



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

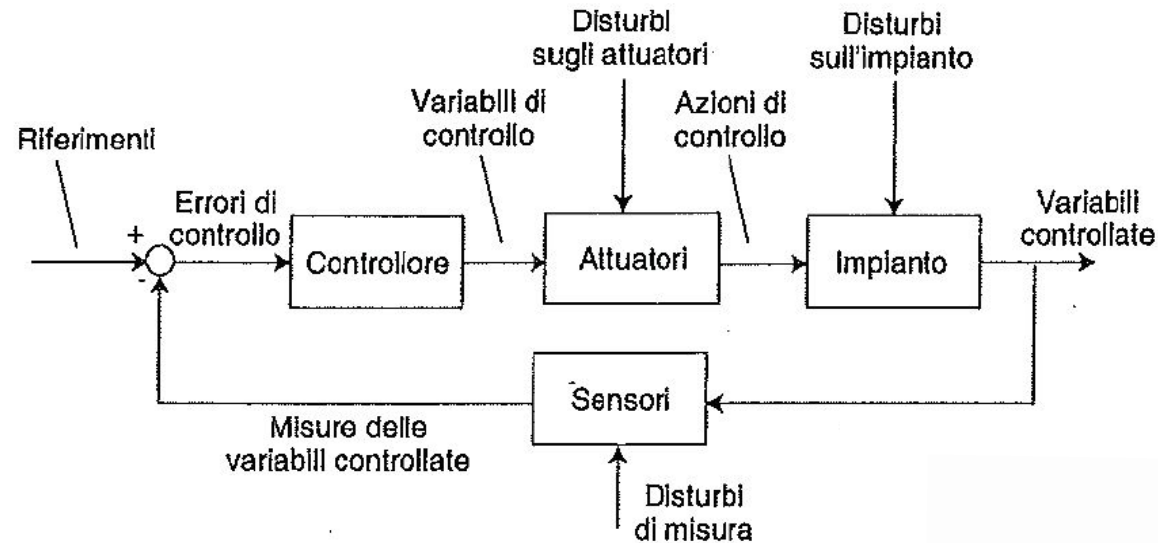
Regolatori PID digitali

Automazione

18/11/2015

Alessandro De Luca

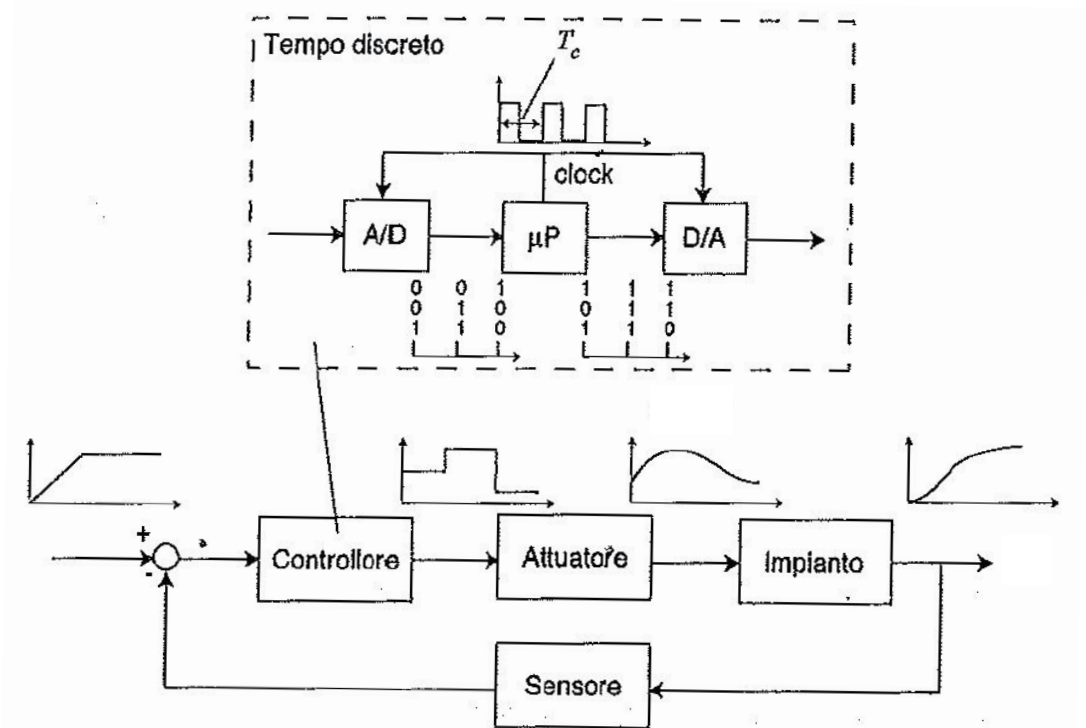
Sistema di controllo digitale



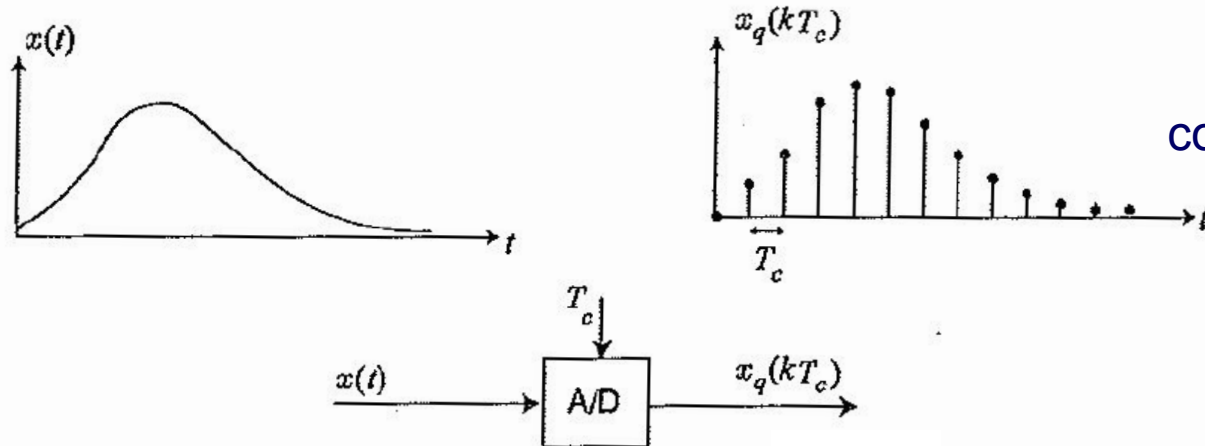
schema generale MIMO
di controllo in feedback

schema di controllo **digitale**

- qui, caso scalare (SISO)
- con passo di campionamento T_c
- con convertitori A/D e D/A
- segnali a tempo continuo e discreto
- utilizza un microprocessore (con codifica binaria) \Rightarrow digitale

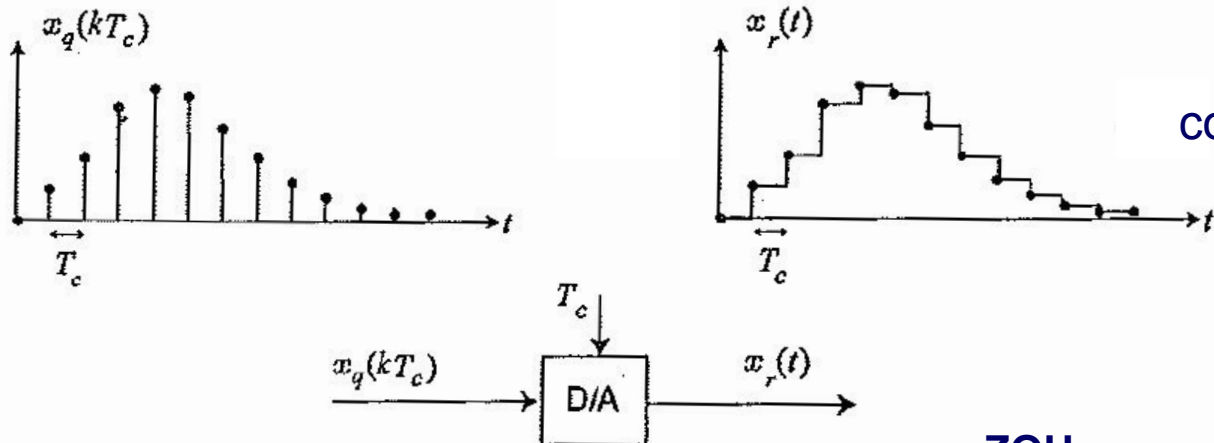


Campionamento e ricostruzione



conversione **analogico-digitale (A/D)**:
segnale campionato ogni T_c
e quantizzato in livelli
(per troncamento o arrotondamento)

$$x_k = x(kT_c) \quad [= x_q(kT_c)]$$

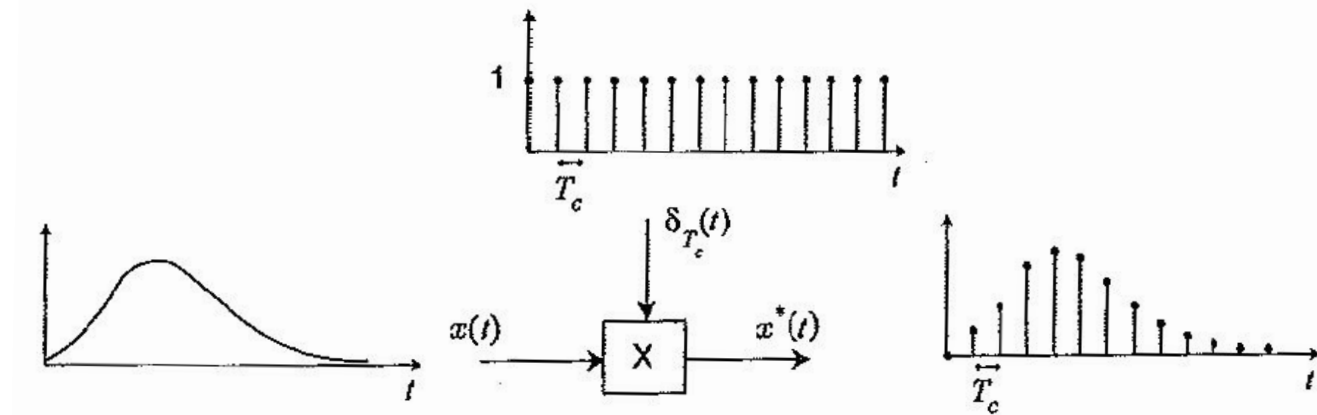


conversione **digitale-analogica (D/A)**:
segnale ricostruito
da un organo di tenuta
(qui, di ordine zero = **ZOH**)

