ANALISI II

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1/n^a: successione armonica

a=0 converge a 1; a>0 converge a 0; a<0 diverge;

b^n: successione geometrica

-1<b<1 converge a 0; b=1 converge a 1; b>1 diverge; b<=-1 non esiste;

CONVERGENZA PUNTUALE: data una successione di funzioni e una f, fn conv. punt. a f se per ogni x il limite con n->∞ di fn = f;

CONVERGENZA UNIFORME: data una successione fn e una f, fn conv. unif. a f se il limite con n->∞ del sup|fn-f|=0 (con x app ad A);

Se c'è conv. unif. c'è anche conv. punt.

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DEL LIMITE: fn di f continue e fn conv. unif. a f, allora f è continua;

TEOREMA SULL'INVERSIONE DEI LIMITI: fn conv. unif. a f e per ogni n esiste il limite x->x0 di fn, allora lim n->∞(lim x->x0 fn) = lim x->x0 (lim n->∞ fn);

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE: fn di f continue e fn conv. unif. a f, allora lim n->∞ [∫fn]a-b = [∫f]a-b;

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA: fn di f continue con derivata continua e fn conv. punt. a f, f'n conv. punt. a g, allora fn conv. unif. a f e f è derivabile e f' = g; lim n->∞ f'n = f';

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA UNIFORME:

1: fn di f continue in un intervallo I e fn conv. punt. in I e fn monotona crescente, allora fn<=f(n+1). Quindi fn conv. unif. in I.

2: fn in un intervallo I e f continua t.c. fn conv. punt. a f, inoltre per ogni n fn monotona crescente, allora fn<=f(n+1). Quindi fn conv. unif. in I.

SERIE DI FUNZIONI

criteri di convergenza: (l>1 diverge, l<1 converge, l=1 non so);

1: LEIBNIZ (som(-1)^n an): se an termini positivi, decrescente e an va a zero allora converge.

2: RADICE: radice n-esima di |an|. an tende a un numero l, controlla sopra.

3: RAPPORTO: |a(n+1)/an|. an tende a un numero l, controlla sopra.

4: CONFRONTO: an<bn e som bn converge, allora converge anche an.

5: COMPORTAMENTO ASINTOTICO: se an/bn->1 allora hanno lo stesso comportamento.

CONVERGENZA PUNTUALE: se S=lim n->∞ Sn allora la serie conv. punt.

CONVERGENZA ASSOLUTA: se som|an| converge, som an converge assolutamente.

CONVERGENZA UNIFORME: som fn conv. unif. a S, se Sn conv. unif. a S.

CONVERGENZA TOTALE: som fn conv. tot. se esiste successione Mn t.c. |fn|<=Mn per ogni x app. ad A e se som Mn converge.

tot. implica tutto, uni./ass. implicano punt.

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DELLA SOMMA DI SERIE: fn successione di f continue e S somma delle serie con S=som fn, S conv. unif., allora S è continua.

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE: som [∫fn]a-b = [∫S]a-b;

TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE: som f'n = S';

SERIE DI POTENZE

som an(x-x0)^n

RAGGIO DI CONVERGENZA: è l'estremo superiore di un insieme di numeri reali per cui la serie converge.

TEOREMA: dato un p tra 0 e ∞, la serie converge assolutamente sse |x|<p; la serie converge totalmente nell'intervallo [-a,a] sottoinsieme di (-p,p);

CRITERIO DI CAUCHY-HADAMARD: se esiste lim n->∞ di radice n-esima di |an| ed è uguale a l, allora p=1/l;
CRITERIO DI D'ALAMBERT: se esiste lim n->∞ di |a(n+1)/an| ed è uguale a l, allora p=1/l;
SERIE derivata e integrata hanno lo stesso p della originale.

