SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Fondamenti di Data Processing

Automazione

4/11/2015

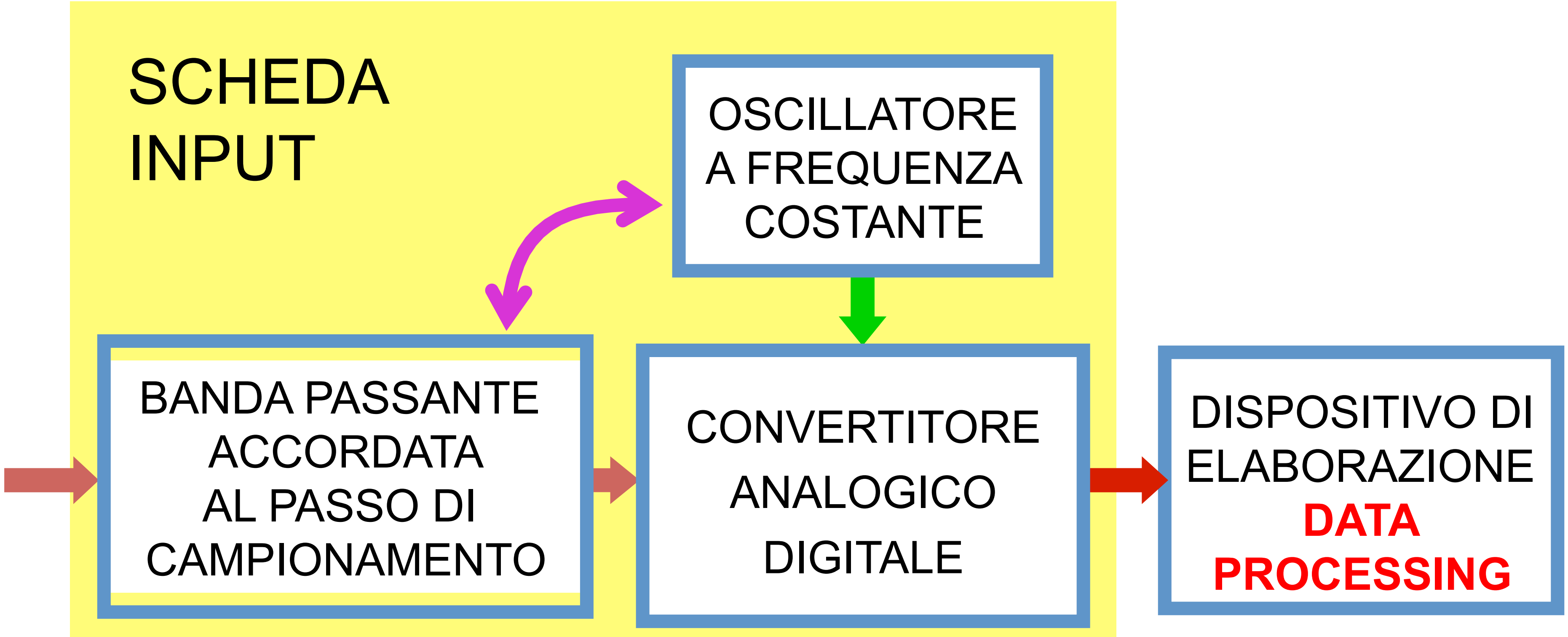
Vincenzo Suraci

Corso di Laurea: INGEGNERIA
Insegnamento: AUTOMAZIONE
Docente: DR. VINCENZO SURACI

INTRODUZIONE
AL DATA PROCESSING

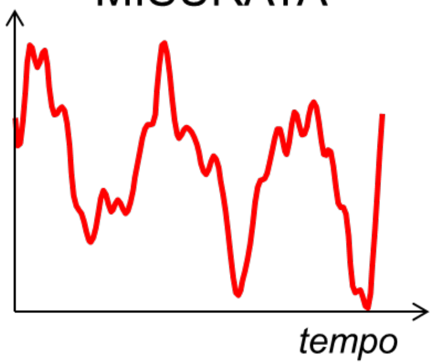
ACQUISIZIONE DATI

SCHEMA COSTRUTTIVO

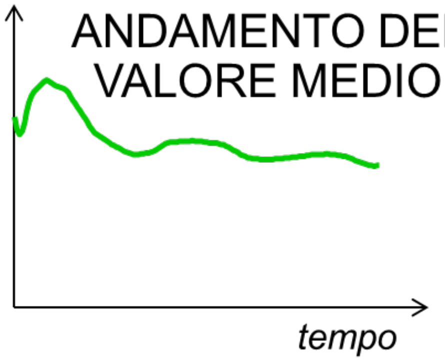


SEGNALE ANALOGICO SEGNALE DIGITALE

VARIABILE MISURATA

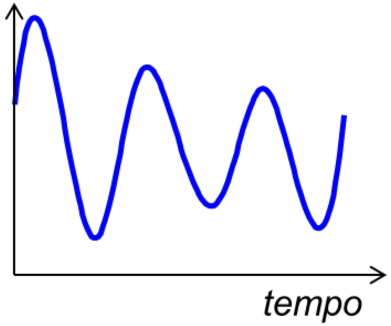


ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO



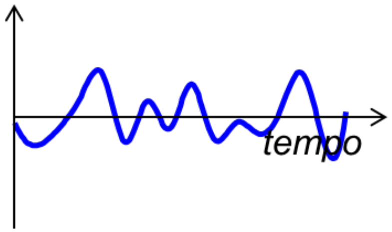
UTILE AL FINE DELLA CARATTERIZZAZIONE DEL **FUNZIONAMENTO**

SEGNALE UTILE



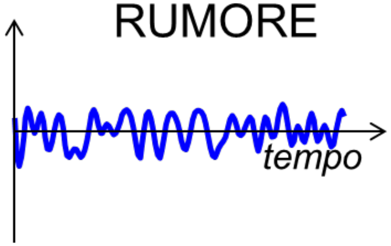
CONTIENE INFORMAZIONI UTILI PER VALUTARE L'AZIONE DI CONTROLLO O L'EFFETTO DELL'AZIONE DI **CONTROLLO**

DISTURBO



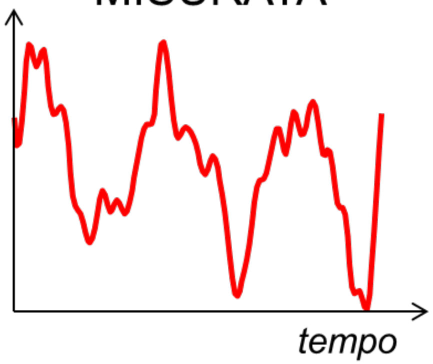
POTREBBE CONTENERE INFORMAZIONI UTILIZZABILI PER LA GESTIONE O PER LA **DIAGNOSTICA**

RUMORE

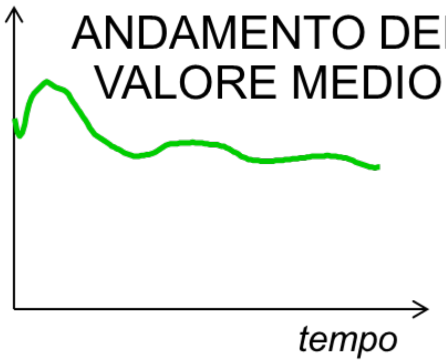


IN GENERE **NON CONTIENE INFORMAZIONI UTILI**

VARIABILE MISURATA



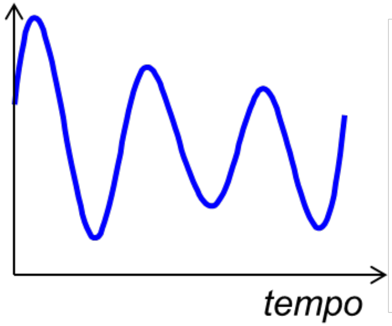
ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO



UTILE AL FINE DELLA CARATTERIZZAZIONE DEL **FUNZIONAMENTO**

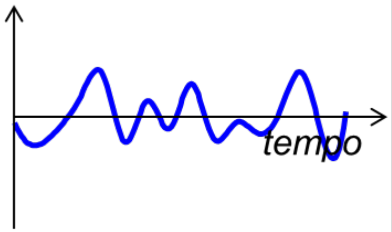
AD ESEMPIO

SEGNALE UTILE



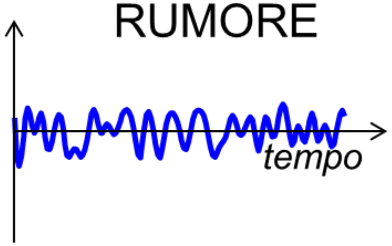
ANDAMENTO DELLA **VARIABILE DI COMANDO** ELABORATA DA UN REGOLATORE NEL CONTROLLO A LIVELLO DI CAMPO

DISTURBO



VARIAZIONE DELLA PRESSIONE O DELLA PORTATA DOVUTA ALLE OSCILLAZIONI DELL'OTTURATORE DI UNA SERVOVALVOLA

RUMORE



APPROSSIMAZIONE DOVUTA ALLA **DIGITALIZZAZIONE** DI UN SEGNALE ANALOGICO

SEGNALE ANALOGICO

CAMPIONAMENTO E QUANTIZZAZIONE

ELABORAZIONI ON-LINE

DATI ACQUISITI

PASSO DI ACQUISIZIONE

STIMA DEL VALORE MEDIO

SEGNALE UTILE

RUMORE E/O DISTURBO

STIMA DELLA DERIVATA PRIMA

STIMA DELLA DERIVATA SECONDA

SCELTA DEL PASSO DI ACQUISIZIONE

SE **TROPPO FITTO** VIENE ESALTATO IL **RUMORE DI DIGITALIZZAZIONE**

SE **TROPPO RADO** VENGONO **PERSE LE INFOMAZIONI** CONTENUTE NEL SEGNALE UTILE

CALCOLO DEL VALORE MEDIO

METODO OFF-LINE

MEDIA ARITMETICA

- Il calcolo della **MEDIA ARITMETICA** di un insieme di dati è una operazione **a posteriori**, ossia che può venire effettuata solo dopo che sono **disponibili tutti i dati** di cui si vuole calcolare il valore medio

- L'espressione analitica risulta:

$$\boxed{X(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

MEDIA ARITMETICA

MEDIA ARITMETICA

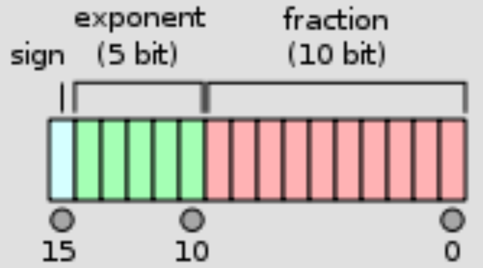
- Se per il calcolo della media aritmetica si usa un **dispositivo di calcolo numerico** bisogna tenere conto della lunghezza di parola finita (8-64 bit);
- Il valore della **sommatoria** può assumere valori troppo elevati (**overflow**) per essere rappresentato con la lunghezza di parola del dispositivo di calcolo.
- Il valore del **termine 1/n** può assumere valori troppo piccoli (**underflow**) per essere compatibile con la lunghezza di parola.