ZOH =
Zero-Order Hold

$$x_r(t) = x(kT_c), \quad t \in [kT_c, (k+1)T_c)$$

Campionamento a impulsi



- campionamento = segnale a tempo continuo \times treno di impulsi di Dirac

$$x^*(t) = x(t)\delta_{T_c}(t) \quad \delta_{T_c}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$

- dallo spettro $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$
- e dallo sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi di Dirac
- l'andamento spettrale del segnale campionato $x^*(t)$ è

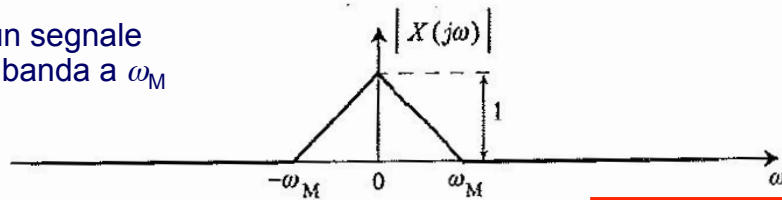
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_c)$$

il tempo di campionamento
è un fattore di scala!

$\omega_c = 2\pi/T_c$
pulsazione di
campionamento

Teorema di Shannon e aliasing

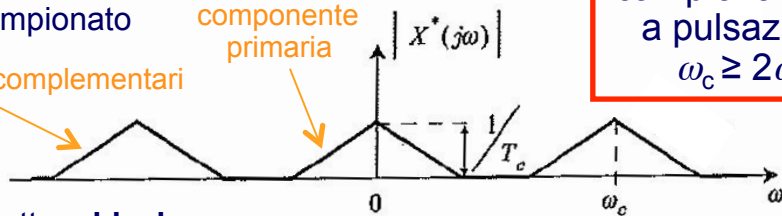
spettro di un segnale
limitato in banda a ω_M



spettro del relativo
segnale campionato

componenti complementari

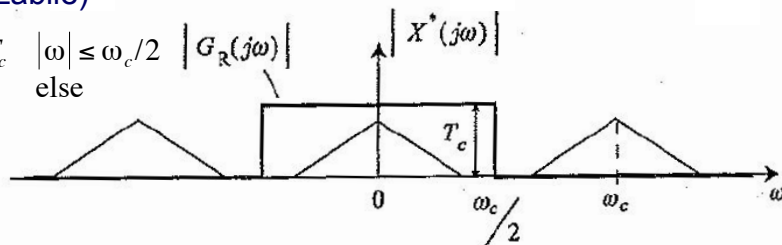
componente
primaria



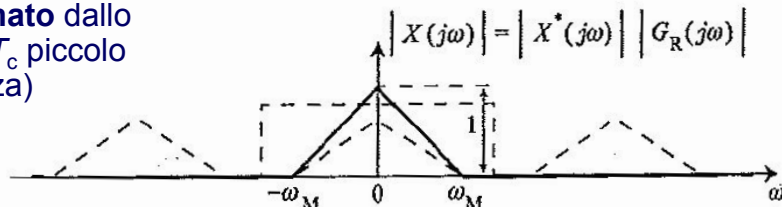
campionamento
a pulsazione
 $\omega_c \geq 2\omega_M$

filtro ricostruttore **ideale**
(non realizzabile)

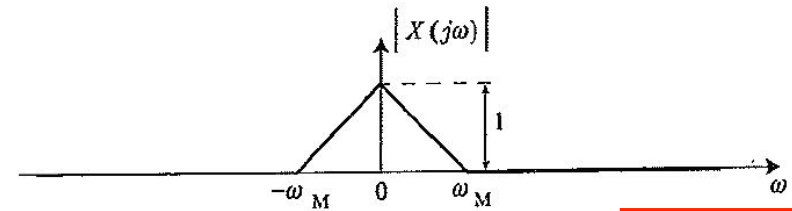
$$G_R(j\omega) = \begin{cases} T_c & |\omega| \leq \omega_c/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



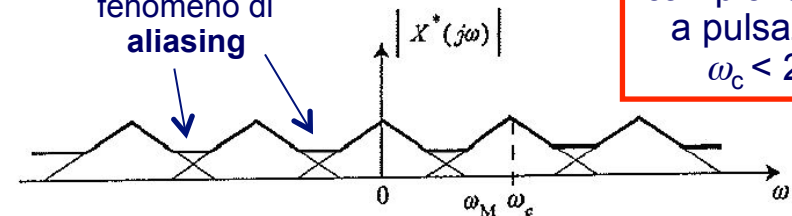
comportamento
approssimato dallo
ZOH (per T_c piccolo
a sufficienza)



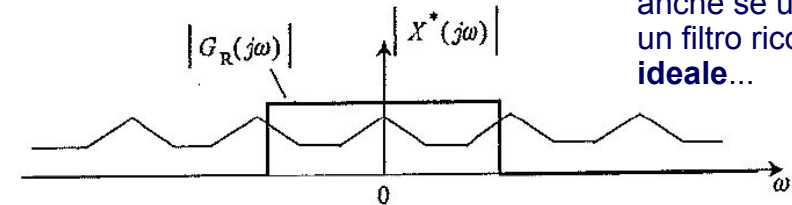
ricostruzione del segnale (idealmente) perfetta...
Teorema di Shannon



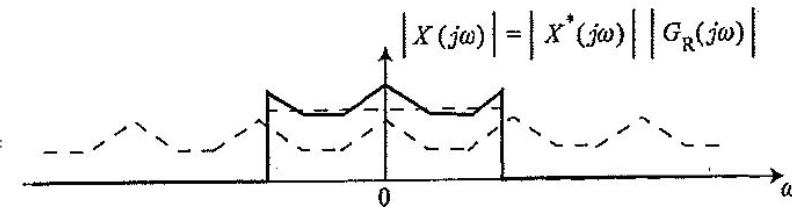
fenomeno di
aliasing



campionamento
a pulsazione
 $\omega_c < 2\omega_M$



anche se usassimo
un filtro ricostruttore
ideale...

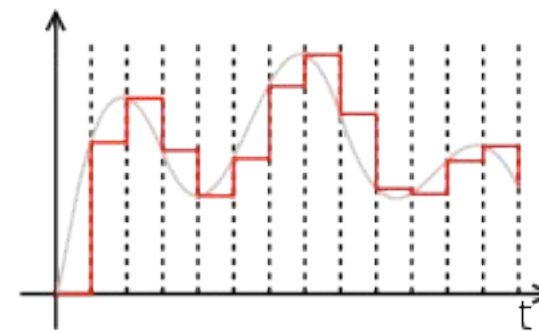
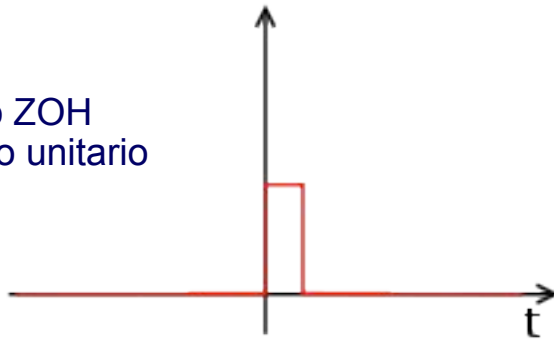


...ricostruzione del segnale (sempre) corrotta
Teorema di Shannon

conclusione: i segnali hanno sempre componenti a frequenza sufficientemente alta (rumore)
⇒ **filtraggio anti-aliasing**

Ricostruzione: Zero-Order Hold

risposta dello ZOH
ad un impulso unitario
in ingresso



(differenza di due
gradini unitari, con
il secondo ritardato)

$$h_0(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - T_c)$$



(nel dominio della
frequenza)

$$H_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_c} = \frac{1 - e^{-j\omega T_c}}{j\omega}$$

$$\Rightarrow H_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_c} = \frac{e^{j\omega T_c/2} - e^{-j\omega T_c/2}}{j\omega} e^{-j\omega T_c/2} = T_c \frac{\sin(\omega T_c/2)}{\omega T_c/2} e^{-j\omega T_c/2} \Rightarrow |H_0(j\omega)| = T_c \left| \frac{\sin(\omega T_c/2)}{\omega T_c/2} \right| \approx T_c \quad \text{per } \omega T_c \ll 1$$

- lo ZOH approssima il ricostruttore (recuperando la scala!) per T_c sufficientemente piccolo
- lo ZOH introduce nell'anello di controllo un ritardo pari a $T_c/2$, con problemi indotti di instabilità

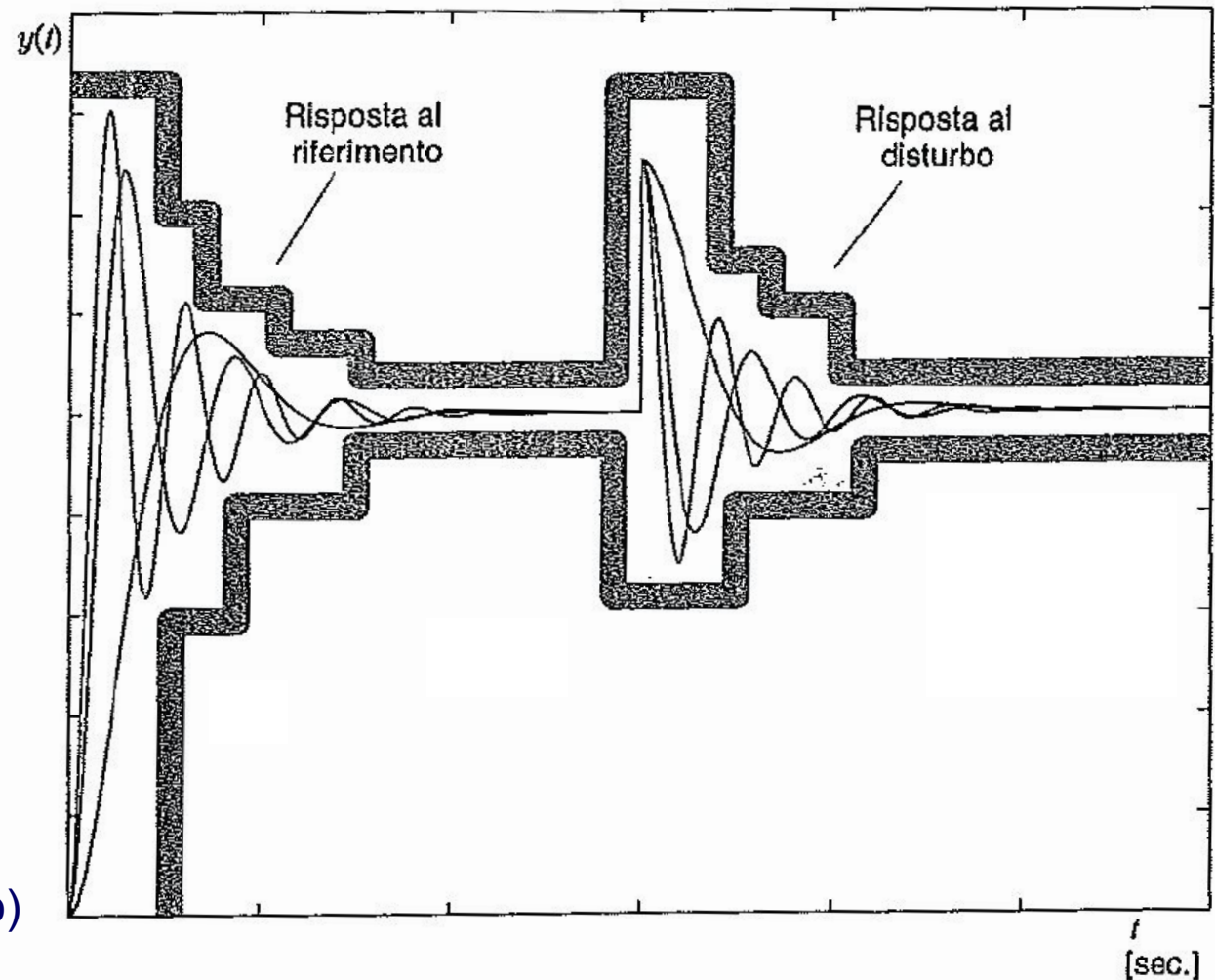
Scelta del passo di campionamento

- T_c sufficientemente piccolo \Rightarrow evita perdita di informazione e instabilità
- T_c non troppo piccolo \Rightarrow cresce il costo computazionale (vincoli real time)

$$\alpha\omega_M \leq \omega_c \leq 10\alpha\omega_M \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{5\alpha\omega_M} \leq T_c \leq \frac{2\pi}{\alpha\omega_M} \quad \begin{array}{l} \alpha \in [5 \div 10] \\ \text{parametro di progetto} \end{array}$$

Specifiche nel progetto di controllo

- stabilità asintotica !
- prestazioni statiche (errori a regime permanente)
- prestazioni dinamiche (sul transitorio)
- spesso sulla risposta a gradino (risposta indiciale), con legami da/per la risposta armonica
- specifiche riferimento-uscita
- specifiche disturbo-uscita
- sforzo di controllo
- limiti fisici (attuatori)
- realizzazione digitale (passo di campionamento e altro)

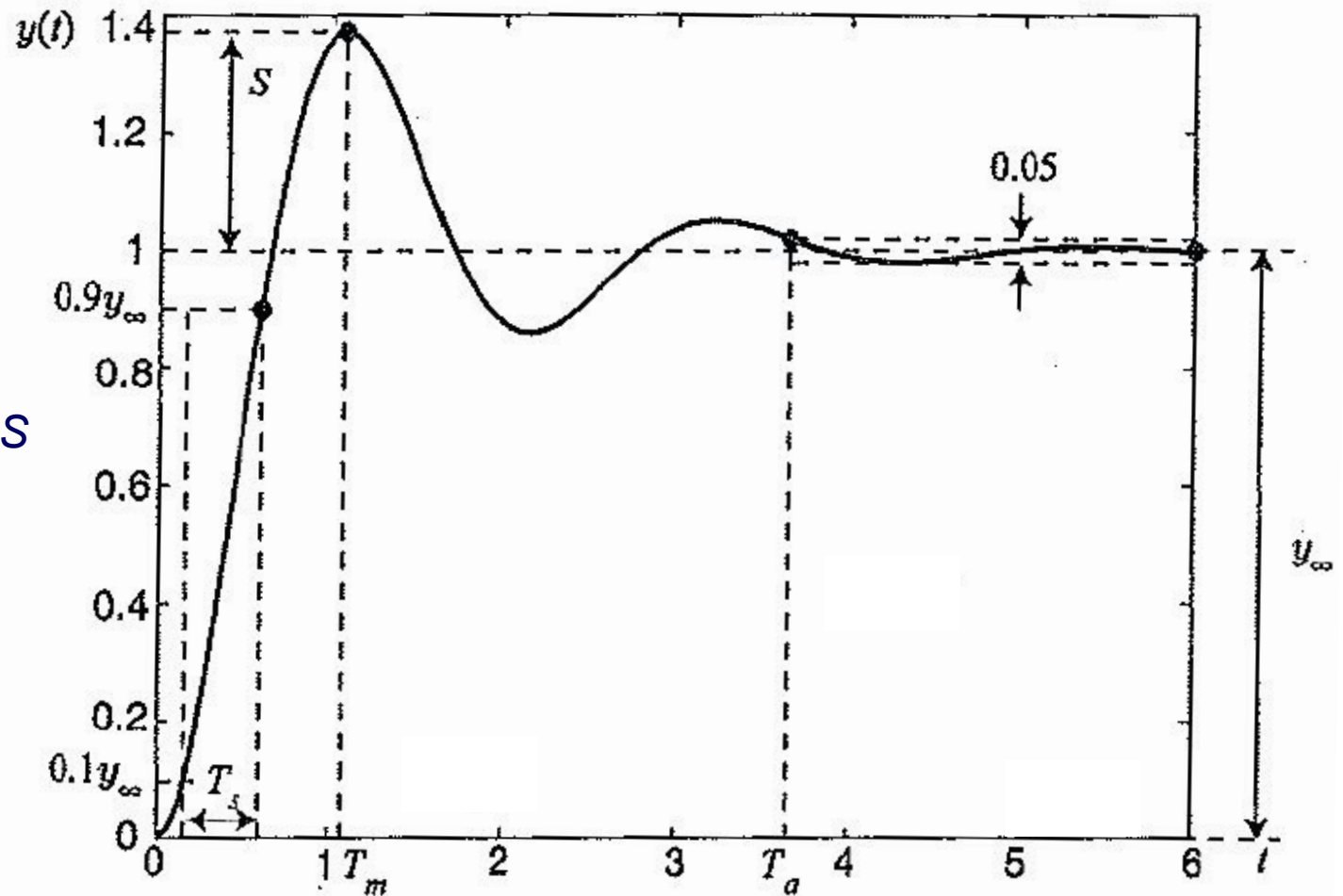


Specifiche sulla risposta indiciale

- tempo di salita T_s
(da 10% al 90% del regime)
- tempo di assestamento T_a
(errore inferiore al 3-5%)
- massima sovraelongazione S

$$S = \frac{y(T_m) - y_\infty}{y_\infty}$$

- istante di massima sovraelongazione T_m



□ Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa (sull'errore)

- ➔ soluzione industriale standard: oltre il 95% dei dispositivi di controllo in uso, per lo più di tipo digitale, hanno una legge di controllo PID
- ➔ molteplici versioni e varietà di prodotti, differenti per feature aggiuntive
- ➔ semplice taratura dei parametri (tuning), ora spesso automatica
- ➔ facile interpretazione dei termini/effetti nella legge di controllo

$$e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$$

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

due espressioni
equivalenti del PID
(in forma analogica)

