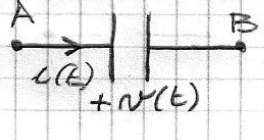
ELEMENTI — FASORI — LAPLACE

**CONDENSATORE**

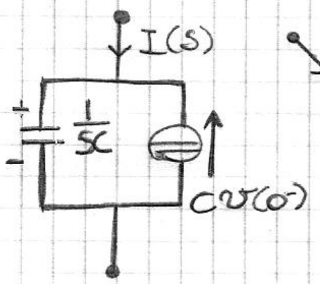


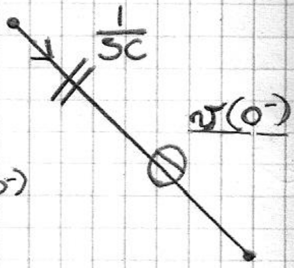

$i(t) = C\frac{dv}{dt}$

$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(t)$

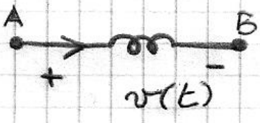
$q = Cv(t)$

$C' = \frac{1}{j\omega C}$



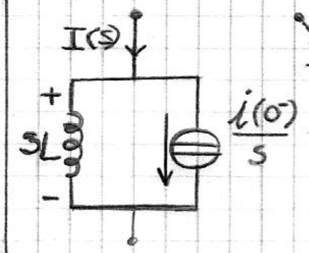

**INDUTTORE**

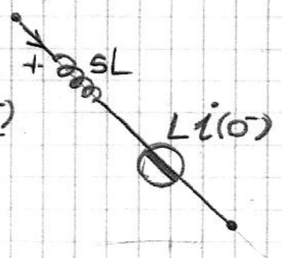



$v(t) = L\,di/dt$

$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$

$L' = j\omega L$




**NULLORE**


$v_1 = 0$ $i_1 = 0$

$v_2 = ?$ $i_2 = ?$

POTENZA ISTANTANEA = $p(t) = v(t)i(t)$

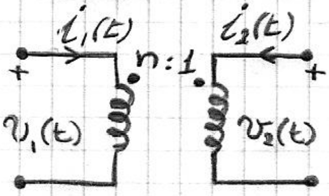
POTENZA ATTIVA = $P_a = \frac{1}{2}Re[VI^*] = \frac{1}{2}VI\cos(\varphi_V - \varphi_I)$

POTENZA COMPLESSA = $\frac{1}{2}VI^* = P_a + jP_R$

POTENZA REATTIVA = $\frac{1}{2}Im[VI^*] = \frac{1}{2}VI\sin(\varphi_V - \varphi_I)$

POTENZA APPARENTE = $\frac{1}{2}|V||I|$

**TRASFORMATORE**




$v_1 = n v_2$

$i_2 = -n v_1$

$p(t) = 0$

POTENZA DISSIPATA:

- RESISTORE: $P_a = \frac{1}{2}R|I_R|^2 = P_a$ , $P_c = 0$  $P_a = |V_R|^2/2R$
- INDUTTORE: $P_c = \frac{1}{2}j\omega_0 L I^2 = 2\omega_0 j\bar{\mathcal{E}}_L = jP_R$ , $P_a = 0$
- CONDENSATORE: $P_c = -\frac{1}{2}j\omega_0 C V^2 = -2j\omega_0\bar{\mathcal{E}}_C = jP_R$ , $P_a = 0$
- TRASFORMATORE: $P_c = \frac{1}{2}V_1 I_1^* + \frac{1}{2}V_2 I_2^* = 0$

QUANDO CON LAPLACE HO $S_1 = S_2^*$ : CALCOLO $A = |A|e^{\angle A j}$ e $A^*$
E FACCIO $V(t) = \{Ae^{s_1 t} + A^* e^{s_1^* t}\}$

