Reti di Petri: analisi, modellistica e controllo

Automazione

1/12/2015

Alessandro De Luca

Reti di Petri

Sono un formalismo grafico/matematico per la modellazione di sistemi dinamici a eventi discreti

- introdotte nel 1962 da Carl Adam Petri nella sua tesi di dottorato
- definiscono l'evoluzione di sistemi guidati da eventi
  - lavorano con condizioni esplicite per l'**abilitazione** di tali eventi (associati quindi a **transizioni** dello stato)
  - lo stato è un'informazione **distribuita** tra delle entità dette **posti**
- vantaggi modellistici delle reti di Petri rispetto agli automi
  - facilmente **modificabili** (aggiunta di altre variabili, modifica dell'insieme di valori assumibili da una o più variabili), senza necessità di ripartire da capo e senza "esplosione" di complessità
  - **modulari**, costruibili "assemblando" sottomodelli relativi a parti del sistema
  - bene **interpretabili** in termini di evoluzione dello stato delle singole parti del sistema (lo stato ha un significato **locale**, essendo distribuito nella rete)
  - possono rappresentare sistemi ad infiniti stati con un numero finito di nodi di un grafo e in generale sono più compatte degli automi

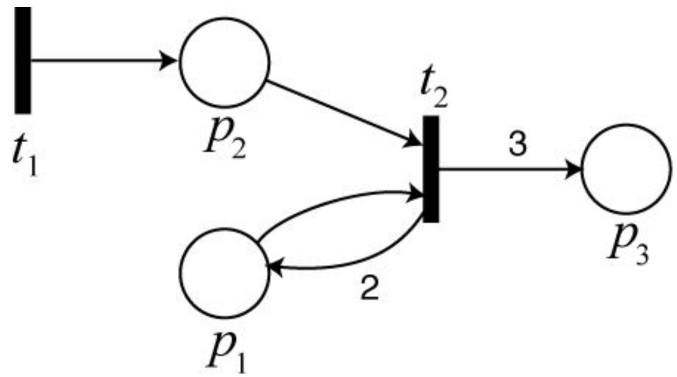
Reti di Petri

Una rete di Petri è rappresentabile a partire da un grafo orientato e bipartito (nei nodi) detto grafo di Petri $PG = (P, T, A, w)$ dove

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{|P|}\}$ è l'insieme dei **posti**
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}\}$ è l'insieme delle **transizioni**

insiemi finiti con $P \cap T = \varnothing$

- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ è la relazione di flusso che descrive due insiemi di **archi orientati** da posti a transizioni e da transizioni a posti
- $w: A \rightarrow N \setminus\{0\}$ è una funzione che associa un **peso** agli archi



$$P = \{p_1, p_2, p_3\} \quad T = \{t_1, t_2\}$$

$$A = \{(t_1, p_2); (p_1, t_2); (p_2, t_2); (t_2, p_1); (t_2, p_3)\}$$

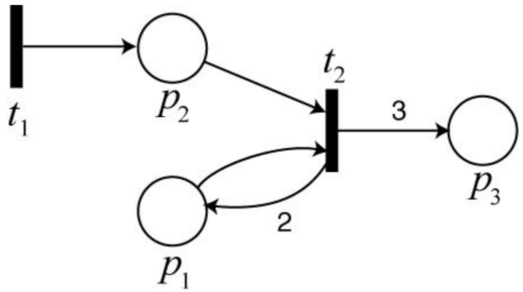
$$w(t_1, p_2) = w(p_1, t_2) = w(p_2, t_2) = 1$$

$$w(t_2, p_1) = 2 \quad w(t_2, p_3) = 3$$

In relazione alla transizione $t_j \in T$, si definiscono i due insiemi:

- posti in ingresso $I(t_j) = \{p_i \in P$ tali che $(p_i, t_j) \in A\}$
- posti in uscita $O(t_j) = \{p_i \in P$ tali che $(t_j, p_i) \in A\}$

in modo analogo si possono definire anche $I(p_j)$ e $O(p_j)$ rispetto al posto p_j



$$I(t_1) = \emptyset \quad O(t_1) = \{p_2\}$$
$$I(t_2) = \{p_1, p_2\} \quad O(t_1) = \{p_1, p_3\}$$

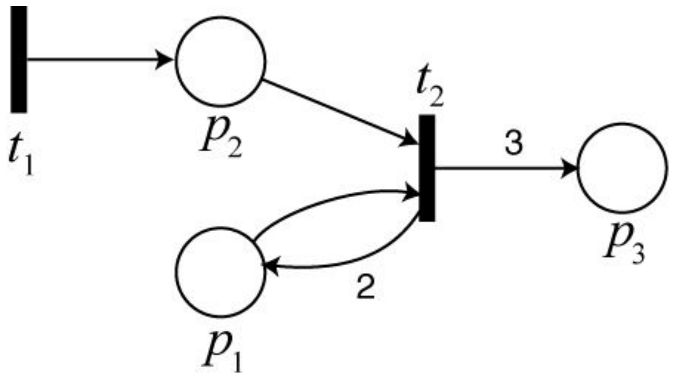
La topologia di un grafo di Petri è espressa in modo compatto mediante due matrici di dimensioni $|P| \times |T|$

- matrice **I** di **input** (detta anche “**Pre**”) con i pesi degli archi da posti a transizioni
- matrice **O** di **output** (detta anche “**Post**”) con i pesi degli archi da transizioni a posti

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} w(p_1,t_1) & w(p_1,t_2) & \cdots & w(p_1,t_{|T|}) \\ w(p_2,t_1) & w(p_2,t_2) & \cdots & w(p_2,t_{|T|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(p_{|P|},t_1) & w(p_{|P|},t_2) & \cdots & w(p_{|P|},t_{|T|}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} w(t_1,p_1) & w(t_2,p_1) & \cdots & w(t_{|T|},p_1) \\ w(t_1,p_2) & w(t_2,p_2) & \cdots & w(t_{|T|},p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(t_1,p_{|P|}) & w(t_2,p_{|P|}) & \cdots & w(t_{|T|},p_{|P|}) \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{array}{l} w(p_i,t_j) = 0 \text{ se } p_i \notin I(t_j) \\ w(t_j,p_i) = 0 \text{ se } p_i \notin O(t_j) \end{array}}^{\text{da notare che}}$$

- esempio di matrici **I** e **O**



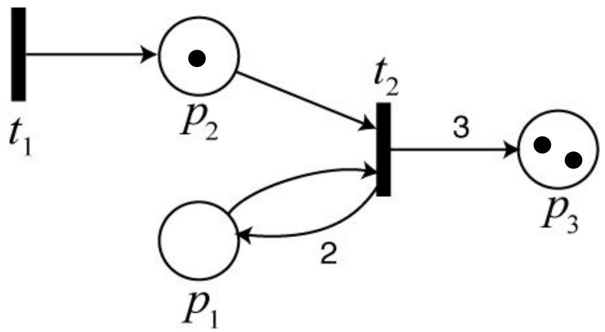
$$|P| = 3, \quad |T| = 2$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tali matrici serviranno anche per descrivere l'evoluzione della rete di Petri

Il grafo di Petri *PG* descrive solo la topologia della rete; per avere una rete di Petri occorre introdurre il suo stato con la funzione di marcatura

- $x: P \rightarrow N$ che associa ad ogni posto un numero naturale (token)

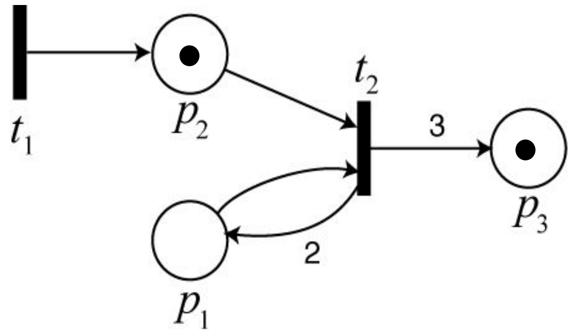


$$x(p_1) = 0$$
$$x(p_2) = 1$$
$$x(p_3) = 2$$

La funzione di marcatura definisce un vettore colonna il cui i-esimo elemento indica il numero di token (gettoni) nell'i-esimo posto $x(p_i)$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ \vdots \\ x(p_{|P|}) \end{bmatrix} \subseteq N^{|P|}$$

Una **rete di Petri** *PN* è quindi un grafo di Petri *PG* a cui è associata una funzione di marcatura (tipicamente, quella iniziale): $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x})$



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \subseteq N^3$$

Il vettore marcatura di una rete di Petri rappresenta lo stato della rete

- il numero di posti $|P|$ è limitato, ma $x(p_i)$ in generale può non esserlo
- una rete di Petri può quindi rappresentare un insieme di stati discreti di cardinalità infinita con un numero finito di posti

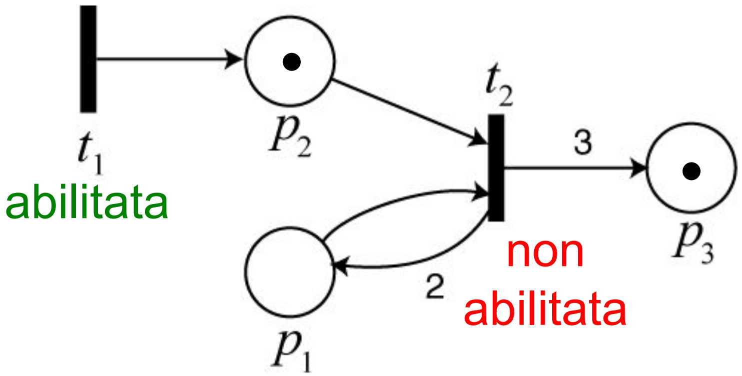
L'evoluzione di una rete di Petri è legata all'occorrenza di eventi

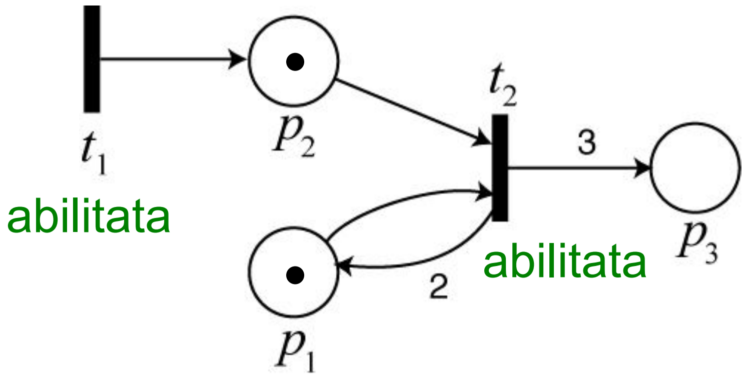
- quando può accadere un evento?
  - quando (almeno) una transizione è abilitata
- cosa succede alla rete in corrispondenza di un evento?
  - avviene un cambio di marcatura

Una transizione t_j è abilitata se

$$\boldsymbol{x(p_i) \geq w(p_i, t_j)} \textbf{ per ogni } \boldsymbol{p_i \in I(t_j)}$$

- se una transizione è abilitata allora può "scattare" (firing)
- accade l'evento ad essa legato





Come cambia la marcatura quando scatta una transizione abilitata?

- in tutti i posti in ingresso alla transizione *si consumano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega il posto alla transizione
- in tutti i posti in uscita dalla transizione *si generano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega la transizione al posto

Si può definire allora una funzione f di transizione dello stato

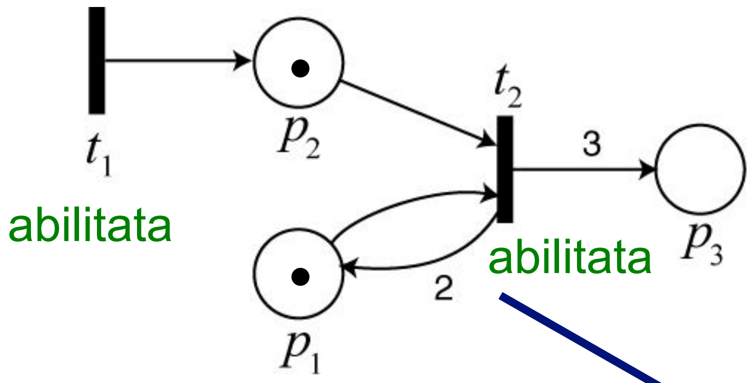
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = f(x, t_j) \ \text{ se } \ x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \ \forall p_i \in I(t_j)$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(p_1) & x(p_2) & \cdots & x(p_{|P|}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'(p_1) & x'(p_2) & \cdots & x'(p_{|P|}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i)$$

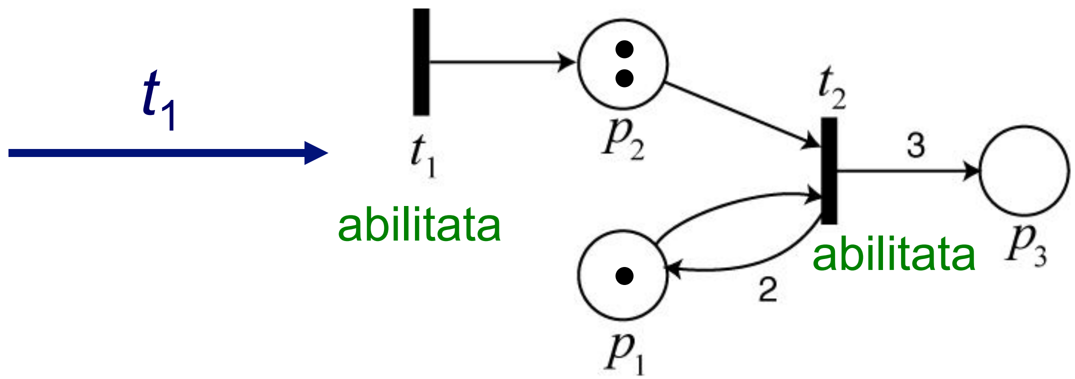
è una definizione corretta poiché si è posto $\begin{cases} w(p_i, t_j) = 0 \ \text{ se } \ p_i \notin I(t_j) \\ w(t_j, p_i) = 0 \ \text{ se } \ p_i \notin O(t_j) \end{cases}$

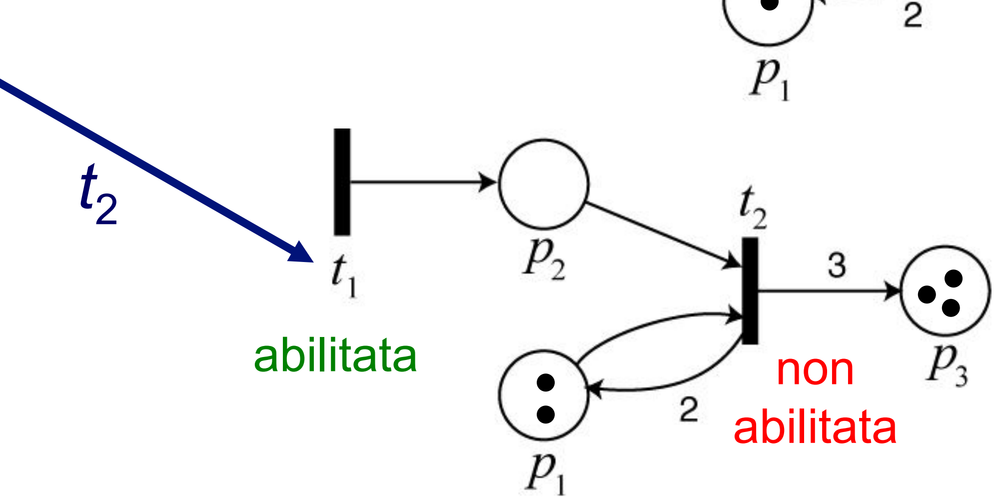
Con questo meccanismo si possono generare o far scomparire “risorse”

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) > \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{genero token}$$

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) < \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{elimino token}$$







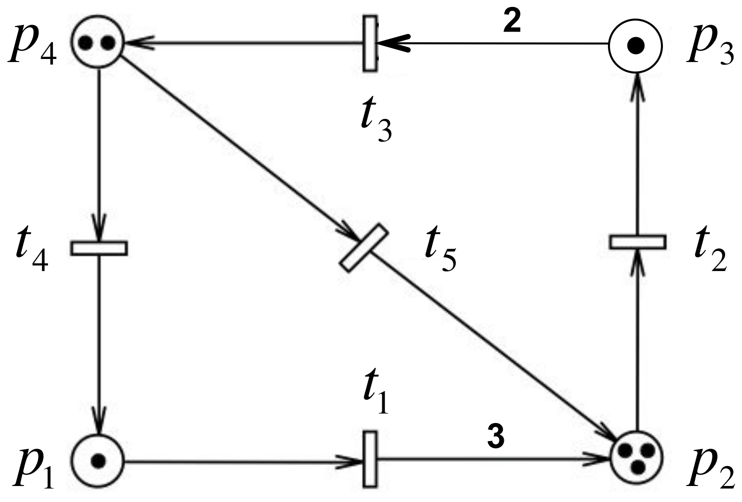
se più transizioni sono abilitate se ne fa scattare una a caso (NON DETERMINISMO)

Transizioni concorrenti

Cosa succede se una marcatura abilita più transizioni insieme?