Regolatore PID digitale

discretizzazione con passo T_c delle azioni del PID sull'errore $e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$

$$K_p e(t) \Rightarrow K_p e(kT_c) = K_p e_k$$

$$K_p \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{K_p}{T_i} T_c \sum_{j=0}^k e_j$$

integrazione rettangolare **in avanti**
(detta anche di Eulero a sinistra)

$$K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow K_p T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$$

derivazione **all'indietro** (backward)

$$u_k = K_p e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=0}^k e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1})$$

forma **di posizione** del PID digitale

$$u_{i,k} = u_{i,k-1} + \frac{K_p T_d}{T_i} e_k$$

$$u_k = K_p e_k + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1}) + u_{i,k}$$

implementazione **ricorsiva** della
forma **di posizione** del PID digitale

Regolatore PID digitale

$$u_k = K_p e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=0}^k e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - e_{k-1})$$

facendo la **differenza** di due campioni di controllo successivi...

$$u_{k-1} = K_p e_{k-1} + \frac{K_p T_c}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e_j + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_{k-1} - e_{k-2})$$

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$$

$$= K_p (e_k - e_{k-1}) + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + \frac{K_p T_d}{T_c} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$$

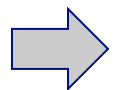
$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k$$

forma **di velocità** del PID digitale

introducendo l'**operatore di ritardo** $z^{-1} = 1/z$ (di un passo T_c) ... $y_{k-1} = z^{-1} y_k$

$$(1 - z^{-1}) u_k = K_p (1 - z^{-1}) e_k + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + \frac{K_p T_d}{T_c} (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) e_k$$

$\nearrow = (1 - z^{-1})^2$



$$u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p}{T_c} T_d (1 - z^{-1}) \right] e_k = PID(z) e_k$$

Derivata filtrata in banda...

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

il termine derivativo puro del PID
non è realizzabile

$$u(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d s \right) e(s) = \frac{K_p \left((1/T_i) + s + T_d s^2 \right)}{s} e(s)$$

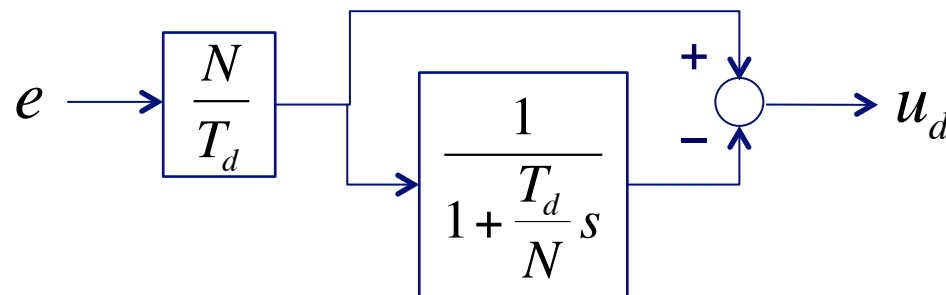
funzione di trasferimento
impropria (non causale)

$$K_p T_d s \Rightarrow K_p T_d \frac{s}{1 + (T_d / N) s}$$

aggiunta di un polo in alta frequenza
(la derivazione viene filtrata in banda)

si considerano N campioni a tempo discreto con $5 \leq \frac{T_d}{N} \leq 20$

realizzazione solo
con blocchi "causali"



...e sua realizzazione digitale

$$u_d(s) = K_p T_d \frac{s}{1 + \frac{T_d}{N} s} e(s)$$

$$\left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) u_d(s) = K_p T_d s e(s)$$

derivate realizzate con le differenze **all'indietro**

$$u_{d,k} + \frac{T_d}{N} \frac{u_{d,k} - u_{d,k-1}}{T_c} = K_p T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$$

$$\left(1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}\right) u_{d,k} = \frac{K_p T_d}{T_c} (1 - z^{-1}) e_k$$

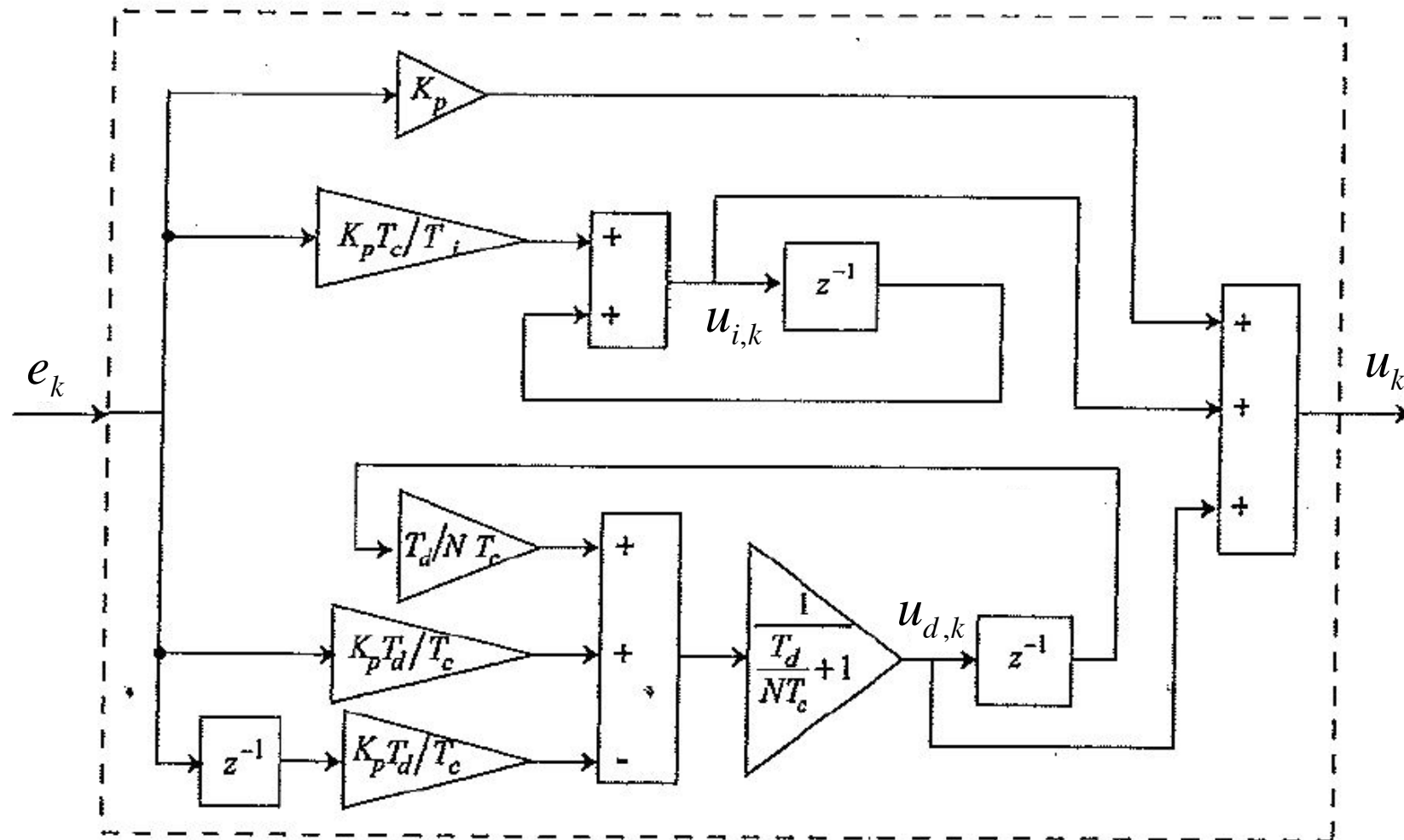
$$u_{d,k} = \frac{1}{1 + \frac{T_d}{NT_c}} \left[\frac{T_d}{NT_c} u_{d,k-1} + \frac{K_p T_d}{T_c} e_k - \frac{K_p T_d}{T_c} e_{k-1} \right]$$

$$u_{d,k} = \frac{\frac{K_p T_d}{T_c} (1 - z^{-1})}{1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}} e_k$$

$$\Rightarrow u_{i,k} = u_{i,k-1} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k \quad \Rightarrow u_k = K_p e_k + u_{i,k} + u_{d,k}$$

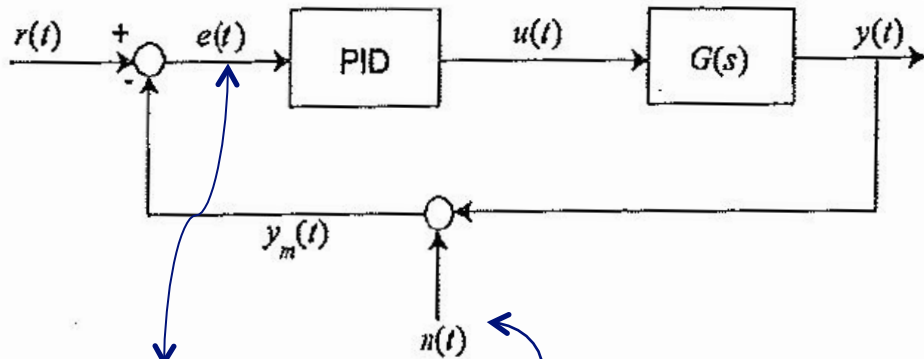
$$\Rightarrow u_k = \left[K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{T_c}{1 - z^{-1}} + \frac{K_p T_d}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{T_d}{NT_c} - \frac{T_d}{NT_c} z^{-1}} \right] e_k = PID^*(z) e_k$$