- LINEARITÀ: LE EQU. COSTITUTIVE SONO LINEARI
- PERMANENZA: LE EQUAZIONI COSTITUTIVE SONO INDIPENDENTI DA $t$
- PASSIVITÀ: $\mathcal{E}$ ASSORBITA $\geq 0$

# PROPRIETÀ DI COMPONENTI E CIRCUITI

## 1 - PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

IL COMPONENTE/CIRCUITO E' LINEARE SE UN EFFETTO DOVUTO AD UNA CAUSA QUALSIASI E' PROPORZIONALE AD ESSA: $e(t) = K\,c(t)$

— PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

L'EFFETTO DOVUTO A PIÙ CAUSE CHE AGISCONO CONTEMPORANEAMENTE E' ESATTAMENTE UGUALE ALLA SOMMA DEGLI EFFETTI DI CIASCUNA CAUSA SE AGISSE DA SOLA (VALIDA PER I CIRCUITI LINEARI)

## 2 - PROPRIETÀ DI INVARIANZA (PERMANENZA)

IL COMPONENTE O IL CIRCUITO E' PERMANENTE SE L'EFFETTO NON DIPENDE DALL'ISTANTE DI APPLICAZIONE DELLA CAUSA

$c(t+t_0) = k\,e(t+t_0)$ se $c(t) = k\,e(t)$

## 3 - PROPRIETÀ DI RECIPROCITÀ

E' UNA MISURA DELL'INTERAZIONE TRA 2 DIVERSE ECCITAZIONI. SUPPONIAMO, IN UN CIRCUITO ACCESSIBILE DA N PORTE, 2 ECCITAZIONI: CALCOLIAMO LA POTENZA DELLE SINGOLE E DELLA SOMMA

$$P_1 = \sum_{k=1}^{N} V_k^{(1)} i_k^{(1)} \qquad P_2 = \sum_{k=1}^{N} V_k^{(2)} i_k^{(2)}$$

$$P_{12} = \sum_{k=1}^{N} (V_k^{(1)} i_k^{(1)})(V_k^{(2)} i_k^{(2)}) = P_1 + P_2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} V_k^{(1)} i_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{N} V_k^{(2)} i_k^{(1)}}_{\text{MISURA DI RECIPROCITÀ}}$$

UN ELEMENTO O CIRCUITO E' RECIPROCO SE $\sum V_k^{(1)} i_k^{(2)} = \sum V_k^{(2)} i_k^{(1)}$

## 4 - PROPRIETÀ DI PASSIVITÀ

UN CIRCUITO O ELEMENTO E' PASSIVO SE DATA UN ECCITAZIONE DI BREVE DURATA, L'EFFETTO SPARISCE NEL TEMPO (O LIMITATO)

E' PASSIVO SE $\int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau \geq 0$ CIOE' ASSORBE POTENZA POSITIVA

## 5 - PROPRIETÀ DI CAUSALITÀ

IN QUALSIASI ISTANTE $t_0$ L'EFFETTO DIPENDE SOLO DAI VALORI DELLA CAUSA PER $t \leq t_0$

SE $c_1(t) = c_2(t)$ per $t \leq t_0$

ALLORA $e_1(t) = e_2(t)$ per $t \leq t_0$

---

R e G IN SERIE ($i_1 = i_2$, $V = V_1 + V_2 \rightarrow R_{OT}\, i = i\,(R_1 + R_2)$

($v_i = i_i / G_i$, $v = v_1 + v_2 \rightarrow G_{TOT} = (G_1 + G_2)/G_1 G_2$)

$R_{TOT} = R_1 + R_2$

$G_{TOT} = (G_1 + G_2)/G_1 G_2$

R e G IN PARALLELO ($V_1 = V_2$, $i = i_1 + i_2 \rightarrow R_{TOT} = (R_1 + R_2)/R_1 R_2$