- nelle reti standard si assume per convenzione che scatti **una sola** transizione alla volta, **scelta a caso** (non determinismo)
- lo scatto di una transizione alla volta preserva la **località** dell'evoluzione della rete (idea: due eventi non correlati non accadono "*mai allo stesso istante*")
- un altra regola molto diffusa nei programmi di simulazione delle *PN* è quella di far scattare insieme **tutte** le transizioni abilitate e **non** in conflitto
- per quelle **in conflitto**, vi sono molte convenzioni diverse:
  - scelta casuale
  - priorità lessicografica
  - priorità con memoria
  - ...
- a transizione scattata, occorre comunque verificare di nuovo le condizioni di abilitazione di tutte le transizioni perché la marcatura è cambiata
- la scelta di scatto casuale di una delle transizioni abilitate ha un valore concettuale (ad es., per simulazioni), ma **non** è ammissibile in generale nelle implementazioni (ad es., nella legge di controllo di un processo)

Dinamica di evoluzione di una rete



① con la marcatura iniziale: t_1, t_2, t_4 e t_5 sono tutte *abilitate*, mentre t_3 *non* lo è

② possibili marcature ottenibili dopo il primo scatto, effettuato con scelta casuale:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix}0\\6\\1\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_4} \begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_5} \begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\end{pmatrix}$$

③ una *sequenza ammissibile* di transizioni che porta la rete dalla marcatura iniziale $\mathbf{x}_0$ alla marcatura $\mathbf{x}_f = (0\ 3\ 3\ 3)^T$ è data per esempio da

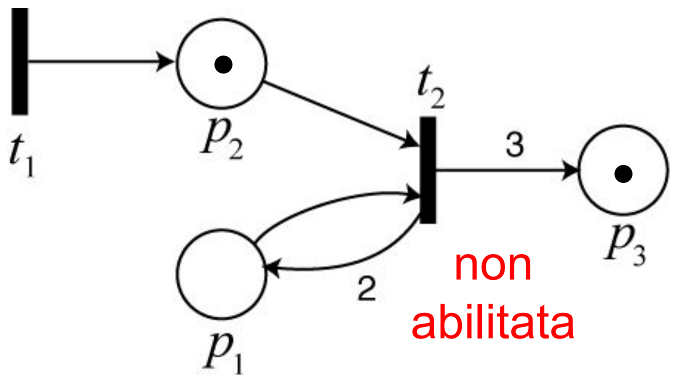
$$\mathbf{S} = t_1t_4t_1t_2t_2t_2t_2t_2t_2t_3t_3 = t_1t_4t_1(t_2)^6(t_3)^2$$

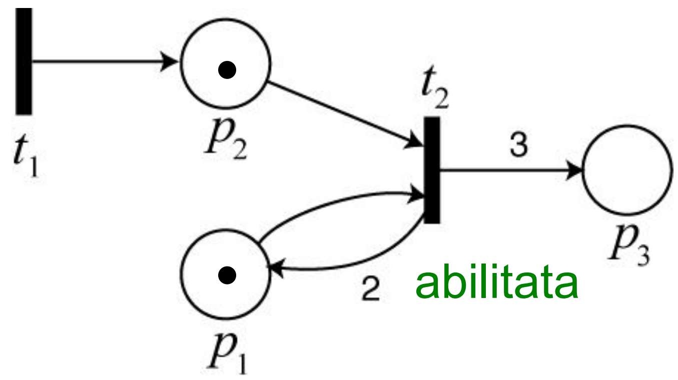
④ le sequenze $t_1t_2t_3t_4t_5$, $t_2t_3t_5t_4t_1$ e $t_4t_2t_1t_5t_3$ sono tutte *ammissibili* e portano alla medesima marcatura finale $\mathbf{x}_f = (1\ 6\ 0\ 1)^T$

- si ottiene la stessa marcatura perché in ogni sequenza ciascuna transizione scatta lo stesso numero di volte

In termini di matrice $\mathbf{I}$ di input, una transizione t_j è abilitata se

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$





$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

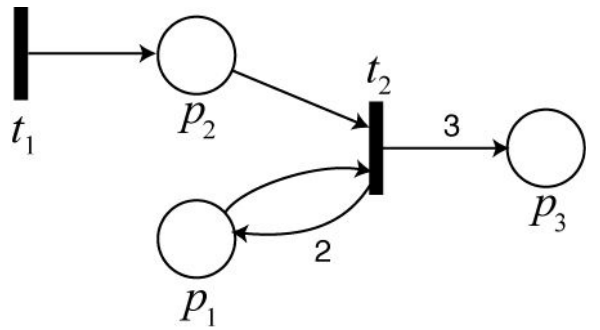
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In termini di matrici di input e output la funzione di transizione diventa

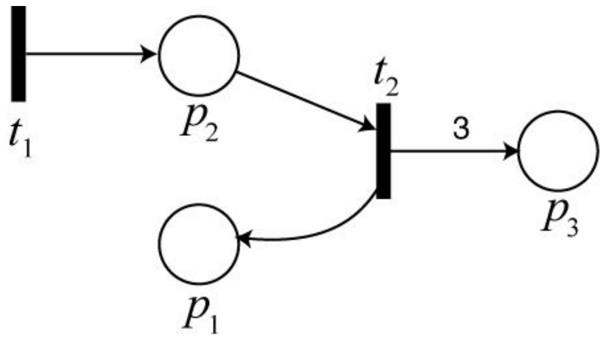
$$\boxed{\begin{array}{l} f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|} \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{I}_j + \mathbf{O}_j \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j \end{array}}$$

Si definisce anche la <u>matrice di incidenza</u> della rete di Petri $\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I}$

- utile, anche se non definisce completamente la topologia della rete
- si perde informazione sul peso di archi in ingresso-uscita alla stessa coppia (p_i,t_j)



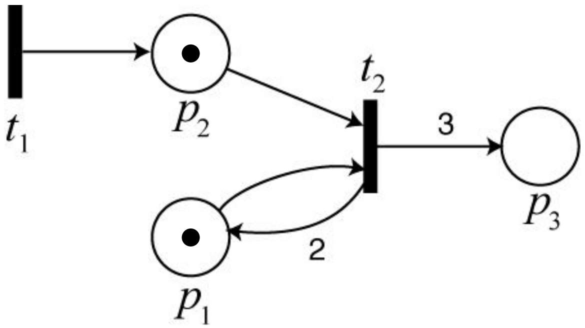
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice di incidenza definisce la dinamica della rete

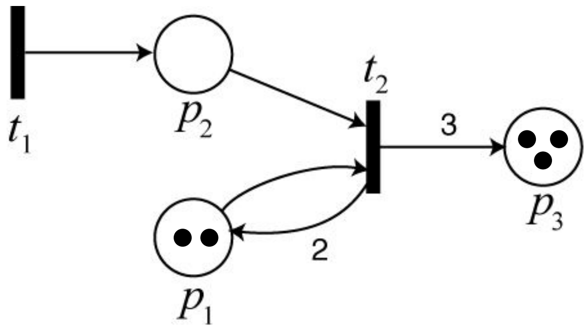
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_j \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

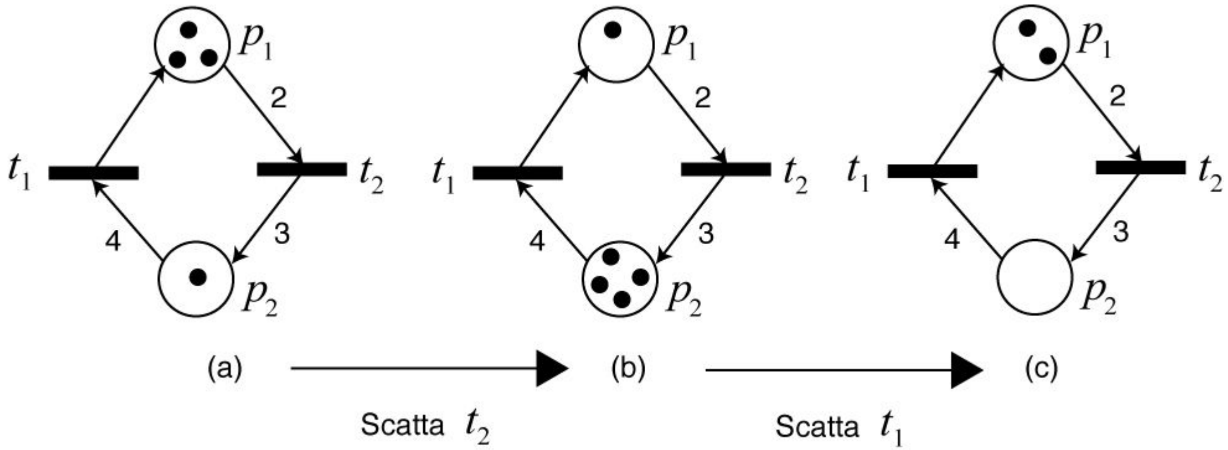
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ transizione t_2 è abilitata

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Si definisce <u>sequenza di scatti</u> **S** una sequenza di *n* transizioni tali che

- la prima transizione della sequenza è abilitata nella marcatura corrente
- lo scatto di ogni transizione porta in una marcatura in cui è abilitata la transizione successiva nella sequenza



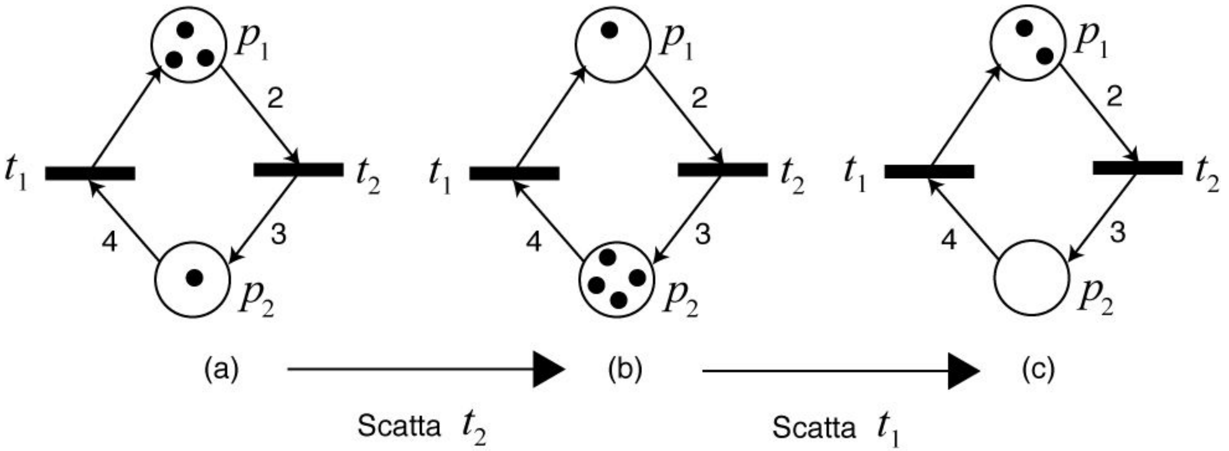
$$\mathbf{S} = t_2 t_1$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$$

Si definisce vettore delle occorrenze s di una sequenza di scatti $\mathbf{S}$ un vettore colonna con $|T|$ elementi tale che

- il k-esimo elemento s_k è pari al numero di occorrenze della transizione t_k in $\mathbf{S}$



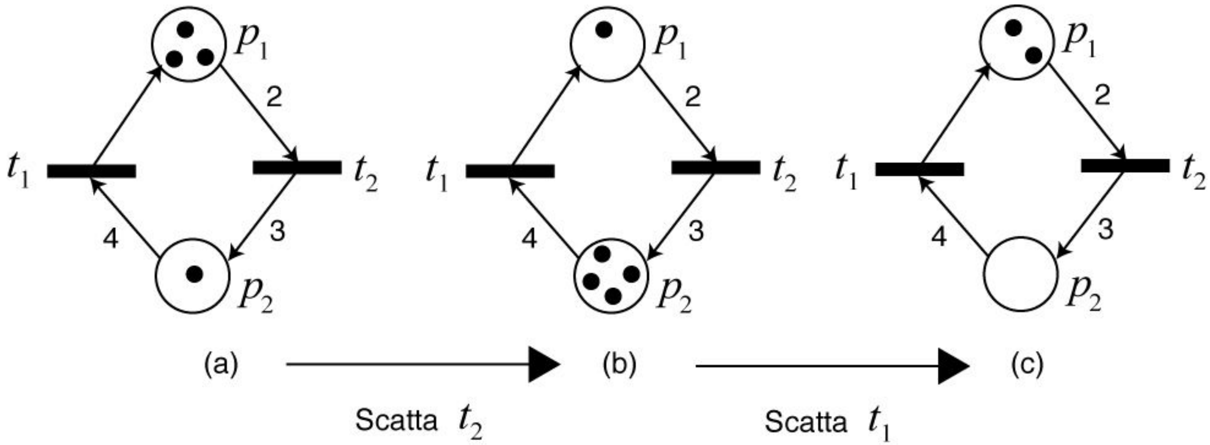
$$\mathbf{S} = t_2 t_1 \quad \Rightarrow \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota bene: un vettore delle occorrenze corrisponde a più sequenze di transizioni, ma in generale **non** tutte sono sequenze di scatti (ammissibili)

- $s = (1\ 1)^T$ corrisponde sia a $\mathbf{S}_1=t_1t_2$ sia a $\mathbf{S}_2=t_2t_1$, ma solo $\mathbf{S}_2$ è una sequenza di scatti

L’evoluzione dinamica di una rete di Petri a seguito di una sequenza di scatti $\mathbf{S}$ a cui corrisponde un vettore delle occorrenze s è data da

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}s}$$



$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

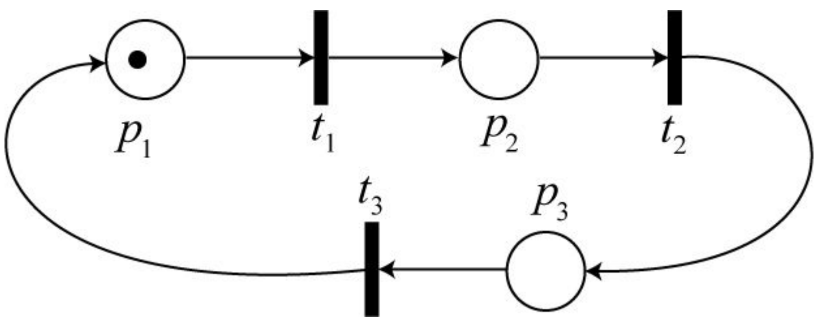
$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \mathbf{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\,s$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$, dove $\mathbf{x}_0$ è la marcatura iniziale

- una marcatura $\mathbf{x}_2$ è raggiungibile da una marcatura $\mathbf{x}_1$ se esiste almeno una sequenza di scatti la cui esecuzione da $\mathbf{x}_1$ porta a $\mathbf{x}_2$
- ogni marcatura è raggiungibile da se stessa
- l'<u>insieme delle marcature raggiungibili</u> di *PN* è l'insieme *R(PN)* di tutte le marcature raggiungibili da $\mathbf{x}_0$
- sono tutti gli stati in cui il sistema può portarsi durante una generica evoluzione (considerando anche tutte le possibili scelte di sequenze di scatto)

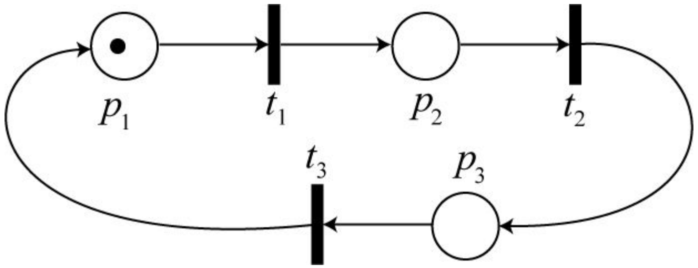


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

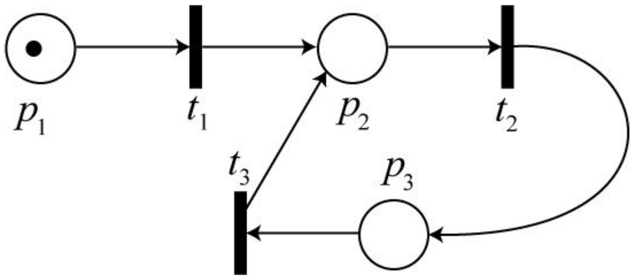
Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una marcatura $\mathbf{x}^*$ è detta marcatura base se è raggiungibile da ogni marcatura $\mathbf{x} \in R(PN)$
  - capacità del sistema di ripristinare sistematicamente una particolare condizione
- se la marcatura iniziale $\mathbf{x}_0$ è una marcatura base, la rete è reversibile
  - capacità del sistema di riportarsi sistematicamente nella condizione iniziale



$$R(PN_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tutte marcature base
$\Rightarrow$ rete reversibile



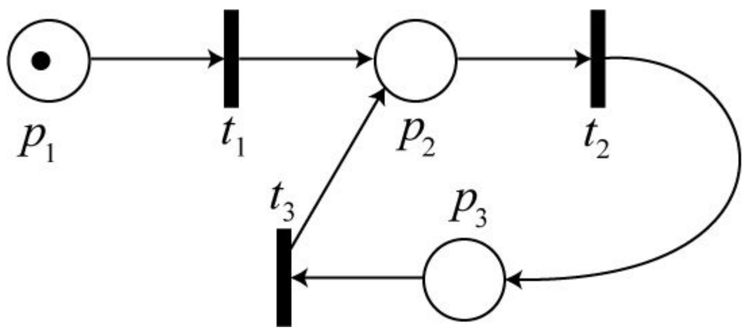
$$R(PN_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbf{x}_0$ **non** è una marcatura base
$\Rightarrow$ rete non reversibile