Regolatore PID* digitale

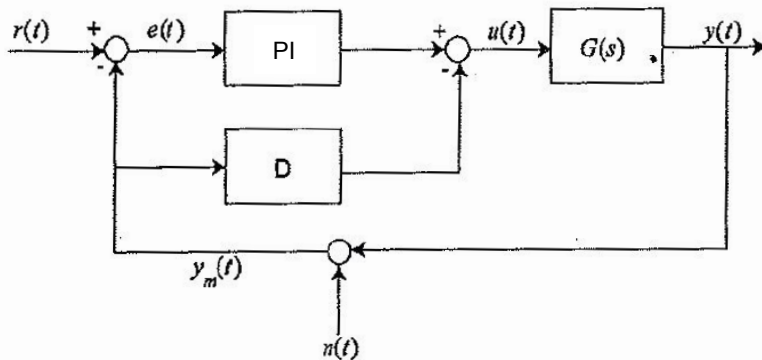


controllore PID digitale con derivata filtrata in banda = PID*

Schema realizzativi del PID



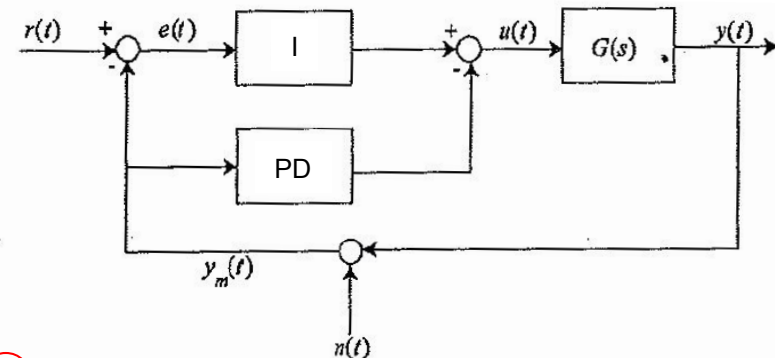
quando $e(t) \approx 0$, a causa dei rumori di misura il rapporto S/N peggiora



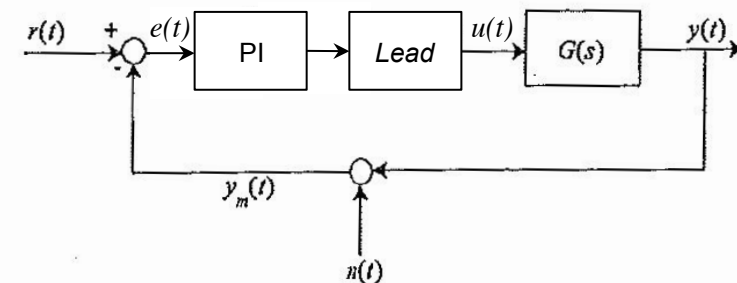
② azione **derivativa** calcolata solo **sull'uscita** (per riferimento costante a lungo o a tratti): evita "spikes" dovuti a variazioni di r a gradino

$$r = \text{cost} \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = -\frac{dy(t)}{dt}$$

① schema **standard** con tutte le azioni P+I+D sull'errore



③ azione **P+D** calcolata **sull'uscita** (il solo termine integrale recupererà l'errore): evita saturazioni da salto a gradino del riferimento

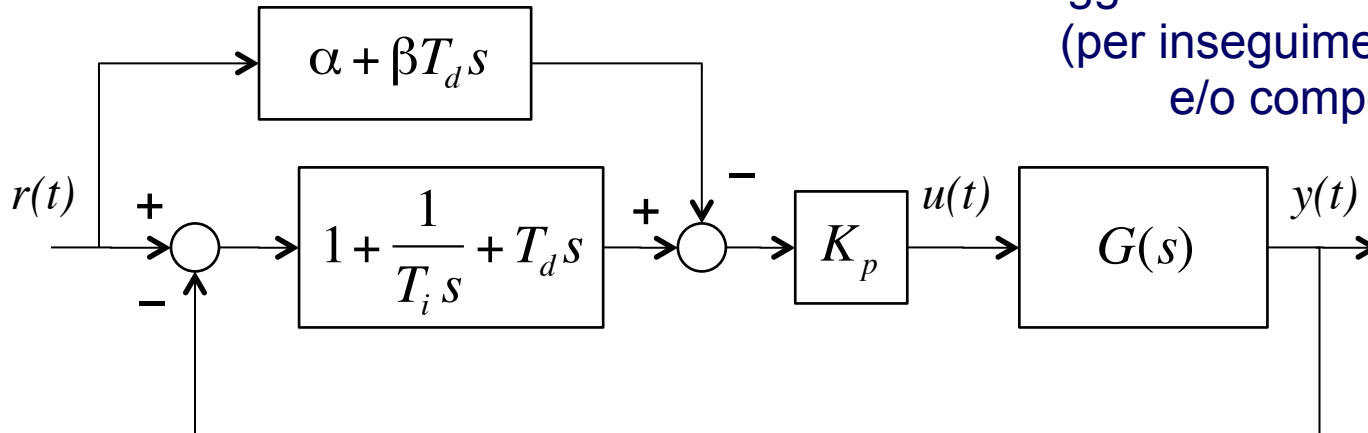


④ azione **derivativa** assimilata a quella di una rete **anticipatrice** opportuna: facilita il tuning del PID con le regole del "loop shaping" in frequenza

Schema PID con feedforward

schema a **due gradi** di libertà (α e β)

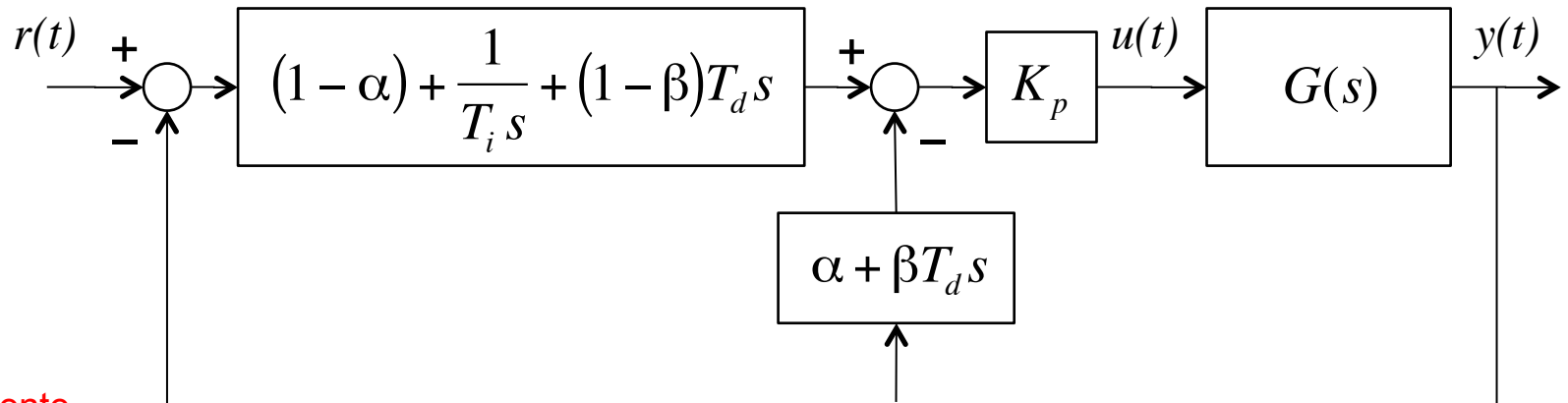
aggiunta di un'azione di **feedforward (ffw)**
(per inseguimento di riferimento variabile
e/o compensazione di disturbi)



schema **equivalente**
con **sole** azioni di **feedback (fbk)**
(dall'errore e dall'uscita misurata)

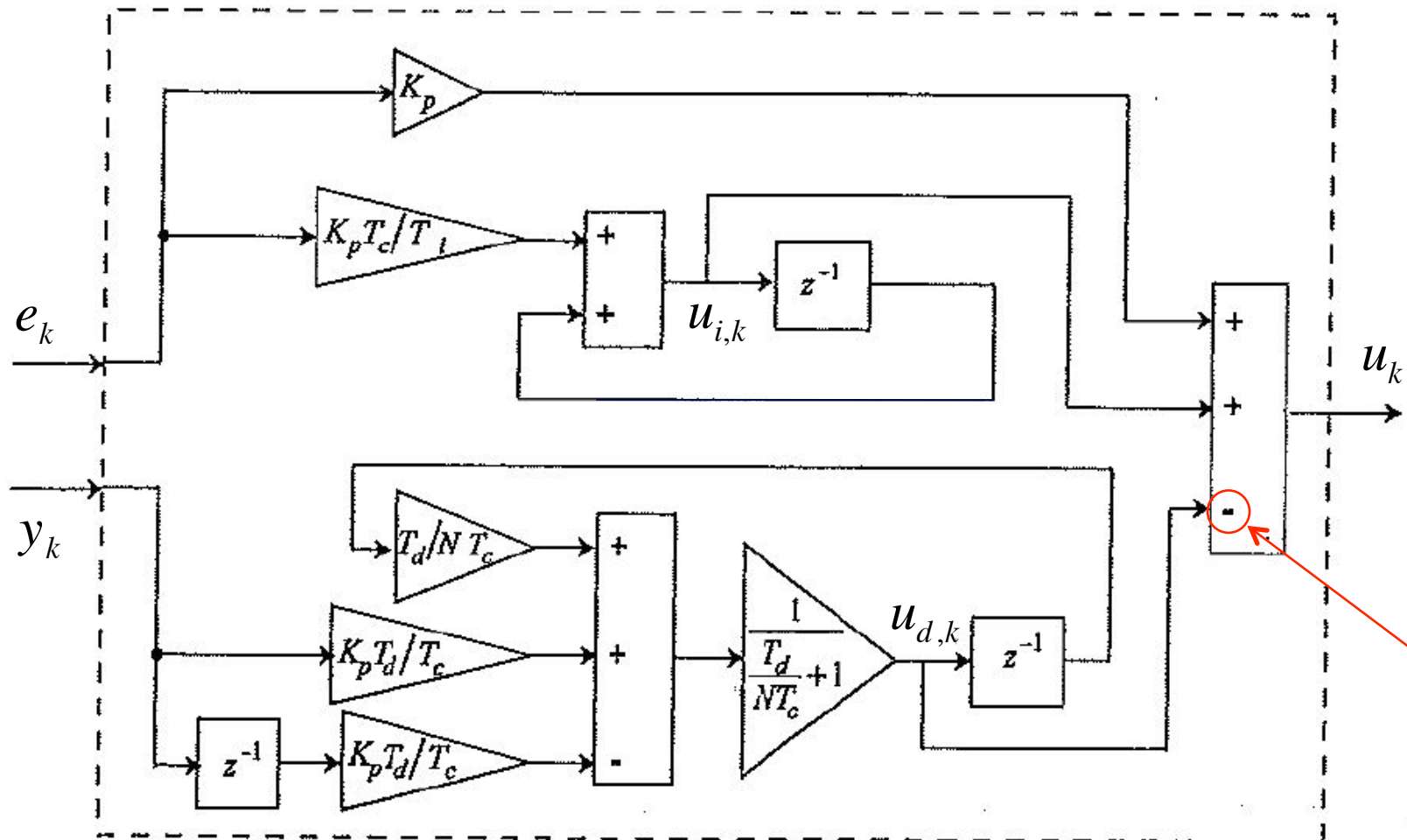
da discretizzare
come prima per ottenere
un PID + ffw digitale