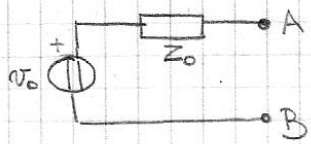
$VG = VG_1 + VG_2 \rightarrow G_{TOT} = G_1 + G_2$)

$G_{TOT} = G_1 + G_2$

$R_{TOT} = (R_1 + R_2)/R_1 R_2$

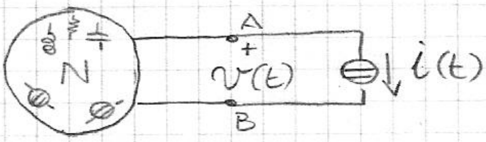
# TEOREMA DI TEVENIN

IL CIRCUITO PUÒ ESSERE SOSTITUITO DA UNA SERIE DI UN GENERATORE E UN IMPEDENZA DOVE $v_0(t)$ DEL GENERATORE E' PARI A $v(t)$ E L'IMPEDENZA $Z$ E' PARI ALL' IMPEDENZA TRA A e B VERSO N1 QUANDO I GENERATORI IN N1 SONO DISATTIVATI




$v_0$: TENSIONE A VUOTO TRA A e B

$Z_0$: IMPEDENZA TRA A e B A CIRCUITO DISATTIVATO



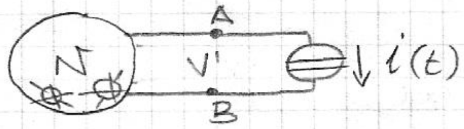

APPLICO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI ANNULLANDO IN 2 TEMPI I GENERATORI

1) $i(t) = 0$


$V_{AB} = V_0$

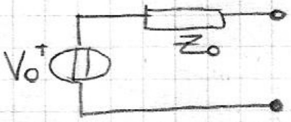
V(t)=Vab(t)-Rab*I(t)

2) ORA DISATTIVO I GENERATORI INTERNI




$\frac{V'}{I} = Z_0$

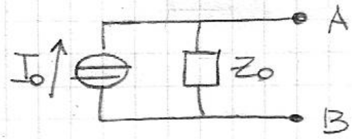
(1) + (2) $\longrightarrow$ $V = V_{AB} + V'$ $\longrightarrow$



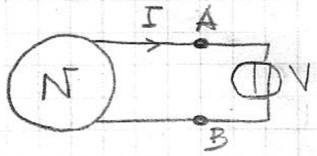

DATO CHE E' UNA SOMMA I RELATIVI COMPONENTI SONO IN SERIE

# TEOREMA DI NORTON

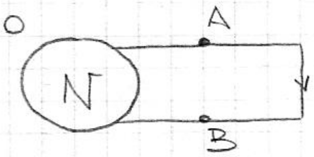
IL CIRCUITO PUÒ ESSERE SOSTITUITO DA UN PARALLELO TRA UN GENERATORE DI CORRENTE E UN IMPEDENZA DOVE $I_0$ E' PARI A I DI CORTOCIRCUITO E $Z_0$ E' PARI ALL' IMPEDENZA TRA A e B QUANDO I GENERATORI IN N SONO DISATTIVATI