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una transizione t è viva se per ogni marcatura $\mathbf{x} \in R(PN)$ esiste una marcatura $\mathbf{x}^*$ raggiungibile da $\mathbf{x}$ che abilita t
  - quando una transizione (viva) t che è abilitata in $\mathbf{x}^*$ scatta, la rete si porterà in una marcatura da cui potrà, a seguito di una sequenza di scatti, raggiungere una marcatura ($\mathbf{x}^*$ o un'altra) tale da far scattare nuovamente t
  - una transizione viva può scattare infinite volte
- si ha vivezza della rete quando tutte le transizioni sono vive
  - nota: la non vivezza non implica l'impossibilità di evolvere

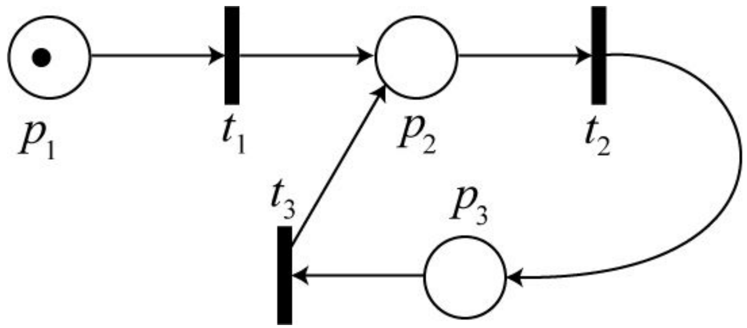


rete **non** viva perché
t_1 è abilitata solo da $\mathbf{x}_0$
(transizione non viva)

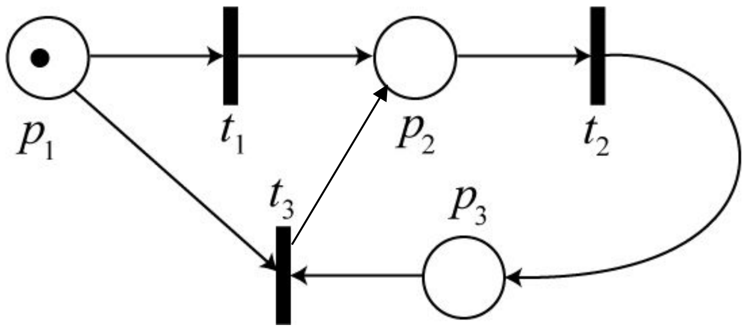
Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- la rete è <u>bloccante</u> se esiste una marcatura $\mathbf{x}^* \in R(PN)$ in cui non è abilitata nessuna transizione
  - la rete, una volta arrivata in x*, non può più evolvere (**deadlock**)
  - una rete bloccante non è viva
  - una rete non viva può non essere bloccante



- rete <u>non viva</u> in quanto t_1 è abilitata solo in $\mathbf{x}_0$
- rete <u>non bloccante</u>



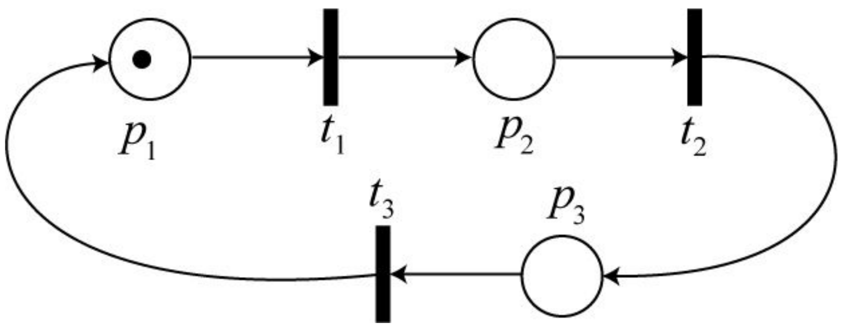
- rete <u>bloccante</u> (da $\mathbf{x}_0$)
- $\mathbf{x}^* = [0\ 0\ 1]^T \in R(PN)$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

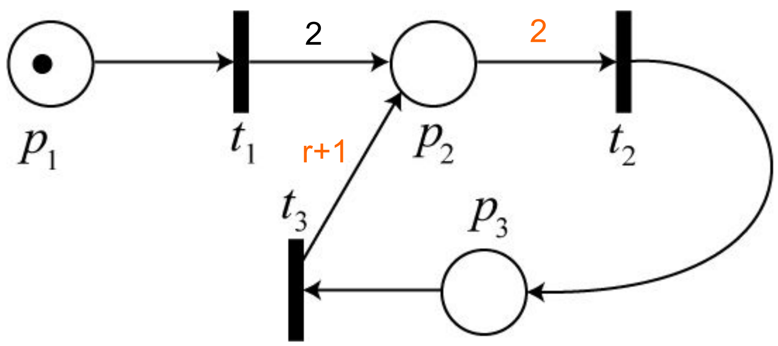
Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

Durante l'evoluzione si possono generare o distruggere token ad ogni transizione; è possibile che si *accumulino* token in posti della rete?

- un posto p_i si dice k-limitato se in ogni marcatura raggiungibile il numero di token in p_i è minore o uguale a k
- si ha limitatezza della rete quando ogni posto della rete è k-limitato per un qualche k finito (rete safe (o binaria) se è limitata con k=1)



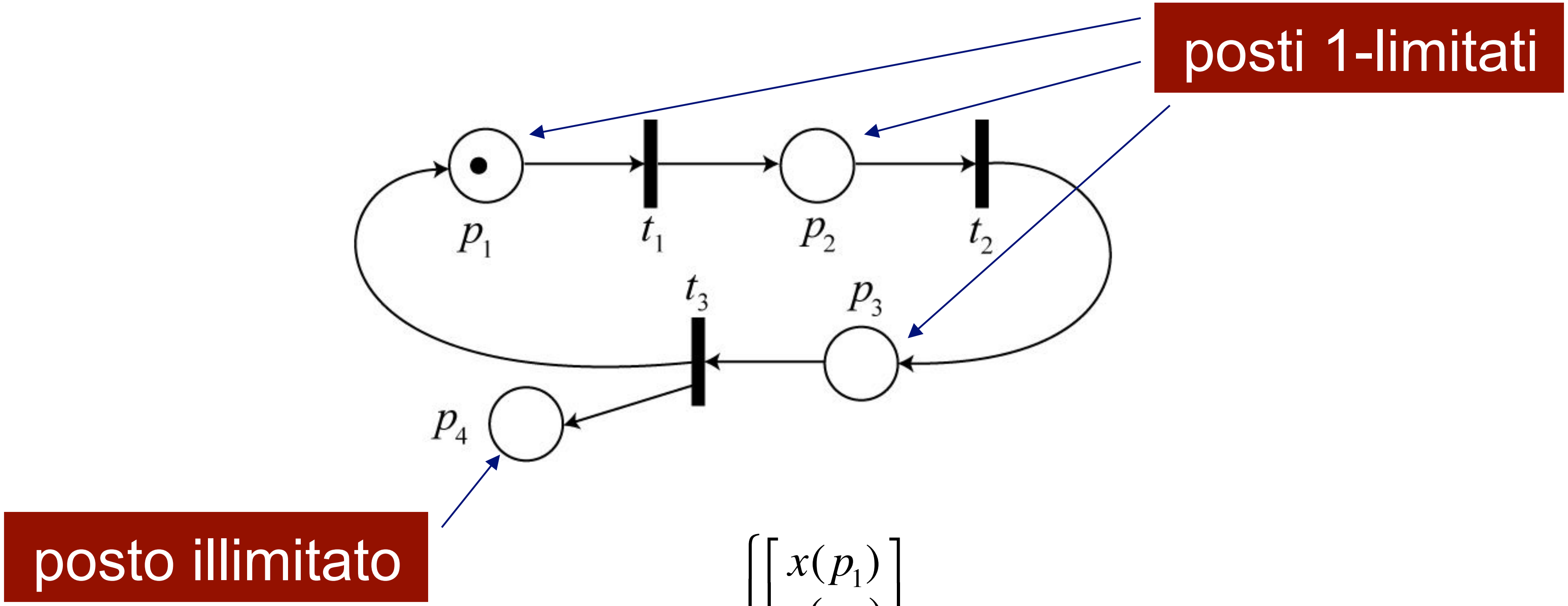
rete safe



rete limitata (con k=2) per r=1
è "illimitata" per r>1?

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- un posto p_i è detto illimitato se non è k-limitato per nessun k finito
- si ha una rete illimitata quando almeno un suo posto è illimitato

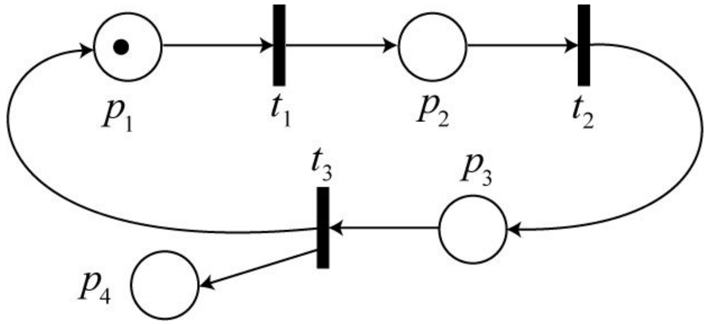


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \\ x(p_4) \end{bmatrix} \in N^4 \text{ tali che } x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- la <u>parte conservativa</u> della rete è un sottoinsieme di posti in cui, durante qualunque evoluzione ammissibile, si mantiene costante una combinazione lineare (a coefficienti interi naturali) di token



$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \\ x(p_4) \end{bmatrix} \in N^4 \text{ tali che } x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

$\{p_1, p_2, p_3\}$ è la parte conservativa della rete

- se la rete ammette una parte conservativa, allora

$$\Lambda \cdot \mathbf{x} = c \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$$

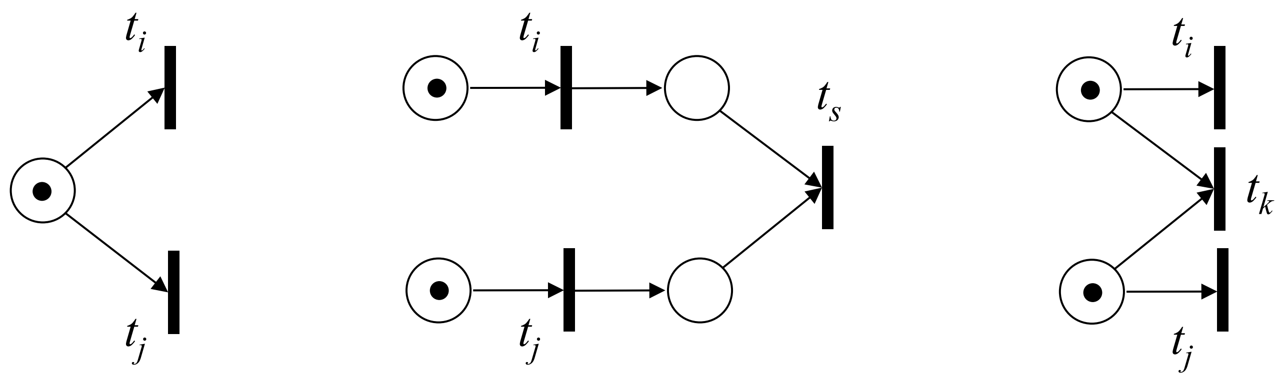
con $c \in N$ e con $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{|P|} \end{bmatrix} \in N^{|P|} \quad (\lambda_i < \infty)$

- se p_i non appartiene a parte conservativa $\Rightarrow \lambda_i = 0$ (es: $\Lambda = [1\ 1\ 1\ 0]$)
- le parti conservative della rete indicano limiti fisici nel sistema
- se le parti conservative coprono tutto l'insieme P, la rete è **limitata**

Strutture fondamentali

Si possono individuare alcune strutture fondamentali nell'interconnessione tra posti e transizioni, con una chiara *interpretazione modellistica*

- transizioni in **conflitto**
  - transizioni con uno o più posti di ingresso in comune, ma aventi un numero di token non sufficienti a farle scattare tutte
- transizioni in **concorrenza** con successiva **sincronizzazione**
  - transizioni senza posti di ingresso in comune, tutte abilitate e seguite da posti di uscita che sono anche di ingresso per una transizione comune
- transizioni in **alternativa** (o in **confusione**)
  - transizioni in concorrenza tra loro, ma in conflitto con altre transizioni (terze)

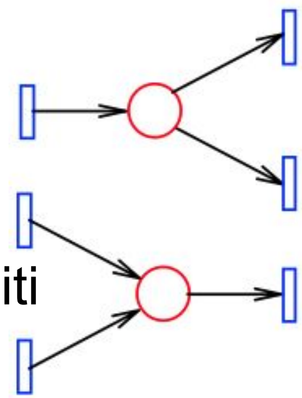


Classi particolari di reti di Petri

Alcune classi di reti di Petri hanno vincoli extra sulla topologia del loro grafo ⇒ minore capacità rappresentativa come modelli di DEDS, ma possibilità di avere risultati analitici più forti

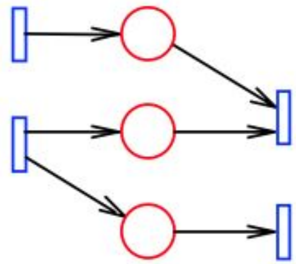
Si considerano qui alcuni casi particolari solo di reti di Petri ordinarie, ossia con archi di peso solo unitario (le altre sono dette generalizzate = GPN)

- macchina a stati (State Machine, SM)
  - ogni transizione ha il limite di un solo posto in ingresso e un solo posto in uscita
  - il numero di token non cambia mai ⇒ rete conservativa
  - se la marcatura iniziale ha un solo token ⇒ rete sicura (binaria)
  - è viva ⇔ il suo grafo è fortemente connesso e ∃ almeno un token
  - grafo di raggiungibilità sempre finito ⇒ equivale ad automa a stati finiti
  - *può rappresentare conflitti, ma non concorrenza e sincronizzazione*



Classi particolari di reti di Petri

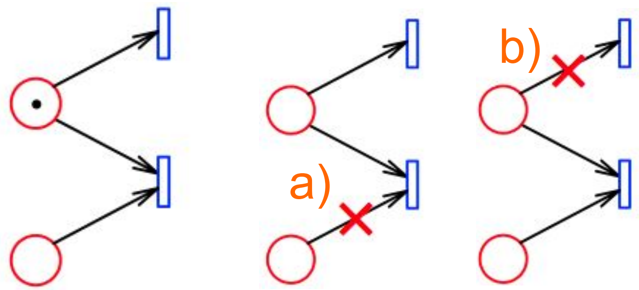
- grafo marcato (Marked Graph, MG)
  - ogni posto ha il limite di una sola transizione in ingresso e una sola in uscita
  - vivezza ⇔ ogni ciclo contiene almeno un posto marcato
  - *può modellare concorrenza e sincronizzazione, ma non i conflitti*



- rete a scelta libera (Free Choice Petri Net, FC)
  - *può rappresentare concorrenza e conflitti, però con alcune limitazioni*
  - si vuole *evitare* che transizioni in potenziale conflitto possano *non* essere tutte simultaneamente abilitate
    - la risoluzione dei conflitti non sarebbe libera, dipendendo anche da altri posti (magari “lontani”) nella rete
  - per ogni arco da un posto a una transizione

    a) o il posto è l’unico in ingresso a quella transizione (non c’è sincronizzazione)

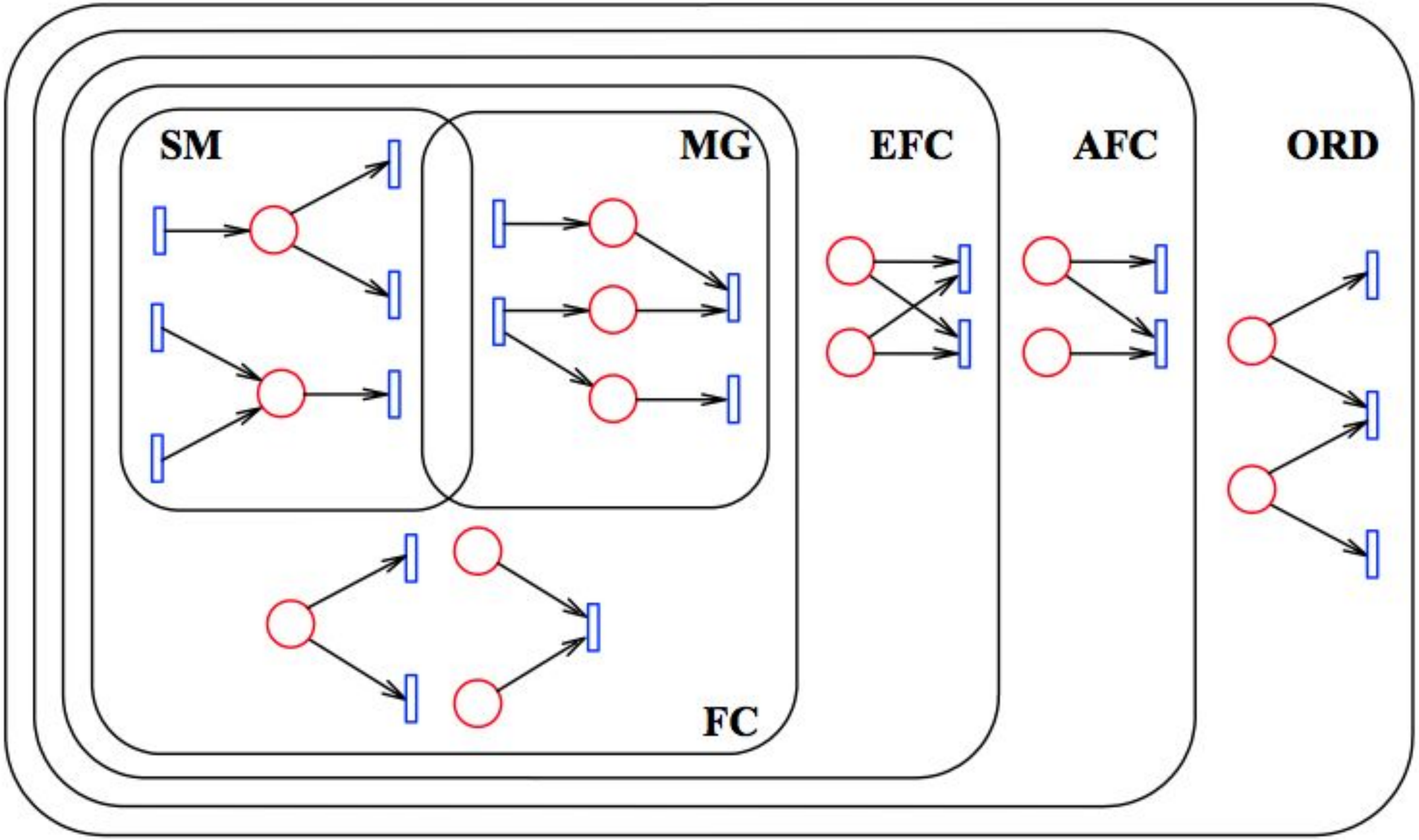
    b) oppure la transizione è l’unica in uscita da quel posto (non ci sono conflitti)