$\alpha = 0$	$\beta = 0$	①
$\alpha = 0$	$\beta = 1$	②
$\alpha = 1$	$\beta = 1$	③
$0 < \alpha < 1$	$0 < \beta < 1$...



vedi schemi pagina precedente

Regolatore PID* sull'uscita



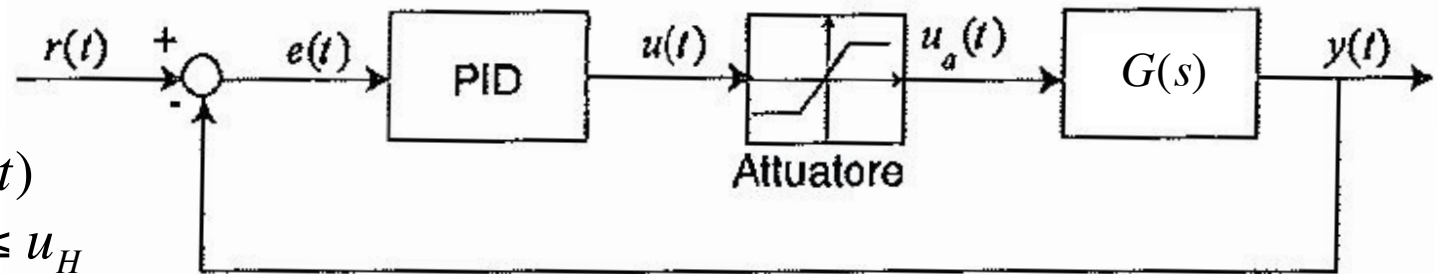
② controllore PID digitale con derivata (filtrata in banda) calcolata sull'uscita = PID*_y

Saturazione dell'attuatore sotto PID

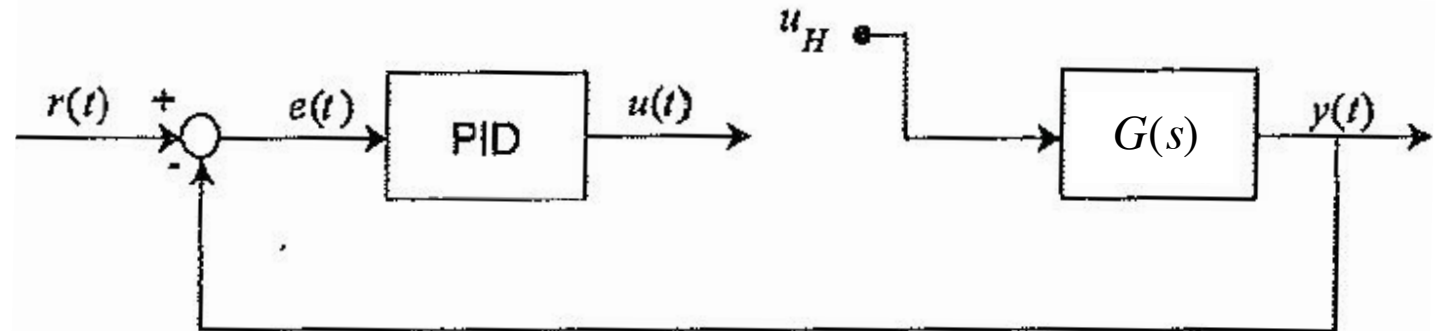
saturazione fisica
dell'attuatore

$$u_a(t) = \begin{cases} u_H, & u(t) \geq u_H \\ u(t), & u_L \leq u(t) \leq u_H \\ u_L, & u(t) \leq u_L \end{cases}$$

(di solito simmetrica rispetto allo 0,
ma non necessariamente)



ad esempio, attuatore saturato
al suo valore massimo



il comando attuato
NON dipende più
dall'uscita del PID
(ossia dall'azione di
controllo in feedback
calcolata dall'errore)



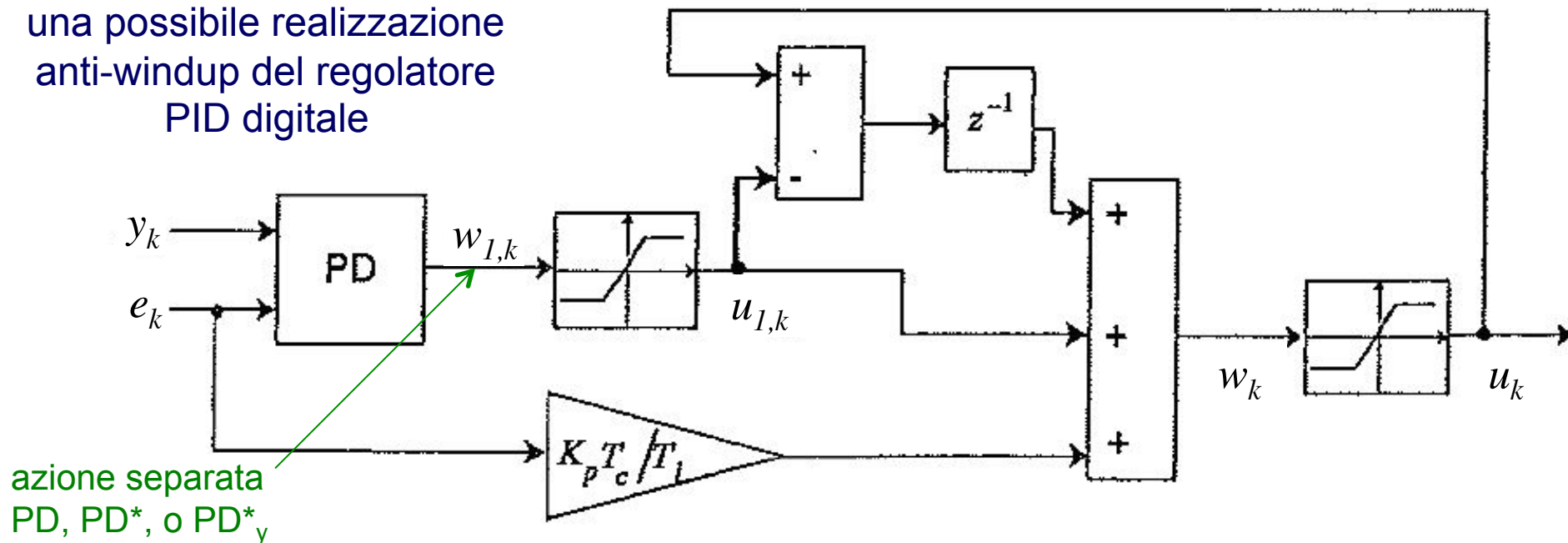
come fosse ad **anello aperto**
(o con una riduzione dei guadagni)



la saturazione del comando di controllo è critica
se c'è un'azione integrale che **"accumula"** errore
anche quando l'attuatore è in saturazione