PROCEDIAMO COME SOPRA

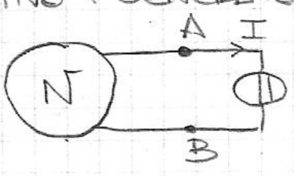



1) $V = 0$



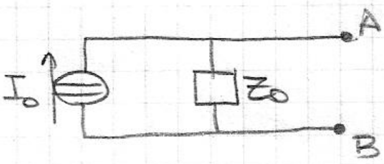

$I_0$ = CORRENTE CORTOCIRCUITO

2) DISATTIVO I GENERATORI INTERNI

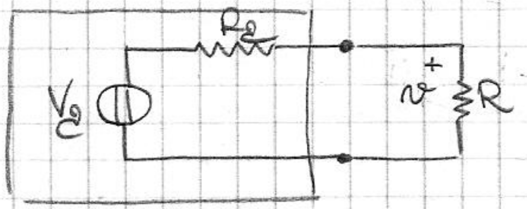



$Z_0 = \frac{V}{I}$

(1) + (2) $\longrightarrow$



# GENERATORE REALE DI TENSIONE

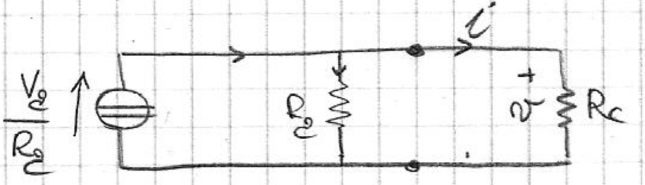



$$v_e = v_1 + v = (R_e + R)\, i = \underbrace{i R_e}_{v_1} + \underbrace{i R}_{v}$$

$$-v_e + R_e i + v = 0$$

$$i = \frac{v_e}{R_e} - \frac{v}{R_e}$$

LA CORRENTE È UGUALE ALLA SOMMA DI 2 CONTRIBUTI QUINDI IL CIRCUITO PUÒ ESSERE RISCRITTO COME UN GENERATORE IN // CON 2 RESISTENZE




$$i_e - i_{R_e} - i = 0$$

$$\frac{V_e}{R_e} - \frac{v}{R_e} - i = 0$$

CIRCUITO EQUIVAL IN PARALLELO

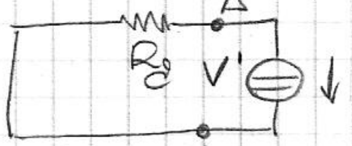
IL RISULTATO AI CAPI DI A e B è LO STESSO

- APPLICHIAMO IL TEOREMA DI NORTON

1)


$$I_0 = V_e / R_e$$

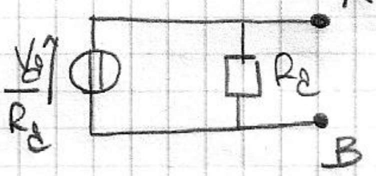
2)



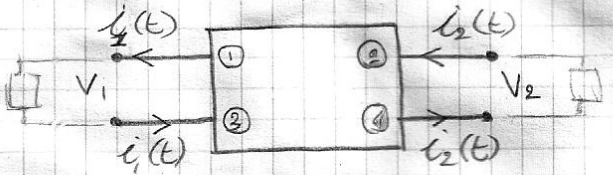

$I_e$

$$Z_0 = \frac{V'}{I_e} = R_e \cdot \cancel{I_e} / \cancel{I_e}$$

(1) + (2)



# RETI A 2 PORTE




DOPPIO BIPOLO

$$[A][v]+[B][i]=[0]$$

$$[v]=[v_1, v_2]^T \quad e \quad [i]=[i_1, i_2]^T$$

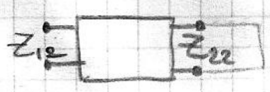
LE MATRICI A e B RAPPRESENTANO I LEGAMI FRA LE VARIE GRANDEZZE DI PORTA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- MATRICE DELLE IMPEDENZE

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad Z_{11}=\frac{v_1}{i_1}\bigg|_{i_2=0} \quad Z_{12}=\frac{v_1}{i_2}\bigg|_{i_1=0} \quad Z_{21}=\frac{v_2}{i_1}\bigg|_{i_2=0} \dots$$


IMPEDENZA DI INGRESSO A VUOTO $Z_{11}$



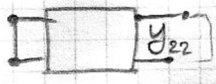

IMPEDENZA DI USCITA A VUOTO $Z_{22}$

$Z_{12}$ e $Z_{21}$ IMPEDENZE MUTUE: ESPRIMONO L'INFLUENZA DELLE GRANDEZZE DI UNA PORTA SULL'ALTRA

- MATRICE DELLE AMMETTENZE

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad y_{11}=\frac{i_1}{v_1}\bigg|_{v_2=0} \quad y_{12}=\frac{i_1}{v_2}\bigg|_{v_1=0} \quad etc.$$