- se due posti nella rete hanno una o più transizioni di uscita in comune, allora ...
  - rete FC Estesa: ... hanno tutte le transizioni di uscita in comune
  - rete FC Asimmetrica: ... tutte le transizioni di uscita di uno lo sono anche dell’altro

Classi particolari di reti di Petri

- relazioni tra classi di PN: ORD ⊃ AFC ⊃ EFC ⊃ FC ⊃ (SM ∪ MG)

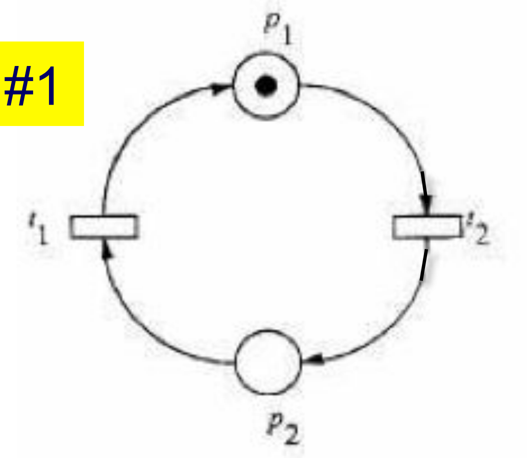


Esempi di proprietà strutturali

limitatezza, vivezza e reversibilità sono proprietà indipendenti

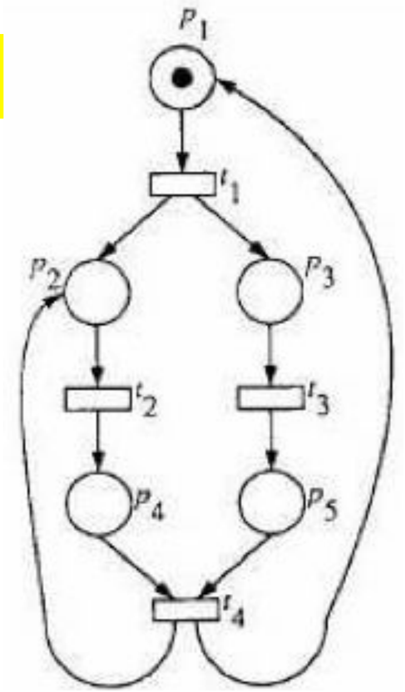
esempi tratti da materiale didattico di Luigi Piroddi, Politecnico di Milano

#1



- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: SI
- è una SM ⇒ rete binaria, conservativa

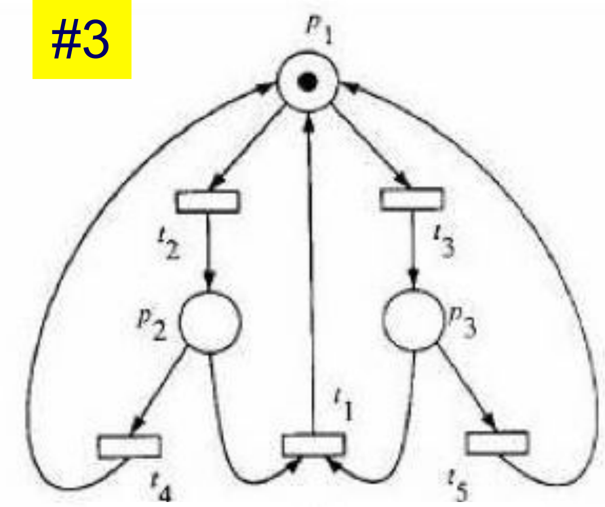
#2



- limitatezza: NO
  - ⇒ p_2 e p_4 sono illimitati (ad es., con la sequenza $t_1t_2t_3t_4$)
- vivezza: SI
- reversibilità: NO
  - ⇒ per marcare nuovamente p_1 occorre far scattare t_4, ma così si aggiunge un token in p_2
- è una FC

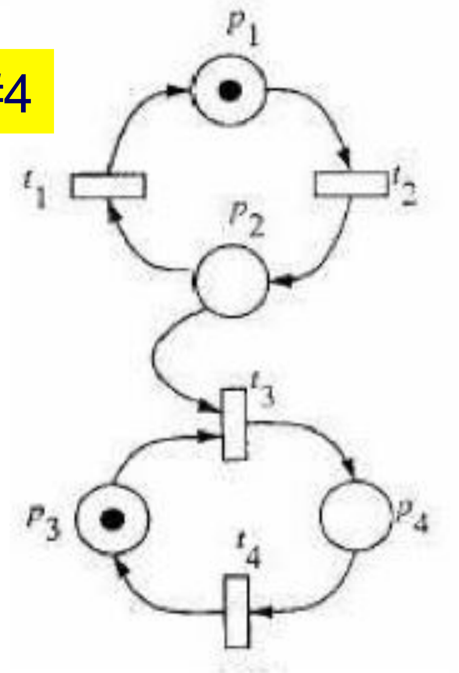
Esempi di proprietà strutturali

#3



- limitatezza: SI
- vivezza: NO
  - ⇒ t_1 non può scattare mai
- reversibilità: SI
  - ⇒ eliminando t_1, il resto è una SM con tre soli stati: $\mathbf{x}_0 = [1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{x}_1 = [0\ 1\ 0]^T$ e $\mathbf{x}_2 = [0\ 0\ 1]^T$
  - ⇒ da $\mathbf{x}_1$ si torna in $\mathbf{x}_0$ con lo scatto di t_4, mentre da $\mathbf{x}_1$ si torna in $\mathbf{x}_0$ con lo scatto di t_5

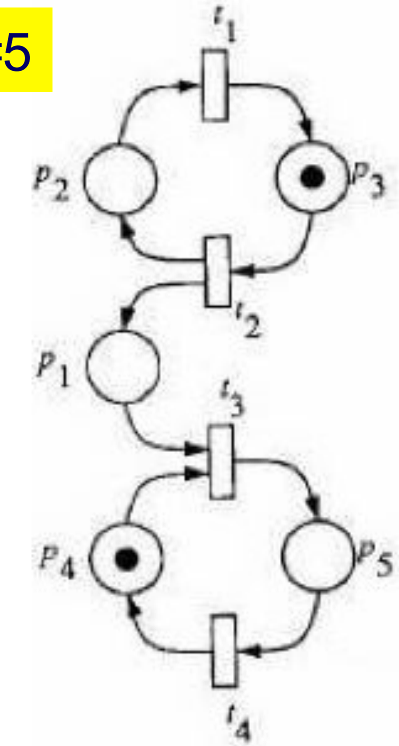
#4



- limitatezza: SI
- vivezza: NO
  - ⇒ se scatta t_3, t_1 e t_2 non saranno mai più abilitati
  - ⇒ scattato t_3, dopo t_4 la rete si blocca in $\mathbf{x}_b = [0\ 0\ 1\ 0]^T$
- reversibilità: NO
  - ⇒ se scatta t_3, non si riesce più a marcare p_1
- è una AFC: $O(p_2)=\{t_1,t_3\} \supset O(p_3)=\{t_3\}$

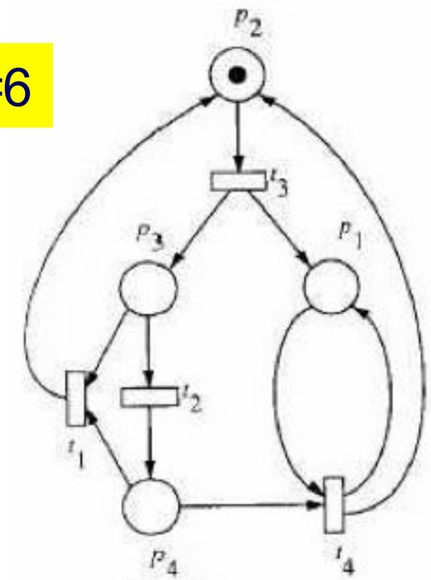
Esempi di proprietà strutturali

#5



- limitatezza: NO
  - ⇒ il posto p_1 è illimitato
- vivezza: SI
  - ⇒ la rete è un MG e ogni ciclo contiene un posto marcato (condizione necessaria e sufficiente di vivezza)
- reversibilità: SI
  - ⇒ t_3 può scattare in media tante volte quante t_2
- rappresenta un modello produttori-consumatori

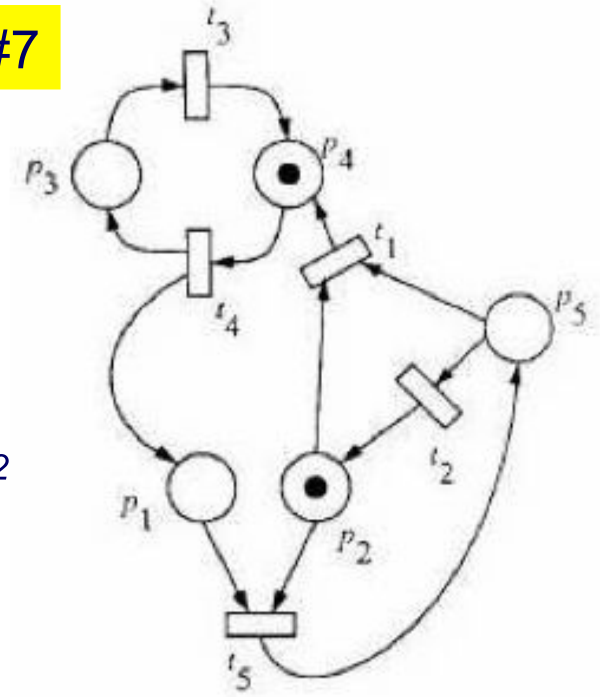
#6



- limitatezza: NO
  - ⇒ p_1 è illimitato: la sua marcatura cresce di un token per ogni scatto di t_3 (sequenza ripetuta)
- vivezza: NO
  - ⇒ t_1 non è mai abilitata
- reversibilità: NO
  - ⇒ la sola sequenza ripetuta consentita è $t_3t_2t_4$ e questa introduce token non eliminabili in p_1

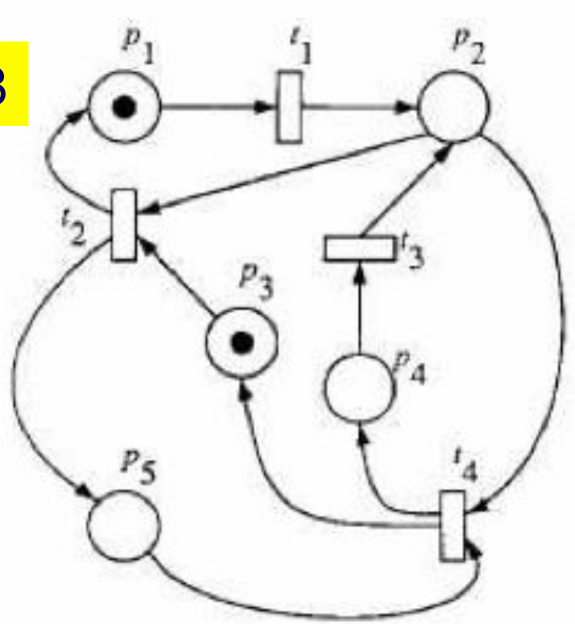
Esempi di proprietà strutturali

#7



- limitatezza: NO
  - ⇒ il posto p_1 è illimitato (ad es., dalla sequenza t_4t_3)
- vivezza: NO
  - ⇒ t_1 non è mai abilitata
- reversibilità: SI
  - ⇒ c'è consumo di token in p_1 ripetendo la sequenza t_5t_2

#8



- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: NO
  - ⇒ inizialmente può scattare solo t_1
  - ⇒ dopo è consentita solo la sequenza ripetuta $t_2t_1t_4t_3$
  - ⇒ è una AFC: $O(p_2)=\{t_2,t_4\} \supset (O(p_3)=\{t_2\} \cup O(p_5)=\{t_4\})$

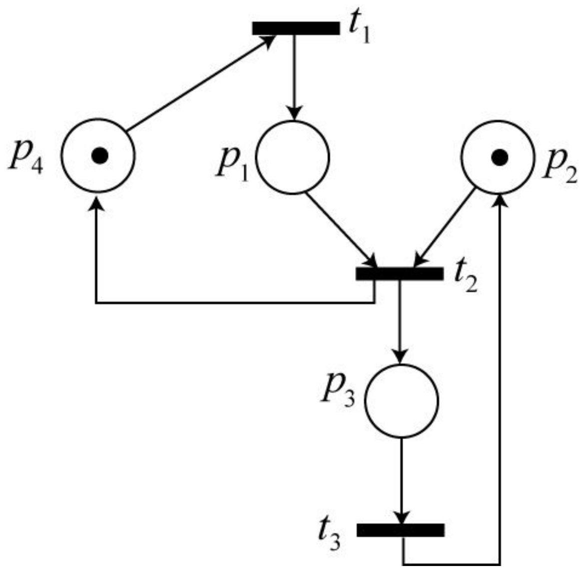
Analisi grafica delle reti di Petri

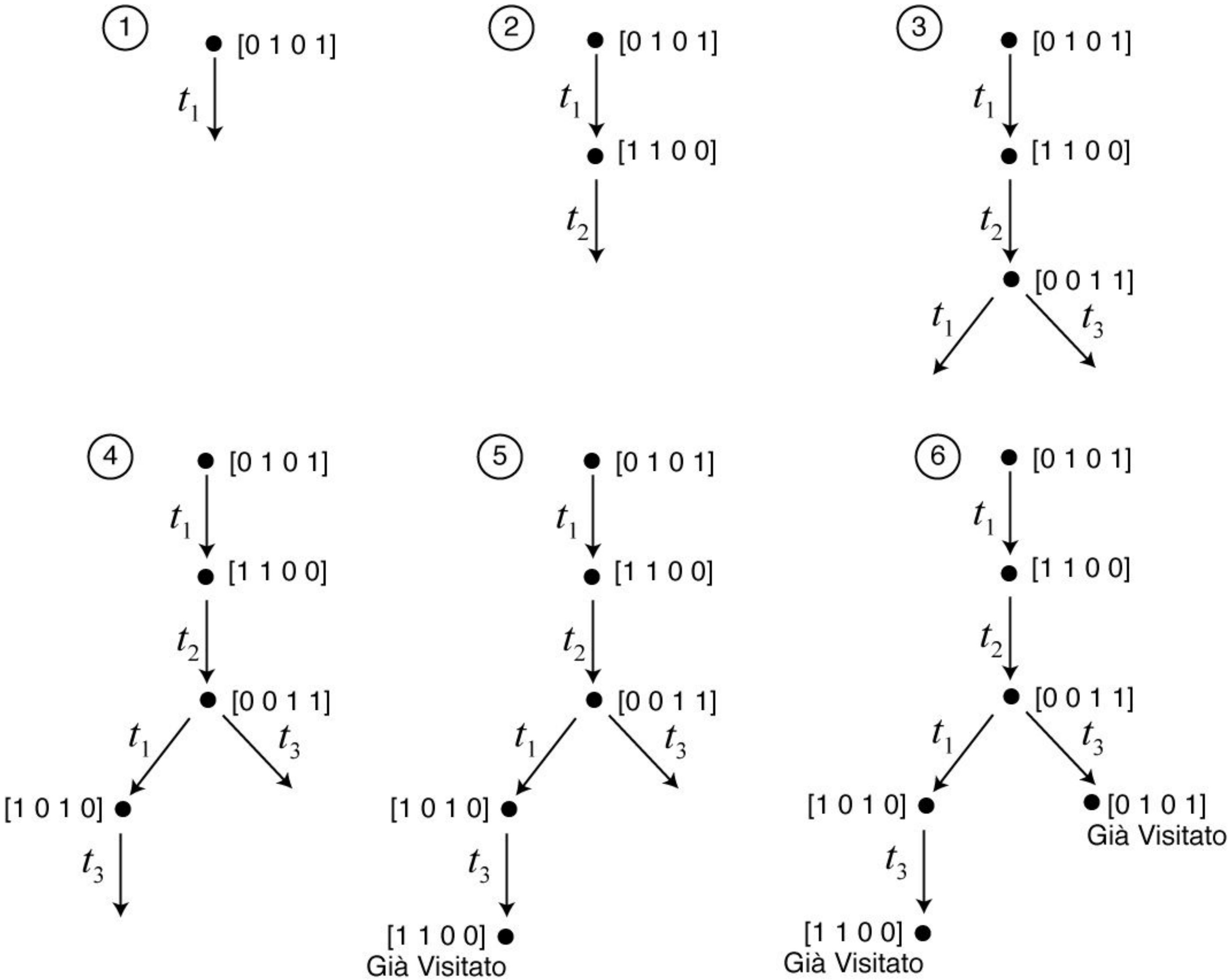
Studio delle proprietà di raggiungibilità di una Petri Net $PN=(P,T,A,w,\mathbf{x}_0)$

