Esercizio 1 10.09

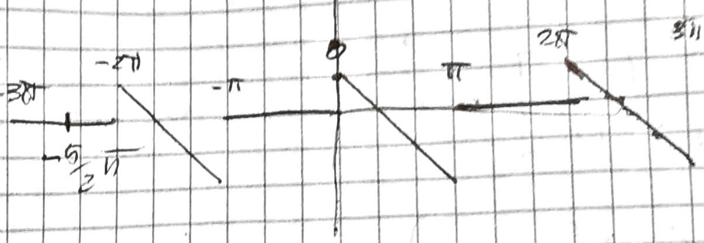
I)

$$\cos i = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = \cosh 1$$

Risposta b

II)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



Risposta B

III)

$$\sum_{n\ge 0} \frac{1}{(iz)^n} = \sum \left(\frac{1}{iz}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{iz}} = \frac{iz}{iz-1}$$

Risposta D

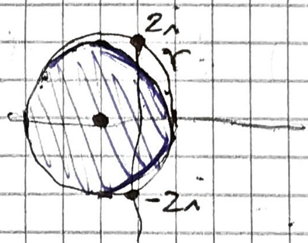
IV)

$$\mathcal{L}\left[t^2 * e^{2t}\right] = \mathcal{L}[t^2] \cdot \mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Risposta B

V)

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^2(z^2+4)}$$



$$= \int_\gamma \frac{dz}{e^2(z+2i)(z-2i)} = 0$$

Risposta C

γ non contiene singolarità

ESERCIZIO 2

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ funzione analitica e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ singolarità isolata di f.

Il residuo di f in z_0 è $\operatorname{res}(f, z_0) = 2\pi i \int_{\gamma} f(z)\, dz$

con $\gamma \subseteq A$ e $\gamma \ni z_0$ e nessun'altra singolarità.

ii) I residui si possono calcolare come segue

> se sono singolarità eliminabili: $\operatorname{res}(f, z_0) = 0$ sempre

> se sono poli: $\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$

> altrimenti in alternativa si può sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent centrata in z_0 $\sum_{-\infty < n < \infty} c_n (z-z_0)$ allora

$\operatorname{res}(f, z_0) = c_{-1}$

iii) ~~res(f,~~

$$f: \frac{z-3}{e^{z-3}} = (z-3) \sum_{n \geq 0} \frac{(z-3)^n \cdot (-1)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z-3)^{n+1}}{n!}$$

($z_0 = 3$ non è neanche una singolarità) $c_{-1} = 0 = \operatorname{res}(f, 3)$

$$g = e^{\frac{1}{z-3}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-3)^n} \frac{1}{n!} = \quad c_{-1} = \frac{1}{1!} = \operatorname{res}(g, 3)$$

$$h(z) = \frac{\sin(z-3)}{(z+3)^2 (z-3)^2} \qquad \operatorname{res}(h, 3) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to 3} \frac{\cancel{(z-3)} \cdot \sin(z-3)}{(z+3)^2 (z-3)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

Esercizio 3

si definisce serie di Laurent (bilatera) una sommatoria tipo $\sum_{-\infty<n<\infty} c_n(z-z_0)^n$

che converge in una corona circolare $C_{R_1 R_2}$

con $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

ii) $\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-3)^{-1}}{-1}\right] = \frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\left[\frac{+1}{3-z}\right] = \frac{1}{z} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})}\right]$

$\frac{1}{3z} \cdot \frac{d}{dz}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{3^n}\right] = \frac{1}{3z} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{3^n} \cdot n = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-2}}{3^{n+1}} \cdot n$

$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{-n}} = 0$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{3}$ $\quad R = 3$

converge in $0<|z|<3$

Esercizio 4

i) sia $f_n(x) : A \to \mathbb{R}$ una succ. di funzioni continue definite in $A = [a,b]$

e sia $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b] \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Non lo dimostro

Eserc 4.2

$$f_n(x) = \frac{x}{3x + 5/n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{3x+5/n^2} - \frac{1}{3} \right| = \sup \left| \frac{\cancel{3x} - \cancel{3x} - 5/n^2}{3(3x+5/n^2)} \right| = \sup \left| \frac{5/n^2}{9x+15/n^2} \right|$$

$$= \sup \left| \frac{5}{9xn^2+15} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{5}{9xn^2+15} \right| = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

? NON CONVERGE?

$\boxed{\text{PENSO DI AVER FATTO QUALCHE ERRORE}}$

iii) NON SI PUÒ FARE PERCHÉ $f_n(x)$ NON CONVERGE UNIFORMEMENTE ???

Esercizio 5

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+10i)(x-10i)}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+100}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(z^2+100)}$$

(the first limit marked $= 0$)

$$\| $$

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}(f, 10i) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to 10i} \frac{\cancel{(z-10i)}}{(z+10i)\cancel{(z-10i)}} = \frac{2\pi i}{20i} = \frac{\pi}{10}$$

$$= \frac{\pi}{10}$$