$$X(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

OVER-FLOW

UNDER-FLOW

ESEMPIO HALF 16-bit

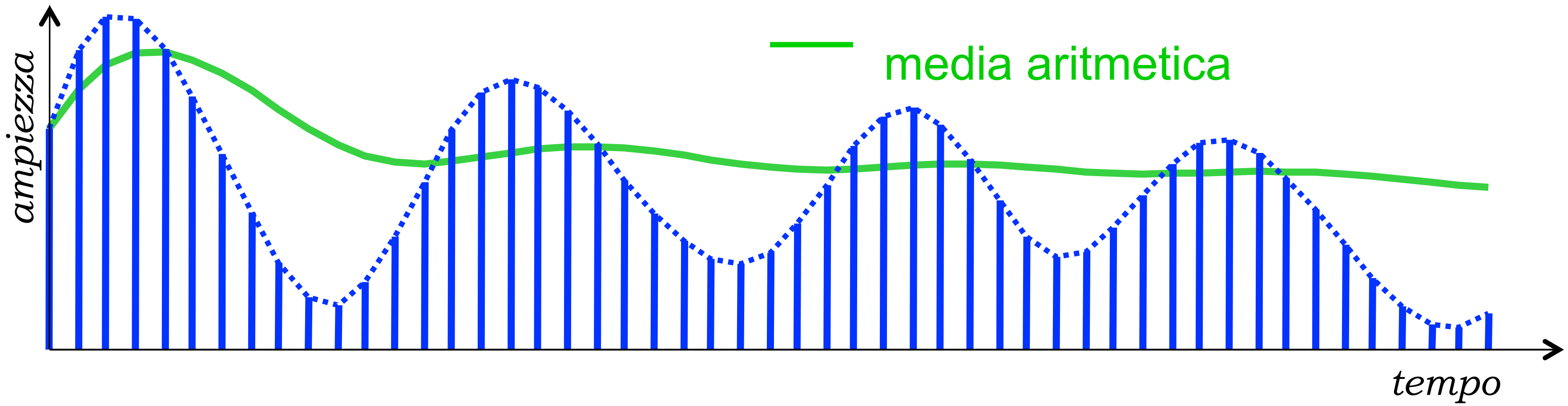


Underflow = 5.96×10^{-8}
Overflow = 65504

CALCOLO DEL VALORE MEDIO

METODO ON-LINE

COME CALCOLARE L'ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO ?



La media aritmetica può essere calcolata solo per un numero limitato (n) di valori campionati.

Interessa allora effettuare una **stima ricorsiva** calcolando la media:

- su un numero prefissato di valori digitalizzati, **media mobile**
- aggiornandone il valore ad ogni passo, **media pesata**
- minimizzando ad ogni passo la varianza dell'errore di stima, **media adattativa**

MEDIA MOBILE

- Il metodo più semplice e intuitivo per **risolvere il problema dell'overflow e dell'underflow** consiste nel **limitare a k il numero degli elementi utilizzati** per il calcolo del valore medio. In questo modo *n* può essere grande a piacere.

- L'espressione analitica della media mobile al passo *j* risulta:

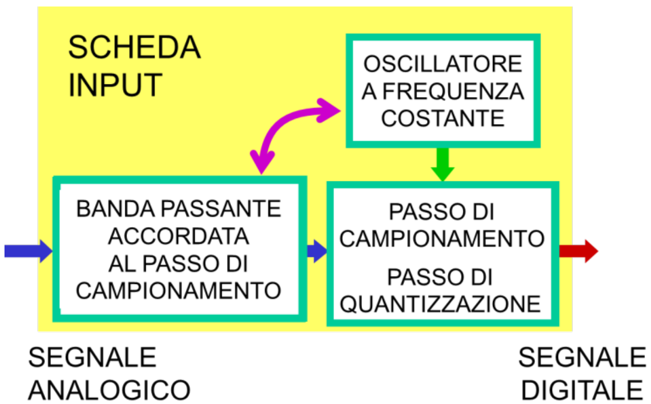
$$\boxed{X(j) = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+k-1} x_i}$$

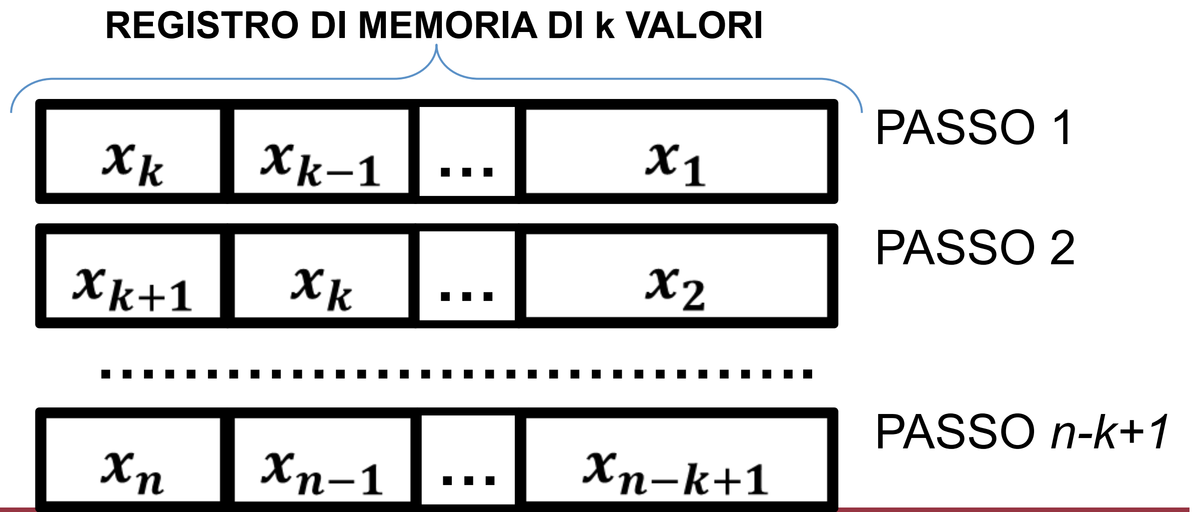
MEDIA MOBILE

$$\boxed{1 \leq \mathrm{j} \leq n - k + 1}$$

MEDIA MOBILE

- Il **valore di k** dati e la **durata del transitorio di algoritmo** dipendono dalle caratteristiche statistiche dei dati. In particolare dipendono dalla **varianza**.
- A regime la media mobile presenta una **dispersione di ampiezza limitata** e con **andamento di tipo periodico**.
- Tale approccio richiede una **occupazione di memoria di k dati** su cui viene calcolata in forma ricorsiva la media mobile.





STIMA DEL VALORE MEDIO
METODO ON-LINE
RICORSIVO

MEDIA PESATA

- Per **risolvere il problema dell'occupazione di memoria** si può stimare la media al passo attuale *j* conoscendo il valore della media stimato al passo precedente (*j*-1).

- L'espressione analitica della media pesata al passo *j* risulta:

$$\boxed{\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \alpha\,(x(j) - \hat{X}(j-1))}$$

MEDIA PESATA

$$\boxed{1 \leq \mathrm{j} \leq n} \quad \boxed{\hat{X}(0) = X_0}$$

MEDIA PESATA

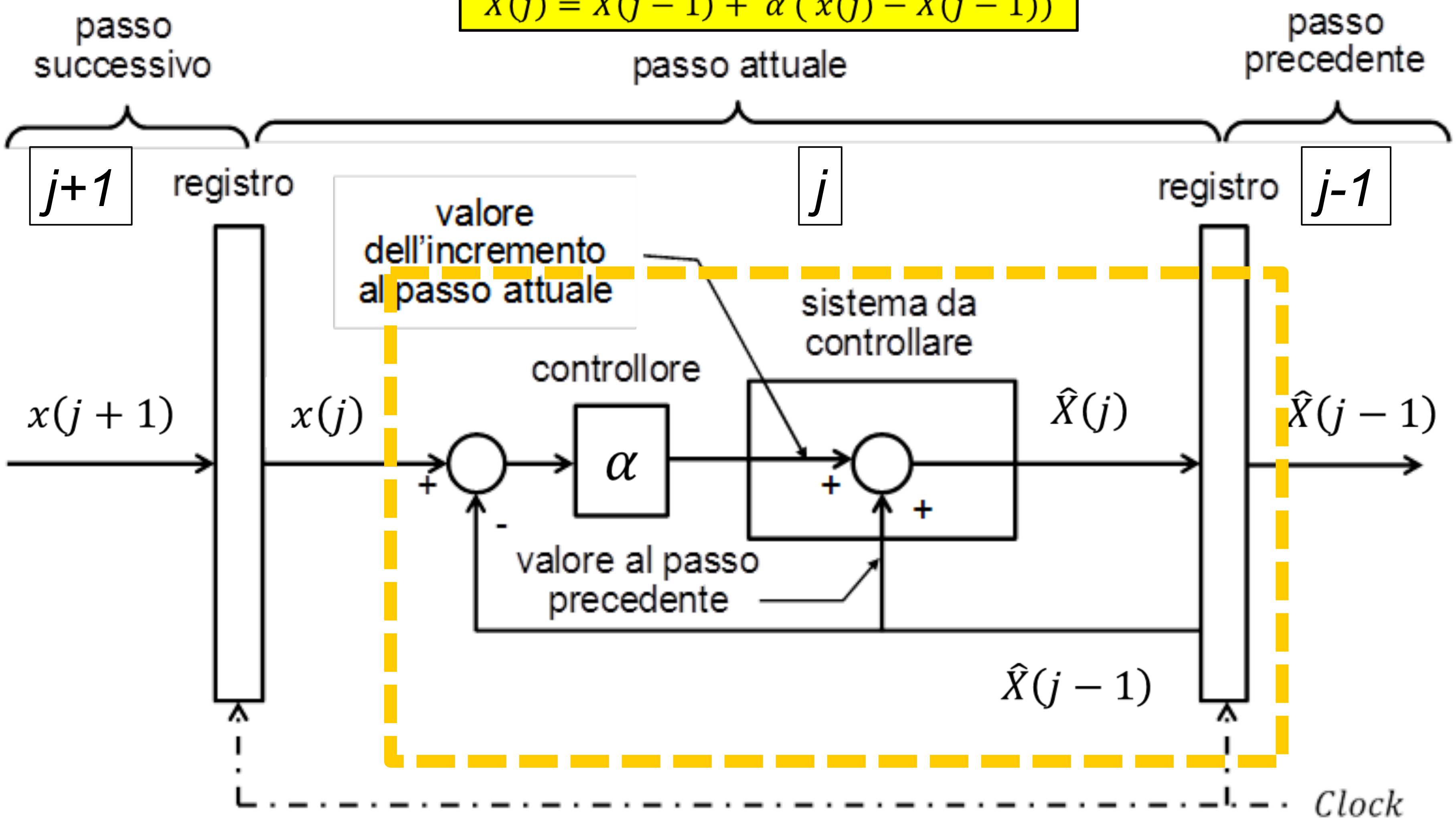
- Il valore di α va fissato sulla base della **varianza dei dati** di cui calcolare la media.