AMMETTENZA DI INGRESSO DI CORTO CIRCUITO




AMMETTENZA DI USCITA DI CC

$y_{12}$ e $y_{21}$ AMMETTENZE MUTUE

- MATRICE IBRIDA H e G

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad h_{11}=\frac{v_1}{i_1}\bigg|_{v_2=0} \quad h_{12}=\frac{v_1}{v_2}\bigg|_{i_1=0} \quad h_{21}=\frac{i_2}{i_1}\bigg|_{v_2=0} \quad h_{22}=\frac{i_2}{v_2}\bigg|_{i_1=0}$$

$$h_{11}=1/y_{11} \qquad h_{22}=1/Z_{22}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad g_{11}=\frac{i_1}{v_1}\bigg|_{i_2=0} \quad g_{12}=\frac{i_1}{i_2}\bigg|_{v_1=0} \quad g_{21}=\frac{v_2}{v_1}\bigg|_{i_2=0} \quad g_{22}=\frac{v_2}{i_2}\bigg|_{v_1=0}$$

$$g_{11}=1/Z_{11} \quad e \quad g_{22}=1/y_{22}$$

UN CIRCUITO ELETTRICO è SEDE DI FENOMENI ELETTRICI DOVUTI A ECCITAZIONI ESTERNE(GENERATORI DI CORRENTE E TENSIONE) ED INTERNE(GENERATORI NEI CIRCUITI EQUIVALENTI SECONDO LAPLACE).

IL LEGAME TRA UN ECCITAZIONE e(t) E UNA RISPOSTA u(t) è SOLITAMENTE DI TIPO INTEGRO-DIFFERENZIALE, TUTTAVIA, NEL CASO DI CIRCUITI SENZA MEMORIA, TALE LEGAME RISULTA PROPORZIONALE u(t)=a e(t) DOVE a DIPENDE DALLA STRUTTURA DEL CIRCUITO.

SE SI CONSIDERA L'ECCITAZIONE GRADINO UNITARIO, SI AVRA h(t) CHE RAPPRESENTA IL VALORE DI u(t) QUANDO L'ECCITAZIONE è IL GRADINO UNITARIO. h(t) CHE PRENDE IL NOME DI RISPOSTA IMPULSIVA CARATTERIZZA IL CIRCUITO, ED è UTILE IN QUANTO, GRAZIE AL SUO AUSILIO Può ESSERE CALCOLTATA LA RISPOSTA COME PRODOTTO DI CONVOLUZIONE TRA h(t) E L'ECCITAZIONE e(t).

NEL CASO DI CIRCUITI CON MEMORIA, RISULTA UTILE UTILIZZARE IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE IN MODO DA ANALIZZARE IL CIRCUITO COME SE FOSSE SENZA MEMORIA, RICONDUCENDOSI AD UN LEGAME DI SEMPLICE PROPORZIONALITA U(s)=F(s)E(s).

LA F(s), CHE PRENDE IL NOME DI FUNZIONE DI RETE, CARATTERIZZA IL LEGAME TRA ECCITAZIONE E RISPOSTA E PUO ESSERE DIVISA IN 4 CLASSI A SECONDA DEL LEGAME TRA CAUSA ED EFFETTO: FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN TENSIONE, FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CORRENTE, IMPEDENZA, AMMETTENZA.

PONENDO $E(s)=1=L^{-1}[u_0(t)]$ (COME ABBIAMO FATTO NEL DOMINIO DEL TEMPO) AVREMO U(s)=F(s) (LA RISPOSTA IMPULSIVA NEL TEMPO è PARI ALL'ANTITRASFORMATA DELLA FUNZIONE DI RETE).