SERIE DI TAYLOR
presa una funzione, ci chiediamo se sia possibile svilupparla in serie di potenze con punto iniziale x0.
UNICITÀ DELLO SVILUPPO: data una serie di potenze=f con p>0 per ogni x nell'intervallo di convergenza di raggio p, allora f è infinitamente derivabile e an=f^(n)(x0)/n! e f è sviluppabile in serie.

SERIE DI FOURIER
f=a0/2 + som (ak coskx + bk senkx)

$2\sin(3x) \to b_3 = 2$

sia f sviluppabile, allora ak=1/pi [∫f coskx](-pi, pi), bk=1/pi [∫f senkx](-pi, pi), a0=1/pi [∫f](-pi, pi);
Se pari abbiamo solo coseni e bk=0, se dispari abbiamo solo seni e ak=0;
f regolare: continua e derivabile. f a tratti: numero finito di salti (disc. eliminab.)
CONVERGENZA PUNTUALE: f periodica regolare a tratti allora f conv. punt. a ½[f(x+)+f(x-)].
CONVERGENZA UNIFORME: f periodica regolare a tratti allora f conv. unif. in ogni sotto intervallo in cui f è continua.
CONVERGENZA TOTALE: f periodica regolare a tratti allora f conv. tot. in tutto R.
TEOREMA SULL'INTEGRAZIONE: integrale della funzione è uguale all'integrale della sua serie di Fourier.

$z = \rho e^{i\theta}$ $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$

$|e^z| = e^x$

NUMERI COMPLESSI
C è NON ORDINATO (non possono esistere <, >)
i=+-radice di 1; -i=1/i; z=x+iy; coniugato = x-iy; p=radice di x^2 + y^2;
coordinate polari: z=|z|(costeta+i senteta), ove |z|=p e teta = Argz = arctan y/x;
POTENZE: z^n=|z|^n(cos nteta+i sen nteta)

$z \to \rho e^{i\theta}$

$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

RADICI: z=radice n-esima di w=radice n-esima di |w| [cos(teta+2kpi/n)+i sen(teta+2kpi/n)] k=0,1,…,n-1 (con k=0 radice n-esima principale).
PROPRIETÀ: distanza fra 2 punti: |z1-z2|; distanza dall'origine: |z|;
C* piano senza origine, C** = C\{z=x+iy: x<=0, y=0}

$z^\beta = e^{\beta \log z}$

per aggiungere periodicità su immaginario $+2k\pi i$

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA
f(x,y)=u(x,y)+i v(x,y)
INSIEME A CONNESSO: se fissati due punti esiste una poligonale in A che li unisce.
F DEFINITA IN APERTO CONNESSO: è limitata se esiste c>0 t.c. il |f|<=c per ogni z;

FUNZIONI OLOMORFE

per controllare coniugato leva olomorfia
olomorfa modulo leva olomorfia

CAUCHY-RIEMANN 1: la derivata di f dx = 1/i derivata di f dy
CAUCHY-RIEMANN 2: du/dx=dv/dy e dv/dx=-du/dy
CAUCHY-RIEMANN 3: df/dp=1/ip df/dteta

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Log}\\ \mathrm{Arg}\end{array}\right\}$ C** olomorfe

F OLOMORFA IN APERTO CONNESSO: se per ogni z è derivabile.
F INTERA: se olomorfa in tutto C.
FUNZIONE ESPONENZIALE: e^z = e^x (cosy + i seny); periodico verticalmente con T=2pi;
COMPLESSO IN FORMA ESPONENZIALE: z = p e^(i teta)
FUNZIONE LOGARITMICA: Logz = log|z|+iArgz = logp+iteta; è definita in C*, olomorfa in C**. $z \neq 0$
FUNZIONE DI POTENZA: z^b=e^(b Logz); definita in C*, olomorfa in C**;
FUNZIONI CIRCOLARI: cosz= (e^iz + e^-iz)/2; senz= (e^iz - e^-iz)/2i; coshz= (e^z + e^-z)/2; senhz= (e^z - e^-z)/2; le iperboliche sono intere. Seno e coseno non sono limitate.

SERIE DI POTENZE IN CAMPO COMPLESSO (uguali alle reali) S=som $a_n(z-z_0)$^n
OLOMORFIA DI UNA SOMMA: una serie di fourier complessa è olomorfa in Br={z : |z-z0|<p} (intorno circolare *in cui è definita*) e S' = som($na_n(z-z_0)$)^(n-1) e vale l'Unicità dello Sviluppo in Serie di Potenze e a_n= $S^{(n)}(z_0)$/ n! di conseguenza tutti gli sviluppi soliti.

INTEGRAZIONE NEL COMPLESSO
CURVE REGOLARI: $\boldsymbol{\gamma}$ curva regolare in C se: $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1 + i\boldsymbol{\gamma}_2$:[a,b] -> C di C^1 (derivabile e derivata continua) e se $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{\gamma}_1'(t) + i\boldsymbol{\gamma}_2'(t)$ *diverso da 0 per ogni* t
CERCHIO $\boldsymbol{\gamma}$=r e^{it} $+z_0$ dove r è il raggio del cerchio. e z_0 punto di centratura
Definisco IMMAGINE (o sostegno o traccia) $\boldsymbol{\gamma}$([a,b]) = {z: z=$\boldsymbol{\gamma}$(t), t in[a,b]}.
se $\boldsymbol{\gamma}$(a) = $\boldsymbol{\gamma}$(b) la curva è detta chiusa
se ristretta a [a,b) è iniettiva e se t_1 diverso t_2 e pure i valori di $\boldsymbol{\gamma}$ nei due t sono diversi, allora è la curva è detta Semplice (no intersezioni).
Una curva semplice e chiusa si chiama CIRCUITO

LUNGHEZZA DI UNA CURVA: L($\boldsymbol{\gamma}$) = [∫|$\boldsymbol{\gamma}$'(t)|dt](a,b) = ∫ $({\boldsymbol{\gamma}'_1}^2 + {\boldsymbol{\gamma}'_2}^2)^{½}$ dt
CURVA REGOLARE A TRATTI: $\boldsymbol{\gamma}$ è regolare a tratti se ottenuta concatenando più curve regolari
INTEGRAZIONE CURVILINEA: dato A aperto e continuo, f e $\boldsymbol{\gamma}$ curva regolare(a tratti) allora definisco integrale curvilineo: [∫f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$) = [∫f($\boldsymbol{\gamma}$(t)) $\boldsymbol{\gamma}$'(t) dt](a,b)
TEOREMA: data una fn di continue e fn conv. unif. a f, allora [/f dz]($\boldsymbol{\gamma}$)=lim n->∞ [/fn dz]($\boldsymbol{\gamma}$).

TEORIA DEL TEOREMA DI CAUCHY
PRIMITIVA: A aperto e connesso, f continua allora F:A->C è Primitiva di f se F'=f per ogni z
ESISTENZA PRIMITIVA: A aperto connesso. f continua. Allora f ammette primitiva e per ogni $\boldsymbol{\gamma}$ regolare a tratti l'integrale dipende dagli estremi e per ogni $\boldsymbol{\gamma}$ chiusa e regolare a tratti [∫f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$) = 0
SEMPLICEMENTE CONNESSO: A aperto connesso si dice Semplicemente connesso se per ogni $\boldsymbol{\gamma}$ chiuda e regolare a tratti, l'aperto D che ha come frontiera $\boldsymbol{\gamma}$ è interamente contenuto in A (non ha buchi).

TEOREMA INTEGRALE DI CAUCHY:
A aperto connesso, f Olomorfa; allora per ogni $\boldsymbol{\gamma}$ circuito regolare a tratti di A tale che $\boldsymbol{\gamma}$ è frontiera di un aperto D totalmente contenuto in A allora [∫f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$) = 0 (NB un integrale può venire 0 per conto suo)
CONSEGUENZE CAUCHY:
1: f olomorfa in A ammette una primitiva per ogni A' semplicemente connesso di A in particolare se A è semplicemente connesso f ammette primitiva in A
2: se $\boldsymbol{\gamma}_1$ e $\boldsymbol{\gamma}_2$ circuiti regolari a tratti con $\boldsymbol{\gamma}_2$ interna a $\boldsymbol{\gamma}_1$ se f è olomorfa in D compreso tra $\boldsymbol{\gamma}_1$ e $\boldsymbol{\gamma}_2$ allora integrale su $\boldsymbol{\gamma}_1$ = integrale su $\boldsymbol{\gamma}_2$
FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY: A aperto connesso *e f olomorfa*, $\boldsymbol{\gamma}$ circuito regolare a tratti contenuto in A tale che $\boldsymbol{\gamma}$ è frontiera di aperto D interamente in A allora per ogni z_0 in D vale che $f(z_0)$ = 1/2πi [∫f(z) / $(z-z_0)$ dz]($\boldsymbol{\gamma}$)

FUNZIONI ANALITICHE:
f def in A è detta Analitica se per ogni z_0 di A si può sviluppare in forma di Taylor.

1: A aperto connesso e f olomorfa allora per ogni z_0, posto r=dist(z_0,∂A) [∂A è la frontiera di A] f(z) = som($c_n(z-z_0)^n$ per ogni z appartenente ad intorno circolare Br e inoltre c_n = [$f^n(z_0)$]/n! = 1/2πi [∫f(z) / $(z-z_0)^{n+1}$ dz]($\boldsymbol{\gamma}$) ove $\boldsymbol{\gamma}$ circonf di centro z_0 e raggio < r

NB in pratica f olomorfa <-> f analitica

FUNZIONI ARMONICHE: f= x+iv analitica allora u(x,y) e v(x,y) sono f armoniche e vale: $\Delta u = d^2u/dx^2 + d^2u/d$ $= 0$; $\Delta v = d^2v/dx^2 + d^2v/dy^2 = 0$

TEOREMA DI MORERA: f continua nell'aperto connesso A se l'integrale di f su ogni curva semplice e chiusa in A è nullo allora f è analitica

ZERI DI UNA FUNZIONE ANALITICA: f continua nell'aperto connesso A, il punto a si dice zero di f se f(a) = 0

se a zero di f e $f(z) = som(c_n(z-a)^n) = som([f^n(a)/n!] (z-a)^n)$ sviluppo di taylor in intorno di a, allora $c_0 = f(a) =$

allora a è *zero di ordine di n se $f^k(a) = 0$ per ogni 0<= k <= n-1 e $f^n(a) = 0$*

2: f analitica in A aperto connesso sono equivalenti; 1 - esiste a tale che $f^n(a) = 0$ per ogni n>= 0; 2 - f è null in un intorno di a; 3 - f è nulla in A

3: 2 f analitiche coincidono in intorno di a allora coincidono ovunque

PRINCIPIO DEGLI ZERI ISOLATI: l'insieme degli zeri di una f analitica non identicamente nulla definita in A è costituito da punti isolati ed è privo di punti di accumulazioni appartenenti ad A

PRINCIPIO D'IDENTITÀ: se 2 f analitiche coincidono su un dominio che sia dotato di un punto di accumulazione appartenente allo stesso dominio allora le 2 funzioni coincidono ovunque

PROLUNGAMENTE ANALITICA: data f definita su I intervallo se esiste una f analitica definita in aperto A tal che I sottoinsieme di A intersecato R e con restrizione ad I coincide con f(x) allora f è univocamente determinata ed è detta prolungamento analitico

DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY: con f analitica e γ circonferenza di centro a e raggio r, allora $f(a)=1/2pi\ [/f(a+$ $e^{it})dt](0, 2pi)$

TEOREMA DI LIOUVILLE: se f è analitica e limitata, allora f è costante.

