune definizioni date nel seguito si estendono facilmente al caso n -dimensionale. Scriveremo il sistema nella forma scalare:

$$(4.2) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con $f, g \in C^1(D)$, D aperto di \mathbb{R}^2 . Queste ipotesi garantiscono esistenza e unicità per la soluzione del problema di Cauchy con i dati iniziali:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } (x_0, y_0) \in D \text{ assegnato.}$$

¹⁶v. Lemma 2.3, capitolo 2.

Curve integrali e orbite

Una soluzione di (4.2) è una funzione

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

definita su qualche intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, di classe $C^1(I)$ e soddisfacente il sistema (4.2). Il grafico di questa funzione è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che rappresenta una curva di equazioni parametriche

$$(4.3) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & t \in I \\ z = t \end{cases}$$

e viene detta *curva integrale*. Il piano delle variabili di stato x, y è detto *piano delle fasi*; la proiezione di una curva integrale sul piano delle fasi è la curva piana orientata (in base all'orientazione di I) di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{cioè } \mathbf{r}(t), \text{ con } t \in I.$$

Tali curve si chiamano *orbite* o *traiettorie* del sistema (4.2). $\mathbf{r}(t)$ è il vettore posizione (esso ci dice in quale stato si trova il sistema all'istante t) e $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ (il vettore velocità) è tangente alla traiettoria in $\mathbf{r}(t)$. Risolvere il sistema (4.2) si può interpretare così: in D è assegnato un campo di velocità che associa a ogni punto $(x, y) \in D$ un vettore

$$\mathbf{v} = (f(x, y), g(x, y));$$

si tratta di trovare le curve che sono tangenti a \mathbf{v} in ogni punto.

Esempio

ESEMPIO La figura 8.4 rappresenta il campo di velocità del sistema:

$$(4.4) \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

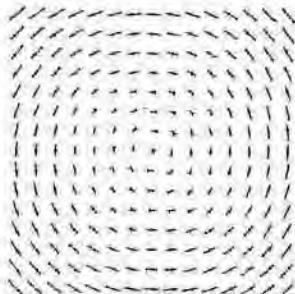


Figura 8.4. Il campo di velocità $\mathbf{v} = (-y, x)$ associato al sistema (4.4).

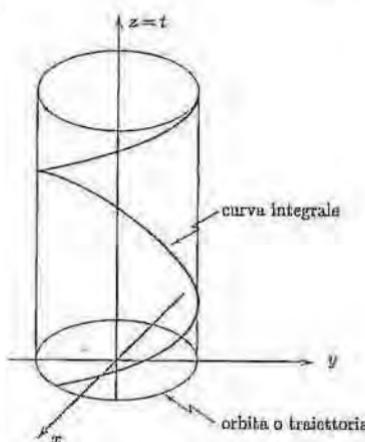


Figura 8.5. Una curva integrale del sistema (4.4) e la corrispondente orbita.

Una soluzione di (4.4) è:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \text{ per } t \in [0, 2\pi],$$

il cui grafico è un arco di elica cilindrica e la cui orbita è la circonferenza, con centro nell'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Come abbiamo visto nel caso unidimensionale, il fatto che il sistema sia autonomo comporta che le soluzioni sono invarianti per traslazioni temporali, cioè se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ è una soluzione di (4.2) definita in $I = (a, b)$, allora

$$\mathbf{s}(t) = (x(t + \tau), y(t + \tau))$$

(per $\tau \in \mathbb{R}$ fissato) è soluzione dello stesso sistema in $(a - \tau, b - \tau)$; infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'(t) &= (x'(t + \tau), y'(t + \tau)) = \\ &= (f(x(t + \tau), y(t + \tau)), g(x(t + \tau), y(t + \tau))) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(t)). \end{aligned}$$

Si osservi che le due soluzioni hanno la stessa orbita: perciò a ogni orbita corrispondono infinite soluzioni, ognuna ottenuta da un'altra per traslazione temporale. Se, invece di una traslazione, facciamo un'inversione temporale, cioè consideriamo la funzione $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(-t)$, questa risulta ancora soluzione di (4.2) in $(-b, -a)$, a cui corrisponde geometricamente ancora la stessa orbita di $\mathbf{r}(t)$, ma percorsa in verso opposto.

Una conseguenza importante della proprietà di invarianza appena ricordata è che le orbite non possono intersecarsi: ogni punto $p \in D$ appartiene a una e una sola orbita. Infatti, se il punto p appartenesse a due orbite distinte, corrispondenti a due soluzioni $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, esisterebbero due istanti t_1, t_2 per cui

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{s}(t_2) = p.$$

Ma allora, posto $\tau = t_2 - t_1$, la funzione $\mathbf{w}(t) = \mathbf{s}(t + \tau)$ sarebbe una soluzione del sistema tale che:

$$\mathbf{w}(t_1) = \mathbf{s}(t_1 + \tau) = \mathbf{s}(t_2) = p$$

a perciò w ed r sarebbero due diverse soluzioni soddisfacenti la stessa condizione iniziale, cioè due diverse soluzioni dello stesso problema di Cauchy, in contrasto col teorema di esistenza e unicità.

Stati stazionari e cicli

Due tipi di orbite hanno un'importanza particolare: quelle che si riducono a un solo punto (sono detti *stati di equilibrio* o *stati stazionari* o *punti critici* o *singolari*; corrispondono a una soluzione costante) e i *cicli* (cioè curve semplici e chiuse che, come vedremo, corrispondono a *soluzioni periodiche*).

DEFINIZIONE 8.3 Un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ è uno stato stazionario del sistema (4.2) se

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$



Un tale punto è perciò l'orbita corrispondente alla soluzione costante $\mathbf{r}(t) = (\bar{x}, \bar{y})$, il cui grafico in \mathbb{R}^3 è la retta parallela all'asse t passante per tale punto. Se all'istante iniziale il sistema si trova in questo stato, vi rimane per sempre. Nessuna soluzione può raggiungere questo stato in un tempo finito (due diverse orbite non hanno punti in comune), ma una soluzione può tendere a un punto di equilibrio per $t \rightarrow \pm\infty$; anzi, se una soluzione $(x(t), y(t))$ ammette limite (\bar{x}, \bar{y}) per $t \rightarrow +\infty$ (oppure per $t \rightarrow -\infty$), allora il punto (\bar{x}, \bar{y}) è uno stato stazionario del sistema, come si deduce passando al limite in ambo i membri della (4.2).

Abbiamo già sottolineato l'importanza del concetto di stabilità. Come abbiamo fatto per il caso scalare, possiamo classificare i punti stazionari riguardo alla stabilità.

DEFINIZIONE 8.4 Indicando con $\varphi(t; q)$ la soluzione del sistema (4.2) che si trova all'istante $t = 0$ nel punto q , diremo che il punto di equilibrio $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ è:

- (i) *stabile* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|\bar{p} - q| < \delta$, la soluzione $\varphi(t; q)$ esiste per ogni $t \geq 0$ e risulta

$$|\varphi(t; q) - \bar{p}| < \varepsilon \text{ per ogni } t \geq 0;$$

- (ii) *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre esiste δ_1 tale che, se $|\bar{p} - q| < \delta_1$, risulta

$$\varphi(t; q) \rightarrow \bar{p} \text{ per } t \rightarrow +\infty;$$

- (iii) *instabile* se non è stabile.

Se \bar{p} è asintoticamente stabile, si dice anche che è un *attrattore locale*: esiste un intorno U di \bar{p} tale che ogni orbita che ha origine in U converge a \bar{p} ; l'unione di tutti gli intorni U con questa proprietà costituisce il *bacino di attrazione* di \bar{p} .



Di fondamentale importanza sono anche le soluzioni $\varphi(t)$ *periodiche*, cioè: esiste $T > 0$ tale che $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma $\varphi(t+\tau) \neq \varphi(t)$ per $\tau \in (0, T)$. Allora T si chiama *periodo*; chiaramente la traiettoria descritta da $\varphi(t)$ è una curva semplice e chiusa (*ciclo*).

La cosa notevole è che, per i sistemi autonomi, vale anche il viceversa, cioè:

PROPOSIZIONE 8.1 *Se in due istanti diversi il sistema ripassa dallo stesso punto, allora l'orbita è periodica.*

DIMOSTRAZIONE. Questo dipende ancora dall'invarianza per traslazioni temporali. Sia $\varphi(t; y_0)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione $\varphi(0; y_0) = y_0$; supponiamo che $\varphi(T; y_0) = \varphi(0; y_0)$ per un certo $T > 0$ (anzì, possiamo supporre che T sia il minimo dei numeri per cui questo accade), e proviamo che allora $\varphi(t+T; y_0) = \varphi(t; y_0)$ per ogni $t > 0$. Infatti, $\psi(t) = \varphi(t+T; y_0)$ risolve ancora il sistema (4.1) e soddisfa la condizione:

$$\psi(0) = \varphi(T; y_0) = \varphi(0; y_0) = y_0.$$

Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, $\psi(t) = \varphi(t; y_0)$, che è la tesi. \diamond

Perciò, per i sistemi autonomi i concetti di orbita chiusa e orbita periodica coincidono.

Per esempio, la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ è un ciclo per il sistema (4.4); è facile mostrare che ogni soluzione di questo sistema è 2π -periodica (Esempio 4.1). Ogni ciclo divide il piano delle fasi in due regioni, una interna e una esterna: ogni orbita che nasce (al tempo t_0) all'interno di un ciclo vi resta per sempre intrappolata; ogni orbita che nasce all'esterno resta per sempre esterna. Un'orbita può avvicinarsi indefinitamente a un ciclo, avvolgendosi a spirale attorno a esso senza mai toccarlo; in tal caso il ciclo prende il nome di *ciclo limite*.

Anche i cicli limiti si possono classificare in base alla stabilità, come abbiamo fatto per gli stati stazionari.

In conclusione, si può mostrare che le traiettorie possono essere solo di tre tipi: *punti di equilibrio, cicli, curve semplici non chiuse.*

Integrali primi, o costanti di moto

Un concetto importante è quello di *integrale primo*, o *costante del moto*. Sia $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(D)$. Essa si chiamerà integrale primo se è costante lungo le traiettorie del sistema. Più precisamente, sia $\varphi(t)$ una soluzione del sistema (4.2) (definita nel suo intervallo massimale); allora è ben definita la funzione composta $E(\varphi(t))$. Essendo $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$, si ha:

$$\frac{d}{dt}[E(\varphi(t))] = \nabla E(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \nabla E(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) = (\nabla E \cdot f)(\varphi(t)).$$

Allora chiameremo E integrale primo o costante del moto per il sistema (4.2) se $\frac{d}{dt}[E(\varphi(t))] = 0$, cioè se e solo se ∇E risulta ortogonale al campo di velocità (f, g) . L'importanza degli integrali primi è dovuta al fatto che, se un integrale primo E è noto, le sue curve di livello

$$E(x, y) = k$$

hanno le seguenti proprietà: ogni curva di livello di E è unione di orbite di (4.2) e, viceversa, ogni orbita è contenuta in qualche curva di livello. Per convincersene, basta osservare che:

- (i) $v(x, y)$ (cioè il vettore velocità (f, g)) è tangente all'orbita passante per (x, y) ;
- (ii) ∇E è ortogonale alla curva di livello passante per (x, y) ;
- (iii) ∇E è ortogonale a v .

Perciò v dev'essere tangente alla curva di livello nel punto (x, y) e questa dev'essere un'orbita in vicinanza di (x, y) .

Esempio

Illustriamo ora i concetti introdotti in questo paragrafo con alcuni esempi. Qui ci limiteremo a studiare il comportamento delle orbite vicino ai punti di equilibrio, che di solito è ciò che più interessa nelle applicazioni.

Una descrizione qualitativamente accurata dell'andamento delle orbite di un sistema si chiama *ritratto di fase*; un completo ritratto di fase sarà descritto nel paragrafo 4.2 per i sistemi lineari, mentre l'analisi di qualche caso non lineare sarà svolta nel paragrafo 4.3.

Osserviamo preliminarmente che, nell'intorno di un punto regolare (non di equilibrio), al sistema (4.2) è associata l'equazione differenziale (ottenuta eliminando t dalle due equazioni del sistema):

$$(4.5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad \text{oppure} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Ogni soluzione dell'equazione differenziale coincide (almeno localmente) con una traiettoria del sistema e viceversa. Si noti, che nei punti regolari in cui $g(x, y) = 0$ oppure $f(x, y) = 0$, la direzione del campo vettoriale (f, g) , tangente all'orbita, è orizzontale o verticale, rispettivamente. Studiando i segni di f e g si può poi ripartire il piano delle fasi nelle zone di crescenza e decrescenza per x e y , determinando così anche il verso di percorrenza delle orbite.

Esempio

Il sistema lineare (4.4), cioè

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x, \end{cases}$$

il cui campo di velocità è rappresentato dalla figura 8.4, ha un unico punto di equilibrio: l'origine. L'equazione differenziale delle traiettorie è:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{cioè} \quad yy' = -x$$

(oppure $x' = -\frac{y}{x}$ cioè $xx' = -y$), il cui integrale generale è

$$x^2 + y^2 = c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Tutte le orbite sono cicli, tutte le soluzioni sono periodiche. Nella figura 8.5 è rappresentata un'orbita e la corrispondente curva integrale, che è un'elica cilindrica. Per determinare il verso di percorrenza dell'orbita basta osservare, per esempio, che, essendo $x' = -y$, $x(t)$ dev'essere decrescente nel semipiano $y > 0$; perciò l'orbita è percorsa in senso antiorario. Il punto di equilibrio è stabile, ma non asintoticamente stabile. Osserviamo infine che $E(x, y) = x^2 + y^2$ è un integrale primo; infatti $\nabla E = (2x, 2y)$ è ortogonale al vettore velocità $(-y, x)$.

Esempio

Il sistema di Lotka-Volterra

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx \end{cases}$$

(che abbiamo introdotto nell'esempio 2.1, a cui rimandiamo per il significato modellistico) ha l'unico punto di equilibrio $(c/d, a/b)$. Un integrale primo è dato da:

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by.$$

Infatti, moltiplicando la prima delle (4.6) per $(-c + dx)$ e la seconda per $(a - by)$, sottraendo si trova:

$$0 = \left(-\frac{c}{x} + d\right)x' - \left(\frac{a}{y} - b\right)y' = \frac{d}{dt}[-c \log x + dx - a \log y + by]$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}[E(x(t), y(t))] = 0.$$

Dallo studio di questo integrale primo possiamo estrarre informazioni qualitative sull'andamento delle orbite (almeno in vicinanza del punto di equilibrio), come ora vedremo. Essendo

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = 0,$$

si ha che E è strettamente convessa¹⁷ in $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Inoltre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{c}{x} + d = 0 \text{ per } x = \frac{c}{d} \text{ e} \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= -\frac{a}{y} + b = 0 \text{ per } y = \frac{a}{b},\end{aligned}$$

quindi l'unico punto di equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ è punto di minimo globale¹⁸ per E . Osserviamo inoltre che $E(x, y) \rightarrow +\infty$ quando x oppure y tende a 0 oppure a $+\infty$. Si deduce allora che, per $k > E(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, gli insiemi di livello

$$\{(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) : E(x, y) = k\}$$

sono curve chiuse regolari che contengono il punto di equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ al loro interno. L'evoluzione della coppia $x(t), y(t)$ è di conseguenza periodica con un periodo T che dipende da k . Il ritratto di fase è indicato in figura 8.6a. Lo studio dei segni di $a - by$ e $-c + dx$ indica che il verso di percorrenza sulle orbite è antiorario. In figura 8.6b è illustrato l'andamento tipico di $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Come nell'esempio precedente, il punto di equilibrio è stabile, ma non asintoticamente stabile.

Possiamo ora rispondere alla questione relativa alla pesca nel mare Adriatico posta nell'esempio 2.1.

Anzitutto osserviamo che, essendo $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$, si ha:

$$\int_0^T \frac{x'}{x} dt = [\log x(t)]_0^T = \log x(T) - \log x(0) = 0$$

e analogamente:

$$\int_0^T \frac{y'}{y} dt = 0.$$

¹⁷v. capitolo 3, paragrafo 7.1.

¹⁸v. capitolo 3, paragrafo 7.2.

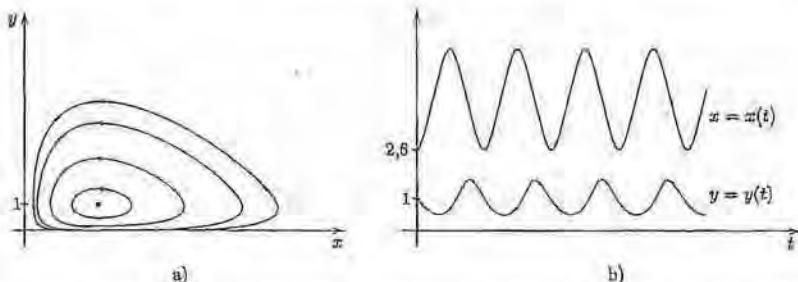


Figura 8.6. a) orbite del sistema Lotka-Volterra corrispondenti ai dati iniziali $x = 0,5, 0,7, 1,4, 2,6$ e $y = 1$. b) grafici di $x = x(t)$, $y = y(t)$, soluzioni del sistema di Lotka-Volterra con dati iniziali $x(0) = 2,6$ e $y(0) = 1$.

Integrando allora ambo i membri delle (4.6), si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (a - by(t)) dt = aT - b \int_0^T y(t) dt; \\ 0 &= \int_0^T (-c + dx(t)) dt = -cT + d \int_0^T x(t) dt, \end{aligned}$$

ovvero

$$(4.7) \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}; \quad \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}.$$

Le formule (4.7) indicano che le coordinate a/b e c/d del punto di equilibrio hanno anche il significato di *numero medio di individui nell'arco di un periodo*. È interessante osservare che questi valori medi sono comuni a tutte le orbite.

Ora, una diminuzione della pesca:

- aumenta il tasso di crescita di x ; invece di a si ha $a + \epsilon$;
- riduce il tasso di diminuzione di y ; da c si passa a $c - \eta$;
- lascia inalterati i coefficienti b, d di interazione tra le specie.

I numeri medi (4.7) diventano allora $\frac{a+\epsilon}{b}$ per i predatori, $\frac{c-\eta}{d}$ per le prede; queste ultime registrano perciò una diminuzione media. La conclusione, nota come "principio di Volterra", è valida in molti altri casi, per modelli anche più realistici del sistema (4.6).

Integrale primo dell'energia. Consideriamo l'equazione (autonoma) di Newton

$$(4.8) \quad y'' = f(y),$$

che modellizza un *sistema conservativo a un grado di libertà*. Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$, cosicché per ogni $t_0, \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(t_0) = \xi_0 \\ y'(t_0) = \xi_1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione locale. Il sistema equivalente a (4.8) ha la forma

$$(4.9) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(y_1) \end{cases}$$

Nello spazio delle variabili y_1, y_2 (spazio delle fasi), consideriamo le seguenti funzioni:

$$T(y_2) = \frac{y_2^2}{2} = \text{energia cinetica};$$

$$U(y_1) = - \int_0^{y_1} f(s) ds = \text{energia potenziale};$$

$$E = T + U = \text{energia meccanica}.$$

La ragione del termine *conservativo* sta nel fatto che, durante il moto, l'energia meccanica E rimane costante (si conserva). Più precisamente, se

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

è una traiettoria del sistema, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) &= \frac{d}{dt} T(\varphi_2(t)) + \frac{d}{dt} U(\varphi_1(t)) = \\ &= \varphi_2(t) \varphi'_2(t) - f(\varphi_1(t)) \varphi'_1(t) = \end{aligned}$$

(utilizzando le (4.9))

$$= 0.$$

Perciò E è una costante del moto, o un integrale primo del sistema. Si può mostrare che, se l'energia potenziale U si mantiene limitata inferiormente, vale a dire se esiste c_0 tale che $U(y) \geq c_0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, allora ogni soluzione di (4.1) esiste in tutto \mathbb{R} .

 *Grandi oscillazioni di un pendolo senza attrito.* Un corpo puntiforme è sospeso all'estremità di un'asta rigida, di massa trascurabile e lunghezza l . L'asta è fissata all'altra estremità a un perno ed è libera di ruotare senza attrito in un piano verticale, soggetta alla sola forza gravitazionale (fig. 8.7). L'equazione di Newton del moto è

$$ml\varphi'' = -mg \sin \varphi$$

ossia, ponendo $k = g/l$,

$$(4.10) \quad \varphi'' = -k \sin \varphi.$$

Alla (4.10) è associato il sistema (ponendo $z_1 = \varphi, z_2 = \varphi'$)

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -k \sin z_1. \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono infiniti e hanno coordinate $(\nu\pi, 0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$. La periodicità di $\sin z_1$ indica che è sufficiente limitarsi a considerare $z_1 \in [-\pi, \pi]$.

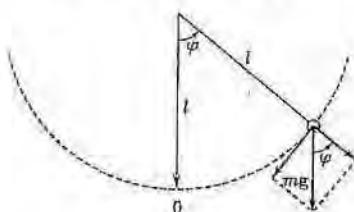


Figura 8.7.

Essendo il sistema conservativo, la funzione energia

$$E(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_2^2 + k(1 - \cos z_1)$$

è un integrale primo (Esempio 4.4).

Incidentalmente osserviamo che l'energia potenziale $U(z_1) = k(1 - \cos z_1)$ è non negativa e quindi le soluzioni sono definite su tutto \mathbb{R} .

Le orbite sono descritte dalla famiglia degli insiemi di livello dell'energia

$$\frac{1}{2}z_2^2 + k(1 - \cos z_1) = c \quad c \geq 0,$$

che si può risolvere rispetto a z_2 , ottenendo:

$$(4.11) \quad z_2 = \pm\sqrt{2(c - k(1 - \cos z_1))}.$$

Si distinguono allora i casi seguenti¹⁹.

1. $c = 0$; è questo il livello minimo di energia e le (4.11) si riducono al punto di equilibrio $(0, 0)$.

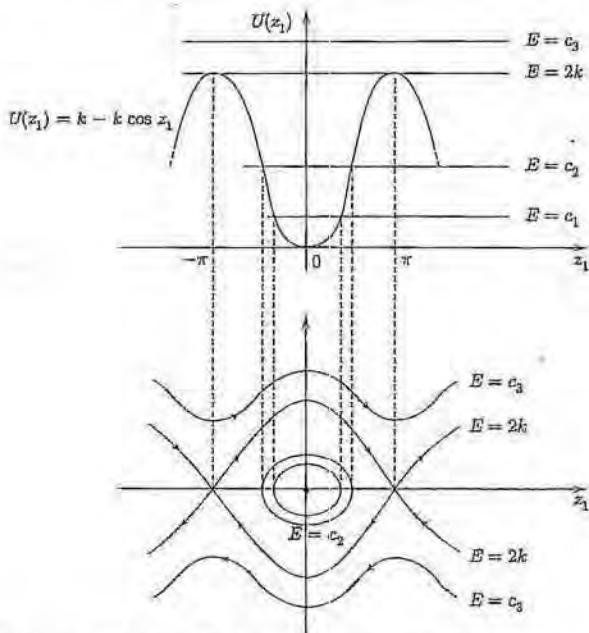


Figura 8.8. Energia potenziale e orbite per il moto del pendolo senza attrito.

¹⁹Il lettore è invitato a rendersi conto in dettaglio delle prossime affermazioni, studiando le funzioni (4.11) al variare dei parametri c, k .

2. $0 < c < 2k$; ogni coppia di equazioni (4.11) individua una traiettoria chiusa attorno all'origine. Questi livelli di energia corrispondono al moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio $(0, 0)$.
3. $c = 2k$; ogni coppia di equazioni (4.11) individua una curva chiusa nel piano contenente quattro orbite: i due punti di equilibrio $(\pm\pi, 0)$ e altre due orbite che li connettono, che si chiamano *eterocline* e corrispondono a un avvicinamento (in tempo infinito) del pendolo alla posizione di equilibrio verticale sopra il perno.
4. $c > 2k$; ciascuna delle (4.11) individua un'orbita non chiusa. Questi livelli di energia corrispondono al moto di rivoluzione completa del pendolo.

La configurazione generale delle orbite è indicata in figura 8.8. Il verso di percorrenza è determinato (per esempio) dal fatto che $z'_1 = z_2 > 0$ per $z_2 > 0$. Quanto alla stabilità degli equilibri, dalla discussione precedente si comprende che l'origine è stabile (non asintoticamente), mentre i punti $(\pm\pi, 0)$ sono instabili (si veda anche nel paragrafo 4.3, esempio 4.8).



Esercizio 8.8 Fare un esempio di sistema non autonomo per cui esistono orbite chiuse non periodiche. (Suggerimento: considerare $\varphi(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$ e trovare un sistema di cui questa è soluzione). Di conseguenza, l'equivalenza tra orbite chiuse e orbite periodiche, che abbiamo dimostrato per i sistemi autonomi, non vale in generale per sistemi qualsiasi.

Esercizio 8.9 Scrivere l'integrale primo dell'energia (v. esempio 4.4) per l'equazione dell'oscillatore armonico

$$y'' = -\omega^2 y.$$

Esercizio 8.10 Il seguente sistema è una variante del sistema di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x}' = x(a - by - ex) \\ \dot{y}' = y(-c + dx - fy) \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0, e, f \in \mathbb{R}$. Trovare gli stati stazionari.

Esercizio 8.11 Mostrare che la funzione

$$E(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

è una costante del moto per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}' = -x - 2y \\ \dot{y}' = 2x + y. \end{cases}$$

Esercizio 8.12 Si consideri il sistema autonomo bidimensionale (4.2). Mostrare che, se l'equazione differenziale delle traiettorie è esatta²⁰, allora esiste un integrale primo.

Esercizio 8.13 *Un problema di farmacocinetica.* Sia $c(t)$ la concentrazione di una sostanza nel sangue di un paziente. Una dose costante c_0 viene somministrata a ogni intervallo di tempo T , in particolare al tempo $t = 0$. Si studi l'andamento di $c(t)$ nei seguenti due casi:

- (i) $c'(t) = kc(t)$;

²⁰v. paragrafo 1.2.

(ii) $c'(t) = kc(t)^2$,

con $k > 0$. In particolare:

a) tracciare il grafico di $c(t)$ in un intervallo di tempo $[0, mT]$, $m \in \mathbb{N}$;

b) studiare il comportamento asintotico di $c(t)$ per $t \rightarrow +\infty$ e dimostrare che esiste una concentrazione limite c_∞ .

c) Si può dire che c_∞ è un punto d'equilibrio? È stabile? Come dipende c_∞ dalla dose c_0 ?

4.2 Stabilità per sistemi autonomi lineari

Consideriamo il sistema (2.2) e cerchiamo di studiare in generale i suoi punti di equilibrio. Osserviamo anzitutto che, per i sistemi autonomi, se \bar{y} è punto di equilibrio, con la traslazione $z(t) = y(t) - \bar{y}$ il sistema $y' = f(y)$ si trasforma in

$$z' = f(z(t) + \bar{y}) \equiv g(z(t)).$$

Alla soluzione $y(t) = \bar{y}$ del sistema originale corrisponde la soluzione $z(t) = 0$ del nuovo sistema e viceversa. Perciò nella discussione che segue, assumeremo che 0 sia il punto di equilibrio da prendere in esame.

In questo paragrafo supporremo che il sistema (2.2) sia *bidimensionale* e *lineare*, cioè f sia rappresentata da una matrice $A: 2 \times 2$ a coefficienti reali²¹. In questo caso l'analisi può essere condotta facilmente in modo completo, fino a una classificazione di tutti i possibili comportamenti delle traiettorie vicino a 0.

Consideriamo dunque un sistema omogeneo bidimensionale:

$$(4.12) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Sarà allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supporremo $\det A = ad - bc \neq 0$, cosicché l'origine è l'*unico* stato di equilibrio del sistema. Osserviamo che un'equazione del second'ordine lineare omogenea a coefficienti costanti²²,

$$x'' = Ax' + Bx$$

può riscriversi nella forma di un sistema (4.12), ponendo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = Ay + Bx. \end{cases}$$

Viceversa, al sistema (4.12) corrisponde sempre un'equazione del second'ordine a coefficienti costanti. Infatti, derivando la seconda equazione (4.12) abbiamo:

$$y'' = cx' + dy'$$

da cui, sostituendo in quest'equazione x' e y' dati dalle (4.12), otteniamo:

$$(4.13) \quad y'' = c(a+d)x + (cb+d^2)y.$$

²¹Alla fine del paragrafo accenneremo brevemente ai sistemi lineari n -dimensionali.

²²v. capitolo 1, paragrafo 3.4.

Ricavando poi dalla seconda delle (4.12) $cx = y' - dy$ e sostituendola nella (4.13), abbiamo infine:

$$(4.14) \quad y'' = (a+d)y' - (cb-ad)y = (\text{Tr A})y' - (\det A)y.$$

Nel capitolo 1 abbiamo esaminato le soluzioni dell'equazione (4.14); qui analizzeremo le orbite del sistema corrispondente (4.12). Lo studente vedrà come, anche in questo caso elementare, l'analisi delle orbite descrive con maggiore chiarezza ed evidenza il quadro generale, che non lo studio delle soluzioni.

Per seguire la prossima discussione, conviene ricordare che, come abbiamo visto nel capitolo 1, paragrafo 3.4, le soluzioni della (4.14) sono esponenziali $e^{\lambda t}$, con λ soluzione dell'equazione caratteristica²³:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda - (cb-ad) = 0$$

che si può scrivere nella forma

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$$

e perciò λ è un autovalore della matrice A. Se h è l'autovettore corrispondente, la soluzione del sistema (4.12) sarà $he^{\lambda t}$. Infatti, per definizione di autovalore, $Ah = \lambda h$ e quindi

$$\lambda he^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t}$$

che, ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = he^{\lambda t},$$

si riscrive come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda he^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

pertanto $he^{\lambda t}$ è soluzione del sistema (4.12).



L'equazione

$$y'' = \omega^2 y$$

è equivalente al sistema $y' = Ay$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \omega^2 y_1. \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \omega$; $\lambda_2 = -\omega$ e i corrispondenti autovettori sono

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

²³Questo è vero nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano semplici; lo studente modifichi l'osservazione nel caso della radice doppia.

L'integrale generale dell'equazione si scrive:

$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

(con c_1, c_2 costanti arbitrarie), mentre l'integrale generale del sistema si scrive:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}.$$

Consideriamo dunque il sistema (4.12), indichiamo con λ_1 e λ_2 gli autovalori di A , soluzioni dell'equazione caratteristica, e distinguiamo vari casi secondoché la matrice A possieda:

- i) due autovalori λ_1, λ_2 reali e distinti;
- ii) due autovalori reali coincidenti;
- iii) due autovalori complessi coniugati.

Distingueremo poi dei sottocasi in corrispondenza del segno degli autovalori.

i) *Autovalori reali e distinti.* Il sistema possiede le due soluzioni (linearmente indipendenti) $\mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t}$, $\mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}$, dove \mathbf{h}^1 e \mathbf{h}^2 sono autovettori (reali) di A ; ogni soluzione reale sarà della forma

$$\varphi(t) = c_1 \mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t},$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

ii) Sia $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Infatti ogni orbita, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi (x, y) , si avvicina indefinitamente all'origine. Prendendo $c_2 = 0$ si hanno le due traiettorie rettilinee indicate nella figura 8.9a con γ_1^+ e γ_1^- ; prendendo $c_1 = 0$ si hanno le due traiettorie γ_2^+ e

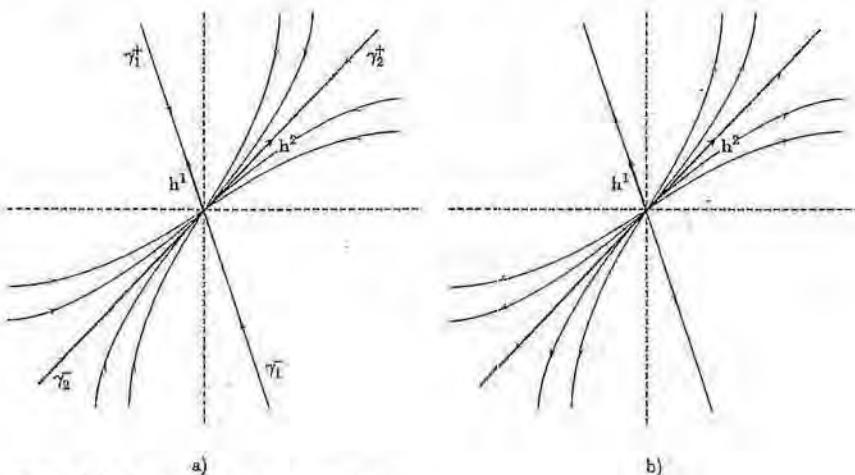


Figura 8.9. a) nodo stabile. b) nodo instabile

γ_2^+ ; l'andamento delle altre traiettorie è pure illustrato nella figura 10a. Si osservi che, essendo $\lambda_2 > \lambda_1$, per $t \rightarrow +\infty$ il termine $c_2 h^2 e^{\lambda_2 t}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto all'altro $c_2 h^2 e^{\lambda_1 t}$, cosicché tutte le traiettorie (tranne γ_1^\pm) sono asintotiche a γ_2^\pm .

Il punto di equilibrio prende il nome di *nodo* (stabile).

i2) Sia $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. L'origine è instabile. La discussione di questo caso è del tutto analoga alla precedente; le traiettorie hanno, geometricamente, lo stesso andamento, ma il punto mobile, rappresentante la soluzione, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi, prossimo quanto si vuole all'origine, si allontana indefinitamente da essa.

Si parla in questo caso di *nodo* (instabile). (fig. 8.9b)

i3) Sia $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. L'origine è instabile. Per $c_2 = 0$ abbiamo le traiettorie rettilinee γ_1^\pm lungo le quali il punto mobile si avvicina indefinitamente all'origine (essendo $\lambda_1 < 0$); per $c_1 = 0$ abbiamo le traiettorie γ_2^\pm lungo le quali il punto si allontana indefinitamente dall'origine (essendo $\lambda_2 > 0$). Ogni altra traiettoria risulta asintotica ad una del tipo γ_1 per $t \rightarrow -\infty$ e ad una del tipo γ_2 per $t \rightarrow +\infty$; l'andamento è illustrato in figura 8.10.

L'origine si chiama, in questo caso, *colle o sella*.

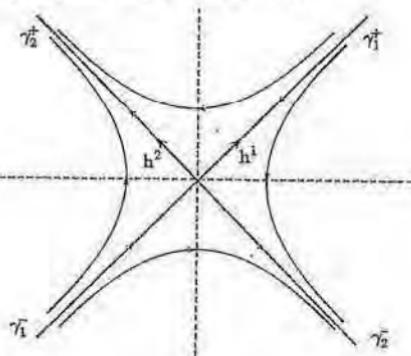


Figura 8.10. Colle o sella.

ii) *Autovalori reali e coincidenti*. Sia λ l'autovalore doppio della matrice A . La soluzione generale del sistema è della forma

$$\varphi(t) = c^1 e^{\lambda t} + c^2 t e^{\lambda t},$$

dove c^1, c^2 sono due *opportuni* vettori, dipendenti da due sole costanti arbitrarie²⁴.

²⁴Infatti, per determinare c^1 e c^2 possiamo inserire φ nel sistema $\varphi' = A\varphi$, ottenendo:

$$\lambda c^1 e^{\lambda t} + c^2 (1 + \lambda t) e^{\lambda t} = A c^1 e^{\lambda t} + A c^2 t e^{\lambda t}.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini corrispondenti, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} A c^1 = \lambda c^1 + c^2 \\ A c^2 = \lambda c^2. \end{cases}$$

Risolvendolo in c^1, c^2 , si trova appunto che questi vettori dipendono da due sole costanti arbitrarie.

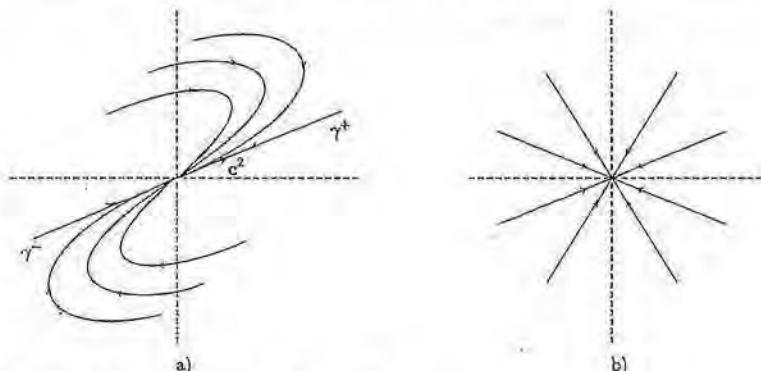


Figura 8.11. a) nodo stabile. b) nodo a stella instabile.

Se $\lambda < 0$, l'origine è globalmente asintoticamente stabile: tutte le traiettorie convergono verso l'origine e sono asintotiche alle traiettorie rettilinee di equazione

$$\varphi(t) = c^2 t e^{\lambda t},$$

indicate nella figura 8.11a con γ^+ e γ^- .

Se $\lambda > 0$, tutte si allontanano dall'origine, che è instabile.

Il punto 0 si chiama ancora *nodo*.

Un caso speciale si ha se la matrice A è diagonale (e allora $a = d$ mentre $c = b = 0$); la soluzione generale è semplicemente:

$$\varphi(t) = ce^{\lambda t},$$

con c vettore arbitrario. Le traiettorie sono allora tutte rettilinee (fig. 8.11b) e il punto 0 si dice anche *nodo a stella*, stabile se $\lambda < 0$, instabile se $\lambda > 0$.

iii) *Autovalori complessi coniugati*. Siano $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ gli autovalori di A; gli autovettori corrispondenti possono essere scelti in modo che risultino anch'essi coniugati; abbiamo così la coppia di soluzioni (linearmente indipendenti)

$$(4.15) \quad ie^{\alpha t+i\beta t}, \quad \bar{e}^{\alpha t-i\beta t}.$$

Conviene sostituire a queste soluzioni una coppia di soluzioni reali. Posto $h = h^1 + ih^2$, con h^1, h^2 vettori reali, prendendo la semisomma e la semidifferenza delle due soluzioni (4.15), otteniamo le due soluzioni reali e linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t} (h^1 \cos \beta t - h^2 \sin \beta t); \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} (h^1 \sin \beta t + h^2 \cos \beta t).\end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = e^{\alpha t} [(c_1 h^1 + c_2 h^2) \cos \beta t + (c_2 h^1 - c_1 h^2) \sin \beta t]$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie. Distinguiamo ora i seguenti casi.

iii1) Se $\alpha = 0$ (autovalori immaginari puri), l'origine è stabile (ma non asintoticamente stabile); le traiettorie sono delle ellissi. Proviamo che in tal caso il sistema ha un integrale primo della forma:

$$(4.16) \quad E(x, y) = cx^2 - 2axy - by^2 = \text{costante}.$$

Infatti, essendo gli autovalori immaginari puri, risulta $a = -d$ e l'equazione differenziale delle traiettorie (4.5) si scrive

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx - ay}.$$

Essa è pertanto un'*equazione differenziale esatta*²⁶ e una funzione potenziale è data da $E(x, y)$ come in (4.16). L'integrale generale è quindi assegnato dalla famiglia di ellissi $E(x, y) = \text{costante}$, le quali sono anche la famiglia delle traiettorie.

Abbiamo quindi un'infinità di orbite periodiche; l'origine, in questo caso, è un *centro* (fig. 8.12a).

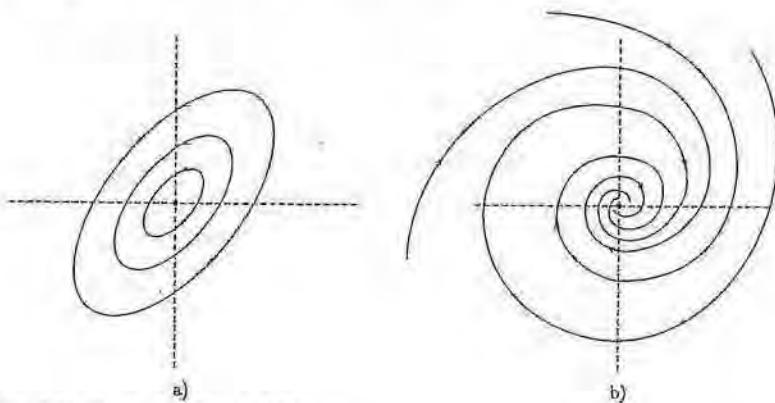


Figura 8.12. a) centro. b) fuoco stabile.

iii2) Se $\alpha < 0$, l'origine è globalmente asintoticamente stabile. Tutte le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine, con andamento a spirale (fig. 8.12b). L'origine è un *fuoco* stabile.

iii3) Se $\alpha > 0$, l'andamento geometrico delle traiettorie è lo stesso che nel caso precedente, ma il punto mobile si allontana indefinitamente dall'origine. L'origine è un *fuoco* instabile.

L'allievo è invitato a completare la discussione con l'esame del caso degenere, cioè quando il rango della matrice A è 1.

Possiamo riassumere i risultati nel seguente quadro relativo alla natura di O. Poniamo $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A$.

²⁶V. paragrafo 1.2.

Tavella 8.1.

i. $\Delta > 0$	$\begin{cases} 1. \det A > 0 & \text{nodo} \\ 2. \det A < 0 & \text{colle} \end{cases}$	$\begin{cases} a. \operatorname{tr} A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ b. \operatorname{tr} A > 0 & \text{instabile} \end{cases}$
ii. $\Delta = 0$	$\begin{cases} 1. b^2 + c^2 \neq 0 & \text{nodo} \\ 2. b^2 + c^2 = 0 & \text{nodo a stella} \end{cases}$	$\begin{cases} a. \operatorname{tr} A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ b. \operatorname{tr} A > 0 & \text{instabile} \end{cases}$
iii. $\Delta < 0$	$\begin{cases} 1. \operatorname{tr} A = 0 & \text{centro} \\ 2. \operatorname{tr} A \neq 0 & \text{fuoco} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{stabile (non asintoticamente)} \\ a. \operatorname{tr} A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ b. \operatorname{tr} A > 0 & \text{instabile} \end{cases}$

Ricordiamo che nello schema precedente si parla sempre di stabilità per $t \rightarrow +\infty$.

Applichiamo ora quanto detto allo studio delle piccole oscillazioni di un pendolo con attrito.

Esempio

Piccole oscillazioni del pendolo con attrito Riprendiamo lo studio delle oscillazioni del pendolo (Esempio 4.5) inserendo una forza d'attrito proporzionale alla velocità angolare φ' , limitatamente però a "piccole oscillazioni", in modo da poter considerare $\sin \varphi \approx \varphi$. L'equazione diventa:

$$\varphi'' = -k\varphi - h\varphi'$$

(con $k, h > 0$), corrispondente al sistema $(z_1 = \varphi, z_2 = \varphi')$

$$(4.17) \quad \begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -kz_1 - hz_2. \end{cases}$$

Ritroviamo così la situazione esaminata nello studio delle vibrazioni meccaniche (capitolo 1, paragrafo 3.6): mentre là si sono esaminate le soluzioni dell'equazione, qui analizzeremo le orbite del sistema corrispondente.

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}.$$

Si ha $\operatorname{tr} A = -h < 0$ e $\det A = k > 0$. Distinguiamo dunque 3 casi in riferimento al quadro riassuntivo (tab. 8.1).

Sia $h^2 \geq 4k$ (attrito forte). Siamo nel caso i.1.a o ii.1.a. L'origine è un *nodo asintoticamente stabile*. Il pendolo non esegue oscillazioni, ma va direttamente alla posizione di equilibrio (che raggiunge però in un tempo infinito).

Sia $0 < h^2 < 4k$ (attrito debole). Siamo nel caso ii.2.b. L'origine è un *fuoco asintoticamente stabile*. Il pendolo esegue oscillazioni smorzate, di ampiezza sempre minore, fino a raggiungere asintoticamente la posizione di equilibrio.

Nel caso $\hbar = 0$, assenza di attrito, l'origine è un *centro*: il pendolo esegue indefinitamente oscillazioni sempre della medesima ampiezza.

Per sistemi lineari autonomi di ordine n lo studio del comportamento delle orbite intorno all'origine (punto di equilibrio) è certamente più complesso. Riportiamo, senza entrare nei dettagli e senza dimostrazione, il seguente risultato.

TEOREMA 8.11 (STABILITÀ PER SISTEMI n DIMENSIONALI) Indichiamo con λ_j , per $j = 1, 2, \dots, k$ gli autovalori distinti della matrice A , $n \times n$.

1. L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ per $j = 1, 2, \dots, k$. La stabilità è globale in \mathbb{R}^n .
2. L'origine è stabile, non asintoticamente, se e solo se $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (cioè la dimensione dell'autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore).
3. L'origine è instabile negli altri casi.

ESEMPIO

Studiare il sistema (4.2) nel caso degenere, cioè quando $\det A = ad - bc = 0$ (ma $A \neq 0$). Si osservi che ora l'origine non è l'unico punto di equilibrio, ma c'è un'intera retta formata da punti di equilibrio. Si studi il comportamento delle orbite.

Determinare la natura del punto di equilibrio $(0, 0)$ per i seguenti sistemi:

(a) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - y \end{cases}$	(b) $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = -8x - y \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$	(d) $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$	(f) $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$
(g) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$	(h) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

4.3 Stabilità per sistemi autonomi non lineari

Per un sistema lineare autonomo la stabilità di un punto di equilibrio è completamente risolta dal teorema 8.11, che abbiamo visto illustrato nel caso bidimensionale. Se il sistema non è lineare, la situazione è molto meno soddisfacente.

Un modo di procedere è cercare di sostituire il sistema originale con un sistema lineare approssimante, utilizzare la teoria lineare e cercare di trasferire le informazioni ottenute a quello non lineare.

In generale, però, l'approssimazione è efficace solo nell'intorno del punto di equilibrio considerato a perciò, anche se le informazioni sul sistema lineare hanno carattere globale, la loro validità in riferimento al sistema originale è per lo più locale. È un tipico esempio della dicotomia locale-globale associata a non lineare-lineare.

Il procedimento ora accennato prende il nome di *metodo di linearizzazione*.

Consideriamo un sistema autonomo

$$(4.18) \quad y' = f(y)$$

con $f \in C^1(D)$, D aperto di \mathbb{R}^n e tale che $f(0) = 0$. Ipotesi fondamentale per tutto il seguito è che la matrice jacobiana di f in 0 , $Df(0)$, sia non singolare. Si può dimostrare che questo, tra l'altro, assicura che 0 sia un punto di equilibrio *isolato*, ossia che esiste un intorno di 0 in cui non vi sono altri punti di equilibrio del sistema.

Essendo $f \in C^1(D)$, si può scrivere:

$$f(y) = Df(0)y + g(y)$$

con $g(y) = o(|y|)$ per $y \rightarrow 0$. Poniamo $A = Df(0)$ e consideriamo il sistema lineare

$$(4.19) \quad z' = Az,$$

che prende il nome di sistema linearizzato (in $y = 0$).

Il risultato fondamentale, che ci limitiamo a enunciare, è il seguente:

TEOREMA 8.12 (DI LINEARIZZAZIONE)

- (i) Se 0 è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato (4.19), allora lo è anche per il sistema non lineare (4.18).
- (ii) Se esiste un autovalore di A con parte reale positiva, allora il punto 0 è instabile per il sistema non lineare (4.18).

Illustreremo ora questo teorema con alcuni esempi bidimensionali.

Se riprendiamo in esame il sistema di Lotka-Volterra (Esempi 2.1 e 4.3) e l'equazione del pendolo (Esempio 4.5) e applichiamo il metodo di linearizzazione sopra esposto, ritroviamo i risultati che l'esame diretto delle orbite già ci aveva permesso di ottenere: il punto di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra è stabile (non asintoticamente); nel sistema del pendolo l'origine è stabile, mentre i punti $(\pm\pi, 0)$ sono instabili (corrispondono alla posizione verticale del pendolo al di sopra del perno).

Esempio

 Grandi oscillazioni di un pendolo con attrito Consideriamo l'equazione

$$\varphi'' = -k \sin \varphi - h \varphi'$$

$(h, k > 0)$ che descrive le oscillazioni di un pendolo in presenza di una forza di attrito ($h > 0$), corrispondente al sistema $(z_1 = \varphi, z_2 = \varphi')$

$$(4.20) \quad \begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -k \sin z_1 - h z_2. \end{cases}$$

Ricordiamo che nell'esempio 4.7 abbiamo studiato questo sistema nell'ipotesi delle piccole oscillazioni; quell'ipotesi corrispondeva a considerare $\sin \varphi \approx \varphi$ e quindi avere un sistema lineare. Ora esaminiamo il problema nel caso di oscillazioni di ampiezza qualsiasi, che porta

a un sistema non lineare, e lo studiamo per linearizzazione. I punti di equilibrio del sistema sono $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ (gli altri punti $(k\pi, 0)$ corrispondono fisicamente ai due punti precedenti).

Esaminiamo prima l'origine. Linearizzando in $(0, 0)$ il sistema (4.20), ritroviamo il sistema (4.17) studiato nell'Esempio 4.7: sappiamo che in quel caso, per $h > 0$, l'origine è asintoticamente stabile; perciò, in base al teorema 8.12, lo sarà anche nel caso non lineare in esame.

Per linearizzare l'altro punto di equilibrio, $(\pi, 0)$, bisogna prima calcolare la matrice jacobiana di

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (z_2, -k \sin z_1 - h z_2)$$

in $(\pi, 0)$. Si trova

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -h \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det \mathbf{A} = -k < 0$ e $\text{tr} \mathbf{A} = -h$, $\Delta = (\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A} > 0$, siamo nel caso 1.2 della tabella 8.1, che corrisponde a un colle. Pertanto esiste un autovalore con parte reale positiva e l'origine è instabile per entrambi i sistemi (linearizzato e non lineare).

In figura 8.13 sono raffigurate le traiettorie del sistema per $h^2 < 4k$ (attrito debole). L'andamento delle traiettorie in figura suggerisce che si mantenga non solo la stabilità (nel caso $h > 0$), ma anche la configurazione delle traiettorie in un intorno di 0.

Astraendo dall'esempio specifico ora considerato, e rimanendo a un livello puramente intuitivo, si può dire che se 0 è un *fuoco*, un *colle* o un *nodo* (non a stella) per il sistema linearizzato, allora il ritratto di fase in un intorno di 0 per il sistema non lineare sarà *topologicamente equivalente*, cioè qualitativamente simile. Si potrà così parlare di *fuoco*, *colle* o *nodo* anche per il *sistema non lineare*.

Ciò significa sostanzialmente che una "piccola" perturbazione sulla funzione f non altera localmente il ritratto di fase in questi casi. Si parla allora di *stabilità strutturale* del sistema. Come l'esempio stesso del pendolo indica, non ci si può aspettare che un centro sia strutturalmente stabile: una piccola perturbazione può distruggere la periodicità di una soluzione.

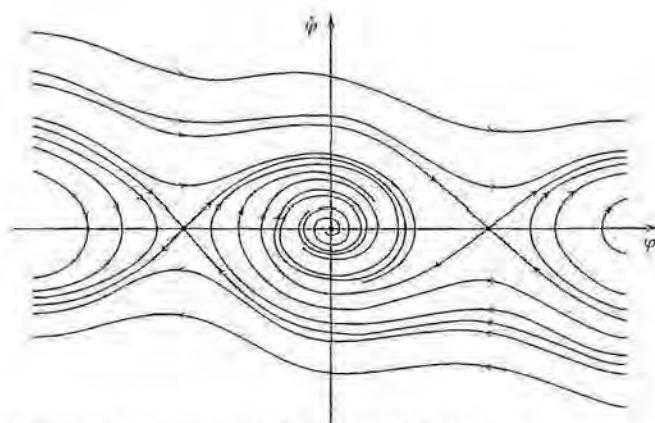


Figura 8.13. Traiettorie per il pendolo con attrito debole ($h^2 < 4k$).

Osserviamo infine che, mentre per i sistemi lineari la topologia dei punti di equilibrio si riduce ai sei casi elencati nella tabella 8.1, quella per i sistemi non lineari è molto più ricca; non ci occupiamo di questo argomento, rimandando il lettore interessato a testi più specialistici.