IL CIRCUITO COSì ANALIZZATO, RISULTA STABILE SE LIMh(t)=0, QUINDI, ESSEDNO $h(t)= L^{-1}[F(s)]$ SE I POLI DI F(s) SONO A PARTE REALE NEGATIVA (SE SONO PRESENTI AL PIU POLI IN 0 SEMPLICI, SI MANTIENE LIMITATA) .

ORA, ANDIAMO AD ANALIZZARE LA RISPOSTA SOTTO LE IPOTESI DI CONDIZIONI INIZIALI NULLE, CIRCUTIO STABILE ED ECCITAZIONI SINUSOIDALI:

$e(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)u_{-1}(t)$

L'USCITA U(S) AVRA' I POLI DI F(S) A PARTE REALE NEGATIVA E I POLI DI E(S) DEL TIPO $s' = \pm j\omega_0$, QUINDI:

$$U(s) = U_t(s) + \frac{R}{s-j\omega} + \frac{R^*}{s+j\omega}$$

CON $U_t(s) \to$ PER DEF.

DA CUI SEGUE $u_p(t) = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)u_{-1}(t)$ SIMILE A $e(t)$

QUANDO UN CIRCUITO SI TROVA IN REGIM PERM TUTTE LE GRANDEZZE SONO DI TIPO SINUSOIDALE

$$e(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi) = A\frac{e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}}{2} =$$

$$= \frac{Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t} + Ae^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}}{2} = \frac{\vec{E}}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{\vec{E}^*}{2}e^{-j\omega_0 t} \quad \text{con } \vec{E} = Ae^{j\varphi}$$

ESSENDO $E(s) = \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[\dots] = \frac{\vec{E}/2}{s-j\omega} + \frac{\vec{E}^*/2}{s+j\omega}$

SEGUE $U(s)=F(s)E(s)=F(s)[\quad]$

ANALIZZANDO SOLO $U_p(s) = \frac{U/2}{s-j\omega} + \frac{U^*/2}{s+j\omega}$

AVENDO INDICATO CON $\vec{U} = 2U(s)(s-j\omega_0)\big|_{s=j\omega_0} = 2F(s)\frac{1}{2}\vec{E}\big|_{s=j\omega_0} = F(j\omega_0)\vec{E}$

$\vec{U}$ E' PARI AL FASORE DI $U_p(t)$ IL QUALE RISULTA ISOFREQUENZIALE CON $e(t)$. NE SEGUE CHE IL FASORE DELLA RISPOSTA E' LEGATO AL FASORE DELL'ECCITAZIONE:

F DI RETE

$\vec{U} = F(j\omega_0)\vec{E}$ DOVE $F(j\omega)$ E' $F(s)$ PER $s=j\omega$

## LINEARITÀ

PER DIMOSTRARE COME LA LINEARITÀ INFLUISCA SULLE RELAZIONI COSTITUTIVE DEL RESISTORE - CONDENSATORE - INDUTTORE BASTA MOSTRARE COME TALI RELAZIONI ASSICURINO UN LEGAME LINEARE

RESISTORE: $V(t) = R\,i(t)$

CONDENSATORE: $\int_{-\infty}^{t} i(t)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} C \frac{dV(t)}{d\tau}\,d\tau \rightarrow \underset{\text{CARICA}}{Q} = C\,V(t)$

INDUTTORE: $\int_{-\infty}^{t} V(t)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} L \frac{di(t)}{d\tau}\,d\tau \rightarrow \varphi(B) = L\,i(t)$

FLUSSO DI INDUZIONE MAGNETICA E CORRENTE

## PASSIVITÀ

BASTA MOSTRARE CHE ASSORBONO ENERGIA

RESISTORE: ASSORBE POTENZA $p(t) = R\,i^2(t) \geq 0$ PER $R \geq 0$

CONDENSATORE: ENERGIA IMMAGAZZINATA $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int i(\tau)\,V(\tau)\,d\tau =$

$$= C \int V(\tau) \frac{dV(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \frac{1}{2} C\,V^2(t) \geq 0 \quad \text{PER } C \geq 0$$