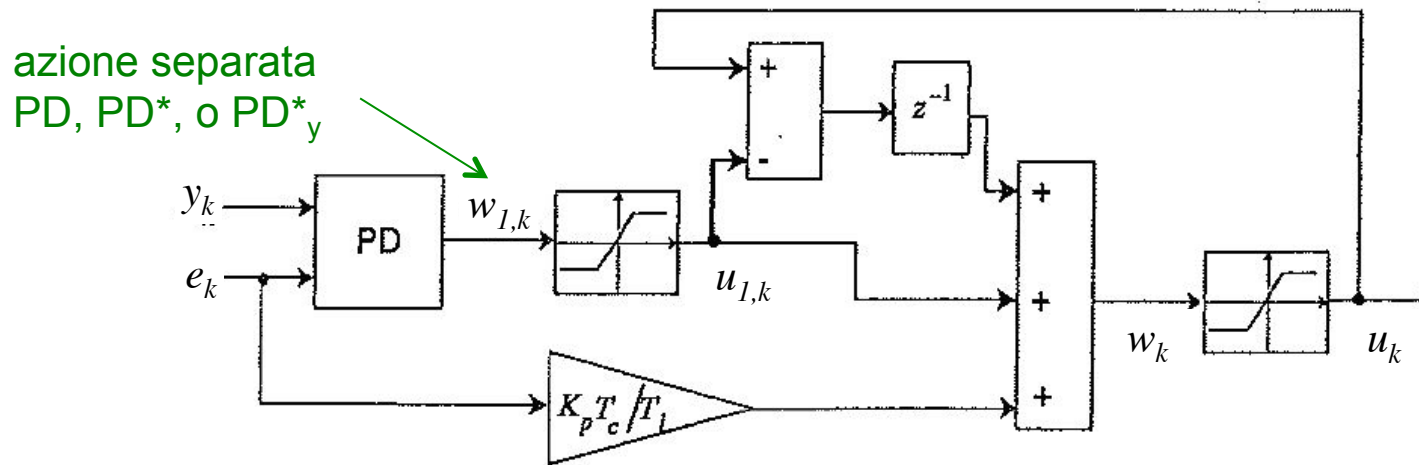
PID digitale anti-windup

una possibile realizzazione
anti-windup del regolatore
PID digitale



- ❑ si conosce una “misura” dell’effettivo segnale attuato (\neq dal controllo calcolato) oppure si usa un **modello algebrico** dell’attuatore con stessi valori di saturazione
- ❑ nello schema, ci sono **due** saturazioni: sulla sola azione PD e sul comando finale
- ❑ l’integrazione dell’errore viene **bloccata automaticamente** quando c’è saturazione
- ❑ non evita saturazioni, ma solo l’inutile “accumulo” dell’azione integrale sull’errore
 - ➔ andrebbe poi “scaricata” quando l’errore si è ridotto, prima di poter rientrare nel dominio di linearità dell’attuatore
 - ➔ si rallenterebbe quindi il recupero della corretta azione del PID

Analisi del comportamento anti-windup



- nella regione di linearità

$$u_k = (w_k =) u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + (u_{k-1} - u_{1,k-1}) = (1 - z^{-1})u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + z^{-1}u_k$$

$$\Rightarrow u_k = u_{1,k} + \frac{K_p T_c}{T_i} \frac{e_k}{1 - z^{-1}} \quad \text{esegue l'azione PD+I standard}$$

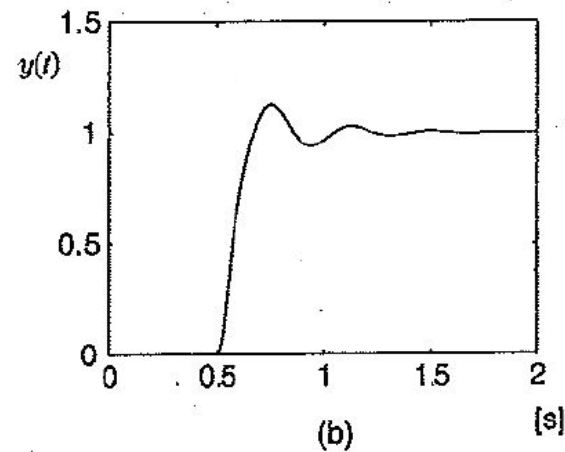
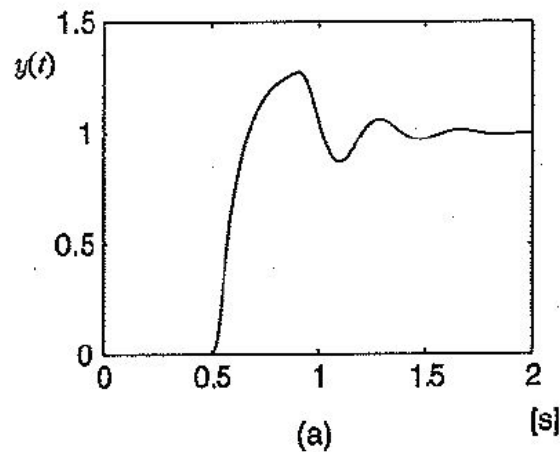
- entrambi i blocchi in saturazione (da almeno 1 passo di campionamento)

$$u_{k-1} = u_H \quad u_{1,k} = u_{1,k-1} = u_H \quad \text{ad esempio, attuatore saturato al suo valore massimo}$$

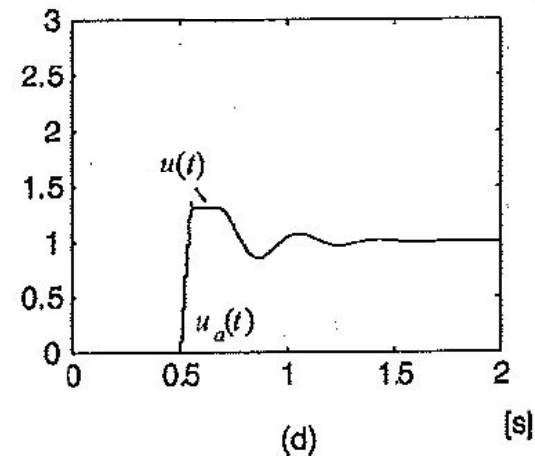
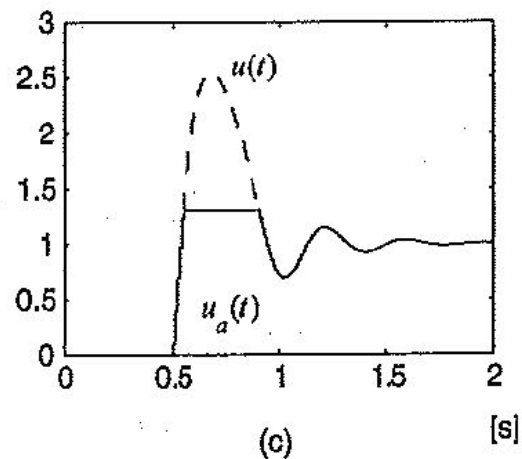
$$\Rightarrow u_k = u_H + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k + (u_H - u_H) = u_H + \frac{K_p T_c}{T_i} e_k \quad \text{NON integra più!}$$

Effetto dell'anti-windup nel PID

uscita
controllata



comando
di controllo
(e versione
effettivamente
attuata)



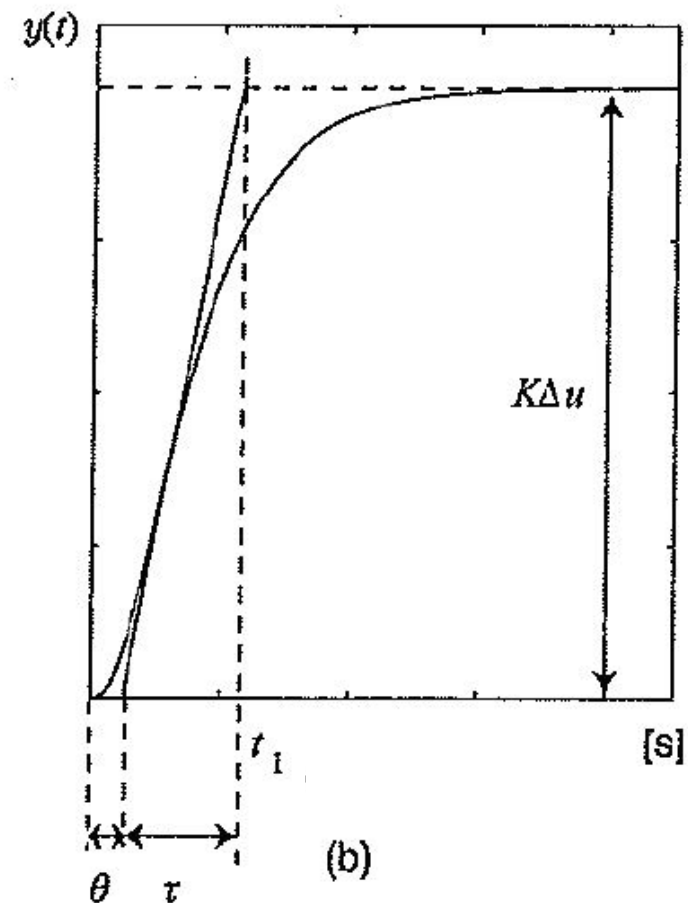
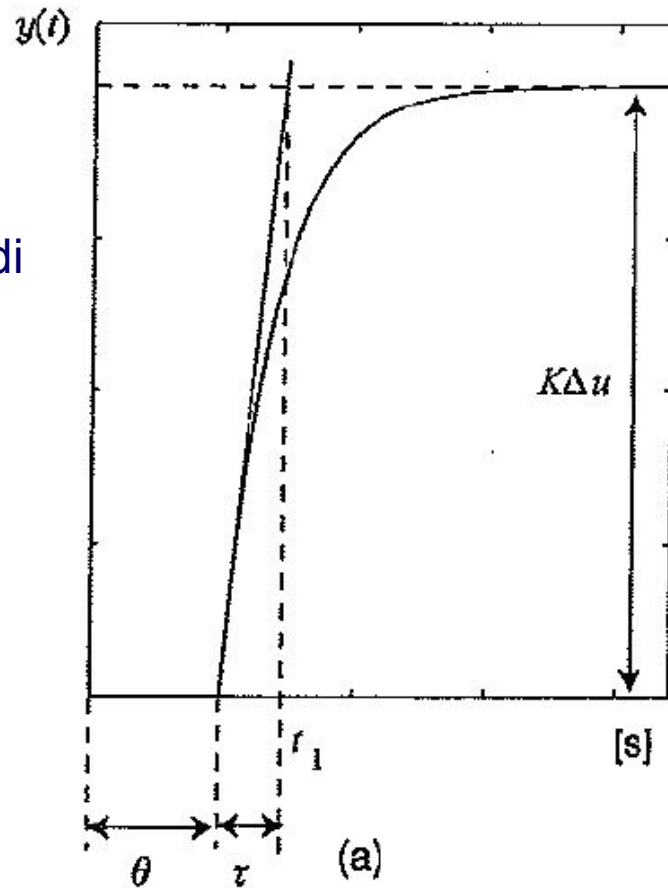
simulazione di un controllo in retroazione di tipo PID
in presenza di saturazione dell'attuatore:
realizzazione **standard** (a-c) e realizzazione **anti-windup** (b-d)