SINGOLARITÀ

PUNTO SINGOLARE ISOLATO: f analitica in A. Un punto z_0 è Punto Singolare Isolato se z_0 non appartiene ad ma esiste intorno circolare $Br^*(z_0) = Br(z_0)\backslash(z_0)$

tutto *contenuto in A (NB sing. iso. è per forza punto di frontiera per l'aperto A di definizione di f).*

CLASSIFICAZIONE SINGOLARITÀ:

1: Eliminabile: f analitica e z_0 sing.iso. se esiste lim per z->z_0 di f(z) = λ allora posso scrivere f^* uguale ad f pe tutti i punti eccetto z_0 dove vale λ

2: Poli: supponiamo che per un n appartenente ad N\{0} ho una $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ che ammette un limite λ diverso da 0. Allora z_0 è un polo di ordine n per f

3: Essenziali: tutte quelle che non sono eliminabili o poli

RESIDUI

res(f,z0)=1/2ipi[/f(z)dz](γ) gamma deve circuitare solo z0 e non altre singolarità. Se la singolarità è eliminabile res=0.

Per un polo: res(f,z0)=1/(n-1)! lim z->z0 d^{n-1}((z-z0)^n f(z))/dz^{n-1}

Con polo semplice: res(f,z0)=lim z->z0 (z-z0)f(z) o res(f,z0)=f1(z0)/f'2(z0) con f(z)=f1/f2

CALCOLO INTEGRALI CON RESIDUI: [/f(z)dz](γ)=2ipi res(f,z0)

SERIE DI LAURENT → SERIE NORMALI

serve per calcolare il residuo delle singolarità essenziali

corona circolare di centro z0={z app a C: 0<=r1<|z-z0|<r2<=+∞}

serie bilatera: è una serie di potenze che va da -∞ a +∞. Converge se convergono som(c_n(z-z0)^n con n>=0 som(c_{-k}/(z-z0)^k) con k>0.

parte regolare $1+z^2 \dots$ singolare $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \dots$

TEOREMA DI LAURENT: una f analitica in una corona circolare, allora f è somma di una serie bilatera e vale lo sviluppo di Laurent ove c_n=1/2ipi [/f(z)/(z-z0)$^{n-1}$]($\boldsymbol{\gamma}$)

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Il *coefficiente* c_{-1} *dello sviluppo di Laurent* è uguale al residuo di f in z0.

$res(f,z_0) = c_{-1} \rightarrow \frac{3}{z^1} \rightarrow c_{-1}$

TEOREMA DEI RESIDUI

sia f analitica e $\boldsymbol{\gamma}$ circuito e $z_{1,2,\dots}$ singolarità, allora [/f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$)=2ipi som(res(f,z_k))

CALCOLO DI INTEGRALI IMPROPRI

LEMMA del grande cerchio: f definita e continua in un settore angolare, se $\lim_{|z|\to\infty}$zf(z) =0 allora $\lim_{r\to\infty}$[/f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$)=0 con $\boldsymbol{\gamma}$ intersezione della circonferenza di raggio r e centro origine con il settore considerato.

LEMMA di Jordan: g definita e continua in settore angolare nel semipiano IM(z)>=0, $\lim_{|z|\to\infty}$g(z) =0 allora $\lim_{r\to\infty}$[/g(z)e^iz dz]($\boldsymbol{\gamma}$)=0 con $\boldsymbol{\gamma}$ intersezione della circonferenza di raggio r e centro origine con il settore considerato.

LEMMA del polo semplice: f analitica in intorno forato dell'origine ed abbia un polo semplice nell'intorno, allora $\lim_{r\to 0}$[/f(z)dz]($\boldsymbol{\gamma}$)=$\boxed{\text{ipi res(f,0).}}$ senza il $2\pi i$, solo πi

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots$

TRASFORMATE: f è L-Trasformabile se esiste s t.c. la funzione e^-st f(t) è sommabile su R+ (l'integrale fra 0 e infinito del modulo converge). Chiamiamo integrale di Laplace [/e^-st f(t) dt](0,+∞).