INDUTTORE: ENERGIA IMMAGAZZINATA $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int V(\tau)\,i(\tau)\,d\tau =$

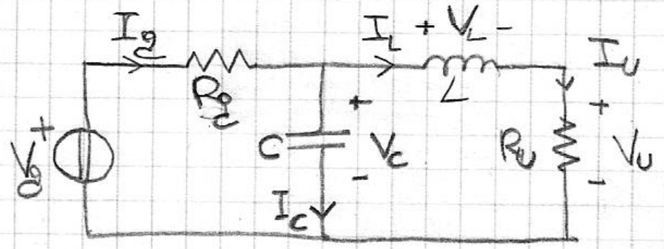
$$= L \int i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \frac{1}{2} L\,i^2(t)$$

CONDENSATORE E INDUTTORE CEDONO ENERGIA IN QUANTITÀ MINORE O UGUALE A QUELLA IMMAGAZZINATA

## PERMANENZA

I COMPONENTI RISULTANO PERMANENTI POICHÈ R, L e C NON DIPENDONO DAL TEMPO

# PROBLEMA DEL RIFASAMENTO DI UN CARICO REATTIVO

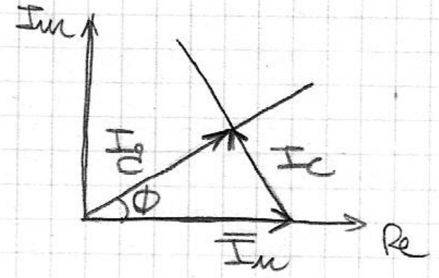


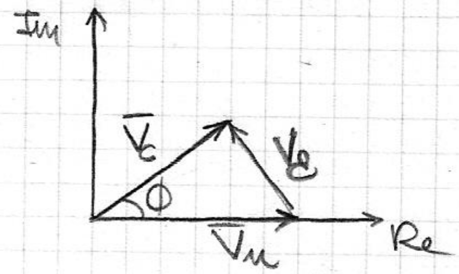

DETERMINARE C AFFINCHE RISULTI NULLA LA POTENZA EROGATA DAL GENERATORE

CIOE' CERCO C IN MODO TALE CHE $P_R$ DI C COMPENSI $P_R$ DI L

PONIAMO $I_U = 1A$ E RIPORTIAMO IL VALORE SUL DIAGRAMMA DELLE CORRENTI. SUL DIAGRAMMA DELLE TENSIONI DERIVIAMO $V_U$, $V_L$ e $V_C$ → SI PUO' QUINDI OTTENERE LA DIREZIONE DI $I_C$ TALE DIREZIONE DEVE ESSERE TALE UN ANGOLO DI 90° IN ANTICIPO RISPETTO $V_C$

LA CORRENTE $I_C$ SOMMATA A $I_U$ DA $I_g$, TUTTAVIA NON E' NOTA L'AMPIEZZA DI $I_C$. A TALE SCOPO IMPONIAMO CHE IL GENERATORE NON EROGHI POTENZA REATTIVA. A TALE SCOPO $I_g$ DEVE FORMARE UN ANGOLO NULLO CON $V_C$