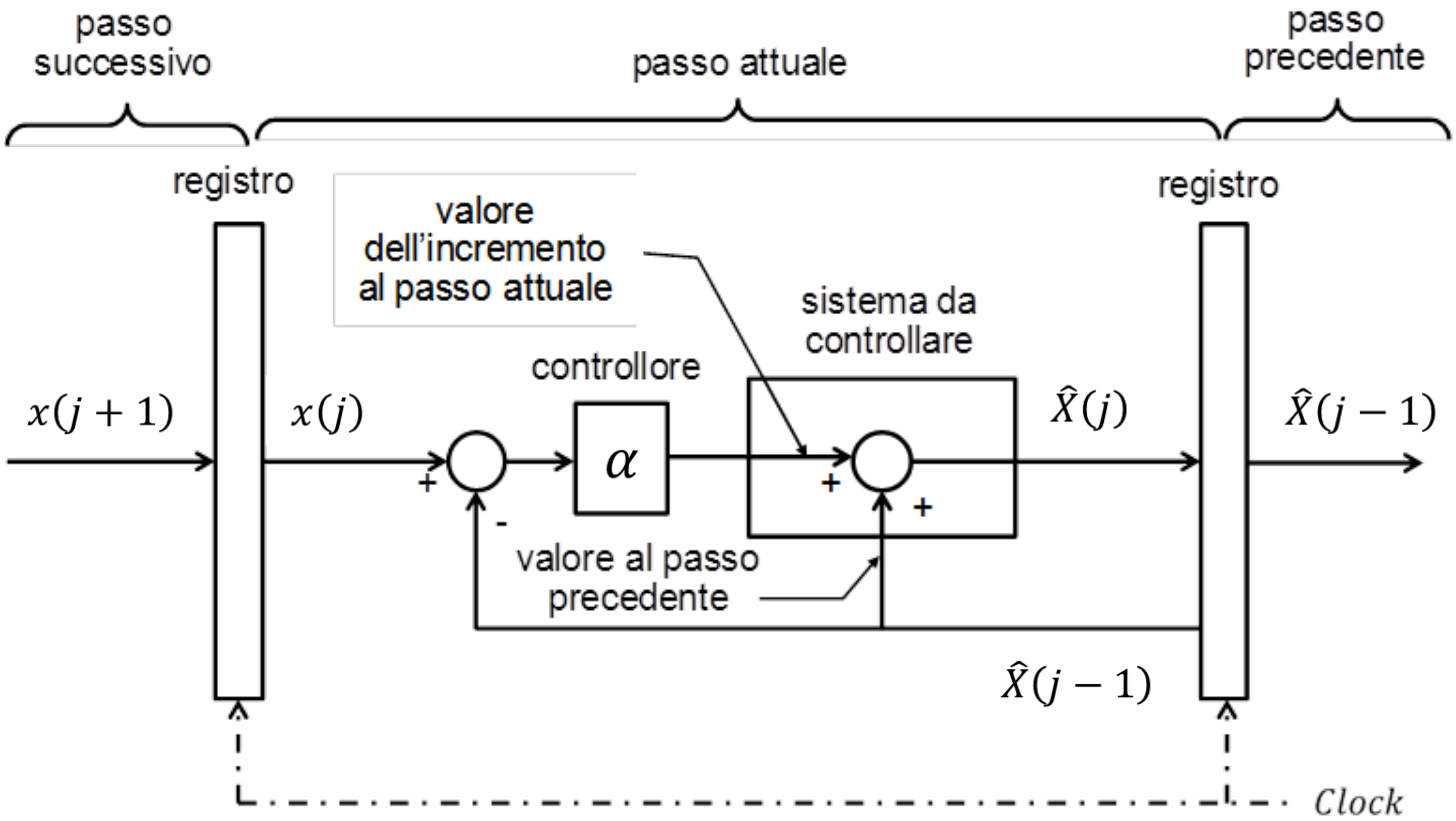
- Da α dipendono sia la **durata del transitorio di algoritmo** sia l'inevitabile **dispersione della stima** del valore medio.

- Dopo che è **esaurito il transitorio di algoritmo**, la media pesata presenta una **dispersione di ampiezza limitata** con **andamento di tipo periodico**.

- La media pesata può essere vista come un **sistema controllato con modalità di controllo a controreazione**.

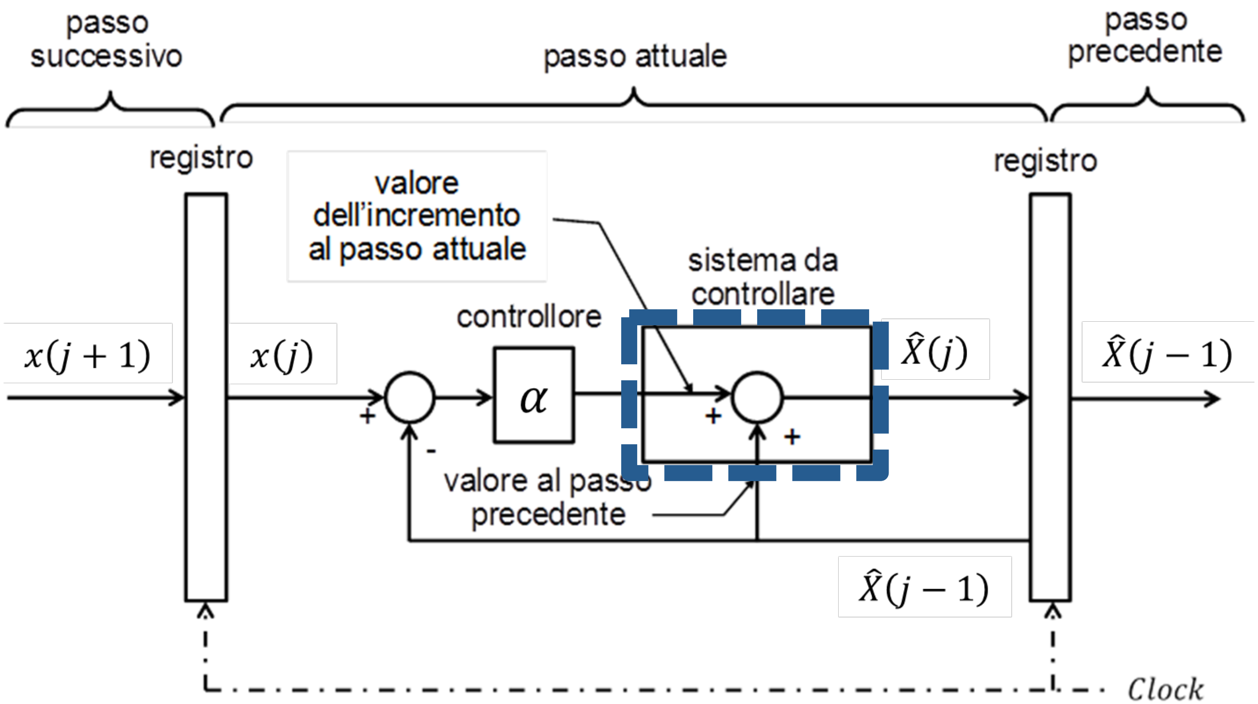
$$\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \alpha\,(x(j) - \hat{X}(j-1))$$




passo
successivo
passo attuale
passo
precedente
registro
valore
dell'incremento
al passo attuale
registro
sistema da
controllare
controllore
$x(j+1)$
$x(j)$
α
$\hat{X}(j)$
$\hat{X}(j-1)$
+
-
+
+
valore al passo
precedente
$\hat{X}(j-1)$
$Clock$

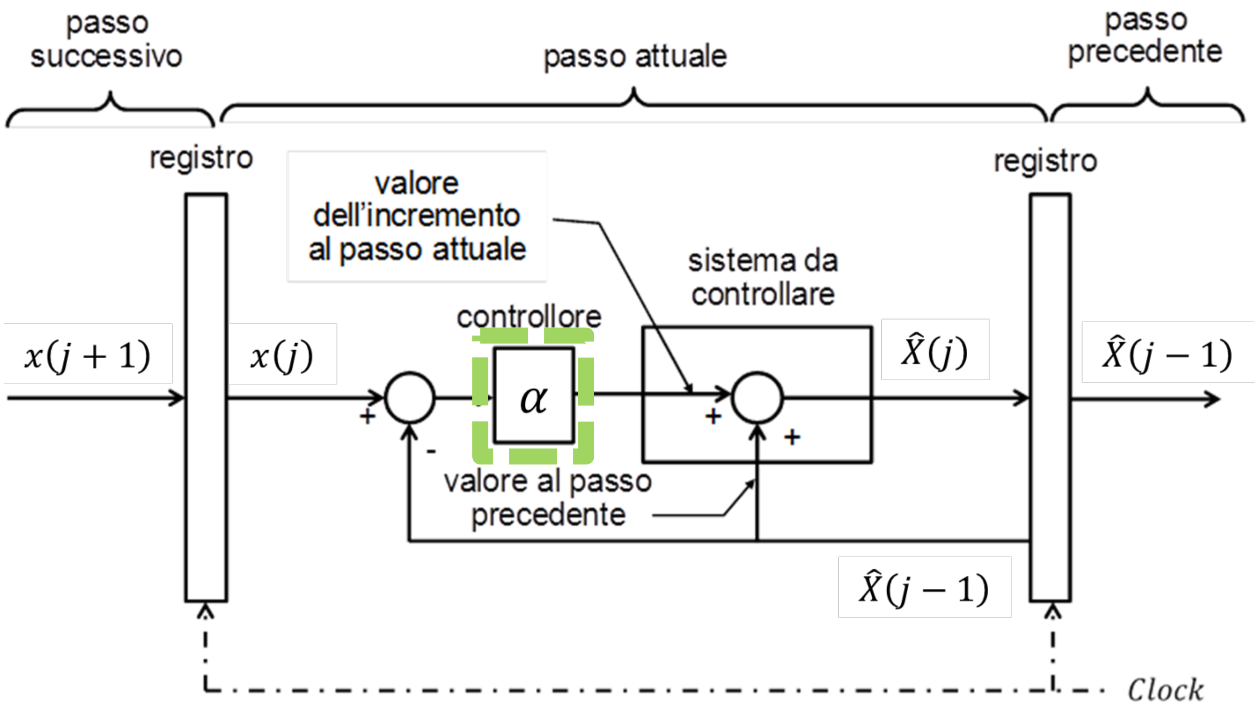
MEDIA PESATA

- Il sistema da controllare è caratterizzato da un comportamento dinamico assimilabile a quello di un **integratore**, in cui il valore al passo attuale X(j) è ottenuto come somma del valore relativo al passo precedente X(j-1) e dell'incremento al passo attuale, ossia (x(j)-X(j-1)), moltiplicato per il guadagno α.



MEDIA PESATA

- Per assicurare la **stabilità** della procedura e per **ridurre sia la durata del transitorio di algoritmo sia l'oscillazione residua**, l'unica possibilità è quella di agire sul valore da assegnare al guadagno α.



EQUIVALENZA MEDIA PESATA – MEDIA ARITMETICA

- Se si fa variare il guadagno α ad ogni passo *j*, ed in particolare si pone:

$$\boxed{\alpha = 1/j}$$

$$\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}\left(x(j) - \hat{X}(j-1)\right) =$$

$$= \hat{X}(j-1) - \frac{1}{j}\hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}x(j) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{j}\right]\hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}x(j)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Pertanto al passo $\boxed{j = n}$ avremo:

$$\hat{X}(n) = \left[1 - \frac{1}{n}\right]\hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n) =$$

$$= \left[\frac{n-1}{n}\right]\hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Notiamo che al passo *n-1*, si ha:

$$\hat{X}(n-1) = \hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\left(x(n-1) - \hat{X}(n-2)\right) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\, x(n-1) =$$

$$= \left[\frac{n-2}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\, x(n-1)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-1}{n}\right]\hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n)$$

$$\hat{X}(n-1) = \left[\frac{n-2}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\,x(n-1)$$

- Sostituendo la seconda nella prima si ha:

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-2}{n}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n}\,x(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Effettuando *h* sostituzioni si ottiene:

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-h-1}{n}\right]\hat{X}(n-h-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h+1} x(n-i+1)$$

- Effettuando *h = n-1* sostituzioni, si ottiene la **media aritmetica**:

$$\hat{X}(n) = \cancel{\frac{0}{n}\hat{X}(0)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(n-i+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i) = X(n)$$

MEDIA PESATA

- Se $\boxed{\alpha = 1/j}$

all'aumentare di j il valore di 1/j raggiungere valori che non possono essere rappresentati nel dispositivo di calcolo a causa della limitata lunghezza di parola (**underflow**).

- Occorre allora **imporre un minimo al valore** che può essere raggiunto dal guadagno α.

- Se tale valore viene fissato fin dal primo passo della procedura ricorsiva, l'andamento della media pesata presenta, oltre al **transitorio di algoritmo**, anche una **oscillazione di tipo periodico**.