Cicli limite

Nei modelli di Lotka-Volterra e del pendolo senza attrito, esistono infinite orbite chiuse che circondano un punto di equilibrio. Può succedere che esistano una o più orbite chiuse isolate sulle quali, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale. Queste orbite si chiamano *cicli limite* e tipicamente indicano la presenza di *oscillazioni autosostenute*. Per i sistemi bidimensionali si può dimostrare che un'orbita chiusa contiene *sempre* un punto di equilibrio al suo interno. Un classico esempio è l'equazione di van der Pol, che abbiamo già considerato nell'Esempio 2.3.

Esempio

Esempio *Equazione di van der Pol* Si tratta della seguente equazione:

$$(4.21) \quad y'' = -y + \varepsilon(1 - y^2)y' \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ costante.}$$

Come già osservato nell'Esempio 2.3, quest'equazione si può interpretare come una perturbazione dell'oscillatore armonico (con $\omega^2 = 1$) mediante il termine forzante $\varepsilon(1 - y^2)y'$ che per valori grandi di y ($|y| > 1$) è una resistenza attiva (dissipa energia) e contrasta il moto, mentre per piccoli valori di y ($|y| < 1$) rappresenta una resistenza negativa (fornisce energia), che nei circuiti elettrici si realizza come *feedback*, o controllo retroattivo.

Ponendo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, l'equazione si riduce al sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -y_1 + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 \end{cases}$$

che ha come unico punto di equilibrio l'origine. I commenti alla (4.21) fatti sopra ci portano a congetturare che le soluzioni si assestino lungo un'orbita chiusa, corrispondente a una soluzione periodica.

Usando un computer, proviamo a disegnare alcune orbite nel piano delle fasi y, y' . Il risultato è quello indicato in figura 8.14. I calcoli numerici confortano la nostra congettura.

Occorre però un'analisi teorica, che si può condurre meglio, anziché nel piano delle fasi, nel cosiddetto piano di Lienard²⁶, ossia delle variabili y e

$$z = y' + \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right).$$

Infatti, osservando che

$$y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' = \frac{d}{dt}\left[y' + \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\right],$$

la (4.21) si riduce al sistema seguente:

$$(4.22) \quad \begin{cases} y' = z - \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right) \\ z' = -y \end{cases}$$

²⁶Alfred Lienard (1869-1958), fisico e matematico francese.

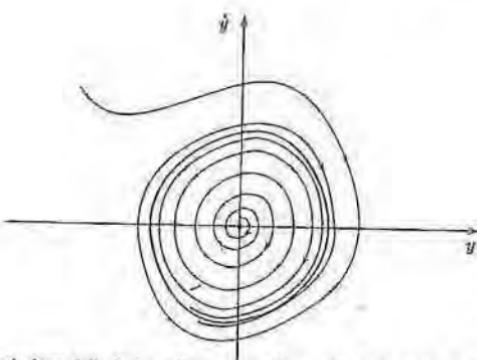


Figura 8.14. Orbita nel piano delle fasi per l'equazione di van der Pol con $\epsilon = 0,2$. Si noti la presenza di un ciclo limite (linea spessa) stabile.

La corrispondenza

$$(y, y') \leftrightarrow (y, z)$$

tra punti dei due piani è chiaramente biunivoca e regolare, cosicché il ritratto di fase è qualitativamente simile nei due casi. In particolare, punti di equilibrio e orbite chiuse si corrispondono nei due piani. L'unico punto di equilibrio è $(0,0)$. Linearizzando si trova:

$$\begin{cases} y' = \epsilon y + z \\ z' = -y. \end{cases}$$

a cui è associata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\text{tr}A = \epsilon > 0$, $\det A = 1 > 0$, $\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A < 0$, siamo nel caso iii.2.b del quadro riassuntivo: l'origine è un fuoco instabile. In base al teorema 8.12, è un fuoco instabile anche per il sistema (4.22) e le orbite che partono in un intorno di $(0,0)$ se ne allontanano a spirale.

Infine, si dimostra che: esiste un unico ciclo stabile, nel senso che ogni traiettoria diversa da $(0,0)$ tende ad avvolgersi su di esso per $t \rightarrow +\infty$.

Dal punto di vista delle applicazioni radioingegneristiche, l'esistenza di un ciclo limite rappresenta la possibilità del sistema di oscillare con un periodo indipendente dalle condizioni iniziali.

Concludiamo il paragrafo con un teorema, che ci limitiamo a enunciare, che può essere usato, nel caso bidimensionale, per dimostrare l'esistenza di un ciclo limite.

TEOREMA 8.13 (DI BENDIXSON-POINCARÉ) *Sia dato il sistema bidimensionale autonomo:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con f, g di classe C^1 in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 . Sia $\Omega' \subset \Omega$ un aperto limitato non contenente punti critici e tale che ogni orbita che entri in Ω' non ne possa più uscire. Allora in Ω' esiste un ciclo limite.

Esercizi

20 Studiare, col metodo di linearizzazione, la natura dei punti di equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = x - y^2 \end{cases}$$

21 Classificare i punti di equilibrio per i sistemi:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x + y^2 - 2 \\ y' = x + y \end{cases}; \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -x + x^2 y \\ y' = 2 - 2y \end{cases}$$

22 Per il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + 2x^3 y^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

tracciare qualitativamente l'andamento delle traiettorie nel piano delle fasi e determinare, in particolare, il loro comportamento nell'intorno dell'origine.

23 Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la stabilità dell'origine per il sistema:

$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x + ky - y^3 \end{cases}$$

A

Trasformata di Laplace e trasformata di Fourier

In questo capitolo presentiamo, in forma molto contenuta, due strumenti importanti dell'Analisi matematica, che trovano larghissimo uso nella risoluzione di molti problemi applicati, in particolare quando questi sono formulati per mezzo di equazioni differenziali.

La teoria delle trasformate integrali supera certamente i limiti del presente corso; ma abbiamo ritenuto che possa essere utile per lo studente, che ne abbia la curiosità, avere un'idea delle notevoli possibilità offerte dall'uso di questi strumenti matematici.

1 TRASFORMATA DI LAPLACE. DEFINIZIONE ED ESEMPI

Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$.

Si chiama *trasformata di Laplace* di f la funzione $\mathcal{L}[f]$ definita dalla formula seguente:

$$(1.1) \quad \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$$

dove $p \in \mathbb{C}$.

L'applicazione

$$\mathcal{L} : f \longmapsto \mathcal{L}[f]$$

si chiama *trasformazione di Laplace*.

La (1.1) richiede qualche spiegazione. Ricordiamo che, se $p = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, l'integrandi della (1.1) si può riscrivere, separando esplicitamente la parte reale dalla parte immaginaria, al modo seguente:

$$e^{-px} f(x) = e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) - ie^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x).$$

Per definizione, il simbolo $\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$ indica allora il numero complesso

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx$$

purché, naturalmente, entrambi gli integrali generalizzati appena scritti convergano; a sua volta, questo è certamente vero se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} |f(x)| dx$$

(si vedano i criteri di integrabilità su intervalli illimitati, studiati nel volume 1, capitolo 6, paragrafo 8.4). Se dunque per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$ questo integrale converge, $\mathcal{L}[f](p)$ risulterà definita per $p = \alpha + i\beta$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\mathcal{L}[f](p)$ è ben definita per almeno un valore di $p \in \mathbb{C}$, f si dice trasformabile (secondo Laplace).

La seguente proposizione indica che, se f è integrabile in ogni intervallo $[0, A]$ e non cresce più che esponenzialmente per $x \rightarrow +\infty$, allora è trasformabile. Più precisamente:

TEOREMA A.1 *Se per x abbastanza grande si può scrivere $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$, con M ed α positivi, allora f è trasformabile, $\mathcal{L}[f]$ esiste nel semipiano complesso $\operatorname{Re} p > \alpha$ ed inoltre*

$$(1.2) \quad \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](p) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha $|e^{-px} f(x)| = e^{-(\operatorname{Re} p)x} |f(x)| \leq M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)x}$ per x abbastanza grande. Se $\operatorname{Re} p > \alpha$, la funzione $M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)x}$ è integrabile in senso generalizzato, per cui lo è anche $e^{-px} f(x)$. Inoltre, si ha

$$|\mathcal{L}[f](p)| \leq \int_0^{+\infty} M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)x} dx = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \alpha} \rightarrow 0 \quad \text{se } \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad \diamond$$

In generale si può dimostrare che:

se $\mathcal{L}[f](p)$ esiste per $p = p_0$, allora esiste anche nel semipiano $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0\}$ e vale la (1.2).

Se α_0 è l'estremo inferiore dei numeri α tali che $\mathcal{L}[f]$ esiste per $\operatorname{Re} p > \alpha$, il semipiano $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ si chiama *semipiano di convergenza*.

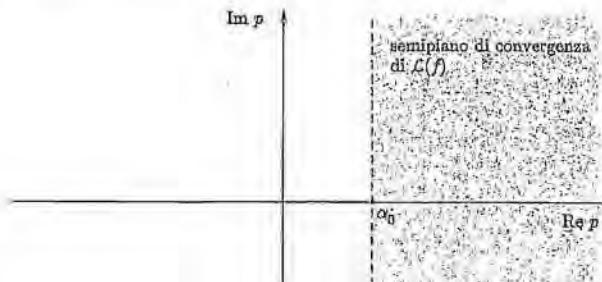


Figura A.1.

Esempio 1.

Esempio 1. Funzione di Heaviside.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Figura A.2.

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-px} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-px} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \end{aligned}$$

Il limite esiste finito solo se $\operatorname{Re} p > 0$; dunque

$$\boxed{\mathcal{L}[H](p) = \frac{1}{p}}$$

con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > 0$.

Esempio 2. Impulso unitario di durata ε .

$$I_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

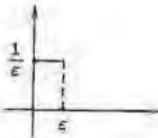


Figura A.3.

Notiamo che $\int_0^{+\infty} I_\varepsilon(x) dx = 1$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Si ha:

$$(1.3) \quad \mathcal{L}[I_\varepsilon](p) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-px} dx = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{1}{p} e^{-px} \right]_0^\varepsilon = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}.$$

Poiché $\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}[I_\varepsilon](p) = 1$, ponendo $\mathcal{L}[I_\varepsilon](0) := 1$, si estende la definizione di $\mathcal{L}[I_\varepsilon]$ a tutto il piano complesso.

Esempio 3. Impulso unitario istantaneo (distribuzione di Dirac). La distribuzione di Dirac nell'origine, indicata con il simbolo $\delta(x)$ è, ricordiamo, il "limite" per $\varepsilon \rightarrow 0$ dell'impulso unitario I_ε , definito nell'esempio 1.2;

$$(1.4) \quad \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x)$$

La definizione è solo formale in quanto da (1.4) si ricaverebbe:

$$(1.5) \quad \delta(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty$$

e inoltre

$$(1.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Ora, nessuna funzione dell'analisi classica può avere le proprietà (1.5) e (1.6); una definizione rigorosa trova posto nell'ambito della teoria delle distribuzioni di L. Schwartz ed infatti è corretto chiamare $\delta(x)$ distribuzione (anziché funzione) di Dirac.

Ancora una volta, ci accontentiamo dell'aspetto formale, interpretando la distribuzione di Dirac come un oggetto matematico adatto a rappresentare un impulso unitario, per la (1.6), concentrato nell'origine, per le (1.5).

La trasformata di Laplace di δ si trova facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ delle trasformate di I_ε ; dalla (1.3):

$$\mathcal{L}[\delta](p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-px}}{p\varepsilon} = 1.$$

Dunque:

(1.7)

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta] = 1}$$

Esponenziale.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{C}$.

Una scrittura equivalente è $f(x) = e^{-ax} \cdot H(x)$.

Si ha:

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-px} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-(a+p)x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{p+a} \{1 - e^{-(a+p)T}\}$$

Se $\operatorname{Re}(a+p) > 0$, $e^{-(a+p)T} \rightarrow 0$ per $T \rightarrow +\infty$ e quindi

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-ax} H(x)](p) = \frac{1}{p+a}}$$

con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$.

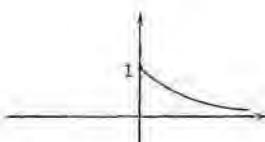


Figura A.4.

2 PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Esamineremo le relazioni tra la trasformazione di Laplace e le seguenti operazioni: combinazione lineare di funzioni, traslazioni, derivazione, integrazione, prodotto di convoluzione. Quando non sorgono confusioni scriveremo $\mathcal{L}[f]$ anziché $\mathcal{L}[f \cdot H]$ anche per funzioni f non necessariamente nulle in $(-\infty, 0)$.

Linearità

Siano f e g trasformabili con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > \alpha$, $\operatorname{Re} p > \beta$, rispettivamente.

Allora, se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ è trasformabile e

$$(2.1) \quad \boxed{\mathcal{L}[\lambda f + \mu g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)}$$

con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha, \beta\}$.

La dimostrazione della (2.1) segue subito dalla linearità dell'integrale generalizzato.



ESEMPIO Calcoliamo la trasformata di Laplace di $\sin \omega x \cdot H(x)$ e $\cos \omega x \cdot H(x)$. Ricordando le formule di Eulero e la (1.4)

$$\sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \quad \cos \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$$

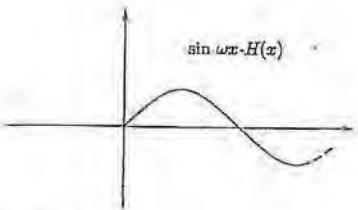


Figura A.5.

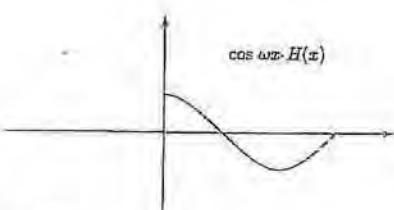


Figura A.6.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega x \cdot H(x)](p) &= \frac{1}{2i} \left\{ \mathcal{L}[e^{i\omega x} H(x)](p) - \mathcal{L}[e^{-i\omega x} H(x)](p) \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega x \cdot H(x)](p) &= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L}[e^{i\omega x} H(x)](p) + \mathcal{L}[e^{-i\omega x} H(x)](p) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > 0$.

ESEMPIO Essendo $(\cos \omega x)^2 = (1 + \cos 2\omega x)/2$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(\cos \omega x)^2 \cdot H(x)](p) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[H(x)](p) + \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2\omega x \cdot H(x)](p) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right\} \quad (\operatorname{Re} p > 0) \end{aligned}$$

Poiché $(\sin \omega x)^2 = 1 - (\cos \omega x)^2$ si ha poi, sempre per $\operatorname{Re} p > 0$:

$$\mathcal{L}[(\sin \omega x)^2 H(x)](p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right\}$$

Formule del ritardo

Sia f trasformabile con semipiano di convergenza $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Definiamo, per $a > 0$:

$$g(x) = f(x-a)H(x-a) = \begin{cases} f(x-a) & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

Si ha, facendo il cambio di variabile $t = x - a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](p) &= \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x-a) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t) dt = \\ &= e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p) \end{aligned}$$

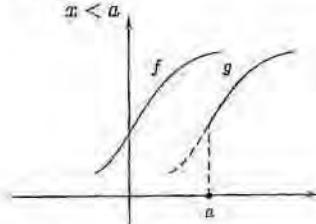


Figura A.7.

Dunque

$$(2.4) \quad \boxed{\mathcal{L}[f(x-a)H(x-a)](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p)} \quad (\operatorname{Re} p > \alpha)$$

D'altra parte, per verifica diretta si ha:

$$(2.4') \quad \boxed{\mathcal{L}[e^{\alpha x} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p-\alpha)} \quad (\operatorname{Re} p > \alpha + a)$$

Se si interpreta x come variabile temporale e si passa da una funzione $g(x)$ a $g(x-a)$, un determinato valore di g viene osservato con a unità temporali di ritardo. Per questo motivo la funzione $g(x-a)$ si chiama funzione "ritardata" e le formule (2.4)-(2.4') si chiamano *formule del ritardo*.

Esempio

Trasformata di una funzione periodica. Sia f periodica di periodo T . Se si considera

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < T \\ 0 & x < 0 \quad o \quad x \geq T \end{cases}$$

la funzione $f(x) \cdot H(x)$ si può scrivere come somma di infinite traslazioni di f_0 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (2.5) \quad f(x) \cdot H(x) &= f_0(x) + f_0(x-T) + f_0(x-2T) + \dots + f_0(x-nT) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_0(x-nT). \end{aligned}$$

Supponendo di poter integrare termine a termine la serie in (2.5), si trova, usando la (2.4)

$$\begin{aligned} (2.6) \quad \mathcal{L}[f(x) \cdot H(x)](p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_0(x-nT)](p) = \\ &= \mathcal{L}[f_0](p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp}. \end{aligned}$$

La serie geometrica a secondo membro della (2.6) è convergente ed ha somma $(1 - e^{-Tp})^{-1}$ se $|e^{-Tp}| = e^{-T\operatorname{Re} p} < 1$ e cioè se $\operatorname{Re} p > 0$.

Quindi, nel semipiano $\operatorname{Re} p > 0$, vale la formula

$$(2.7) \quad \mathcal{L}[f(x)H(x)](p) = \frac{\mathcal{L}[f_0](p)}{1 - e^{-Tp}}.$$

Ad esempio se $T = 1$ e $f_0(x) = x$ in $[0, 1)$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_0](p) &= \int_0^1 e^{-px} x \, dx = \left[-\frac{1}{p} x e^{-px} \right]_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-px} \, dx = \\ &= -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p^2} [e^{-px}]_0^1 = -\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}). \end{aligned}$$

Per la funzione periodica della figura A.8 si ha, dalla (2.7):

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[f_0](p) \cdot (1 - e^{-p})^{-1} = \frac{1}{p(1 - e^p)} + \frac{1}{p^2}.$$

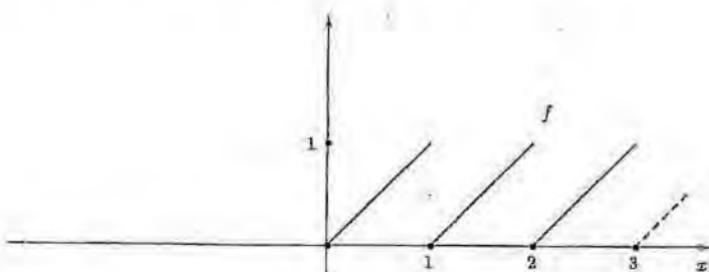


Figura A.8.

Trasformazione di una derivata

TEOREMA A.2 Sia f derivabile con derivata continua a tratti in $[0, +\infty)$. Sia inoltre f' trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re} p > \alpha$. Allora f è trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha, 0\}$ e vale la formula

$$(2.8) \quad \boxed{\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)}$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità la facciamo sotto l'ulteriore ipotesi che $|f'(x)| \leq M e^{\alpha x}$ e che f' sia continua. Si ha:

$$\mathcal{L}[f'](p) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-px} f'(x) \, dx.$$

Integrandi per parti si ricava

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \int_0^T e^{-px} f'(x) dx &= [e^{-px} f(x)]_0^T + p \int_0^T e^{-px} f(x) dx = \\ &= e^{-pT} f(T) - f(0) + p \int_0^T e^{-px} f(x) dx, \end{aligned}$$

Si mostra poi che, se $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha, 0\}$, $e^{-pT} f(T) \rightarrow 0$.

La (2.8) si può generalizzare se esistono le derivate di f di ordine superiore e sono trasformabili. In particolare, usando la (2.8) prima per f'' e poi per f' , si trova

$$\mathcal{L}[f''](p) = p\mathcal{L}[f'](p) - f'(0) = p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - f'(0)$$

cioè:

$$(2.10) \quad \boxed{\mathcal{L}[f''](p) = p^2\mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)}$$

Poiché $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](p) = 0$, dalla (2.8) si ricava la formula

$$(2.11) \quad \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p\mathcal{L}[f](p) = f(0)$$

Nel caso in cui f o f' abbiano un salto in $x = 0$, nelle (2.8), (2.10) e (2.11), $f(0)$ e $f'(0)$ vanno sostituiti con $f(0^+)$ e $f'(0^+)$.

Le formule (2.8) e (2.10) convertono operazioni di derivazione in operazioni di tipo algebrico; vedremo più avanti alcune applicazioni alle equazioni differenziali.

Trasformazione di una primitiva

Il teorema A.2 e la formula (2.8) si possono interpretare in termini di una funzione e una sua primitiva, in particolare quella che si annulla in $x = 0$.

Sia f continua a tratti e poniamo

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Se f è trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re} p > \alpha$, allora F è trasformabile nel semipiano $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha, 0\}$ e vale la formula

$$(2.12) \quad \boxed{\mathcal{L}[F](p) = \frac{\mathcal{L}[f](p)}{p}}$$

Esempio

Esercizio Sappiamo che $\mathcal{L}[H] = \frac{1}{p}$ (cfr. esempio 1.1).

Poiché $F_1(x) = \int_0^x H(t) dt = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ si ha:

$$\mathcal{L}[F_1](p) = \frac{\mathcal{L}[H](p)}{p} = \frac{1}{p^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

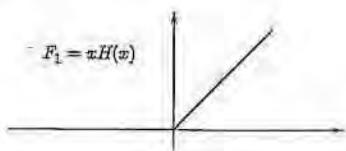


Figura A.9.

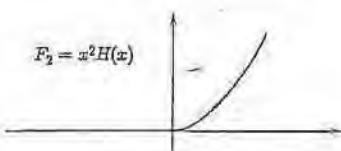


Figura A.10.

Analogamente se $F_2(x) = x^2 H(x)$ si ha $F'_2(x) = 2F_1(x)$ e quindi

$$\mathcal{L}[F_2](p) = \frac{2}{p^3}, \quad (\text{Re } p > 0)$$

Generalizzando si ottiene la formula

$$(2.13) \quad \boxed{\mathcal{L}[x^n H(x)](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}} \quad n \text{ intero} \quad \text{Re } p > 0$$

Trasformata di un prodotto di convoluzione

Siano f e g nulle in $(-\infty, 0)$. Il loro prodotto di convoluzione è definito dalla formula

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt = \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

Se f è trasformabile nel semipiano $\text{Re } p > \alpha$ e $|g|$ è trasformabile nello stesso semipiano, allora anche $f * g$ è trasformabile in $\text{Re } p > \alpha$ e vale la formula

$$(2.14) \quad \boxed{\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)}$$

Derivata della trasformata di Laplace

Sia

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad (\text{Re } p > \alpha)$$

Se, ad esempio, $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$ definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, si può derivare rispetto a p sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px} dx$$

da cui la formula

$$(2.15) \quad \boxed{\mathcal{L}[-xf(x)](p) = \frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p)} \quad (\text{Re } p > \alpha)$$

Generalizzando, si ottiene

$$\mathcal{L}[x^2 f(x)](p) = \frac{d^2}{dp^2} \mathcal{L}[f](p)$$

ed infine, per ogni $n \geq 0$:

$$(2.16) \quad \boxed{\mathcal{L}[(-1)^n x^n f(x)](p) = \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f](p)}$$

Esempio

Poiché $\mathcal{L}[\sin \omega x](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, si ha

$$\mathcal{L}[x \sin \omega x](p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Integrale della trasformata di Laplace

Se $f(x)/x$ è trasformabile in $\text{Re } p > \alpha$, dalla (2.15) si ha:

$$\mathcal{L}[f](p) = -\mathcal{L}\left[-x \frac{f(x)}{x}\right](p) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p)$$

pensando p reale, integrando tra p e $+\infty$ e ricordando che $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p) \rightarrow 0$ se $p \rightarrow +\infty$, si trova la formula

$$(2.17) \quad \boxed{\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s) ds \quad (p > \alpha)}$$

Raduniamo in una tabella le formule principali ottenute in questo paragrafo. Le funzioni nella colonna di sinistra si intendono nulle per $x < 0$.

Funzione	Trasformata	
$f(x-a) \cdot H(x-a)$	$e^{-ap} \mathcal{L}[f]$	formule del ritardo
$e^{ax} f(x)$	$\mathcal{L}[f](p-a)$	
$f'(x)$	$p \mathcal{L}[f] - f(0)$	formule delle derivate
$f''(x)$	$p^2 \mathcal{L}[f] - pf(0) - f'(0)$	
$\int_0^x f(t) dt$	$\frac{1}{p} \mathcal{L}[f]$	formula della primitiva
$-xf(x)$	$\frac{d}{dp} \mathcal{L}[f]$	
$(-1)^n x^n f(x)$	$\frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f]$	moltiplicazione per x^n
$\frac{f(x)}{x}$	$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s) ds$	divisione per x (p reale)
$\int_0^x f(\bar{x}-t) g(t) dt$	$\mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$	convoluzione

Elenchiamo anche le trasformate delle funzioni più comuni (sempre intese nulle per $x < 0$).

Funzione	Trasformata	Validità
1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	$\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$
x	$\frac{1}{p^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0, n \in \mathbb{N}$
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$\cos \omega x$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$\operatorname{Sh} ax$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a $
$\operatorname{Ch} ax$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a $
δ	1	$p \in \mathbb{C}$

Esempio

Poiché $\mathcal{L}[e^{-x} - 1](p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p(p+1)}$ ($\operatorname{Re} p > 0$), abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{e^{-x} - 1}{x}\right](p) &= \int_p^{+\infty} -\frac{1}{s(s+1)} ds = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_p^T -\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] ds = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\log \frac{s}{s+1}\right]_p^T = \log \frac{p}{p+1}.\end{aligned}$$

3 TRASFORMAZIONE INVERSA DI LAPLACE

Si può dimostrare che, data una trasformata di Laplace $F(p)$, è unica la funzione $f(x)$ tale che $\mathcal{L}[f] = F$.

L'operazione che permette di passare da F ad f si chiama *inversione* della trasformazione di Laplace ed f , indicata anche con $\mathcal{L}^{-1}[F]$, si chiama *antitrasformata* di F .

Le formule indicate nelle tabelle possono pensarsi anche come formule di antitrasformazione, se lette da destra verso sinistra.

Vediamo alcuni esempi di calcolo di antitrasformate.

Esempio

a) $F(p) = \frac{2}{p+3}$ b) $F(p) = \frac{4}{p^3} + \frac{6}{p^2+4}$.

a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+3}\right](x) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](x) = 2e^{-3x} \cdot H(x).$

b) $\mathcal{L}^{-1}[F](x) = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\right](x) + 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+4}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{p^3}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right] = (2x^2 + 3 \sin 2x)H(x).$

a) $F(p) = \frac{1}{(p-2)^2+9}$ b) $F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+5}.$

a) $\mathcal{L}^{-1}[F](x) = e^{2x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+9}\right] = \frac{1}{3}e^{2x} \sin 3x \cdot H(x).$

b) $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{2}{(p+1)^2+4}.$

è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right](x) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p+1)^2+4}\right] = \\ &= e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right](x) + e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right] = \\ &= e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)H(x). \end{aligned}$$

$F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$

Poiché $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = H(x)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin x \cdot H(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2+1}\right) &= \int_0^x H(t) \sin(x-t) dt = \int_0^x \sin(x-t) dt = [\cos(x-t)]_0^x = \\ &= (1 - \cos x)H(x). \end{aligned}$$

Si poteva anche scrivere $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$ e poi $\mathcal{L}^{-1}[F] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right]$, pervenendo allo stesso risultato.

4 APPLICAZIONI ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI. FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN SISTEMA

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea:

(4.1) $a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t) \quad (t \geq 0)$

con condizioni iniziali

$$(4.2) \quad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta. \end{cases}$$

Applicando la trasformazione di Laplace, l'equazione (4.1) si trasforma in un'equazione algebrica. Poniamo $Y(p) = \mathcal{L}[y](p)$ e $B(p) = \mathcal{L}[b](p)$ e usiamo le formule per la trasformazione delle derivate; tenendo conto delle condizioni iniziali, si trova:

$$\mathcal{L}[y'](p) = pY(p) - \alpha \quad \mathcal{L}[y''](p) = p^2Y(p) - p\alpha - \beta.$$

La (4.1) è allora trasformata nella seguente equazione:

$$(4.3) \quad (a_0p^2 + a_1p + a_2)Y(p) = B(p) + \alpha(a_0p + a_1) + a_0\beta$$

da cui

$$Y(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2} \cdot (B(p) + \alpha(a_0p + a_1) + a_0\beta).$$

La soluzione y si ricava dunque dall'antitrasformata del secondo membro. In particolare, se $\alpha = \beta = 0$ si ha:

$$(4.4) \quad Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

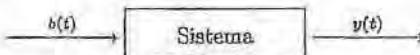
dove abbiamo posto $S(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$, e perciò, usando la formula della convoluzione, si trova

$$(4.5) \quad y = \mathcal{L}^{-1}[B] * \mathcal{L}^{-1}[S] = b * \mathcal{L}^{-1}[S]$$

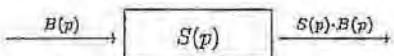
per $t \geq 0$.

Le formule (4.4) e (4.5) hanno una notevole interpretazione fisica. Supponiamo che la (4.1) modellizzi un sistema fisico caratterizzato da un *ingresso* $b = b(t)$ (ad esempio interpretabile come *forzante esterna o segnale d'entrata*), e da una *risposta* $y = y(t)$ (*moto di una particella o segnale in uscita* nelle interpretazioni precedenti).

Schematicamente:



Applicando la trasformata di Laplace, lo schema precedente viene tradotto nel seguente, in base all'equazione (4.4):



La funzione S caratterizza quindi il sistema fisico e prende il nome di *funzione di trasferimento* (o trasmittanza).

Se la funzione in ingresso è l'impulso unitario concentrato in $t = 0$, cioè $b(t) = \delta$, si ha $B(p) = \mathcal{L}[\delta](p) = 1$. In tal caso, quindi, $Y(p) = S(p)$ e si deduce che la *funzione di trasferimento* è la *trasformata della risposta all'impulso unitario*. La (4.5) indica

allora che, se le condizioni iniziali sono nulle, la risposta alla funzione $b(t)$ in ingresso è data dalla convoluzione di $b(t)$ con la risposta all'impulso unitario, $s = \mathcal{L}^{-1}[S]$.

Esempio

Il sistema fisico rappresentato dal circuito R, L, C indicato in figura è retto dall'equazione differenziale

$$LCu'' + RCU' + u = b(t)$$

dove u rappresenta la differenza di potenziale e b la forza elettromotrice applicata.

La funzione di trasferimento è data da

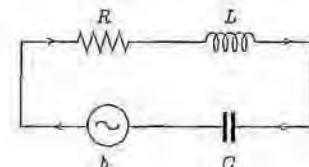


Figura A.11.

$$S(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCP + 1} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

dove s'è posto

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{pulsazione propria del circuito})$$

$$m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{coefficiente di smorzamento})$$

Il calcolo di $\mathcal{L}^{-1}[S]$ dipende dal segno di $\Delta = \omega_0^2(m^2 - 1)$. Ad esempio, nel caso $m < 1$, si ha, scrivendo $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = (p + m\omega_0)^2 - (1 - m^2)\omega_0^2 = (p + m\omega_0)^2 - \Delta$,

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{L}^{-1}[S](t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}{(p+m\omega_0)^2 + (1-m^2)\omega_0^2} \right] (t) = \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t) \cdot H(t). \end{aligned}$$

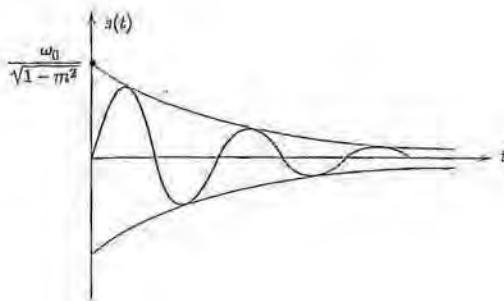


Figura A.12.

Se ora si vuole determinare la risposta del sistema ad un ingresso del tipo $b(t) = E \cdot H(t)$, con condizioni iniziali nulle, si ha dalla (4.5), per $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= (b * s)(t) = \frac{E\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \int_0^t e^{-m\omega_0 s} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} s) ds = \\ &= E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \varphi) \end{aligned}$$

dove $\varphi = \arctg \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$.

Si noti che, se $E = 1$, $y'(t) = s(t)$ e cioè: la risposta all'impulso unitario è la derivata della risposta alla funzione di Heaviside.

5 TRASFORMATA DI FOURIER

La serie di Fourier, di cui si è parlato nel capitolo 7, rappresenta una funzione $g(y)$, τ -periodica, come somma di funzioni periodiche semplici del tipo (usiamo la rappresentazione complessa)

$$\hat{f}(k) e^{i\omega_0 k y} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}; \quad k \in \mathbb{Z} \right)$$

Le costanti (complesse) $\hat{f}(k)$ (che si calcolano con la formula (3.18) del capitolo 7 ponendo $x = \omega_0 y$, $f(x) = f(\omega_0 y) = g(y)$) individuano completamente la funzione $g(y)$ somma della serie; queste costanti formano il cosiddetto *spettro* di $g(y)$: i moduli $|\hat{f}(k)|$ costituiscono lo *spettro delle ampiezze*, gli argomenti di $\hat{f}(k)$ lo *spettro delle fasi*. Questo spettro si dice *discreto*, perché è costituito da una infinità numerabile di elementi (vedi tabella a pagina seguente).

Anche una funzione non periodica $f(x)$, definita su tutta la retta, può essere "analizzata" attraverso il suo "spettro", in maniera analoga a quanto si fa per le funzioni periodiche; lo strumento per fare ciò è dato dalla trasformata di Fourier.

Sia f una funzione definita su \mathbb{R} con le seguenti proprietà:

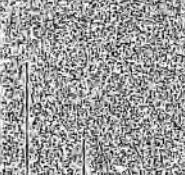
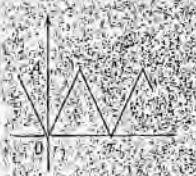
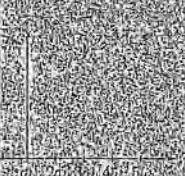
- C^1 a pezzi su ogni intervallo limitato $[-a, +a]$
- assolutamente integrabile da $-\infty$ a $+\infty$, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

Si definisce *trasformata di Fourier* di f la funzione $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ assegnata dalla formula:

$$(5.1) \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx$$

La funzione \hat{f} risulta continua su tutta la retta e inoltre si annulla all'infinito:

$$(5.2) \quad \boxed{\hat{f}(\nu) \text{ è continua su } \mathbb{R} \text{ e } \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0}$$

Segnale	Sviluppo	Spettro delle ampiezze
	$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega_0 x)}{2k+1}$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ik\omega_0 x}$ <p>con $f(k) = 0 \quad k = 0, 2, 4, \dots$</p> $f(k) = \frac{2A}{\pi k}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$ $f(-k) = f(k)$	
	$f(x) = \frac{A}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)}{2k+1} e^{i(2k+1)x}$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx}$ <p>con $f(0) = 0$</p> $f(k) = 0 \quad k = 2, 4, \dots$ $f(k) = -\frac{2A}{\pi^2 k}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$ $f(-k) = f(k)$	

Il grafico della funzione $\nu \mapsto |\hat{f}(\nu)|$ si chiama ancora *spettro delle ampiezze* di f , il grafico della funzione $\nu \mapsto$ argomento di $\hat{f}(\nu)$, *spettro di fase*. In questo caso si parla però di *spettro continuo*, poiché il grafico di queste funzioni è costituito da una infinità continua di elementi.

Trasformata inversa

Nelle ipotesi su f ricordate all'inizio, si dimostra che, se $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx$, allora

$$(5.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

e perciò, in ogni punto in cui f è continua, si ha:

$$(5.4) \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \iff f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu$$

Indichiamo con \mathcal{F} l'operazione che fa passare da $f(x)$ a $\hat{f}(\nu)$

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \hat{f}(\nu)$$

e con \mathcal{F}^{-1} l'operazione inversa.

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x)$$

Si osserva che si passa da \mathcal{F} a \mathcal{F}^{-1} attraverso i seguenti scambi:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} f &\longleftrightarrow \hat{f} \\ x &\longleftrightarrow \nu \\ i &\longleftrightarrow -i \end{aligned}$$

Simmetrie

Si osservi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx.$$

Perciò, se f è pari, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx = 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx$; perciò $\hat{f}(\nu)$ è pure funzione pari di ν e si ha

$$\hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx$$

e, reciprocamente,

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \hat{f}(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

Analogamente, se f è dispari, valgono le formule di reciprocità nei punti di continuità di f :

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx \iff f(x) = 2i \int_0^{\infty} \hat{f}(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu.$$

Esempio

Esempio Funzioni impulsive.

$$f(x) = A \text{ se } |x| \leq \frac{T}{2}, f(x) = 0 \text{ se } |x| > \frac{T}{2}$$

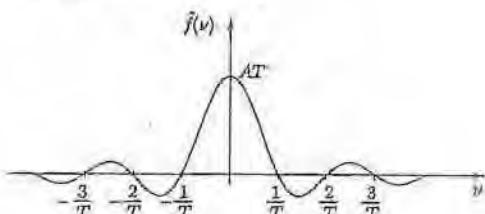
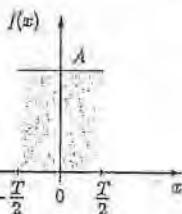


Figura A.13.

$$(5.6) \quad \hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} A \cos(2\pi\nu x) dx = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} AT.$$

■ Impulso di Dirac. Il prodotto AT rappresenta l'area sottesa dagli impulsi dell'esempio 1.1. Mantenendo costante ($= 1$) questo prodotto e facendo tendere T a zero (e perciò $A \rightarrow +\infty$) questi impulsi "tendono" all'impulso di Dirac δ ; la trasformata di Fourier $\hat{f}(\nu)$ tende a 1 (ricorda il limite notevole $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} = 1$). Così possiamo giustificare l'importante risultato

(5.7)

$$\boxed{\delta = 1}$$

Questo risultato è stato ottenuto in modo puramente formale. Abbiamo già osservato che la distribuzione δ di Dirac non è una funzione; osserviamo ora che la sua trasformata non tende a zero all'infinito, come espresso dalla (5.2).

■ Funzioni esponenziali. Per esercizio lo studente può verificare le seguenti formule: sia $a > 0$ e consideriamo le funzioni

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-ax} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = e^{-a|x|} \quad \text{iii) } f(x) = e^{-a|x|} \operatorname{sgn} x.$$

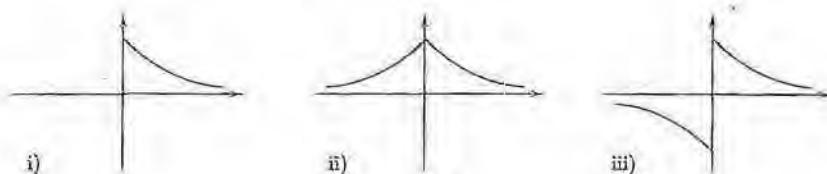


Figura A.14.

Si trova, per $\hat{f}(\nu)$, rispettivamente

$$\frac{1}{a + 2i\pi\nu} \quad \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \quad \frac{-4i\pi\nu}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

■ 6 PROPRIETÀ DELLA TRASFORMAZIONE DI FOURIER

Linearità

Se c_1 e c_2 sono costanti (complesse), si ha

$$(c_1 f + c_2 g)^\wedge = c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g}$$

come immediatamente segue dalla proprietà di linearità dell'integrale (generalizzato).