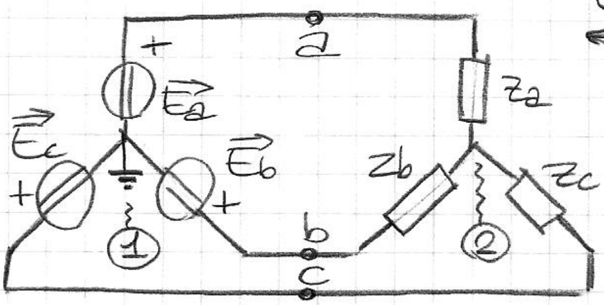


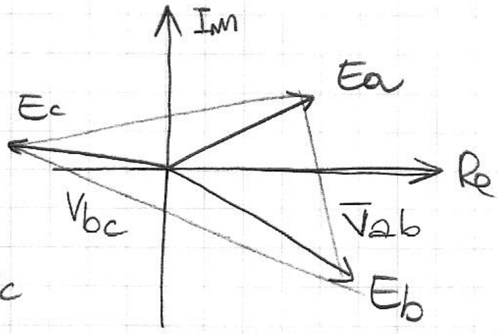




DA CUI SI PUO' FACILMENTE RICAVARE IL VALORE DI C

# CIRCUITO TRIFASE

- STELLA - STELLA

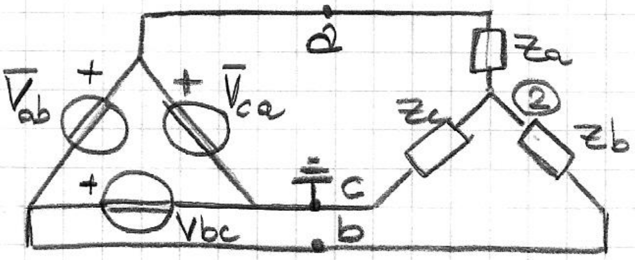



$y_a = \frac{1}{Z_a}$

TENSIONE IN ② $E_2 = \dfrac{y_a \vec{E_a} + y_b E_b}{y_a + y_b + y_c}$

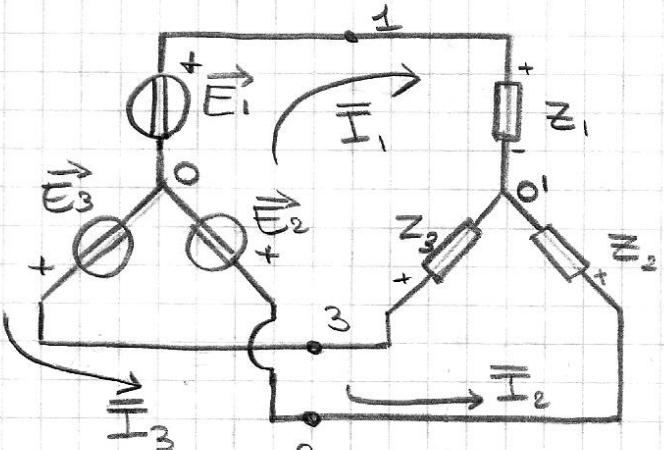
- TRIANGOLO STELLA




$V_{ba} + V_{bc} + V_{ac} = 0$

$E_2 = \dfrac{y_b \vec{V}_{bc} - y_a \vec{V}_{ba}}{y_a + y_b + y_c}$

- CENTRALE-CASA



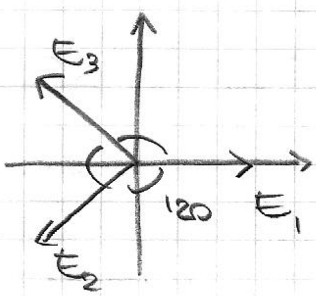

$E_{0'} = \dfrac{y_1 \overline{E}_1 + y_2 \overline{E}_2 + y_3 \overline{E}_3}{y_1 + y_2 + y_3}$

SISTEMA SIMMETRICO DIRETTO

$E_1 = E e^{j0}$ $\quad E_2 = E e^{-\frac{2\pi}{3} j}$ $\quad E_3 = E e^{-\frac{4}{3}\pi j}$

SE E' EQUILIBRATO
(CIOE' SE $Z_1 = Z_2 = Z_3$)

$E_{0'} = \dfrac{\vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}}{3}$




SE E' ANCHE SIMMETRICO

$E_{0'} = 0$