- l'albero di raggiungibilità è uno strumento grafico che rappresenta visivamente tutte le marcature raggiungibili e le sequenze di scatti
- il nodo radice rappresenta la marcatura iniziale della rete
- i nodi di livello k rappresentano le marcature raggiungibili in k passi
- l'albero si sviluppa con una politica "depth-first"
- un nodo è una foglia dell'albero se rappresenta una marcatura già visitata o se non abilità più transizioni
- l'analisi dell'albero di raggiungibilità permette di studiare:
  - l'insieme di raggiungibilità della rete
  - la reversibilità della rete
  - la vivezza della rete
  - la limitatezza della rete

Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria



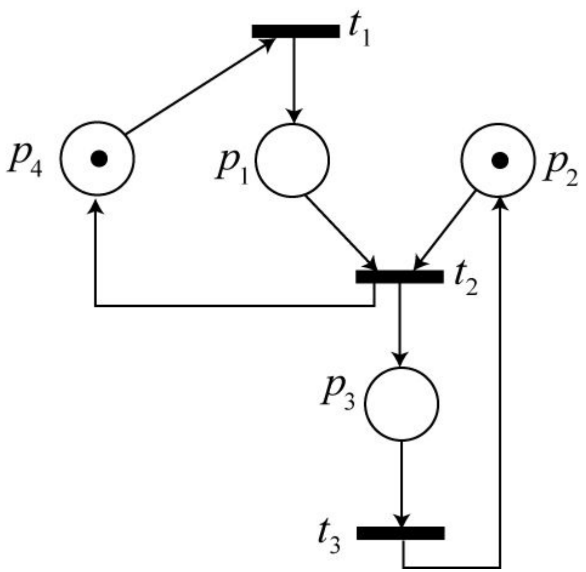


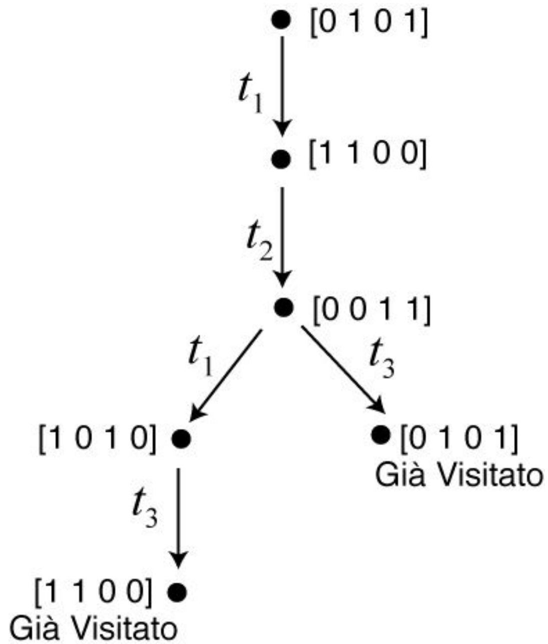
p_1 = buffer occupato
p_2 = server libero
p_3 = server occupato
p_4 = buffer libero

hp: richieste dal client
sempre presenti

Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1 (cont.): sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria

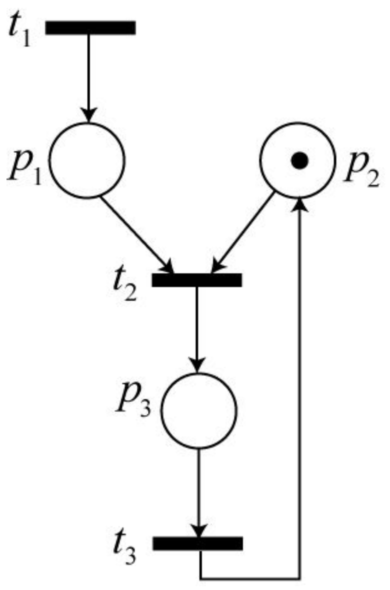


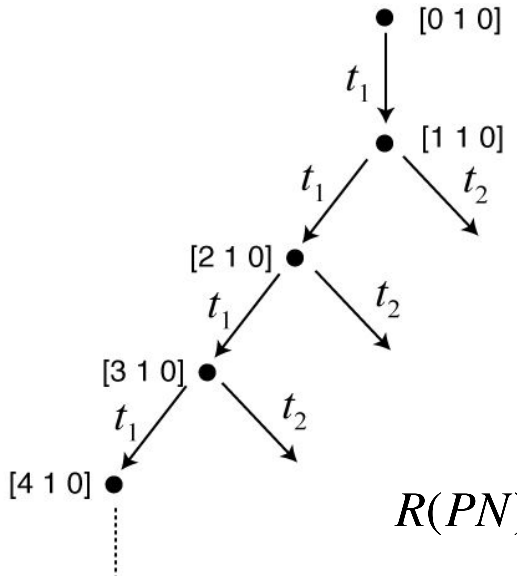


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- la rete è <u>limitata</u> (in particolare, <u>safe</u>)
- $\mathbf{x}_0$ è una foglia e le altre foglie sono marcature da cui si raggiunge $\mathbf{x}_0$ ⇒ la rete è <u>reversibile</u>
- da ogni nodo dell'albero si raggiunge un nodo nel quale possono scattare t_1, t_2 o t_3 ⇒ la rete è <u>viva</u>

esempio 2: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità **illimitata**





$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \end{bmatrix} \in N^3 \text{ tali che } x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

l'insieme di raggiungibilità ha cardinalità infinita, e l'albero di raggiungibilità avrebbe infiniti nodi

- rappresentiamo un numero arbitrariamente grande di token con il simbolo ω

$$\omega + k = \omega \qquad \omega - k = \omega \qquad \forall k \in N$$

Analisi grafica delle reti di Petri

Qual è il meccanismo che permette di avere infiniti token in un posto?

- supponiamo che una sequenza di scatti S porti la rete da $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ ...
- ... e che la marcatura $\mathbf{x}_2$ abbia in ogni posto almeno gli stessi token di $\mathbf{x}_1$ ed esista un posto dove ne ha strettamente di più ($\mathbf{x}_2$ ricopre $\mathbf{x}_1$)
- la sequenza S sarà quindi nuovamente ammissibile in $\mathbf{x}_2$ (e così via)
- i posti con più token in $\mathbf{x}_2$ rispetto a $\mathbf{x}_1$ ne possono accumulare infiniti

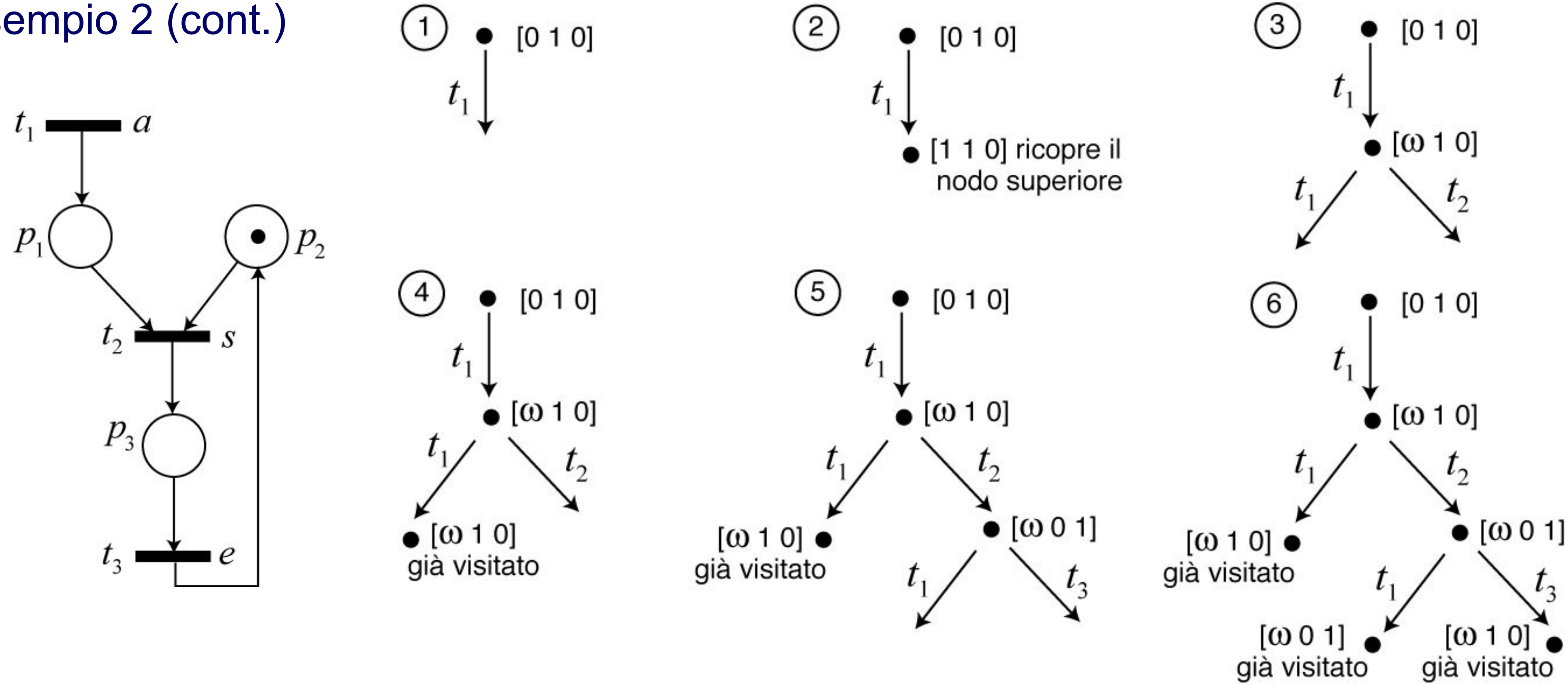
Si utilizza questo meccanismo nella costruzione dell'albero

- siano **x** e **y** due nodi generati nell'albero (**y** generato prima di **x**)
- **x** ricopre **y** se
  - $x(p_i) \geq y(p_i)$ per ogni $i \in \{1,2,\ldots,|P|\}$
  - $x(p_j) > y(p_j)$ per almeno un $j \in \{1,2,\ldots,|P|\}$
- si sostituisce il simbolo ω alla marcatura dei posti per cui $x(p_j) > y(p_j)$
- si continua poi con la costruzione classica

Un albero che contiene il simbolo ω è detto <u>albero di copertura</u>

- rappresenta una rete illimitata
- ha un numero finito di nodi
- i posti con marcatura ω sono posti illimitati

esempio 2 (cont.)



Analisi matriciale delle reti di Petri

Per lo studio di varie proprietà strutturali di una rete di Petri *PN* si usa anche la rappresentazione matriciale $(\mathbf{I},\mathbf{O})$ e l'equazione $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{C}s$

Studio della conservatività della rete

- esiste un insieme di posti tali che la somma pesata dei token rimanga costante in tutte le marcature raggiungibili?
- se tale proprietà è soddisfatta, allora esiste un vettore colonna γ detto P–invariante tale che

$$\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} = \text{costante} \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN) \text{ con } \gamma \in Z^{|P|}, \gamma \neq \mathbf{0}$$

- ricordando l'equazione dinamica si ha

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} = \gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN) \\
&\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}s\right) = \gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall s \text{ vettore delle occorrenze ammissibili} \\
&\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Analisi matriciale delle reti di Petri

- un <u>P–invariante</u> è una soluzione (nel dominio $Z^{|P|}$, Z = {interi}) *non banale* del sistema lineare

$$\boxed{\gamma^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\gamma = \mathbf{0}}$$

- data la struttura lineare del P–invariante, se γ_1 e γ_2 sono P–invarianti anche $(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)$ è un P–invariante (con k_1, k_2 in N = {naturali})
- si definisce <u>supporto</u> di un P–invariante γ l'insieme $||\gamma||$ di posti corrispondenti ad elementi *non nulli* di γ
- il supporto è l'insieme dei posti che compaiono nell'<u>equazione di invarianza</u>

$$\boxed{\gamma^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \gamma^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0}$$

- dato un P–invariante γ, sia $I_\gamma(PN)$ l'insieme delle soluzioni (nel dominio $N^{|P|}$) dell'equazione di invarianza; allora vale la

$$R(PN) \subseteq I_\gamma(PN) \subseteq N^{|P|}$$

ossia tutte le marcature raggiungibili soddisfano anche l'equazione di invarianza

Analisi matriciale delle reti di Petri

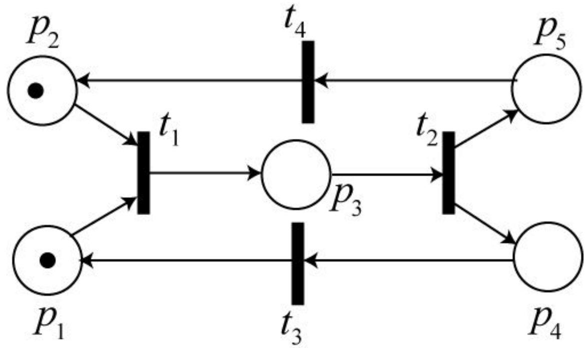
un P–invariante è detto

- a supporto minimo se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P–invariante
- canonico se il massimo comun divisore dei suoi elementi ≠ zero è pari a 1

il supporto di un P–invariante (**non negativo**) indica una parte conservativa della rete

- se tutta la rete è "coperta" da P–invarianti non negativi (ovvero se ogni posto della rete è nel supporto di almeno un P–invariante di tale tipo) la rete è conservativa e pertanto limitata esempio

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N.B. rango($\mathbf{C}$) = 3
⇒ dim kernel($\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) = 2
(check con Matlab)

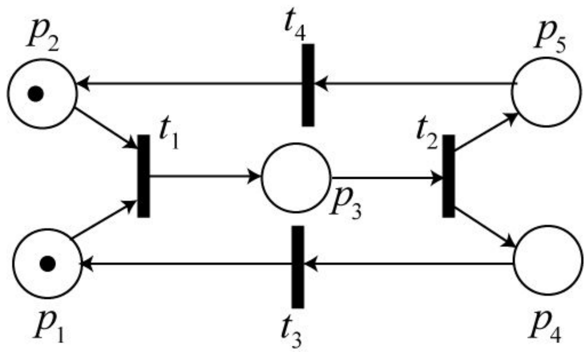
$$\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_4 = 0 \\ \gamma_2 - \gamma_5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_4 \\ \gamma_2 = \gamma_5 \\ \gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \gamma_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

entrambi non negativi (e canonici)
entrambi a supporto minimo

$$\left. \begin{matrix} \|\gamma_1\| = \{p_1, p_3, p_4\} & x(p_1) + x(p_3) + x(p_4) = 1 \\ \|\gamma_2\| = \{p_2, p_3, p_5\} & x(p_2) + x(p_3) + x(p_5) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{rete conservativa}$$

gli insiemi di supporto degli invarianti
non negativi ricoprono $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$

esempio (cont)



$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\gamma_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0=1$$

equazione di invarianza di γ_1

$$I_{\gamma_1}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ *\\ 0\\ 0\\ *\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ *\\ 1\\ 0\\ *\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ *\\ 0\\ 1\\ *\end{pmatrix}\right\}$$

$$I_{\gamma_2}=\left\{\begin{pmatrix}*\\ 1\\ 0\\ *\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\ 0\\ 1\\ *\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\ 0\\ 0\\ *\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

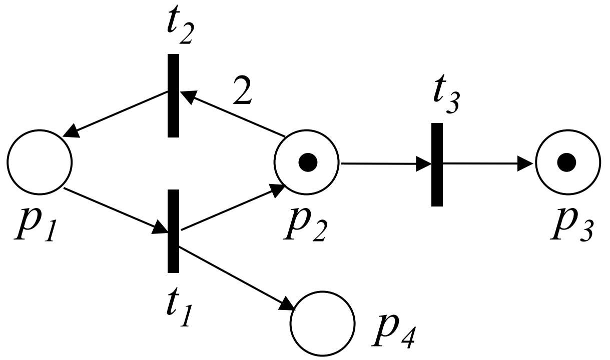
$$\gamma_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\gamma_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0=1$$

equazione di invarianza di γ_2

$$I_{\gamma_1+\gamma_2}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}=R(PN)$$