Tuning del PID - 1

metodo basato su
un **modello semplice**
(guadagno, costante di
tempo, ritardo finito)

$$G(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

che **approssima** il
processo fisico,
ricavato da parametri
della risposta ad un
gradino Δu



esempi di deduzione per via grafica del modello di progetto $G(s)$:
processo del primo ordine (a) e processo di ordine superiore (b)

Scelta dei parametri del PID

Tipo	1° metodo di Ziegler-Nichols	Cohen-Coon	3C
P	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1}$	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1} + 0.333$	$K K_p = 1.208(\theta/\tau)^{-0.956}$
PI	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 3.33(\theta/\tau)$	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1} + 0.082$ $T_i/\tau = \frac{3.33(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/11]}{1+2.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 0.928(\theta/\tau)^{-0.946}$ $T_i/\tau = 0.928(\theta/\tau)^{0.583}$
PID	$K K_p = 1.2(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 2(\theta/\tau)$ $T_d/\tau = 0.5(\theta/\tau)$	$K K_p = 1.35(\theta/\tau)^{-1} + 0.27$ $T_i/\tau = \frac{2.5(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/5]}{1+0.6(\theta/\tau)}$ $T_d/\tau = \frac{0.37(\theta/\tau)}{1+0.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 1.37(\theta/\tau)^{-0.95}$ $T_i/\tau = 0.74(\theta/\tau)^{0.738}$ $T_d/\tau = 0.365(\theta/\tau)^{0.95}$

PID analogico (e sue varianti più semplici)

nel caso di PID digitale, si tiene conto del passo di campionamento T_c e si pone

$$\theta \rightarrow \theta^D = \theta + \frac{T_c}{2} \quad \text{utilizzando nella tabella} \quad \frac{\theta^D}{\tau} \Rightarrow \text{per } KK_p, T_i/\tau, T_d/\tau$$

Esempio di tuning del PID

$$P(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+s)^2(1+2s)} \xrightarrow[\text{della risposta indiciale}]{\text{dall'analisi grafica}} G(s) = K \frac{e^{-1.46s}}{1+3.34s} \quad (K=1, \theta=1.46 \text{ s}, \tau=3.34 \text{ s})$$

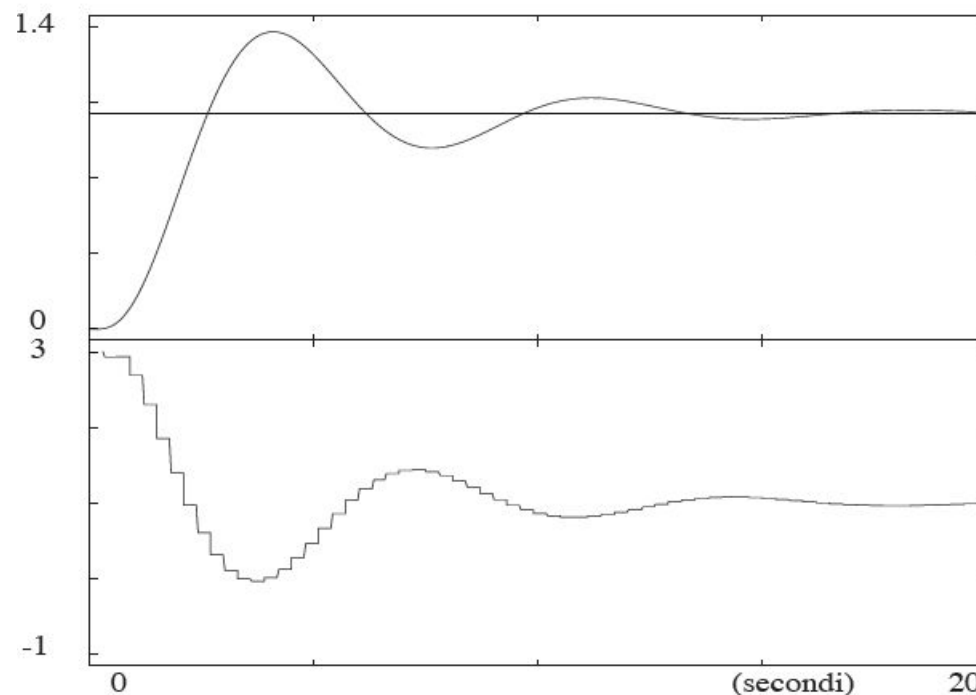
processo da controllare modello per il progetto del PID (uso delle tabelle)

regolatore **PID digitale** con $T_c = 0.3 \text{ s} \Rightarrow \theta^D = \theta + T_c/2 = 1.46 + 0.15 = 1.61 \Rightarrow \theta^D/\tau = 0.482$

dalla tabella (1° metodo di Ziegler-Nichols) $KK_p = 2.4894, T_i/\tau = 0.9641, T_d/\tau = 0.241$
 $\Rightarrow K_p = 2.4894, T_i = 3.22, T_d = 0.805$

risposta
indiciale
(a tempo continuo)

uscita del
regolatore PID
(dopo organo ZOH)



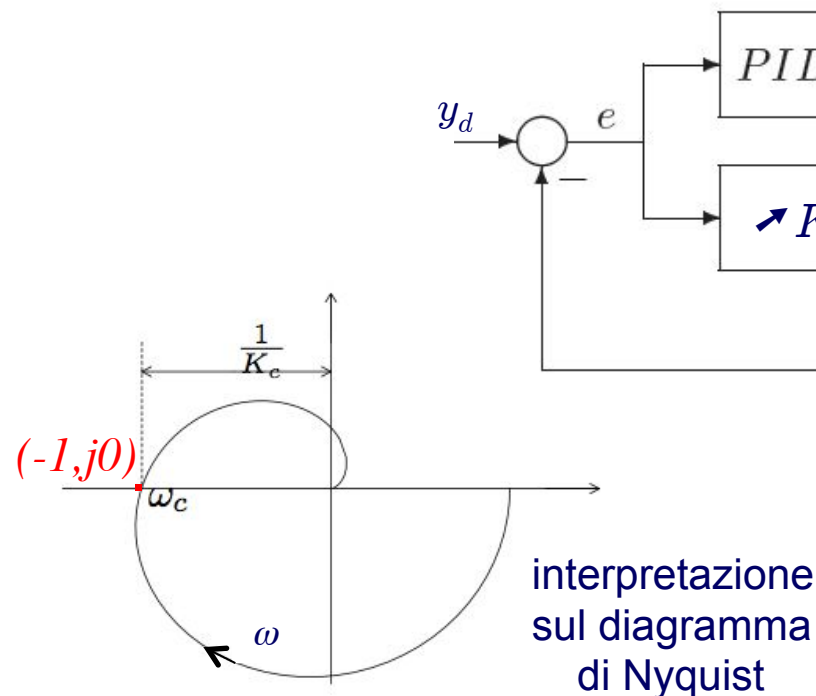
Tuning del PID - 2

2° metodo di Ziegler-Nichols (ad anello chiuso)

[posizione di tuning b]

1. si chiude l'anello di controllo con la sola azione proporzionale
2. si aumenta il guadagno K fino al valore critico K_c che porta il sistema in oscillazione
3. si ricava il periodo P_c dell'oscillazione critica

[posizione di operazione a] PID (o sue varianti), dopo la scelta dei guadagni come da tabella



$$P_c = 2\pi/\omega_c$$

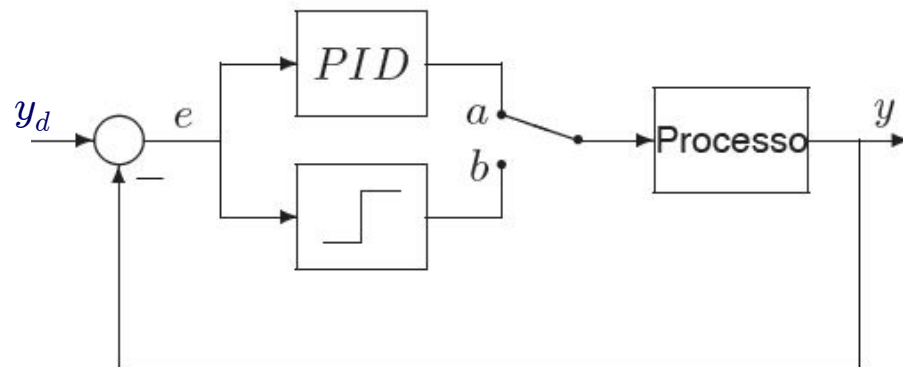
Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$	∞	0
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$

Tuning del PID - 2

2° metodo di Ziegler-Nichols (schema alternativo ad anello chiuso)

[posizione di tuning b]

1. si chiude l'anello con una funzione a relè di ampiezza d
 2. la retroazione non lineare innesca una oscillazione critica...
 3. dalla teoria delle funzioni descrittive:
 - il segnale di uscita a regime è periodico quasi-sinusoidale di periodo P_c
 - la prima armonica dell'uscita ha un'ampiezza $A = 4d/\pi$
 4. si misura il periodo P_c dell'oscillazione critica e dall'ampiezza A dell'uscita si ricava K_c
- [posizione di operazione a] PID (o sue varianti), dopo la scelta dei guadagni come da tabella



$$K_c = 4d/\pi A$$

Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$	∞	0
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$