STIMA DEL VALORE MEDIO

METODO ON-LINE

RICORSIVO

MINIMIZZAZIONE ERRORE STIMA

MEDIA ADATTATIVA

- Per **ridurre gli effetti del transitorio di algoritmo** si applica una procedura di stima ricorsiva del valore medio basata sulla **minimizzazione ad ogni passo dell'errore di stima**, chiamata media adattativa.

- L'espressione analitica della media adattativa al passo *n* risulta:

$$Q_n = Q_{n-1} + \alpha(x_n^2 - Q_{n-1})$$
$$K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$$
$$X_n = X_{n-1} + K(n)\,(x_n - X_{n-1})$$
$$P_n = K(n)\,Q_n$$

MEDIA ADATTATIVA

- Il valore della media calcolato ad ogni passo n è influenzato da un errore di misura e da un errore di stima:

$$x_n = X^* + \varepsilon_n$$

$$\hat{X}(n) = X^* + \theta_n$$

VALORE MISURATO AL PASSO n

STIMA DELLA MEDIA AL PASSO n

MEDIA ESATTA (INCOGNITA)

ERRORE DI MISURA AL PASSO n

ERRORE DI STIMA AL PASSO n

- Conviene allora ricavare ad ogni passo quel valore che rende **minima la varianza dell'errore di stima**.

- Ciò è ottenuto applicando al calcolo ricorsivo della stima del valore medio la metodologia su cui si basa il **filtro di Kalman**.

MEDIA ADATTATIVA - ASSUNZIONI

- L'errore di misura e l'errore di stima sono **variabili aleatorie** assimilabili a **rumore bianco a media nulla**, ovvero:
  - **non presentano periodicità**
  - **non introducono un errore costante** (bias)

- L'errore di misura e l'errore di stima **non sono correlati**, pertanto il **valore atteso del loro prodotto ha valore nullo**

ε_n **ERRORE DI MISURA AL PASSO n**

θ_n **ERRORE DI STIMA AL PASSO n**

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Riprendendo la relazione della media pesata, con peso adattativo, otteniamo:

$$\hat{X}(n) = \hat{X}(n-1) + K(n)\,(x(n) - \hat{X}(n-1))$$

- Sostituendo nella formula l'errore di stima e di misura, si ottiene:

$$X^* + \theta_n = X^* + \theta_{n-1} + K(n)\left((X^* + \varepsilon_n) - (X^* + \theta_{n-1})\right)$$

- Semplificando, si ottiene:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + K(n)\,(\varepsilon_n - \theta_{n-1})$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Ricordando che errore di misura e di stima sono variabili aleatorie a valor medio nullo, la loro **varianza è il valore atteso del loro quadrato**

- Il quadrato dell'errore di stima è

$$\theta_n^2 = \theta_{n-1}^2 + K(n)^2(\varepsilon_n - \theta_{n-1})^2 + 2\theta_{n-1}K(n)(\varepsilon_n - \theta_{n-1})$$

$$= \theta_{n-1}^2 + K(n)^2\varepsilon_n^2 + K(n)^2\theta_{n-1}^2 - 2K(n)^2\varepsilon_n\theta_{n-1}$$
$$+ 2K(n)\theta_{n-1}\varepsilon_n - 2K(n)\theta_{n-1}^2$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Ricordando che errore di misura e di stima sono variabili aleatore indipendenti, il **valore atteso del prodotto è nullo**

- La varianza dell'errore di stima è:

$$E[\theta_n^2] = E[\theta_{n-1}^2] + \cancel{K(n)^2 E[\varepsilon_n^2]} + \cancel{K(n)^2 E[\theta_{n-1}^2]} - 2K(n)^2 E[\varepsilon_n \theta_{n-1}] + 2K(n) E[\varepsilon_n \theta_{n-1}] - 2K(n) E[\theta_{n-1}^2]$$

- Posto $E[\theta_n^2] = P_n \qquad E[\varepsilon_n^2] = Q_n$ si ottiene:

$$P_n = P_{n-1} + K(n)^2 Q_n + K(n)^2 P_{n-1} - 2K(n) P_{n-1}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Per minimizzare la varianza dell'errore di stima rispetto a K(n) si dovrà porre

$$\frac{\partial P_n}{\partial K(n)} = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial P_n}{\partial K(n)} = 2K(n)Q_n + 2K(n)P_{n-1} - 2P_{n-1} = 0$$

$$\boxed{K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Sostituendo

$$K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$$

nella equazione

$$P_n = P_{n-1} + K(n)^2 Q_n + K(n)^2 P_{n-1} - 2K(n) P_{n-1}$$

si ottiene:

$$P_n = P_{n-1} + K(n) \frac{P_{n-1}}{\cancel{Q_n + P_{n-1}}} \cancel{(Q_n + P_{n-1})} - 2K(n) P_{n-1}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Continuando...

$$P_n = P_{n-1} + K(n)P_{n-1} - 2K(n)P_{n-1}$$

$$P_n = P_{n-1} - K(n)P_{n-1} = P_{n-1}\big(1 - K(n)\big)$$

e sostituendo nuovamente si ottiene:

$$P_n = P_{n-1}\left(1 - \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}\right) = P_{n-1}\left(\frac{Q_n + \cancel{P_{n-1} - P_{n-1}}}{Q_n + P_{n-1}}\right)$$

$$P_n = Q_n\left(\frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}\right) = K(n)Q_n$$

$$\boxed{P_n = K(n)Q_n}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Per determinare la varianza dell'errore di misura viene applicata la relazione ricorsiva che fornisce la stima del suo valore medio

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \alpha(x_n^2 - Q_{n-1})}$$

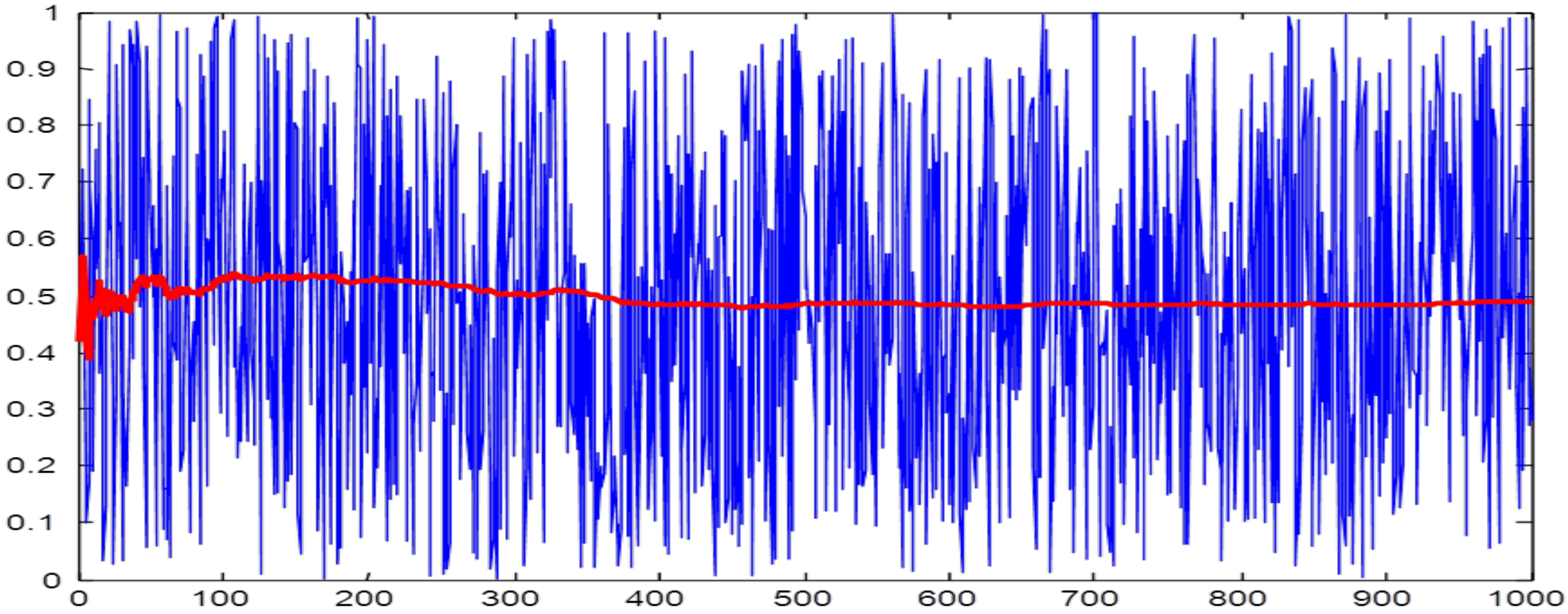
$$\boxed{0.1 < \alpha < 0.001}$$

STIMA DEL VALORE MEDIO

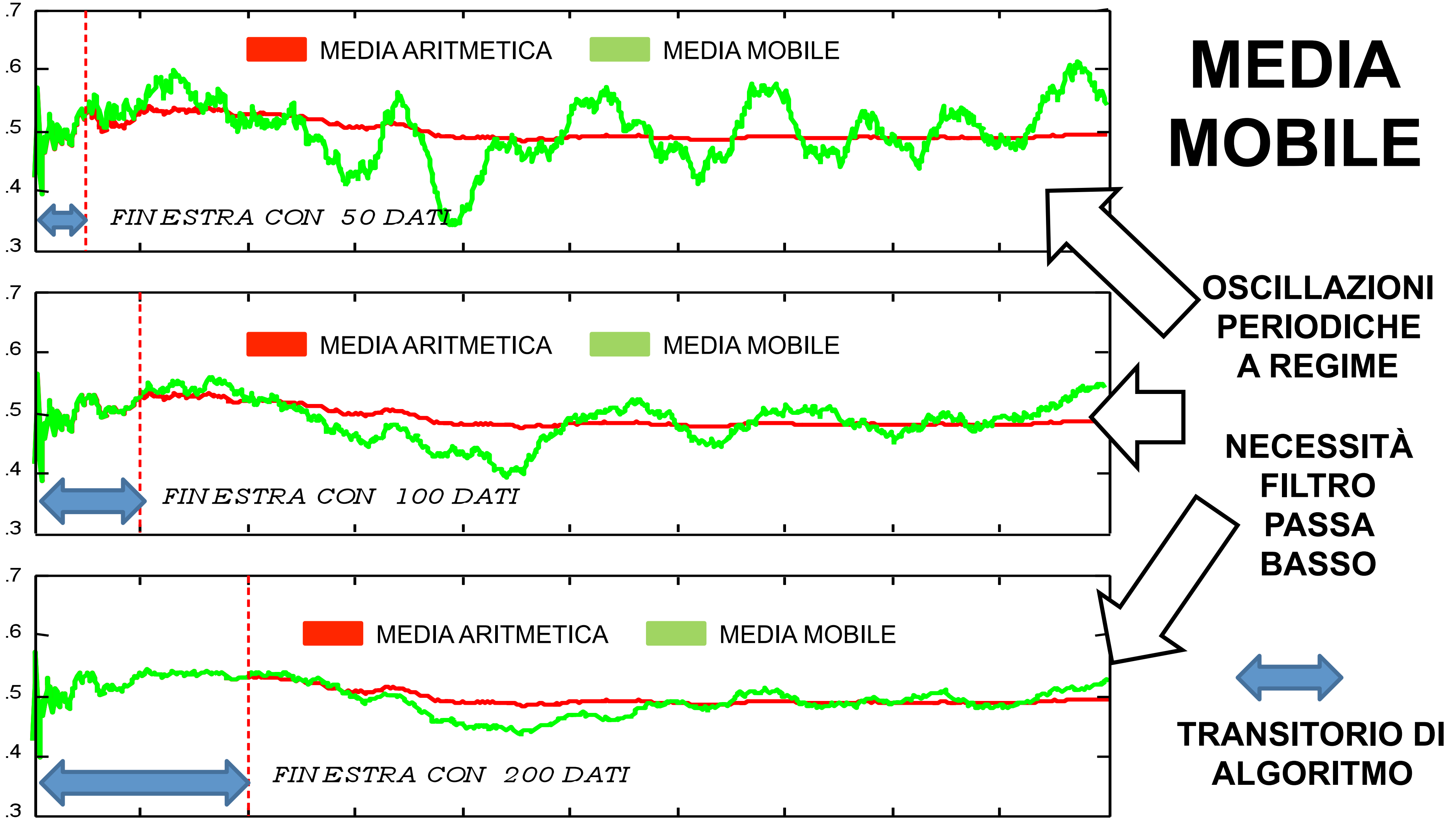
ESEMPIO COMPARATIVO

ESEMPIO COMPARATIVO

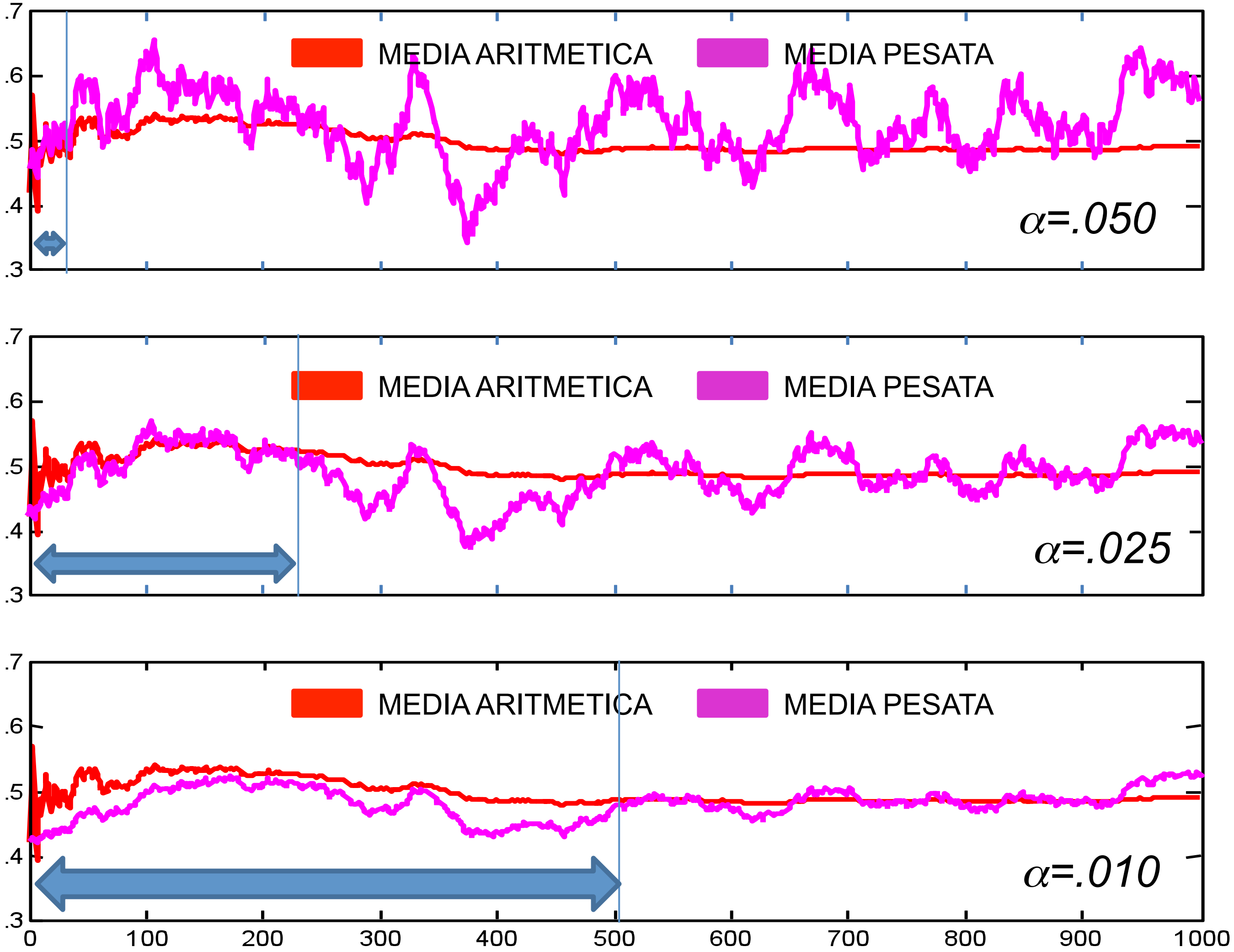
- Consideriamo un segnale utile **COSTANTE** (0.5), a cui si aggiunge un rumore bianco con escursione ±0.5. Il **segnale complessivo** è rappresentato in figura in **blu**. In **rosso** compare la **media aritmetica**.