Analisi matriciale delle reti di Petri

altro esempio



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. rango($\mathbf{C}$) = 3
$\Rightarrow$ dim kernel($\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) = 1

p-invariante canonico

$$\gamma^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 = 0 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\forall \alpha \in N \setminus \{0\}$ è un p-invariante non negativo
con supporto (minimo) che copre tutto $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$\Rightarrow$ rete conservativa e limitata

equazione di invarianza di γ

$$\gamma^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = 2x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) + x(p_4) = \gamma^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_0 = 2$$

tutte le marcature soluzione **in** ***N*⁴**

$$I_\gamma(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset I_\gamma(PN)$$

insieme di raggiungibilità

Studio della possibilità di riportarsi alla condizione iniziale

- esiste una sequenza di scatti $\mathbf{S}$ non vuota che, partendo dalla marcatura iniziale $\mathbf{x}_0$, riporta la rete nella marcatura iniziale $\mathbf{x}_0$?
- se esistono, è necessario che queste sequenze $\mathbf{S}$ siano associate ad un vettore delle occorrenze η, detto T–invariante, tale che

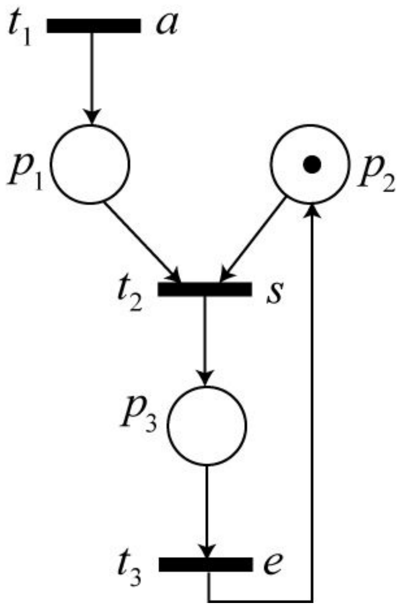
$$\boxed{\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\eta = \mathbf{x}_0}$$

- un T–invariante è una soluzione non banale del sistema lineare (la soluzione banale è non muoversi da $\mathbf{x}_0$)

$$\boxed{\mathbf{C}\eta = \mathbf{0}}$$

- un T–invariante è solo un *vettore delle occorrenze*: bisogna sempre verificare che esista una *sequenza di scatti* corrispondente
- la reversibilità della rete è una condizione più forte (implica poter ritornare allo stato iniziale da *qualunque* stato raggiungibile da $\mathbf{x}_0$)

esempio



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

vettore delle occorrenze per le sequenze di transizioni

$$\mathbf{C}\eta = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_2 - \eta_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \quad \Rightarrow \quad \eta = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$$

unica sequenza di scatto ammissibile

$t_1 t_2 t_3$
$t_1 t_3 t_2$
$t_2 t_1 t_3$
$t_2 t_3 t_1$
$t_3 t_1 t_2$
$t_3 t_2 t_1$

⇒ eseguendo un numero di servizi (*s*,*e*) pari al numero delle richieste *a* il sistema ritorna nella condizione iniziale con buffer vuoto e server libero

❑ reti di Petri temporizzate

Per introdurre utili informazioni temporali, si introduce una struttura di clock $\mathbf{v}_j$ per la generica transizione t_j

$$\mathbf{v}_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}, \ldots, v_{j,k}, \ldots\} \quad \text{con } v_{j,k} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Una rete di Petri temporizzata $TPN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0, \mathbf{V})$ è una rete di Petri PN con una struttura di clock $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_j$ tale che $t_j \in T_D\}$

⇒ insieme T partizionato in transizioni temporizzate (T_D) e non (T_0)

⇒ alla k-esima abilitazione, la transizione $t_j \in T_D$, scatta dopo $v_{j,k}$ unità di tempo

⇒ [k=1] la transizione è un'attività che richiede un tempo v_j per essere completata

⇒ [k=1] evoluzione tipica per una transizione t_j abilitata all'istante τ

in τ : token *tolti* dai posti d'ingresso di t_j

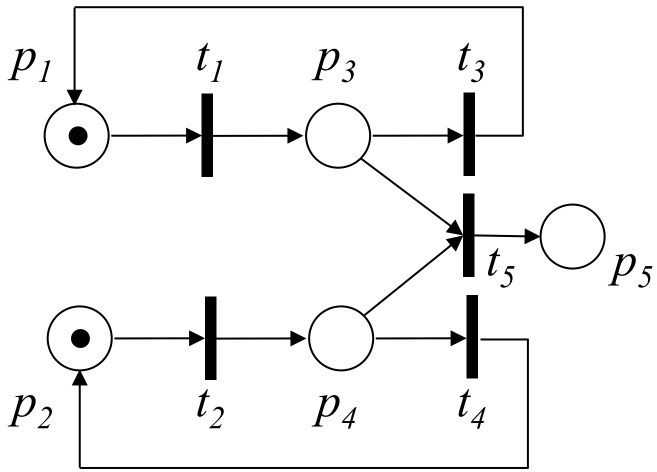
in $\tau + v_j$: token *messi* nei posti d'uscita di t_j

⇒ *varianti*: le durate possono avere una distribuzione di probabilità (rete stocastica); i posti possono essere temporizzati (come o invece delle transizioni); si possono definire degli intervalli di tempo $[v_{j,min}, v_{j,max}]$ ammissibili per l'attivazione, ...

⇒ per transizioni temporizzate in conflitto *effettivo*, ci possono essere diverse regole (ad esempio, [∗] = scatta quella associata ad un'unità di tempo v_j minore)

Uso della temporizzazione

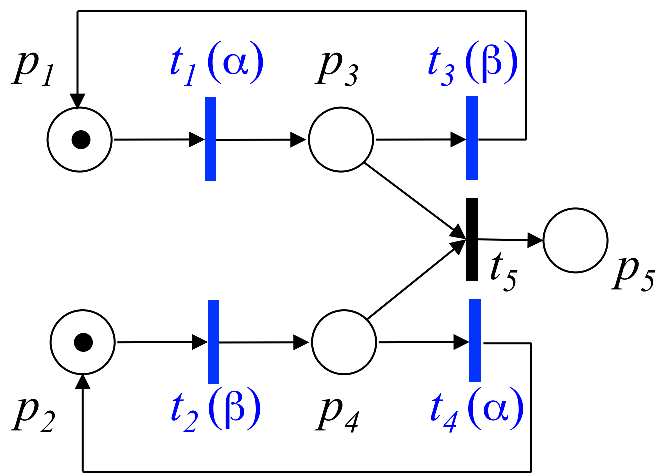
esempio: questa rete di Petri (ordinaria) può raggiungere una situazione di deadlock



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix};\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$$

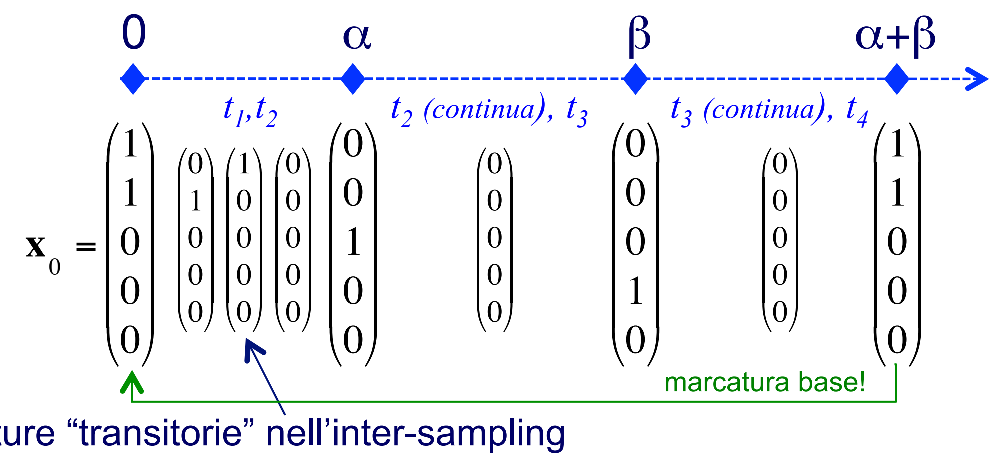
al primo scatto della transizione t_5 (il conflitto con t_3 e t_4 viene risolto con scelta **casuale**), la rete raggiunge la marcatura $\mathbf{x}_{dead} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$ dove si blocca

temporizzando in modo opportuno le transizioni, la TPN evita tale situazione e evolve in modo univoco e senza blocco (e la marcatura iniziale sarà reversibile)



$$\mathbf{V} = \{ v_1 = v_4 = \alpha,\ v_2 = v_3 = \beta \}$$ con arbitrari $\beta > \alpha > 0$

diagramma temporale di evoluzione della marcatura



Estensioni delle reti di Petri

altre estensioni (ad alto livello)

- si può distinguere la tipologia dei token (diverse informazioni/colore per ogni tipo)
  ⇒ reti di Petri colorate
- si possono introdurre altre condizioni logiche per lo scatto delle transizioni
  ⇒ ad esempio, con archi inibitori (la presenza di un token nel posto di ingresso collegato con un tale arco ad una transizione la disabilita comunque)
- si possono aggiungere vincoli di capacità su uno o più posti
- si possono aggiungere limiti sul numero di scatti totale di una o più transizioni
- ...

- il vantaggio comune a queste estensioni è quello di ottenere maggiore espressività (e compattezza) della rete usata come modello di un DEDS
- il limite comune è la maggiore difficoltà o impossibilità di verificare le proprietà della rete con metodi analitici (lo strumento della simulazione diventa essenziale)

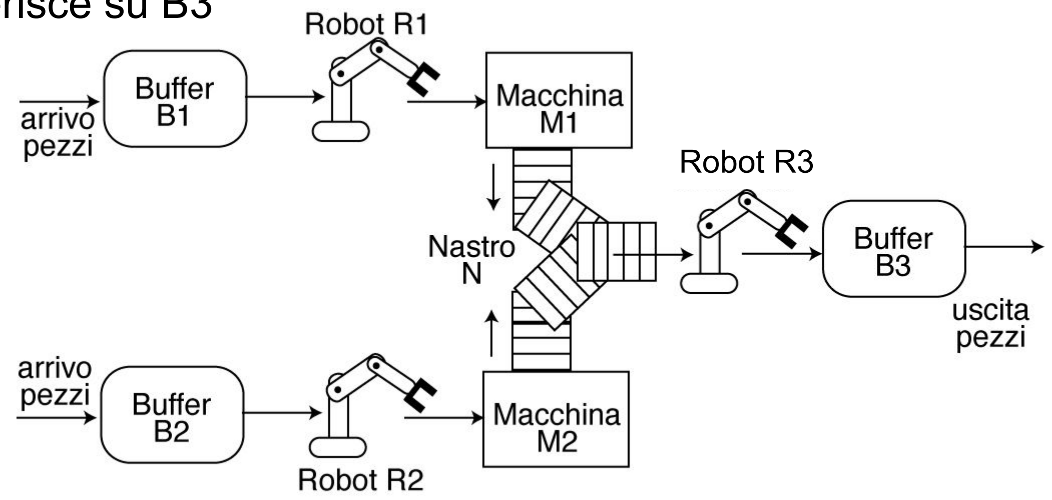
Modellistica con reti di Petri

Per rappresentare un sistema fisico guidato da eventi mediante una rete di Petri si possono seguire due possibili approcci, eventualmente combinati

- approccio fisico
  - si suddivide il sistema in sottosistemi elementari
  - si modellano tali sottosistemi con reti di Petri elementari
  - si compongono tali reti elementari
- approccio funzionale
  - si individuano le fasi logiche del funzionamento del sistema
  - si identificano le risorse fisiche che eseguono tali fasi
  - si allocano le fasi sulle risorse

esempio: impianto di produzione e movimentazione composto da

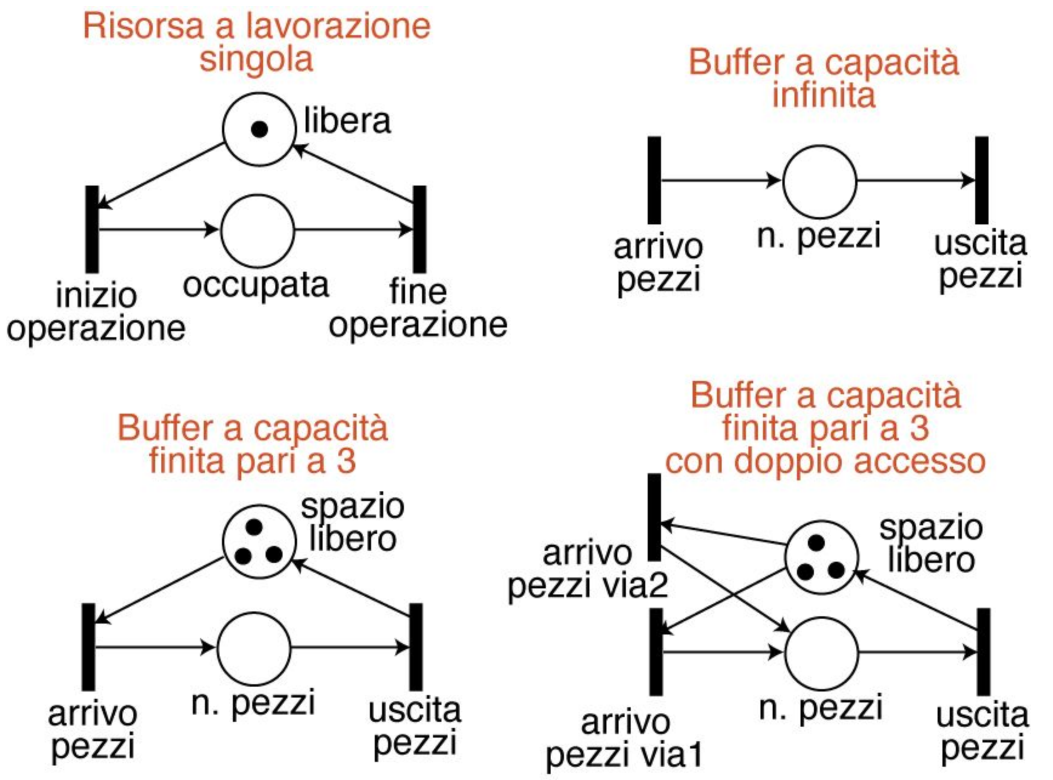
- tre magazzini di capacità infinita (B1, B2, B3)
- tre robot per il trasporto dei pezzi (R1, R2, R3)
- un nastro trasportatore di capacità pari a 3 (N)
- due macchine utensili che possono lavorare un pezzo alla volta (M1, M2)
- fasi del processo di lavorazione
  - i pezzi arrivano spontaneamente in B1 e B2
  - R1 preleva un pezzo alla volta da B1 e lo trasferisce su M1
  - R2 preleva un pezzo alla volta da B2 e lo trasferisce su M2
  - a lavorazione terminata M1 deposita il pezzo su N
  - a lavorazione terminata M2 deposita il pezzo su N
  - R3 preleva un pezzo alla volta da N e lo trasferisce su B3
  - i pezzi escono spontaneamente da B3



Modellistica fisica con reti di Petri

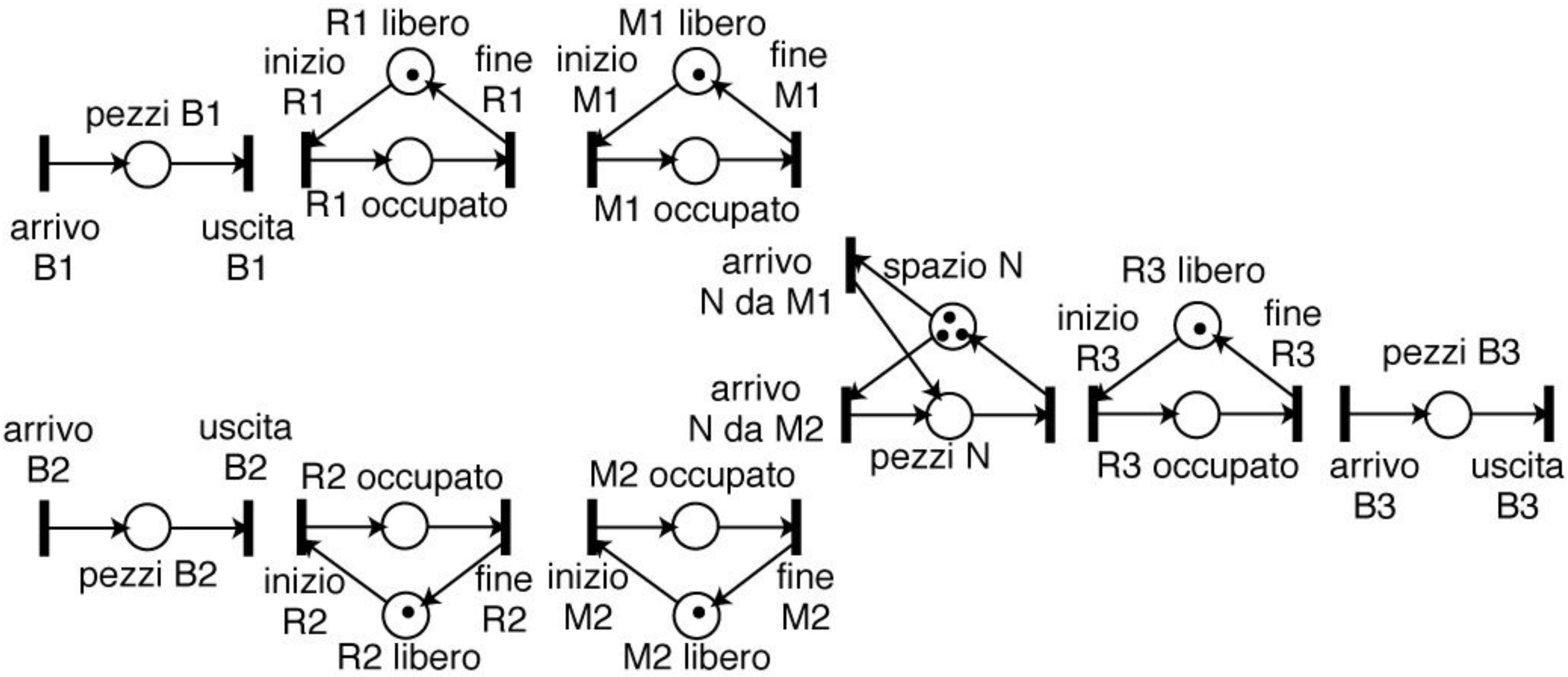
I componenti possono essere classificati come

