Esercizio 1

I $\int_\gamma \cosh z \, dz$ $\quad \gamma(t) = \log(3+t) - \pi i t^2 \quad t \in [0,1]$

$$\int_0^1 \cosh(\log(3+t) - \pi i t^2)\left(\frac{1}{3+t} - 2\pi i t\right) dt$$

$\int \cosh t = \sinh t$

$$= \int_0^1 \frac{e^{\log 3+t - \pi i t^2} + e^{-\log 3+t + \pi i t^2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3+t} - 2\pi i t\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{(3+t)\, e^{-i\pi t^2} + \frac{e^{i\pi t^2}}{3+t}}{2} \left(\frac{1}{3+t} - 2\pi i t\right)$$

$$= \int (3+t) \cdot (\cos \pi t^2$$

RISPOSTA A

TORRICELLI - BARROW

$$\Big[\sinh t\Big]_{\gamma(a) = \log 3}^{\gamma(b) = \log 4 - i\pi} = \sinh(\log 4 - i\pi) - \sinh(\log 3)$$

$$= \frac{e^{\log 4 - i\pi} - e^{-\log 4 + i\pi}}{2} - \frac{e^{\log 3} - e^{-\log 3}}{2}$$

$$= \frac{4(\underbrace{\cos(-\pi) + i\cancel{\sin(-\pi)}}_{-1}) - \frac{1}{4}(\underbrace{\cos\pi + i\cancel{\sin\pi}}_{-1})}{2} - \frac{3 - \frac{1}{3}}{2}$$

$$= \frac{-4 + \frac{1}{4}}{2} - \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{-4 + \frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{-48 + 3 - 36 + 4}{2 \cdot 12} = -\frac{77}{24}$$

II

$\text{res}\left(\frac{3i}{z-1}, 1\right) = \lim_{z\to 1} = -3i$

$\text{res}\left(\frac{-i}{z-1}, 1\right) = \lim_{z\to 1} i = -i$

$\text{res}\left(\frac{2}{(z-1)^2}, 1\right) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} 2 = 0$

$\text{res}\left(\frac{3}{z-i}, 1\right) = 0$

$\sum \text{res} = -4i$ Risposta D

III $f(x) = 3 - 6 \underbrace{\sin 5x \cos 7x}_{\text{Dispari}} \to 0$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3 - 6 \underbrace{\sin 5x}_{\text{Dispari}} \underbrace{\cos 7x}_{\text{Pari}} \, dx = \frac{1}{\pi} \left[3x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\cancel{\pi} + 3\pi}{\cancel{\pi}}$

Risposta C

IV

$\lim_{n\to\infty} e^{-n(x+2)} = \begin{cases} 0 & x > -2 \\ 1 & x = -2 \\ \infty & x < -2 \end{cases}$ Risposta b

converge unif in $[a, \infty)$, $a > -2$

V

Risposta C

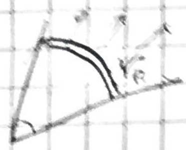
II

Esercizio 2

i) sia $g(z)$ una funzione definita e continua in un settore angolare S contenuto nel semipiano $Im(z)>0$

se $\lim_{|z|\to\infty} g(z)=0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz}\, g(z)\, dz=0$

con γ_R ~~l'arco~~ intersezione tra la circonferenza di raggio R e il settore angolare S



ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+3x+4}\,dx = Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{x^2+3x+4}\,dx$ $\qquad \frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2} = -\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\int_{\gamma_0}\frac{e^{i2z}}{\left(z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

||

$$2\pi i\, res\left(f, -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}} \frac{e^{i2z}}{\left(z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{e^{i(-3+i\sqrt{7})}}{i\sqrt{7}}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{7}-3i}}{i\sqrt{7}} \xrightarrow{\text{solo Im}} -\frac{e^{-\sqrt{7}}\cdot \sin 3}{\sqrt{7}} \ (\cos 3) = -\frac{e^{-\sqrt{7}}\cos 3}{\sqrt{7}}$$

ESERCIZIO 3

i) Si dice serie di Taylor centrata in z_0 una serie geometrica del tipo $\sum a_k (z-z_0)^k$ con $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k}$

ii)

$$f(z) = (z-1)^3 \cdot Log(1+(1-z)) = (z-1)^3 \cdot \sum_{k\geq 1} \frac{(1-z)^k}{k} \cdot (-1)^{k+1}$$

$$= \sum \frac{(-1)^k (z-1)^{k+3}}{k} (-1)^{k+1} = -\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} (z-1)^{k+3}$$

$$k=20 \Rightarrow -\frac{1}{20}(z+1)^{23} \qquad f^{(23)}(1) = 23! \cdot a_{20} = -\frac{23!}{20}$$

4

i

- Se si tratta di una singolarità eliminabile il residuo è sempre nullo
- Se si tratta di un polo di ordine m possiamo fare $res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$
- Altrimenti si può sviluppare la serie di Laurent associata e andare a vedere che $res(f, z_0) = C_{-1}$

ii) Ha singolarità in $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ e

$$res(f, 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\sin z (e^z-1)} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\sin z} \cdot \frac{z}{e^z-1} \right) = 1$$ polo semplice

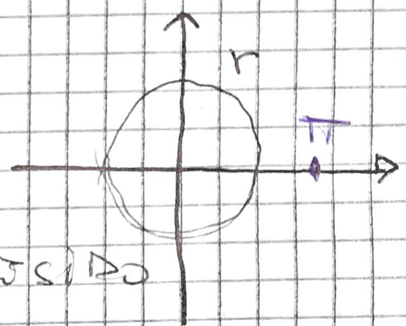
$$\underset{k\neq 0}{res}(f, k\pi) = \frac{1}{1} \lim_{z\to k\pi} \frac{z(z-k\pi)}{(e^z-1)\sin z} = \lim \frac{(t+k\pi)\cdot t}{(e^{t+k\pi}-1)\sin(t+k\pi)} = (-1)^k \frac{k\pi}{e^{k\pi}-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = z-k\pi \\ z = t+k\pi \end{array}}$$

5) se $f(z)$ è definita e olomorfa ~~derivabile~~ in $A \subseteq \mathbb{C}$

se γ è circuito regolare a tratti contenuto in A, tale che γ è la frontiera di D : $D \subseteq A$ con ~~D~~ tale che D è semplicemente connesso

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$



iii) siccome γ non contiene alcun residuo

$$\int_\gamma \frac{z^3 - 1}{z - \pi}\,dz = 0$$