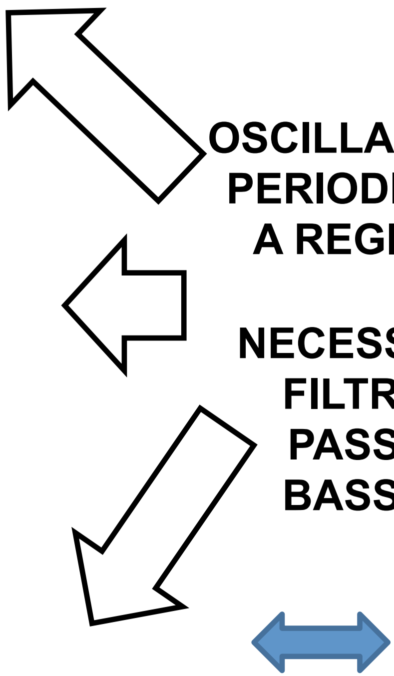


MEDIA MOBILE



MEDIA PESATA



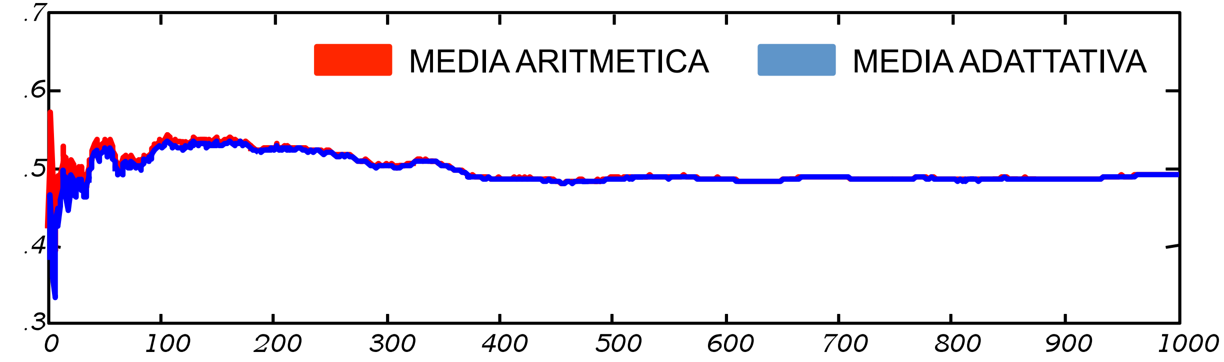


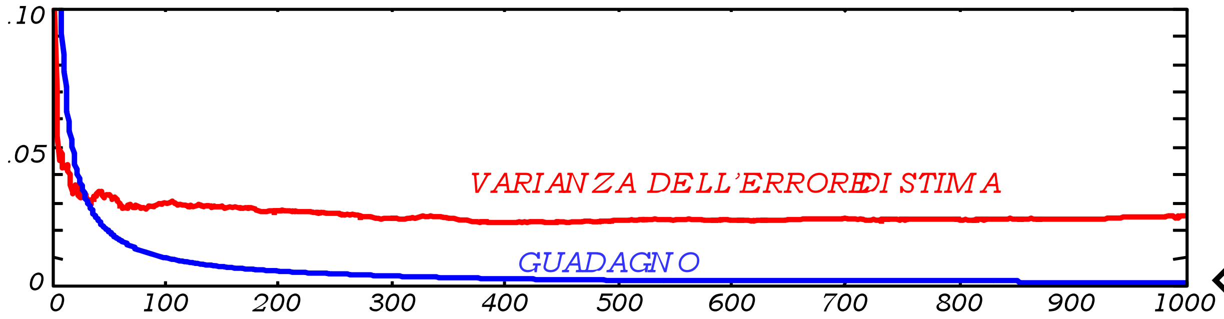
OSCILLAZIONI PERIODICHE A REGIME

NECESSITÀ FILTRO PASSA BASSO

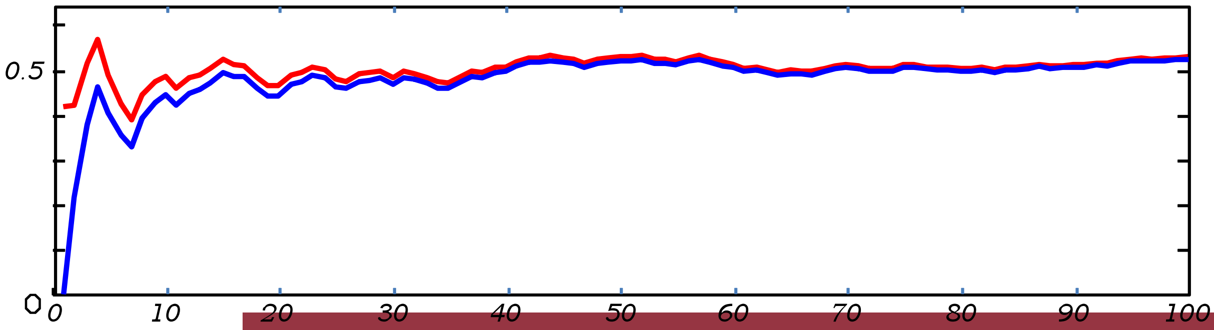
TRANSITORIO DI ALGORITMO

MEDIA ADATTATIVA

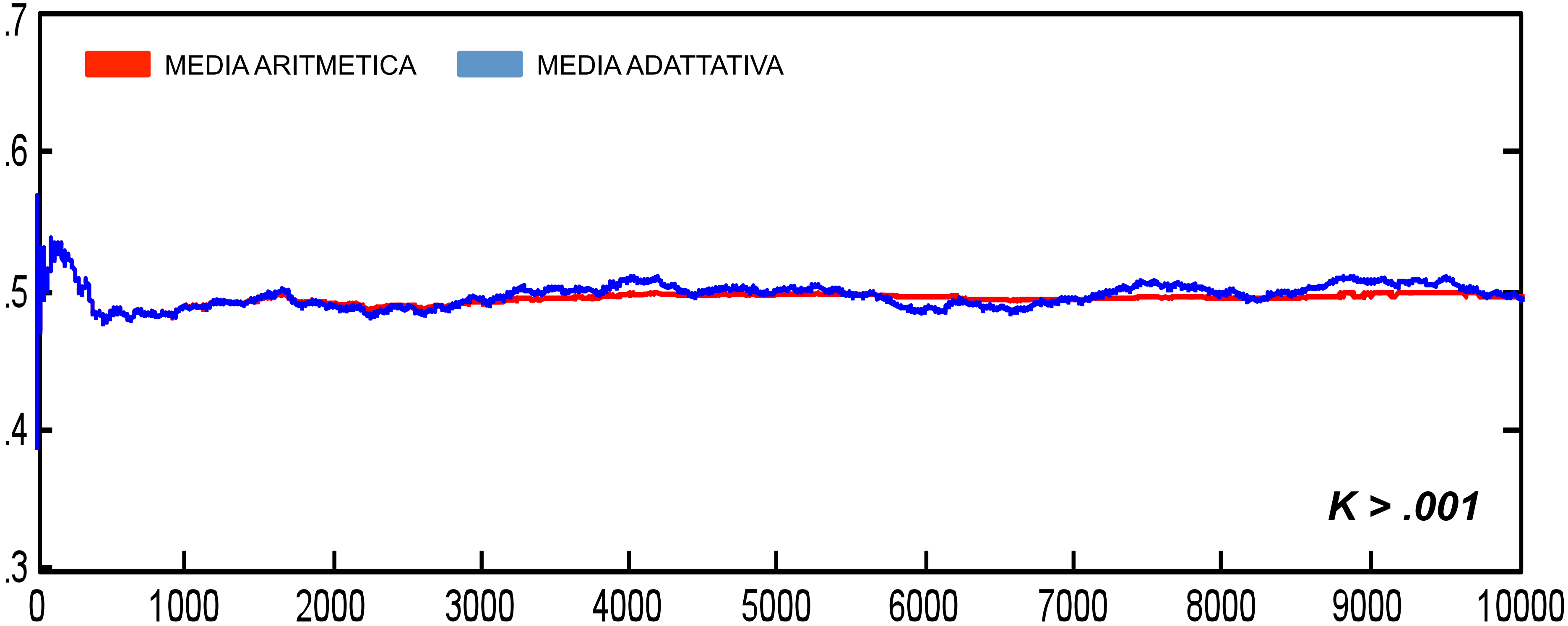




PERICOLO DI UNDERFLOW



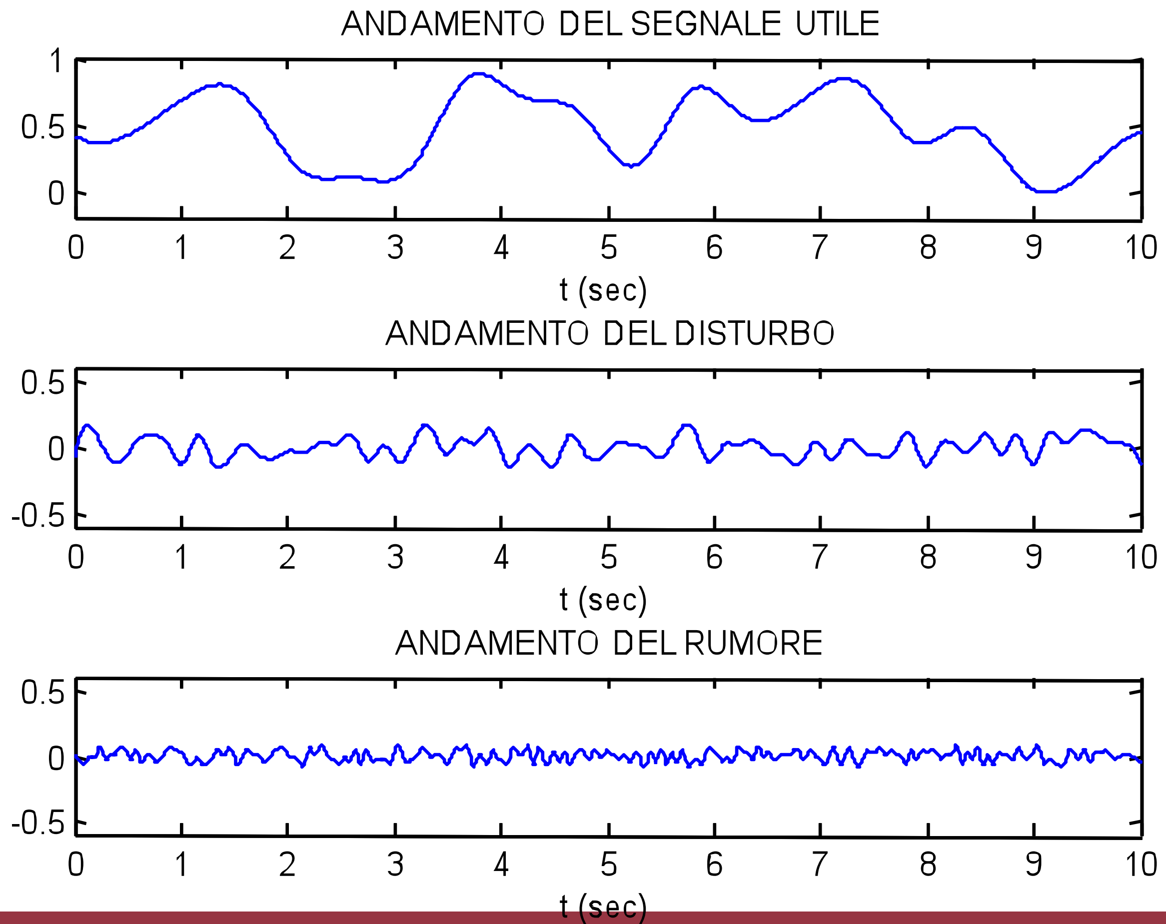
MEDIA ADATTATIVA
CON GUADAGNO LIMITATO INFERIORMENTE



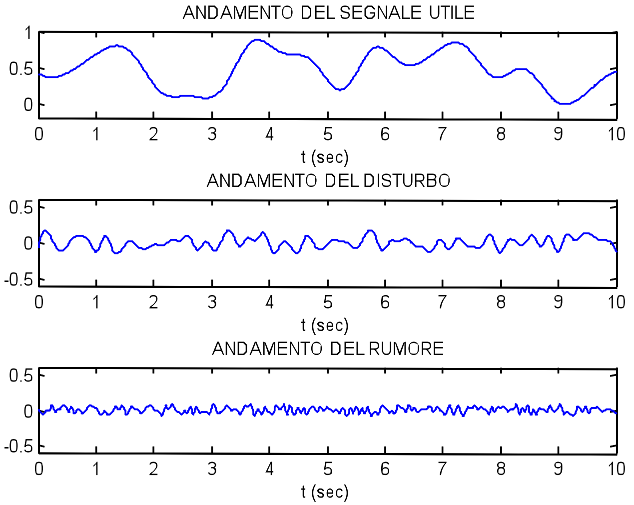
ESTRAZIONE DEL SEGNALE UTILE

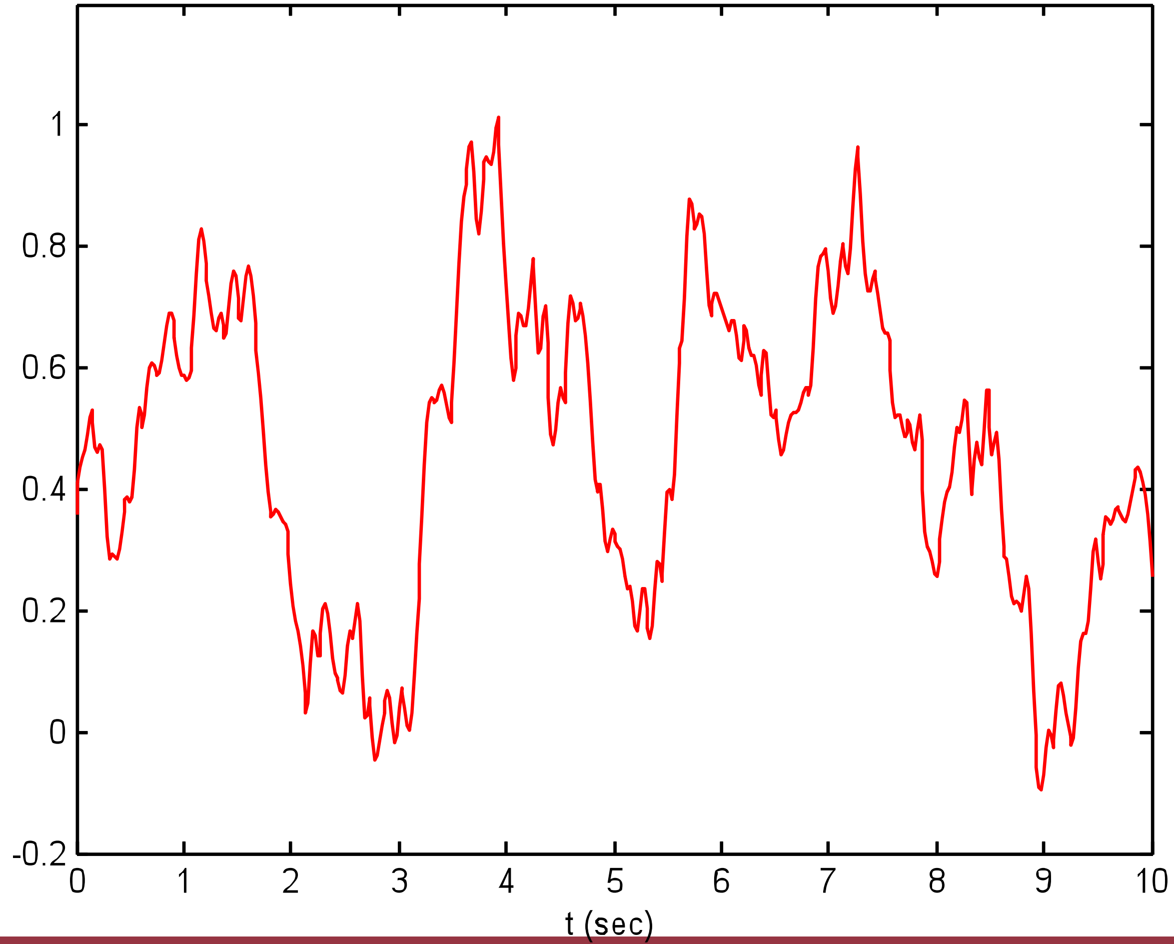
AUTOCORRELAZIONE

SEGNALE UTILE, DISTURBO E RUMORE

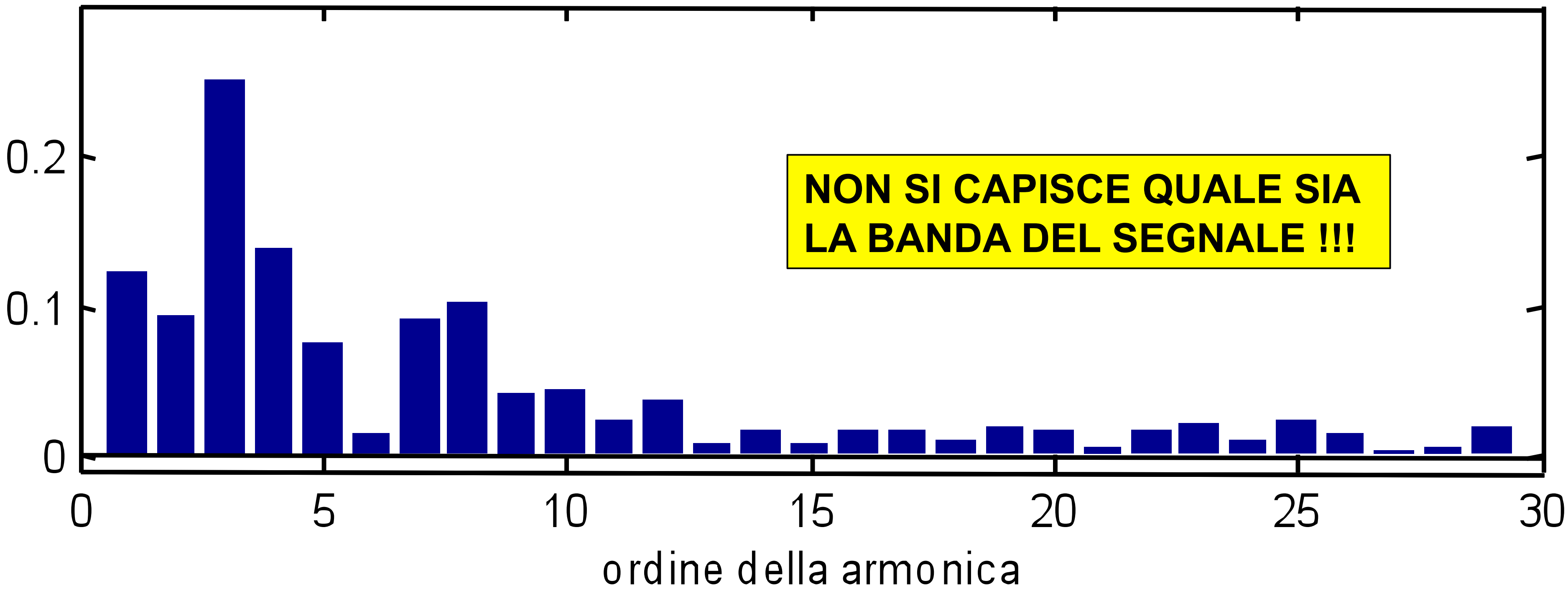