$\boldsymbol{\sigma}$ ascissa di convergenza

Sia f una L-Trasformabile e posto $\boldsymbol{\sigma}$=inf(Re(s) t.c. e^-st f(t) è sommabile), per ogni s t.c. il Re(s)>$\boldsymbol{\sigma}$ chiameremo trasformata di Laplace di f L[f](s)=F(s)=[/e^-st f(t) dt](0,+∞)

Limitatezza: f L-Trasformabile con $\boldsymbol{\sigma}$, per ogni $\boldsymbol{\sigma}$0>$\boldsymbol{\sigma}$, F è limitata nel semipiano chiuso Re(s)>=$\boldsymbol{\sigma}$0 e $\lim_{Re(s)\to\infty}$F(s)=0

DERIVATA DELLA TRASFORMATA: F L-Trasformabile con $\boldsymbol{\sigma}$, allora F(s) è olomorfa nel semipiano Re(s)>$\boldsymbol{\sigma}$ e la funzione -t f(t) è L-Trasformabile con $\boldsymbol{\sigma}$.

$F^{(n)}(s)=(-1)^n L[t^n f(t)](s)$

PROP: L[f(ct)](s)=L[f(t)]/c (s/c); L[f(t-t0)](s)=e^{-t0s}L[f(t)](s); L[e^{at}f(t)](s)=L[f(t)](s-a)

L[f'](s)=sL[f](s)-f(0); L[$f^{(n)}$](s)=s^nL[f](s)-(s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+...+$f^{(n-1)}$(0))

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE: (f*g)(x)=[/f(t) g(x-t) dt](R)

L[f*g](s)=L[f](s) L[g](s)

TEOREMA per invertire: f(t)=som su n (res (e^st F(s), s_n). s_n sono generalmente dei poli.

PROBLEMI DI CAUCHY

considero il problema di cauchy: y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) con t>=0 e con y(0)=y_0 e y'(0) = y_1 allora la soluzione di questo problema può essere trovata usando Laplace e vale Y(s) = [y_0(s+a) + y_1]/[s^2 +as + b] + L[g](s)/[s^2 +as + b] = Y_1(s) + Y_2(s) (!! stare attenti ad eventuali traslazioni, devo avere i valori di y e y' per forza in 0). Poi antitrasformo.

Con g=0 rimane solo Y_1

Con y_0=0 e y_1=1 abbiamo sol. fondamentale Y(s)=1/s^2+as+b

g=0

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \to \frac{1}{s^n} \qquad t \to \frac{1}{s^2}$$

Trasformate di Laplace di alcuni segnali notevoli

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)_+](s)$	$\sigma[f]$
1	$\frac{1}{s}$	0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$Re(a)$
$\sin \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sinh \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	ω
$\cosh \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	ω
$e^{at} \sin \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
$e^{at} \cos \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
$e^{at} \sin(\omega t + \phi)\ ,\ \omega > 0$	$\frac{\omega \cos\phi + (s-a)\sin\phi}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
$e^{at} \cos(\omega t + \phi)\ ,\ \omega > 0$	$\frac{(s-a)\cos\phi - \omega \sin\phi}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
$t^n\ ,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$t^n e^{at}\ ,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$Re(a)$
$t^\alpha\ ,\ \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	0
$t \sin \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$t \cos \omega t\ ,\ \omega > 0$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	0

Riportiamo di seguito alcuni classici sviluppi:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n\ , \quad |z|<1$$

Serie di potenze $\sum a_n (x-x_0)^n$

$-\rho < x-x_0 < \rho$ conv.

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\ , \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \qquad z\in\mathbb{C}$$

aggiungi limiti notevoli

$$\cos z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad z\in\mathbb{C}$$

aggiungi integrali e derivate

$$\sinh z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\cosh z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}\ , \quad |z|<1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n\ , \quad |z|<1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n}\ , \quad |z|<1$$

$$\arctan z = \textstyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\ , \quad |z|<1$$

(L'ultima funzione è l'arcotangente principale in campo complesso)

$\frac{1}{n^a}$ $a=0$ conv. 1 $\quad$ b^n $|b|<1$ conv. 0 $\quad$ $g_n = \sup|f_n - f|$ $\quad$ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ c $\alpha>1$, d $\alpha\leq 1$

$a>0$ conv. 0 $\quad$ $b=1$ conv. 1

$a<0$ div. $\quad$ $b>1$ div

$b\leq 1$ $\nexists$

CH $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$ $\quad$ D'A $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\rho}$ $\quad$ $\underset{\text{esp. di } z.}{a_n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

FOU. $f = \frac{a_0}{2} + \sum(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ $\quad$ Pari $b_k = 0$ dispari $a_k = 0$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \cos kx \, dx$ $\quad$ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \operatorname{sen} kx \, dx$ $\quad$ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \, dx$

COMP. $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad$ $x = \cos\theta \cdot \rho$ $\quad$ $y = \operatorname{sen}\theta \cdot \rho$ $\quad$ $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$2k\pi i \leftarrow e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ $\quad$ $|e^z| = e^x$ $\quad$ $\theta = \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$ $\quad$ $\rho = |z|$

$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ $K = 0, \dots, n-1$

CR1 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad$ CR2 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ $\quad$ CR3 $\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad$ cosh e senh → senza i

$\underset{z\neq 0}{\operatorname{Log}} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z = \log\rho + i\theta$ $\quad$ $z^\beta = e^{\beta \operatorname{Log} z}$

def in $\mathbb{C}^*$, olo in $\mathbb{C}^{**}$ $\quad$ $\bar{z}$ e $|z|$ no olo.

CURVE e INTEGRAZIONE

CERCHIO: $\gamma = re^{it} + z_0$ $\quad$ $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int \left(\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2\right)^{1/2} dt$

$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$

RESIDUI

$\text{res} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z) \, dz$ $\quad$ elim. $= 0$ $\quad$ polo $\text{res} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z - z_0)^n \cdot f(z)$

P.S. $\text{res} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) \cdot f(z) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$

LAURENT $\text{res}(f, z_0) = C_{-1}$

$\int_\gamma f(z) \, dz = 2\pi i \sum \text{res}$

LEMMI: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ → $\text{res} \cdot 2\pi i$ $\quad$ $\underset{\text{im } y=0}{\text{P.S.}}$ $\int = \pi i$ residuo

TRASFORMATE: $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)\, dt = F(s)$ $\qquad \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \to \frac{1}{s^n} \qquad t \to \frac{1}{s^2}$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f_0 \qquad \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - (s^{n-1} f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0))$$

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{c}\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \qquad f(t) = \sum_n res(e^{st} F(s), s_n)$$

$$(f * g)(x) = \int_R f(t) \cdot g(x-t)\, dt$$

PROB. CAUCHY $\quad Y(s) = \frac{y_0 \cdot (s+a) + y_1}{s^2 + as + b} + \frac{\mathcal{L}[g](s)}{s^2 + as + b}$ $\quad$ con $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, $y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1$

devo avere $y(0)$ e $y'(0)$ altrimenti traslazione

$\sum a_n (x - x_0)^n$ conv. $-\rho < x - x_0 < \rho$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$$

$y = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{1}{x^2} \qquad y = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y = |x| \quad y' = \frac{|x|}{x} \qquad y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}$

$y = e^x \quad y' = e^x \qquad y = \operatorname{sen} x \quad y' = \cos x \qquad y = \cos x \quad y' = -\operatorname{sen} x$

$y = tg\, x \quad y' = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{arcTg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \qquad y = \operatorname{arcCtg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$D[f \cdot g] = f'g + fg' \qquad D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad D\left[\frac{1}{f}\right] = -\frac{f'}{f^2}$

$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$