- risorse: eseguono una fase di lavorazione
  - capacità: numero di lavorazioni in parallelo
- buffer: contengono un sottoprodotto di una fase di lavorazione
  - capacità: numero di sottoprodotti che possono essere contenuti



nell'esempio

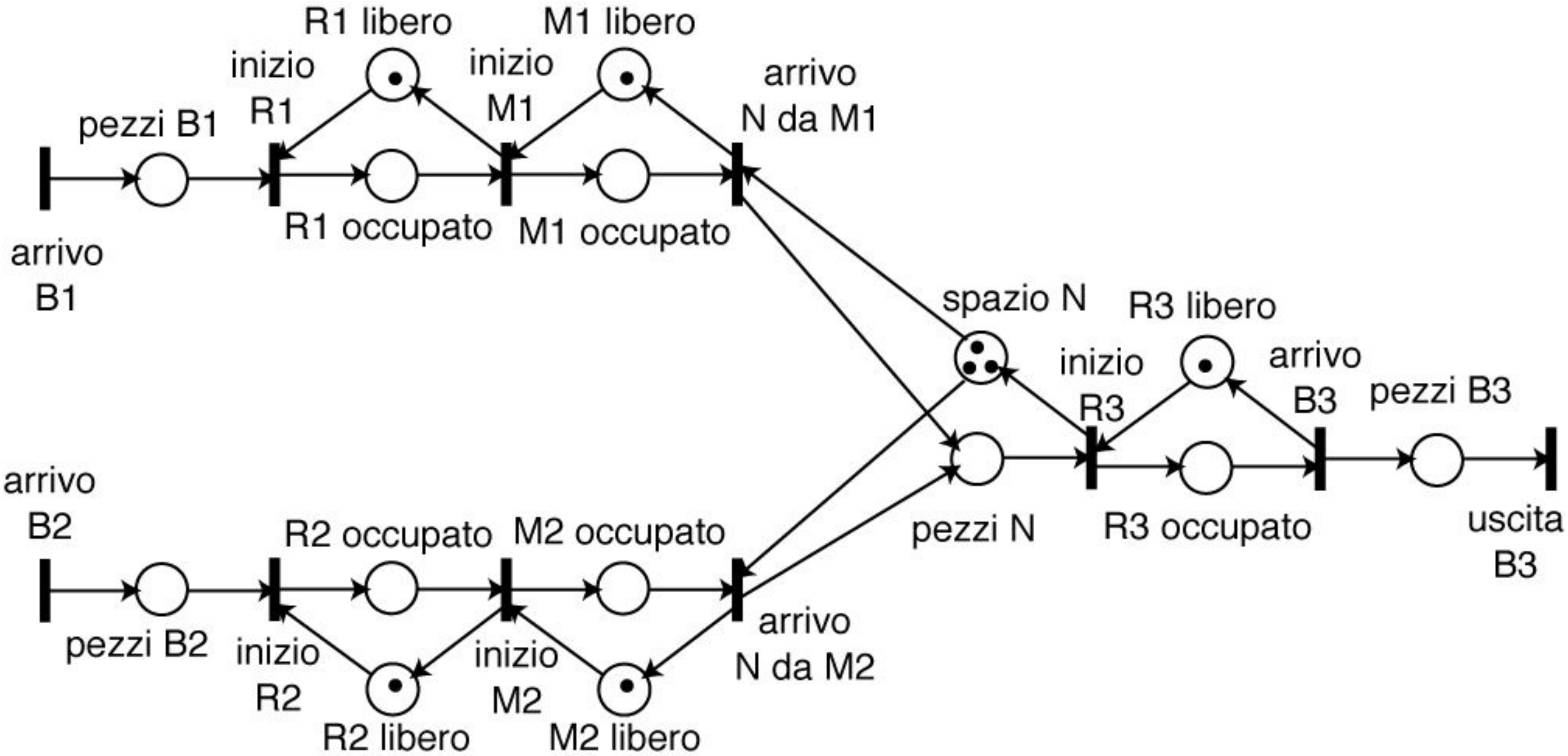
- B1, B2, B3: buffer illimitati
- N: buffer con capacità 3 a due vie di accesso
- M1, M2, R1, R2, R3: risorse a lavorazione singola



Modellistica fisica con reti di Petri

Come si possono comporre reti di Petri elementari?

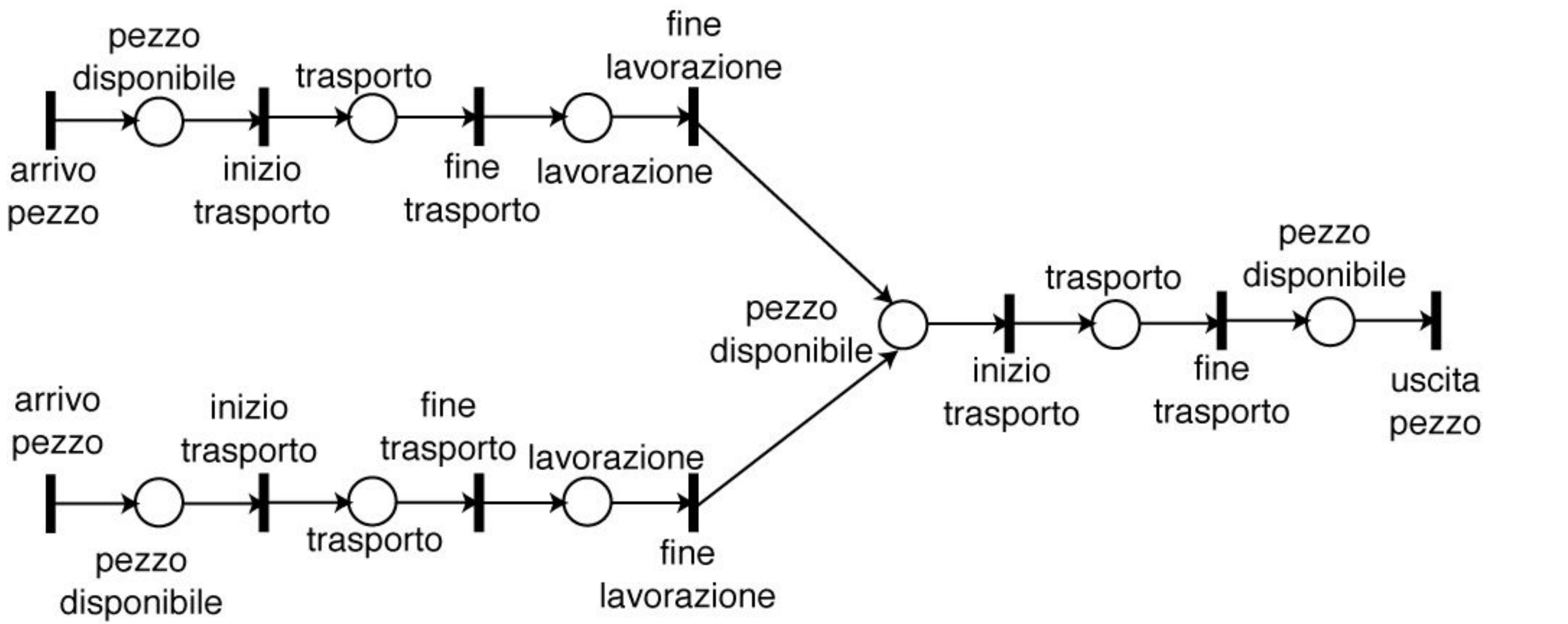
- facendo coincidere le transizioni
- esempio: la transizione di uscita dei pezzi dal buffer B1 coincide con la transizione di inizio lavoro di R1



Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le fasi logiche di lavorazione?

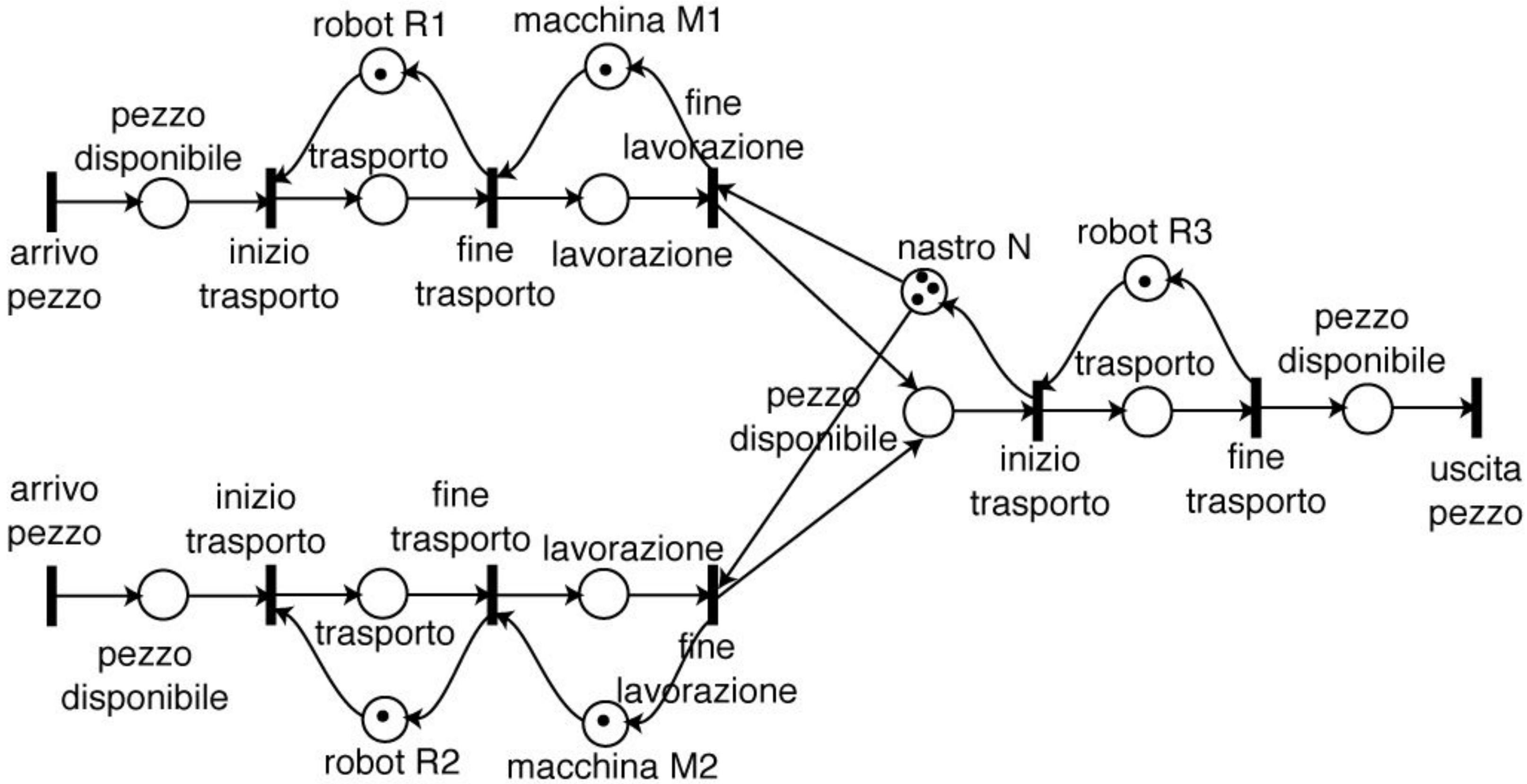
- sequenza di posti/transizioni
- un token in un posto indica la fase che si sta eseguendo



Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le risorse?

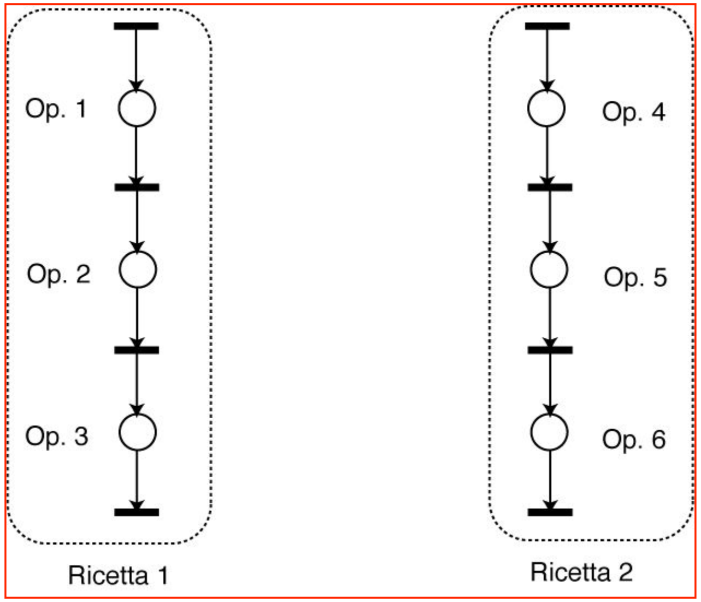
- un posto collegato alle transizioni di inizio/fine della fase di lavorazione
- il numero di token nel posto indica la capacità complessiva di lavorazione
- posti con infiniti token possono essere eliminati (capacità infinita)
- assenza di token indica l'impossibilità di compiere la lavorazione

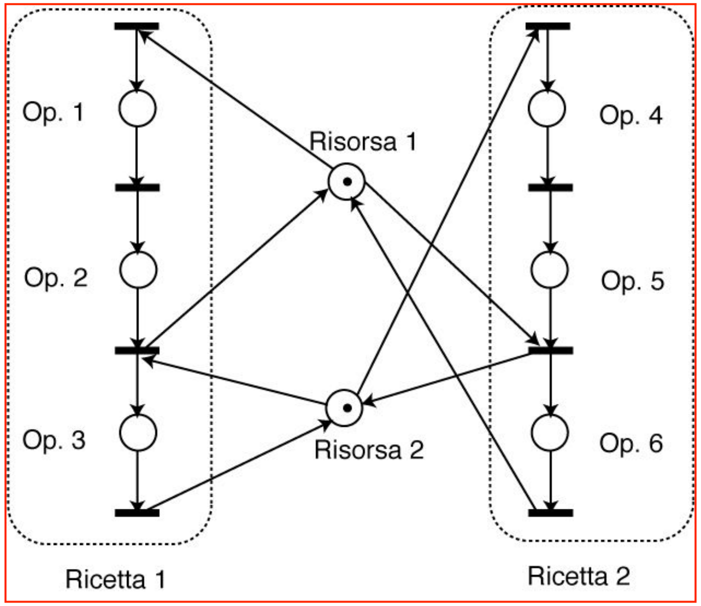


Modellistica funzionale con reti di Petri

Utili per la modellistica di **Flexible Manufacturing Systems** (FMS)

- più lavorazioni (dette anche ricette) possibili
- condivisione di risorse
- esempio
  - ricetta 1: sequenza di operazioni Op1-Op2-Op3
  - ricetta 2: sequenza di operazioni Op4-Op5-Op6
  - risorsa 1: utilizzata per eseguire la serie Op1-Op2 e Op6
  - risorsa 2: utilizzata per eseguire Op3 e la serie Op4-Op5