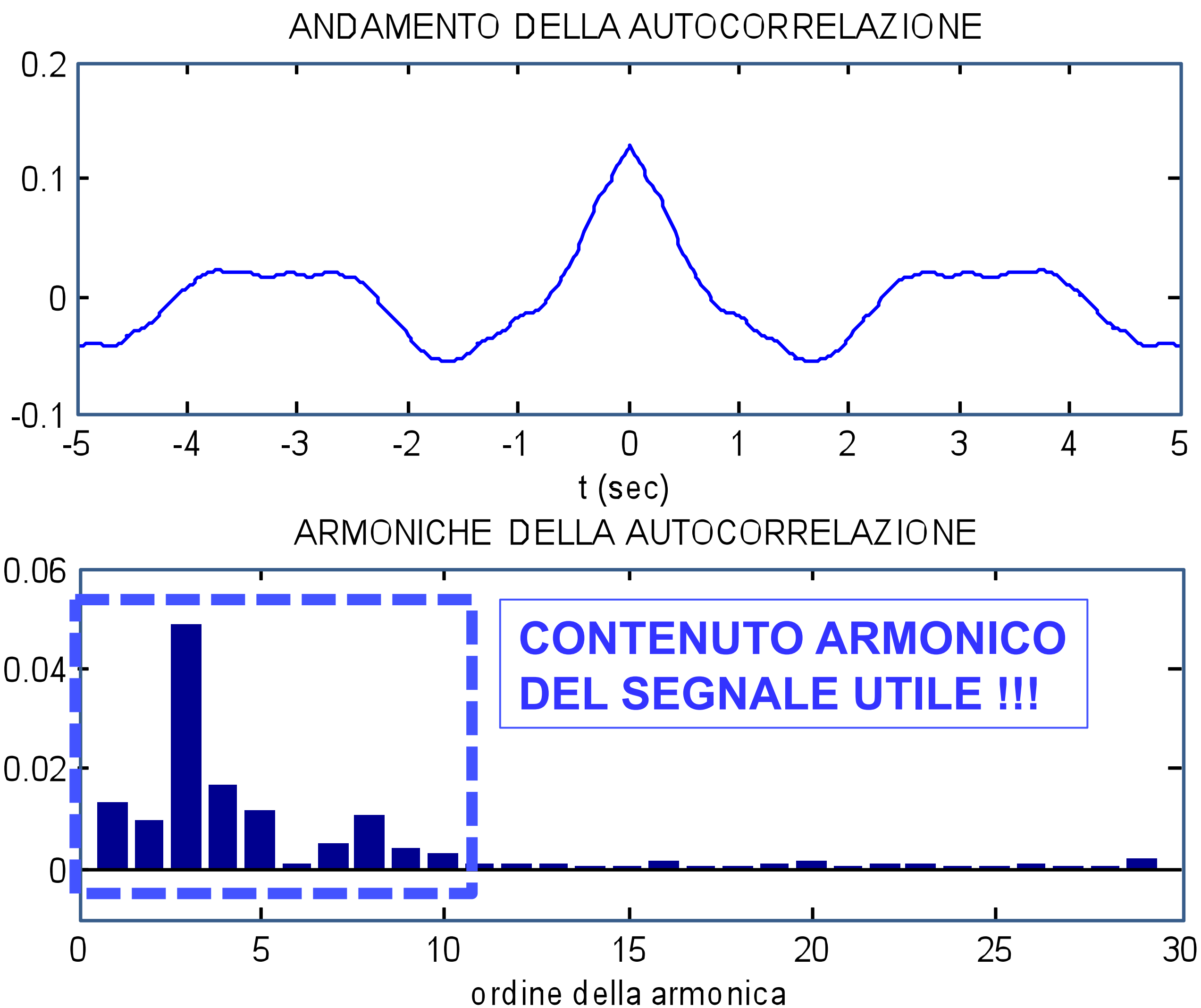
SEGNALE MISURATO





CONTENUTO ARMONICO DEL SEGNALE MISURATO





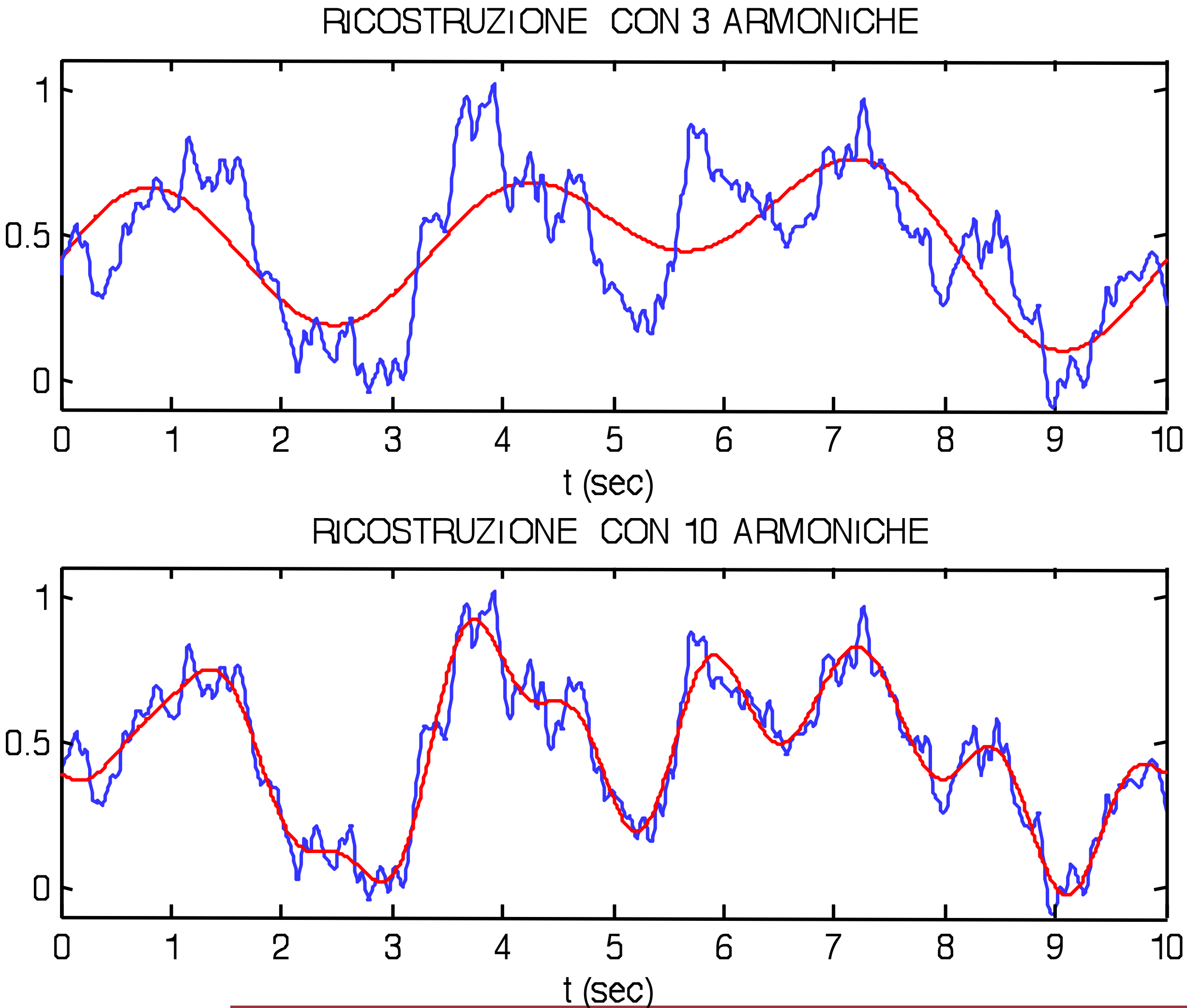
SPETTRO DI DENSITÀ DI ENERGIA

CONTENUTO ARMONICO DELLA AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE MISURATO

T TEMPO DI OSSERVAZIONE DEI DATI

$$\omega = 2\pi n/T$$

ARMONICA DI ORDINE n



VERIFICA

DEL CONTENUTO ARMONICO DELLA AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE MISURATO

3 ARMONICHE

10 ARMONICHE

ESTRAZIONE DEL SEGNALE UTILE

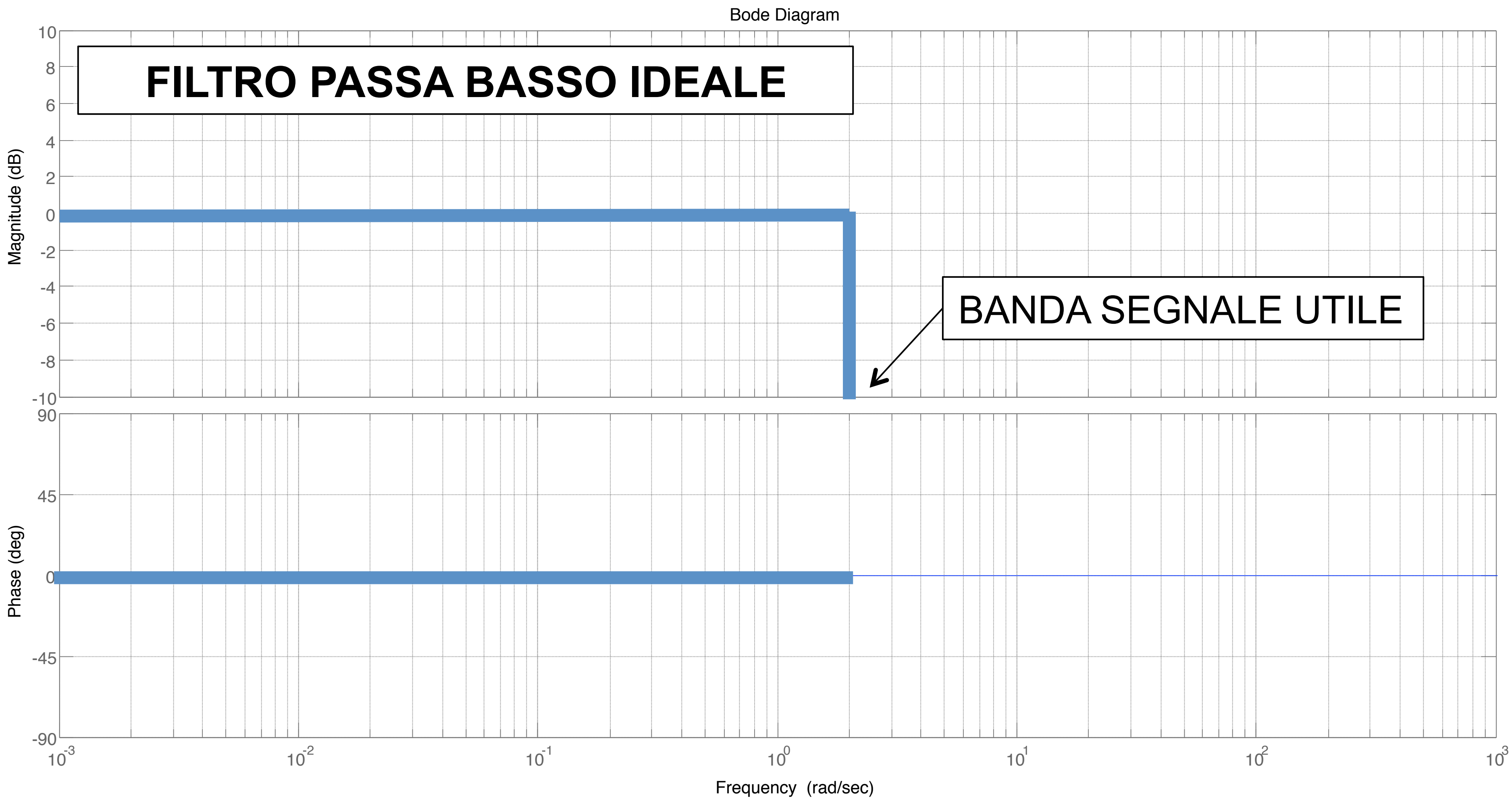
FILTRI PASSA-BASSO

FILTRO PASSA BASSO IDEALE

- Un filtro passa-basso ideale dovrebbe:

1. **LASCIARE** INALTERATE LE FREQUENZE (IN MODULO E FASE) **ENTRO LA BANDA** DEL SEGNALE UTILE (BANDA PASSANTE DEL FILTRO)

2. **ATTENUARE** MASSIMAMENTE LE FREQUENZE **OLTRE LA BANDA** DEL SEGNALE UTILE (BANDA PASSANTE DEL FILTRO)

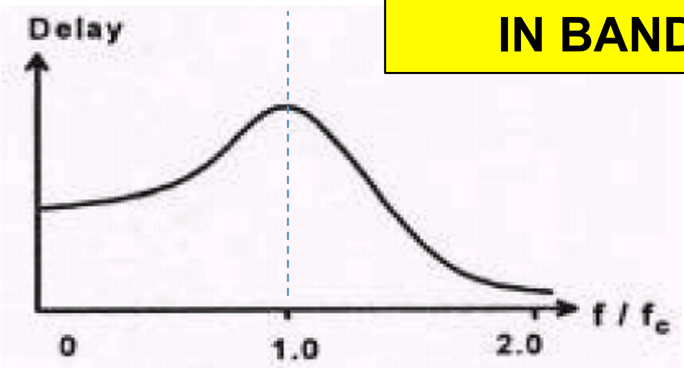

Bode Diagram
FILTRO PASSA BASSO IDEALE
BANDA SEGNALE UTILE
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
90
45
0
-45
-90
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}

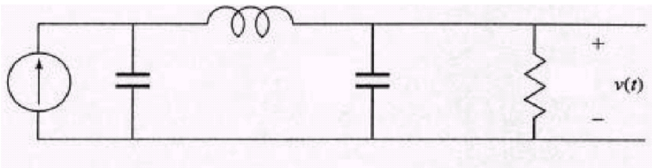
FILTRI DI BUTTERWORTH

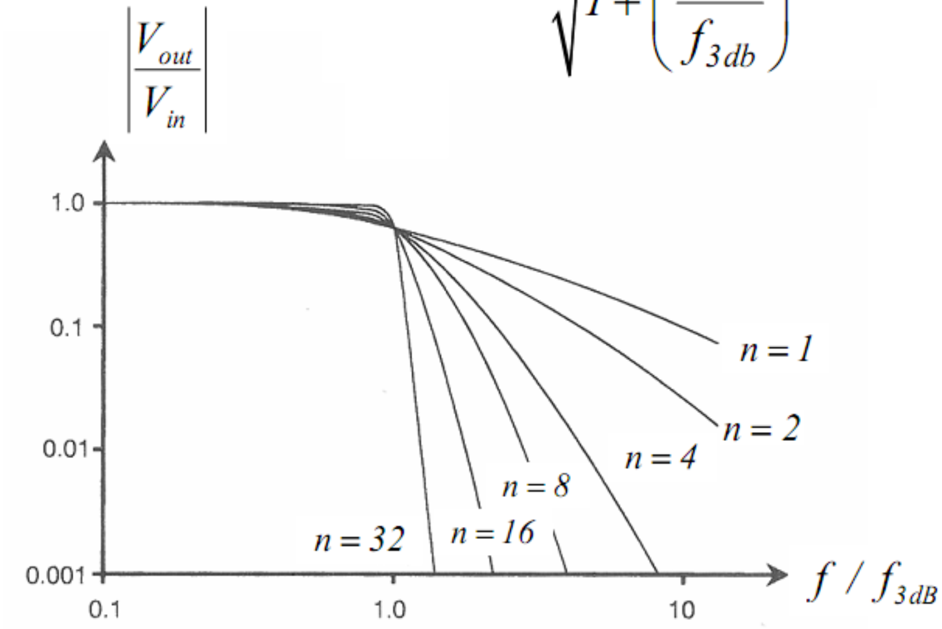
- Esistono vari filtri in grado di fornire ottime prestazioni come filtri passa-basso, ad es. il filtro di Butterworth

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{3db}}\right)^{2n}}}$$

INTRODUCE RITARDO DI FASE IN BANDA







FILTRI DI BESSEL

- Per capire come funzionano i filtri di Bessel, chiediamoci che forma dovrebbe avere la funzione di trasferimento del filtro passa basso ideale.
- Il filtro deve avere un guadagno *k* e una distorsione di fase il più possibile «piatta» al variare delle frequenze nella banda passante.

$$v(t) = ku(t-\delta)$$

- Passando nel dominio di Laplace

$$H(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = ke^{-s\delta}$$

FILTRI DI BESSEL

- Ricordando le espressioni del seno iperbolico e del coseno iperbolico

$$sinh(s) = \frac{e^{s} - e^{-s}}{2} \qquad cosh(s) = \frac{e^{s} + e^{-s}}{2}$$

esplicitiamo l'esponenziale presente nella funzione di trasferimento:

$$H(s) = ke^{-s\delta} = \frac{k}{sinh(s\delta) + cosh(s\delta)}$$

FILTRI DI BESSEL

- Gli sviluppi in serie di Taylor del seno e del coseno iperbolico sono

$$sinh(s) = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots + \frac{s^{2h+1}}{(2h+1)!} + \cdots$$

$$cosh(s) = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \cdots + \frac{s^{2h}}{(2h)!} + \cdots$$

- Blocchiamo ad n lo sviluppo in serie

$$sinh(s) \cong \sum_{h=0}^{n} \frac{s^{2h+1}}{(2h+1)!} \qquad cosh(s) \cong \sum_{h=0}^{n} \frac{s^{2h}}{(2h)!}$$

FILTRI DI BESSEL

- Sostituendo nella funzione di trasferimento

$$H(s) \cong H_n(s) = \frac{k}{\sum_{h=0}^{n} \frac{(s\delta)^{2h+1}}{(2h+1)!} + \sum_{h=0}^{n} \frac{(s\delta)^{2h}}{(2h)!}}$$

si può dimostrare che:

$$H_n(s) = \frac{B_0(s)}{B_n(s)}$$

dove

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!\, s^k}{2^{n-k}\, k!(n-k)!}$$

FILTRI DI BESSEL

- Passando nel dominio della frequenza:

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega\delta}$$

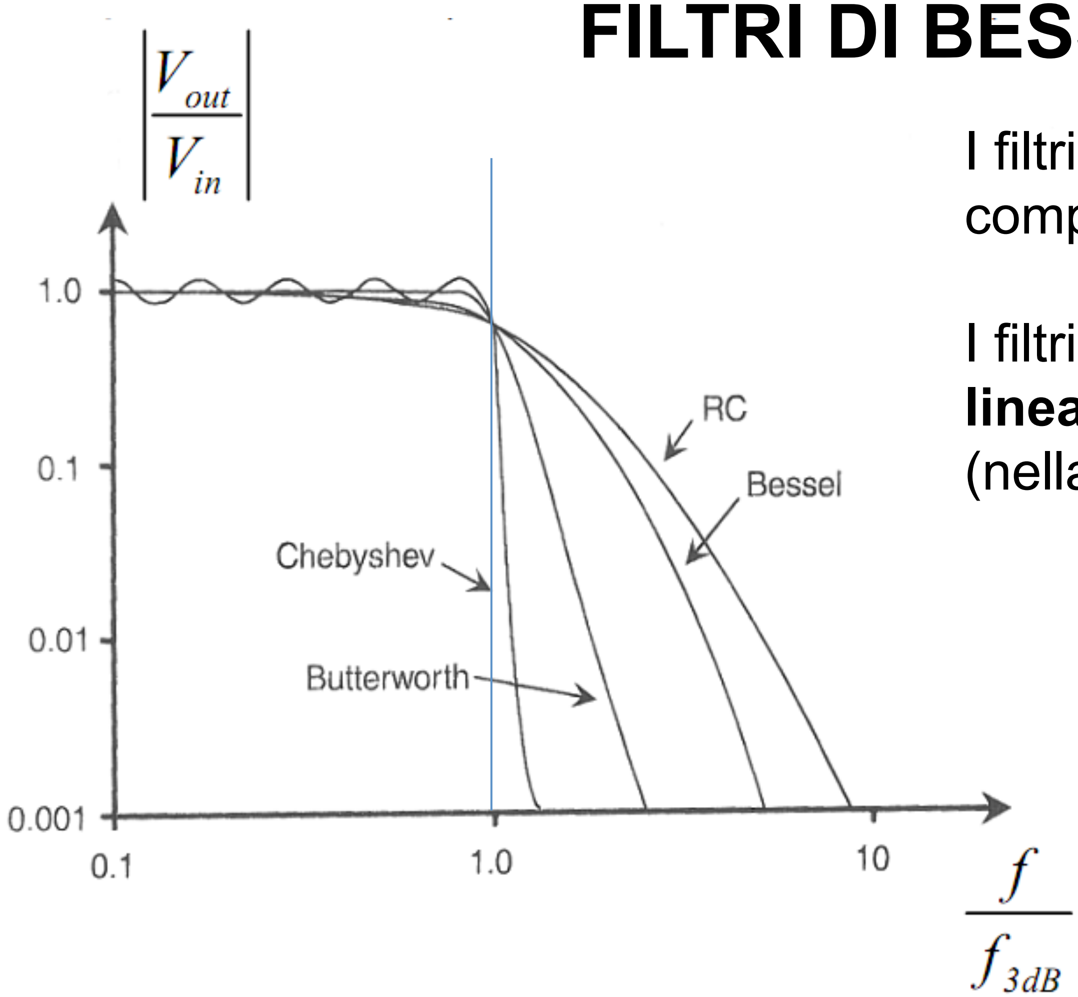
- Questa funzione di trasferimento ha un guadagno costante e una **fase che varia linearmente con la pulsazione**:

$$\varphi(j\omega) = \omega\delta$$

- La velocità di fase è costante e **può essere scelta piccola a piacere**, per avere una variazione di fase minima all'interno della banda passante:

$$\frac{d\varphi(j\omega)}{d\omega} = \delta$$

FILTRI DI BESSEL



I filtri di Bessel hanno un buon comportamento passa-basso.

I filtri di Bessel hanno la **massima linearità nella risposta in fase** (nella banda passante).