Formula del ritardo

Sia $g(x) = f(ax - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu x} f(ax - b) dx =$$

(posto $y = ax - b$ e tenendo conto che, se $a > 0$, i limiti di integrazione restano immutati mentre vengono scambiati se $a < 0$)

$$\begin{aligned} &= \text{sgn} a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu \frac{y+b}{a}} f(y) \frac{dy}{a} = \\ &= \frac{e^{-i2\pi\frac{b}{a}\nu}}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\frac{\nu}{a}y} f(y) dy = \frac{1}{|a|} e^{-i2\pi\frac{b}{a}\nu} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right) \end{aligned}$$

In particolare, se $b = 0$, abbiamo

$$(6.1) \quad \boxed{\mathcal{F}[f(ax)](\nu) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)}$$

Se $a = 1$ e $b = x_0$

$$(6.2) \quad \boxed{\mathcal{F}[f(x - x_0)](\nu) = e^{-2\pi i \nu x_0} \hat{f}(\nu)}$$

e anche (applicando le regole di scambio (5.5))

$$(6.3) \quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\nu - \nu_0)](x) = e^{2\pi i \nu_0 x} f(x)}$$

Esempio

Figura A.15. Impulso centrato in x_0

Sia $f(x)$ come in figura. Abbiamo allora

$$\hat{f}(\nu) = e^{-2\pi i \nu x_0} \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T}.$$

Se $T \rightarrow 0$, $f(x)$ "tende" alla distribuzione di Dirac concentrata in x_0 , che si indica con $\delta(x - x_0)$; abbiamo così:

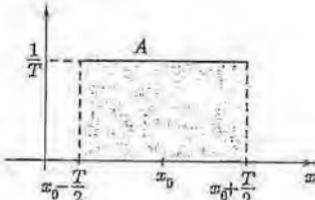


Figura A.15.

(6.4)

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(x - x_0)](\nu) = e^{-2\pi i \nu x_0}}$$

Trasformata della derivata

Sia f derivabile e calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i2\pi\nu x} dx = (\text{con una integrazione per parti}) \\ &= \left[f(x) e^{-i2\pi\nu x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-2i\pi\nu e^{-i2\pi\nu x}) dx. \end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (cosa che si potrebbe dimostrare per quasi tutte le funzioni derivabili e assolutamente integrabili su \mathbb{R}), abbiamo la formula

(6.5)

$$\mathcal{F}[f'](v) = 2\pi i v \hat{f}(v)$$

e, reciprocamente,

$$\mathcal{F}^{-1}[(\hat{f})'](x) = -2\pi i x f(x).$$

Questa uguaglianza si può anche scrivere nella forma (applicando \mathcal{F} a entrambi i membri e tenendo conto che $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \hat{f}$)

(6.6)

$$\mathcal{F}[xf(x)](v) = \frac{i}{2\pi} \hat{f}'(v).$$

Le precedenti formule possono essere iterate ottenendo

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](v) = (2\pi i v)^n \hat{f}(v)$$

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](v) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(v)$$

La (6.5) vale anche se f è continua ovunque e derivabile tranne che in un numero finito di punti angolosi, come nel prossimo esempio.

Esempio

Figura A.16 *Trasformata di un segnale triangolare.* Sia $f(x)$ come in figura A.16

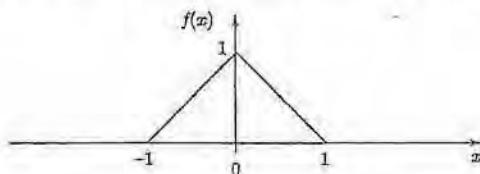


Figura A.16.

La sua derivata, $f'(x)$ è la funzione rappresentata in figura A.17

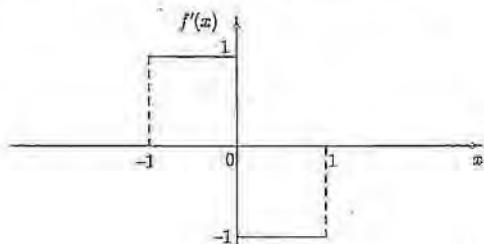


Figura A.17.

cioè è la somma di due impulsi, uno positivo (centrato in $-\frac{1}{2}$) e l'altro negativo (centrato in $\frac{1}{2}$).

Dalla (5.6) (con $T = 1$) otteniamo subito

$$\mathcal{F}[f'](\nu) = e^{-2\pi i \nu (-\frac{1}{2})} \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} - e^{-2\pi i \nu (\frac{1}{2})} \sin \frac{\pi \nu}{\pi \nu} = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} (e^{i\pi \nu} - e^{-i\pi \nu}) = 2i \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \sin \pi \nu$$

(avendo applicato la formula di Eulero). Utilizzando infine la (6.5) otteniamo

$$(6.7) \quad \hat{f}(\nu) = \left[\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right]^2.$$

Trasformata del prodotto di convoluzione

Vale un risultato analogo a quello visto per la trasformata di Laplace; se $f(x)$, $g(x)$ sono funzioni definite su \mathbb{R} e

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy$$

è il loro prodotto di convoluzione, allora risulta

$$(6.8) \quad \boxed{\mathcal{F}[f * g](\nu) = \hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu)}$$

e, reciprocamente,

$$\mathcal{F}[f \cdot g](\nu) = (\hat{f} * \hat{g})(\nu)$$

cioè: la trasformata di Fourier scambia tra di loro prodotto algebrico e prodotto di convoluzione.

Esempio

 Se $g(x) = \delta(x)$ (distribuzione di Dirac), si ha (ricordando che $\hat{\delta} = 1$)

$$\mathcal{F}[f * \delta] = \mathcal{F}[f]$$

e cioè:

$$(f * \delta)(x) = f(x).$$

Se $g(x) = \delta(x - x_0)$ si ha (ricordando la (6.4) e la (6.2))

$$\mathcal{F}[f * \delta(x - x_0)](\nu) = e^{-2\pi i \nu x_0} \hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[f(x - x_0)](\nu)$$

e cioè

$$f * \delta(x - x_0) = f(x - x_0).$$

La convoluzione di una funzione $f(x)$ con l'impulso di Dirac $\delta(x - x_0)$ provoca una traslazione di x_0 unità lungo l'asse x .

Uguaglianza di Parseval

Vale, per la trasformata di Fourier, un risultato analogo ad uno già visto per le serie di Fourier. Se $f(x)$ rappresenta (l'ampiezza di) un segnale (funzione del tempo: qui la variabile x ha significato di coordinata temporale), l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx$ (se convergente) si può interpretare come energia totale del segnale. Questa si può calcolare anche per mezzo della trasformata di Fourier di f ; risulta infatti

$$(6.9) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}$$

Questa formula (analogia alla (3.11) del teorema 7.12 del capitolo 7) si chiama *uguaglianza di Parseval*. Essa è un caso particolare della seguente (detta *teorema di Plancherel*), dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni tali che gli integrali scritti siano convergenti:

$$(6.10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{g}(\nu)} d\nu.$$

Esempio

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$. Ricordando la (6.7) abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi$$

Proprietà della trasformata di Fourier

Funzione	Trasformata	
$f(x)$	$\hat{f}(\nu)$	
$f(ax - b)$	$\frac{1}{ a } e^{-i2\pi\frac{b}{a}\nu} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$	formula del ritardo
$f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$	$(2\pi i\nu)^n \hat{f}(\nu)$	formule per le derivate
$x^n f(x)$, $n = 1, 2, \dots$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(\nu)$	
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu)$	
$f(x) \cdot g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(\nu)$	formula della convoluzione

7 UNA APPLICAZIONE: STUDIO DI UN CIRCUITO RC

Consideriamo un circuito *RC*: la tensione $s(t)$ che si stabilisce alle facce opposte del condensatore soddisfa l'equazione differenziale

$$(7.1) \quad \tau \dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

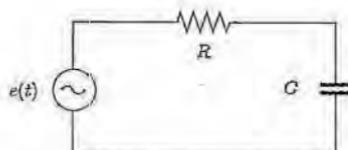


Figura A.18.

dove si è posto $\tau = RC$. Applicando all'equazione la trasformata di Fourier si ottiene

$$\tau(2\pi i\nu)\hat{s}(\nu) + \hat{s}(\nu) = \hat{e}(\nu)$$

e cioè

$$(7.2) \quad \hat{s}(\nu) = \frac{\hat{e}(\nu)}{1 + 2\pi i\nu\tau} = \hat{e}(\nu) \cdot \hat{h}(\nu).$$

La funzione $\hat{h}(\nu) = 1/(1 + 2\pi i\nu\tau)$ è detta *funzione di trasferimento* del circuito. Essa permette di ottenere $s(t)$ dalla conoscenza di $e(t)$. Applicando infatti la (6.8) (teorema di convoluzione) otteniamo

$$s(t) = (h * e)(t).$$

Nel nostro caso, essendo

$$\hat{h}(\nu) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + 2\pi i\nu}$$

otteniamo (ricordando l'esempio 5.3)

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

e perciò

$$s(t) = \int_0^{+\infty} e(t-t') \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' = \int_0^{+\infty} e(t') \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'.$$

Per esempio, se $e(t)$ è un impulso di durata T (fig. A.19) abbiamo

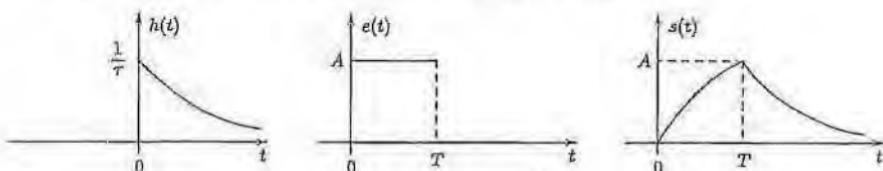


Figura A.19.

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - e^{-t/\tau}) & \text{se } t \leq T \\ A e^{-t/\tau}(e^{\frac{T}{\tau}} - 1) & \text{se } t \geq T. \end{cases}$$

Notiamo infine che se $e(t)$ è un impulso di Dirac: $e(t) = \delta(t)$ si ottiene

$$s(t) = (h * \delta)(t) = h(t).$$

La funzione di trasferimento risulta pertanto la risposta del sistema all'impulso di Dirac.

Esercizi**Trasformata di Laplace**

Esercizio 1 Trovare le \mathcal{L} -trasformate delle seguenti funzioni (assegnate per $x \geq 0$, nulle per $x < 0$):

- i) $(x-2)^3$ ii) $e^{-x}(1+x^2)$ iii) $\sin(x-2)$ iv) $\sin 3x \cos x$ v) $\operatorname{Ch} \omega x$

Esercizio 2 \mathcal{L} -trasformare i seguenti segnali periodici

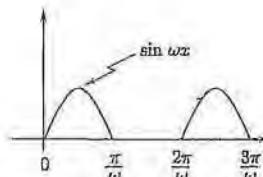
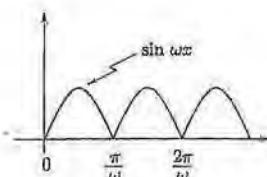
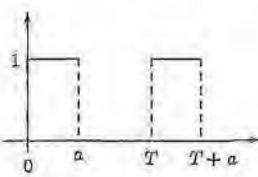


Figura A.20.

Esercizio 3 Trovare le funzioni la cui \mathcal{L} -trasformata è:

- i) $\frac{1}{p^2+1}$ ii) $\frac{1}{(p+1)^2}$ iii) $\frac{p}{(p+1)^2(p-3)}$ iv) $\frac{p}{(p^2+1)^2}$
 v) $\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ vi) $\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ vii) $\frac{p}{(p-1)(p+2)}$

Esercizio 4 Utilizzare il teorema di convoluzione per trovare l'antitrasformata di:

$$\text{i) } \frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \quad \text{ii) } \frac{1}{p^n(p^2+a^2)}$$

Esercizio 5 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- i) $y'' + y = \sin \omega x \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1$
 ii) $y'' + 2y' + y = e^{-2x} \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0$

Esercizio 6 Risolvere i seguenti sistemi:

$$\text{i) } \begin{cases} y'(x) = 4y + 4z \\ z'(x) = y + 4z \end{cases} \quad y(0) = 1 \quad \text{ii) } \begin{cases} y'(x) = -y + z + e^{-x} \\ z'(x) = -9y - z \end{cases} \quad y(0) = 0 \quad z(0) = 0$$

Trasformata di Fourier

Esercizio 7 Sia $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Verificare che $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$. Applicare la trasformata di Fourier a questa equazione e ricavare $\hat{f}(\nu)$.

Calcolare poi $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\omega x) dx$. In particolare, per $\omega = 0$, ritrovare il risultato del capitolo 5, paragrafo 2.

10. Calcolare la F -trasformata di $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ ($\sigma > 0$). Mostrare che $f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = f_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$. Ricavare che $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma = \delta$.

11. Applicare la trasformata di Fourier all'equazione differenziale del secondo ordine:

$$s''(t) + 2b\omega s'(t) + \omega^2 s(t) = \omega^2 e(t)$$

(b, ω costanti assegnate, $e(t)$ funzione nota). Si troverà

$$\hat{s}(\nu) = h(\nu) \hat{e}(\nu)$$

dove $h(\nu)$ è la funzione di trasferimento. Considerare i casi $b < 1$ e $b > 1$.

In particolare, trovare la risposta del sistema ad un impulso di Dirac.

12. Trovare la trasformata inversa di Fourier per

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{(4\pi^2\nu^2 + 1)^2}$$

(ricordando che $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ e applicando il teorema di convoluzione).



Attenzione
Biblioteca centrale
di Ingegneria
Ac. 2007.