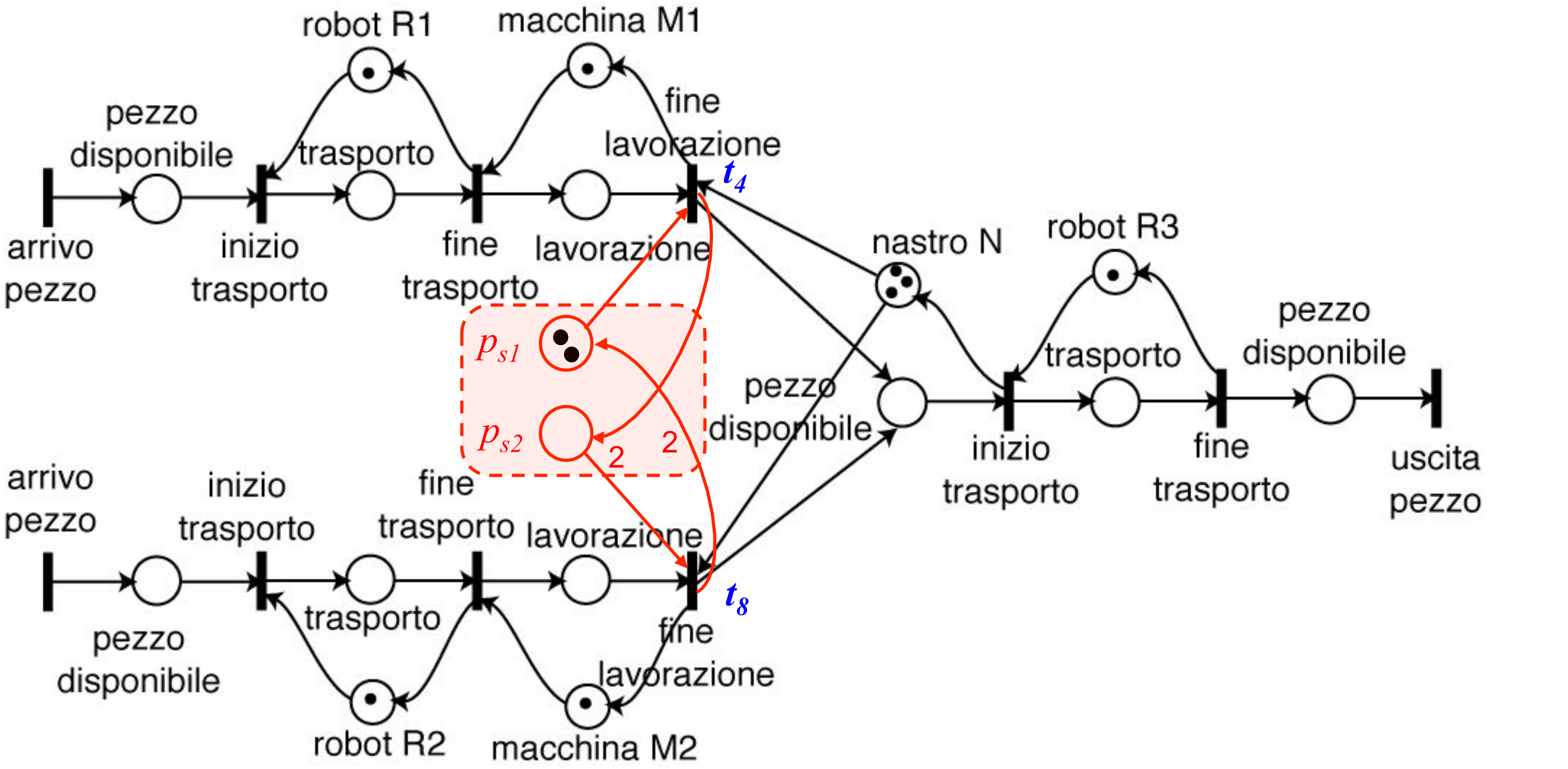


Controllo delle reti di Petri

- una rete di Petri può inglobare una struttura di controllo dell'evoluzione del sistema che agisce in base alla marcatura corrente (in **feedback**)
- la struttura di controllo è essa stessa esprimibile come una sotto-rete di Petri, seguendo uno dei paradigmi di progetto del **supervisore** per i DEDS
- si **registrano** alcuni eventi del sistema e, in base a questa informazione/misura, si **comandano** altri eventi ammissibili e se ne **disabilitano** altri
- scenario più complesso quando gli eventi non sono tutti "osservabili" (registrabili dal supervisore) e/o non sono tutti "controllabili" (comandabili dal supervisore)
- due tipici problemi di controllo di una PN
  - **problema degli stati proibiti:** per evitare una collisione su risorse condivise, alcune marcature vanno rese non ammissibili
  - **problema delle specifiche mutuamente esclusive:** per soddisfare i limiti di capacità del sistema, vanno imposti dei vincoli sulle marcature raggiungibili durante tutta l'evoluzione della rete
- approcci possibili al progetto del supervisore (in ipotesi di osservabilità delle transizioni)
  - mediante l'aggiunta diretta di **posti di controllo** P^c opportunamente marcati
  - basato sull'analisi di **P–invarianti** modificati (usando **posti monitor** P^m)

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

- si vuole posizionare sul nastro di uscita in maniera sequenziale e ripetitiva due pezzi lavorati dalla macchina M1 seguiti da un pezzo lavorato dalla macchina M2
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni; **PN supervisore** con **2 posti di controllo**



Controllo mediante invarianti

- si assume che il comportamento desiderato (specifiche mutuamente esclusive) sia descritto da vincoli, nella forma di **disequazioni lineari** sulle marcature del tipo

$$h^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq k \qquad \text{con} \quad h \in Z^{|P|},\ k \in N$$

- l'insieme delle marcature **ammissibili** sarà solo una parte di quelle raggiungibili

$$M(PN) = \left\{ \mathbf{x} \in N^{|P|} \text{ tale che } h^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq k \right\} \cap R(PN)$$

- tipiche situazioni modellate
  - i posti p_i, p_j e p_k rappresentano tre operazioni che usano la stessa risorsa

$$x(p_i) + x(p_j) + x(p_k) \leq 1$$

  - due posti p_i e p_j sono buffer che devono contenere lo stesso numero di pezzi

$$x(p_i) = x(p_j) \;\; \Leftrightarrow \;\; x(p_i) - x(p_j) \leq 0 \;\cap\; x(p_j) - x(p_i) \leq 0$$

    quindi le componenti del vettore h possono anche essere degli interi negativi

- in generale, ci saranno q disequazioni che le marcature ammissibili dovranno soddisfare contemporaneamente

$$h_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq k_i \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

Controllo mediante invarianti

- consideriamo prima il caso in cui tutte le transizioni siano **controllabili**: si possono inserire archi in ingresso a qualsiasi transizione (che partiranno da posti aggiunti ...)
- per soddisfare il generico vincolo *i*-esimo, si introduce un **posto monitor p_i^m** che aggiunge la **riga**

$$\boxed{C_i^m = -h_i^{\mathrm{T}}\mathbf{C}}$$

  alla matrice di incidenza $\mathbf{C}$ originale della rete, e a cui si dà la **marcatura iniziale**

$$\boxed{x_0(p_i^m) = k_i - h_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0}$$

- l'informazione nel vettore riga C_i^m è sufficiente per poter collegare il posto monitor p_i^m alle transizioni della rete (per costruzione, il posto monitor non si troverà mai in ingresso e in uscita alla stessa transizione)
- ripetute queste operazioni per tutti i q vincoli, è facile mostrare (vedi testo p. 437) che esistono q nuovi P–invarianti indipendenti della matrice di incidenza *estesa* $\mathbf{C}'$ ottenuta con le q righe aggiunte dai posti monitor
- le relative *equazioni di invarianza* implicano poi che ogni marcatura raggiungibile della rete controllata soddisfa tutti i vincoli del problema (quindi è ammissibile) **se e solo se** la marcatura iniziale $\mathbf{x}_0$ è già ammissibile (allora è anche $x_0(p_i^m) \geq 0$)

Controllo mediante invarianti

- nel caso in cui ci siano transizioni **non controllabili** (un sottoinsieme T_{uc} di T) occorre verificare che nel precedente progetto *ciascun* posto monitor del supervisore non disabiliti *nessuna* transizione non controllabile, ossia

$$x(p_i^m) \geq w(p_i^m, t_j) \quad \forall t_j \in T_{uc}$$

- una condizione **sufficiente** affinché ciò sia vero è che *nessuna* delle transizioni non controllabili abbia posti monitor in ingresso

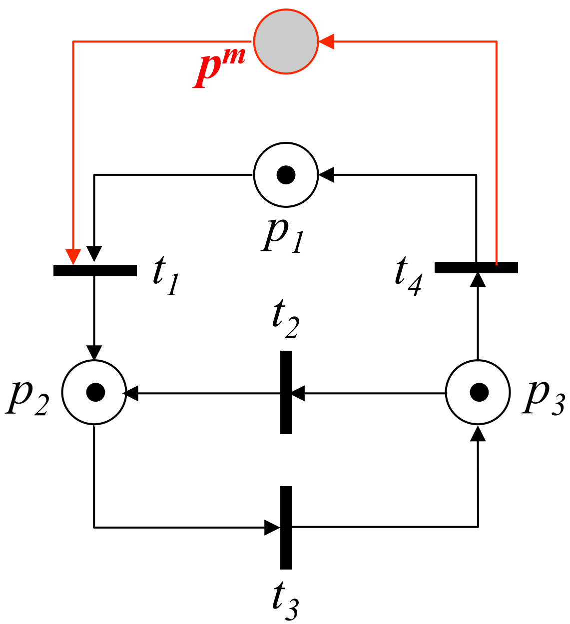
$$\forall t_j \in T_{uc} \Rightarrow p_i^m \notin I(t_j), \; i = 1, 2, \ldots, q$$

- se alcuni vincoli risultano non ammissibili a causa dell'ipotesi di non controllabilità, esistono allora metodi per definire supervisori aventi monitor approssimati o sub-ottimi...

Uso dei posti monitor

esempio

- alla PN in figura (3 posti, 4 transizioni) si vuole imporre il vincolo ***x*(*p*$_2$) + *x*(*p*$_3$) ≤ 2** tramite un **supervisore** con **1 posto monitor**



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la marcatura iniziale **soddisfa il vincolo**

$$R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

queste marcature raggiungibili **non sono ammissibili** per il vincolo

$$\boxed{h^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} \le 2 = k}$$

vincolo

$$\boxed{\begin{aligned} C^m &= -h^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ x_0^m &= k - h^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0 = 2 - 2 = 0 \end{aligned}}$$

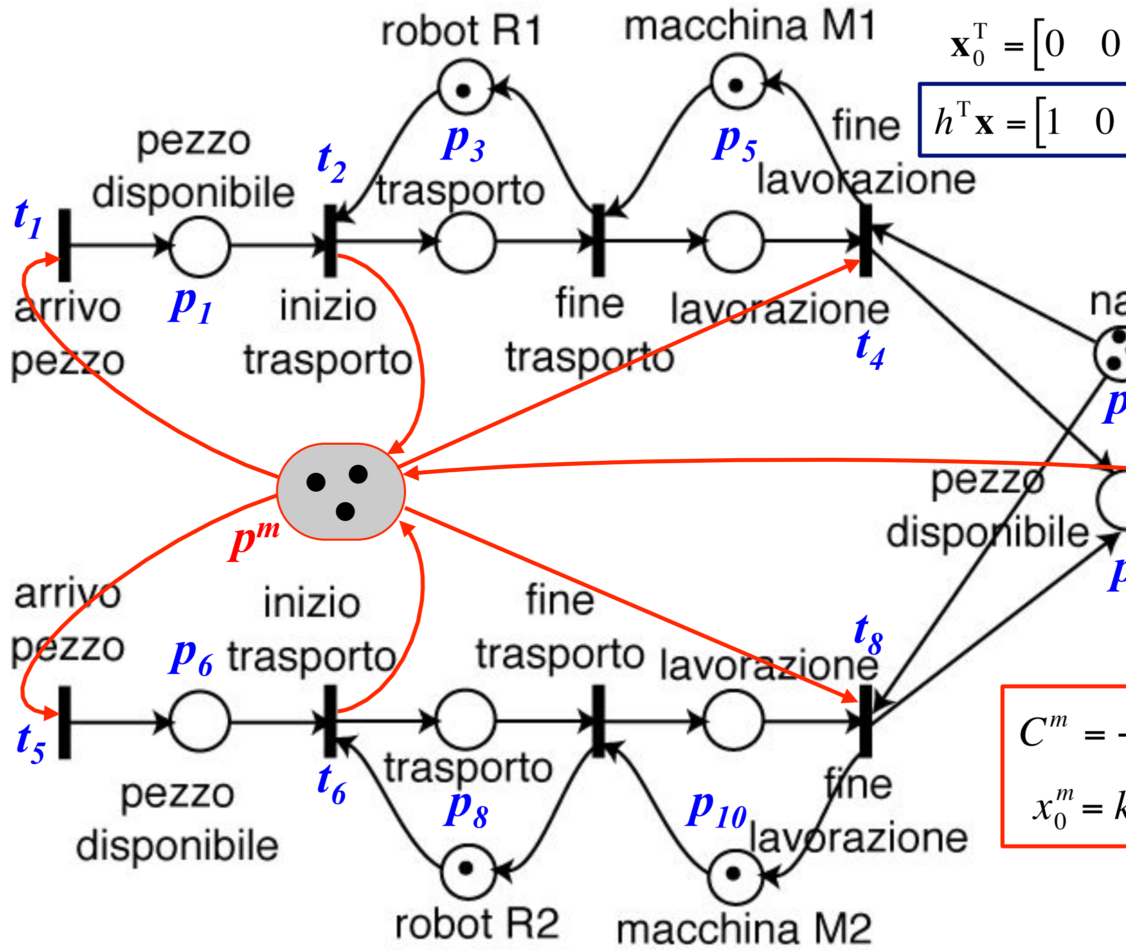
equazioni di progetto del monitor

l'**assenza** di marca iniziale nel posto monitor disabilita la t_1 finché non scatta t_4

Uso dei posti monitor

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

- si vuole evitare di fare arrivare altri pezzi ai buffer di ingresso dell'impianto quando il nastro di uscita è già saturo (con tre pezzi): si vuole quindi imporre il vincolo $x(p_1) + x(p_6) + x(p_{12}) \leq 3$
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni $\Rightarrow$ $\mathbf{C}$:(15×11); **PN supervisore** con **1 posto monitor**



$$\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{h^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} \leq 3 = k}$$

vincolo

$$C^m = -h^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

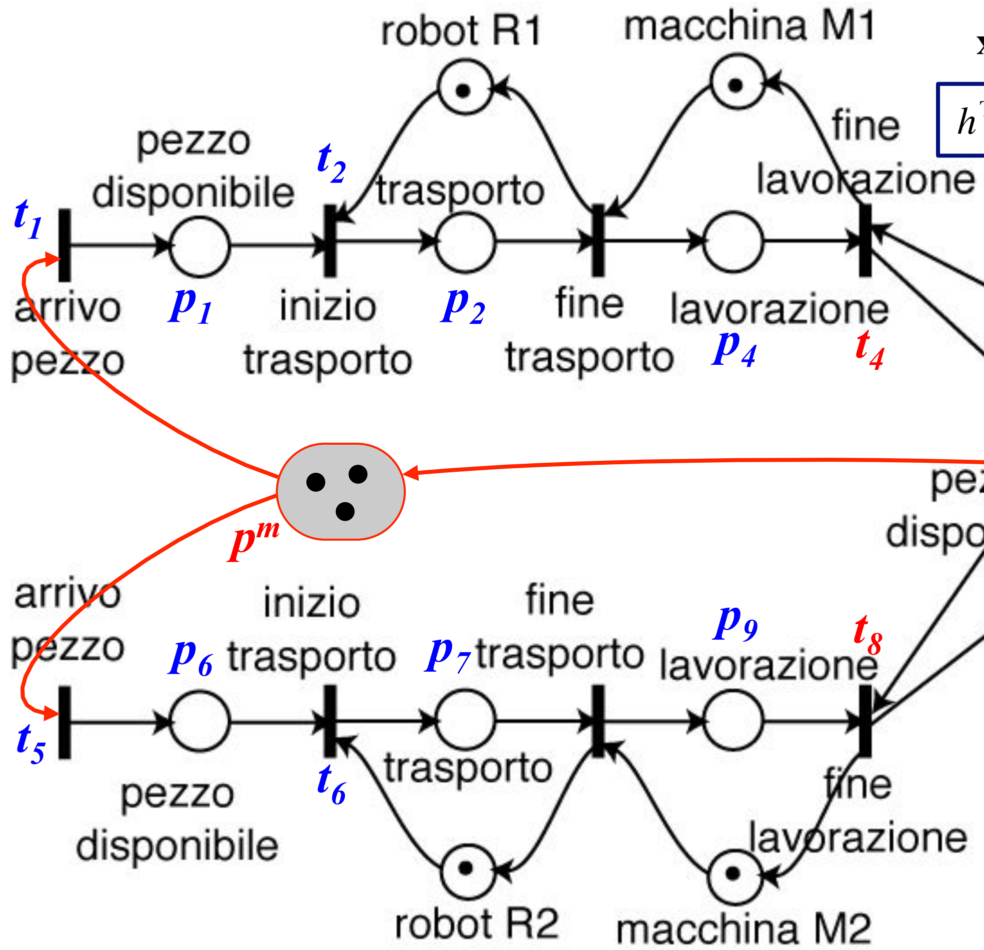
$$x_0^m = k - h^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0 = 3 - 0 = 3$$

equazioni di progetto del monitor

Uso dei posti monitor

esempio (cont.): impianto di produzione e movimentazione

- se le transizioni t_4 e t_8 sono **non controllabili**, la precedente soluzione non è realizzabile e va modificata; scegliamo che il numero totale di pezzi e semilavorati presenti nell'impianto fino al nastro sia limitato dalla sua capacità: $x(p_1)+x(p_2)+x(p_4)+x(p_6)+x(p_7)+x(p_9)+x(p_{12}) \leq 3$



$$\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{h^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} \leq 3 = k}$$

nuovo vincolo

$$C^m = -h^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0^m = k - h^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0 = 3 - 0 = 3$$

nuove equazioni di progetto del monitor ora realizzabile...

Esistono vari strumenti software per la simulazione e l'analisi di PN

- PIPE2 (Imperial College London, http://pipe2.sourceforge.net)
  - è gratuito!!
  - tratta reti di Petri ordinarie, ma anche stocastiche (Generalized Stochastic Petri Nets, GSPN)
  - gestisce reti con migliaia di stati
  - fornisce molti strumenti di analisi
  - ha un'interfaccia 'friendly' e intuitiva
  - open source!!
  - platform-independent (Java)
  - ...qualche bug
- lista di PN tools & freeware + Java applets

www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets