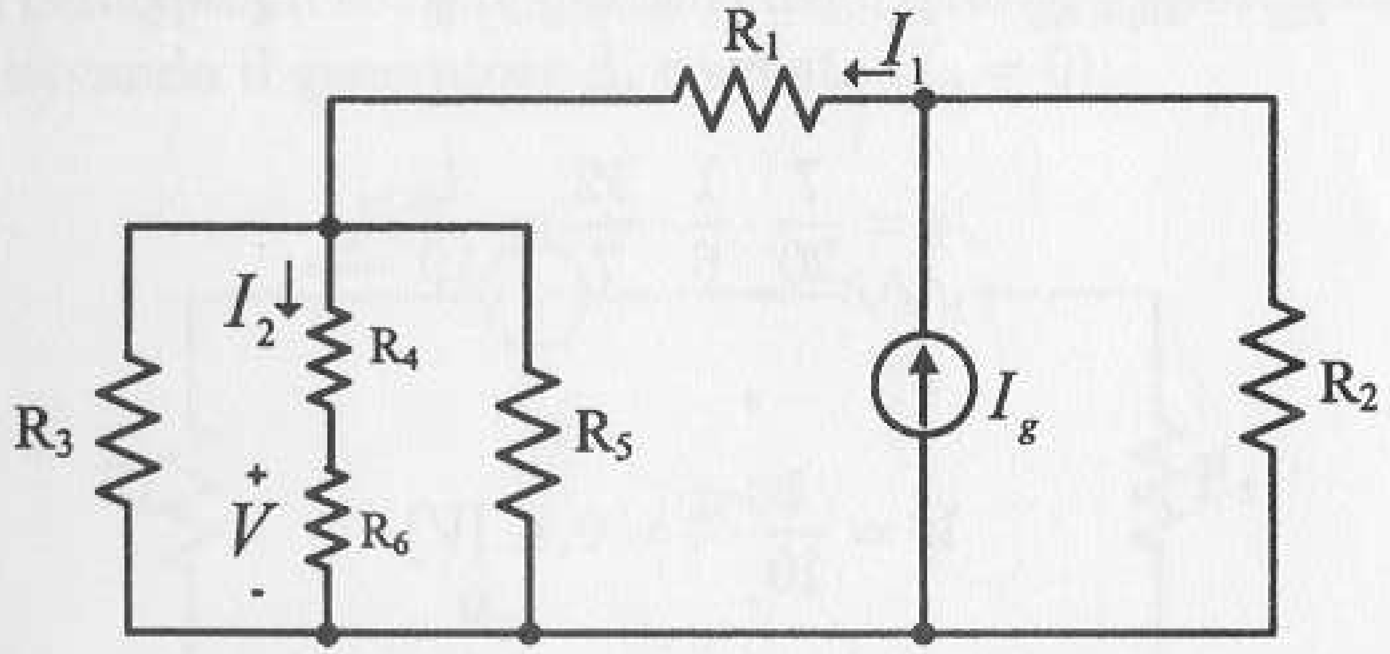
# Capitolo 1

# Analisi di circuiti senza memoria

## Esercizio ~~1.~~1 ok

Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V$ sul resistore $R_6$, nel verso indicato.




$$R_1 = R_2 = R_4 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_5 = 6\,[\Omega]\ ;\ R_3 = R_6 = 4\,[\Omega]\ ;\ I_g = 1\,[A].$$

### Svolgimento

Un modo diretto per calcolare $V$, consiste nell'applicare due volte la formula del partitore di corrente, calcolando prima la corrente $I_1$ evidenziata in figura e quindi la corrente $I_2$ che scorre sul resistore $R_6$. Una volta nota $I_2$, sarà evidentemente $V = R_6 \cdot I_2$. La resistenza equivalente del bipolo resistivo alla sinistra del generatore di corrente è:

$$R_{e_1} = R_1 + (R_3 \parallel (R_4 + R_6) \parallel R_5)$$

$$R_{e_1} = 2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)^{-1} = 2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right)^{-1} = 2 + \frac{12}{7} = \frac{26}{7}.$$

Quindi:

$$I_1 = I_g \cdot \frac{G_{e_1}}{G_{e_1} + G_2} = 1 \cdot \frac{\frac{7}{26}}{\frac{7}{26} + \frac{1}{2}} = \frac{7}{26} \cdot \frac{26}{20} = \frac{7}{20},$$

ove:

$$G_{e_1} = \frac{1}{R_{e_1}} \text{ e } G_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Si ottiene:

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{\frac{1}{R_4+R_6}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4+R_6} + \frac{1}{R_5}} = I_1 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = I_1 \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{6}} = I_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7}$$

$$I_2 = \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{1}{10}.$$

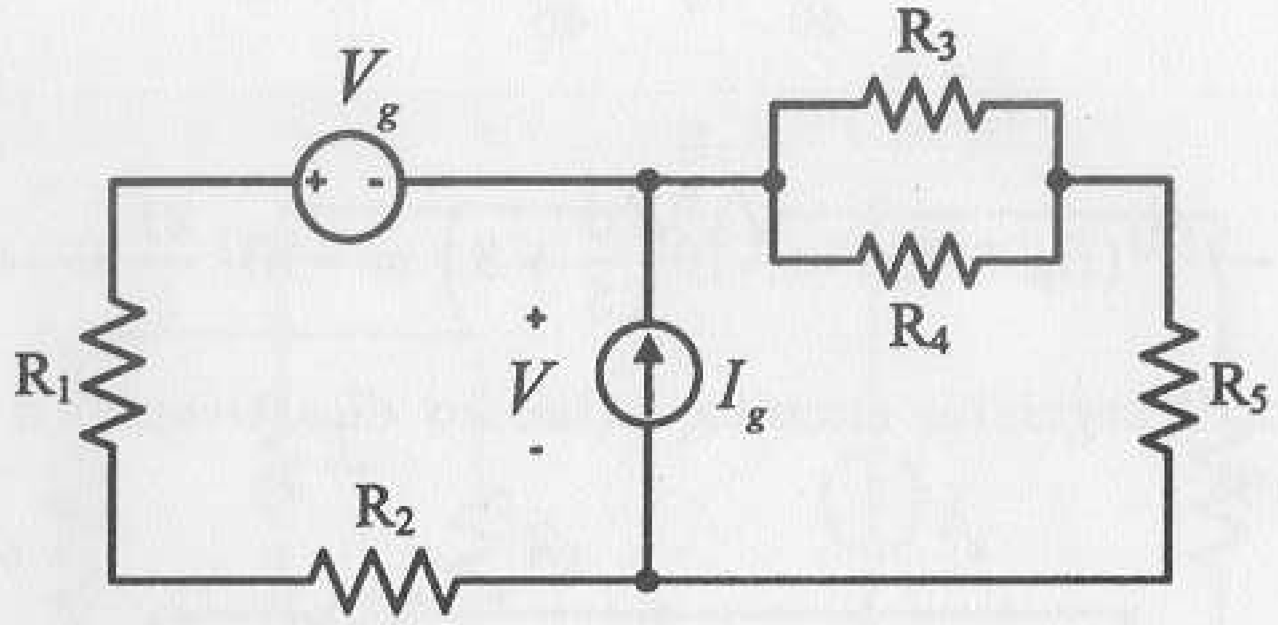
Dunque:

$$V = \frac{1}{10} \cdot 4 = 0,4 \; [V]$$



## Esercizio 1.2 OK

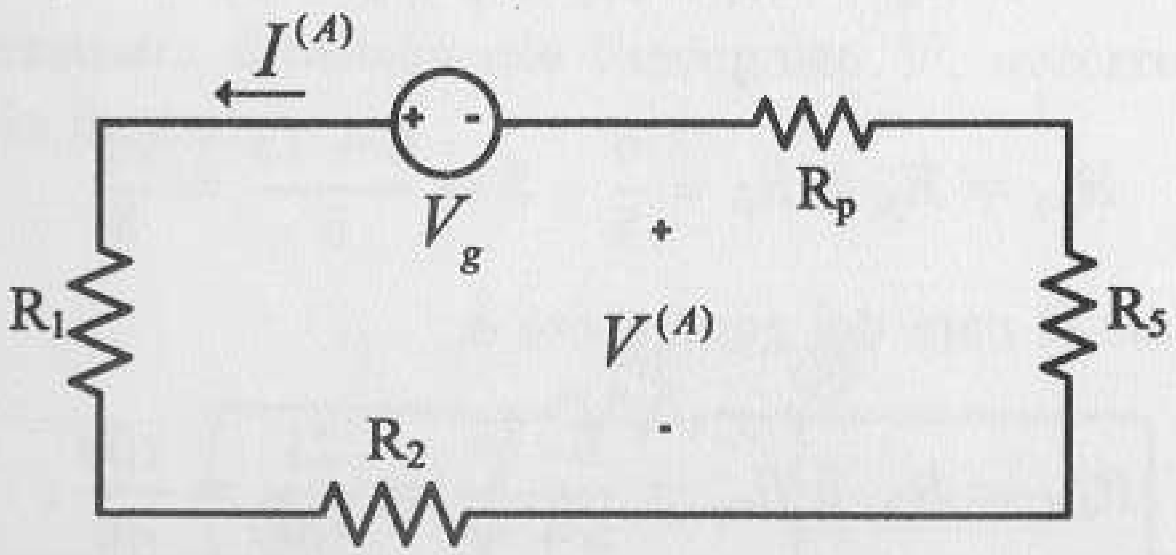
Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V$ nel verso indicato.




$$R_1 = R_3 = R_5 = 3\,[\Omega]\ ;\ R_2 = R_4 = 2\,[\Omega]\ ;\ V_g = 92\ [V]\ ;\ I_g = 9,2\ [A].$$

### Svolgimento

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, consideriamo il circuito ottenuto disattivando il generatore di corrente ($I_g = 0$):




avendo indicato con $R_p$ la resistenza equivalente del bipolo $R_3 \parallel R_4$. Si ha:

$$R_p = \frac{3 \cdot 2}{3+2} = \frac{6}{5}.$$

Considerando il verso della corrente di maglia indicato in figura, si ha per la legge di Kirchhoff alle tensioni:

$$V_g = (R_1 + R_2 + R_p + R_5)I^{(A)}$$

$$V_g = \left(3 + 2 + \frac{6}{5} + 3\right) I^{(A)} = \left(8 + \frac{6}{5}\right) I^{(A)} = \frac{46}{5} I^{(A)},$$

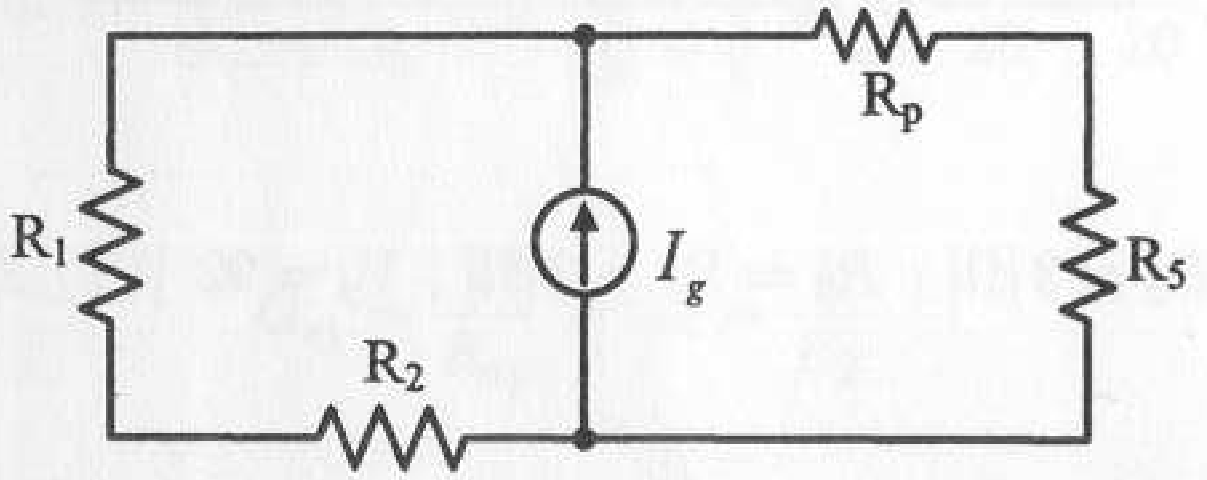
da cui:

$$I^{(A)} = \frac{5}{46} \cdot V_g = \frac{5}{46} \cdot 92 = 10\,.$$

Pertanto:

$$V^{(A)} = -I^{(A)}(R_p + R_5) = -10\left(\frac{6}{5} + 3\right) = -10 \cdot \frac{21}{5} = -42 \quad [V]$$

Si consideri ora il seguente circuito, ottenuto disattivando il generatore di tensione ($V_g = 0$):




Dette $R_{e_1}$ ed $R_{e_2}$, rispettivamente, le resistenze equivalenti dei bipoli alla sinistra e alla destra del generatore di corrente, si ha:

$$R_{e_1} = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5\,;$$

$$R_{e_2} = R_p + R_5 = \frac{6}{5} + 3 = \frac{6+15}{5} = \frac{21}{5}\,.$$

La resistenza totale ai capi del generatore è:

$$R_{tot} = R_{e_1} \parallel R_{e_2} = \frac{5 \cdot \frac{21}{5}}{5 + \frac{21}{5}} = \frac{21}{\frac{21 \cdot 5}{46}} = \frac{105}{46}\,.$$

Dunque:

$$V^{(B)} = R_{tot} I_g = \frac{105}{46} \cdot 9{,}2 = 21 \quad [V]$$

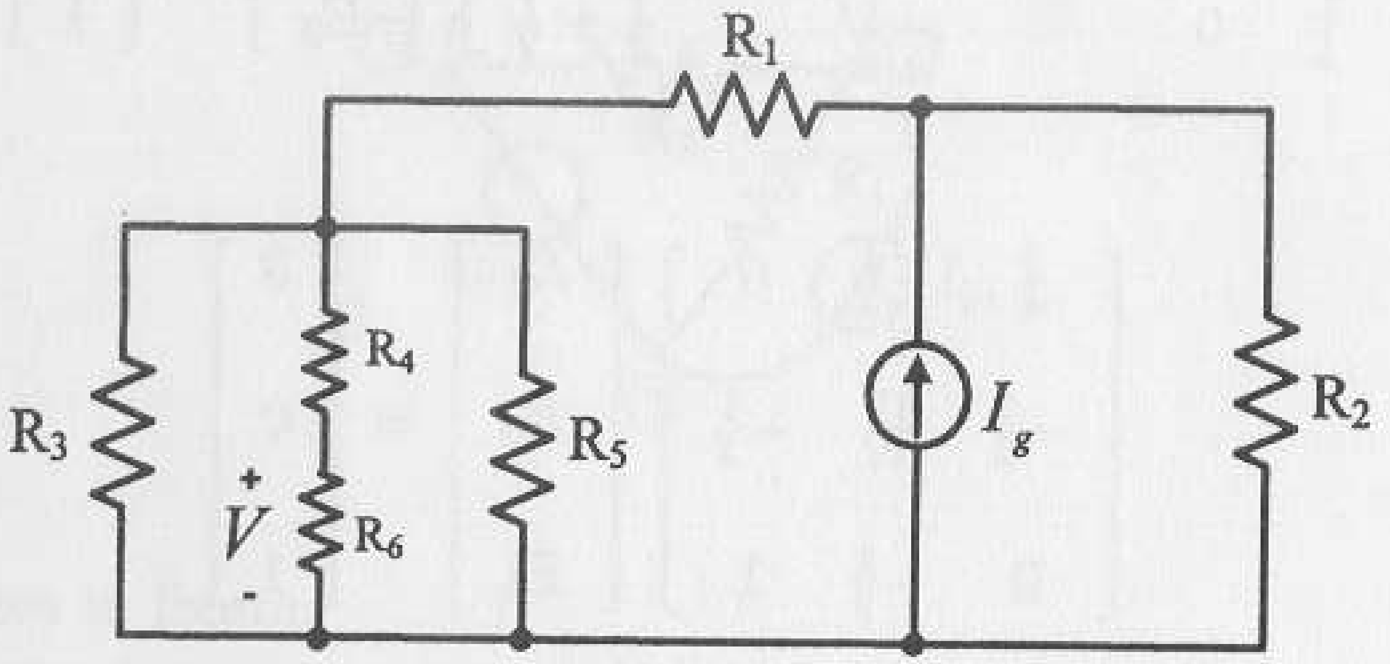
La tensione ai capi del generatore di corrente è data dalla sovrapposizione dei 2 effetti:

$$V = V^{(A)} + V^{(B)} = -42 + 21 = -21 \quad [V]$$



## Esercizio ~~1.3~~ OK

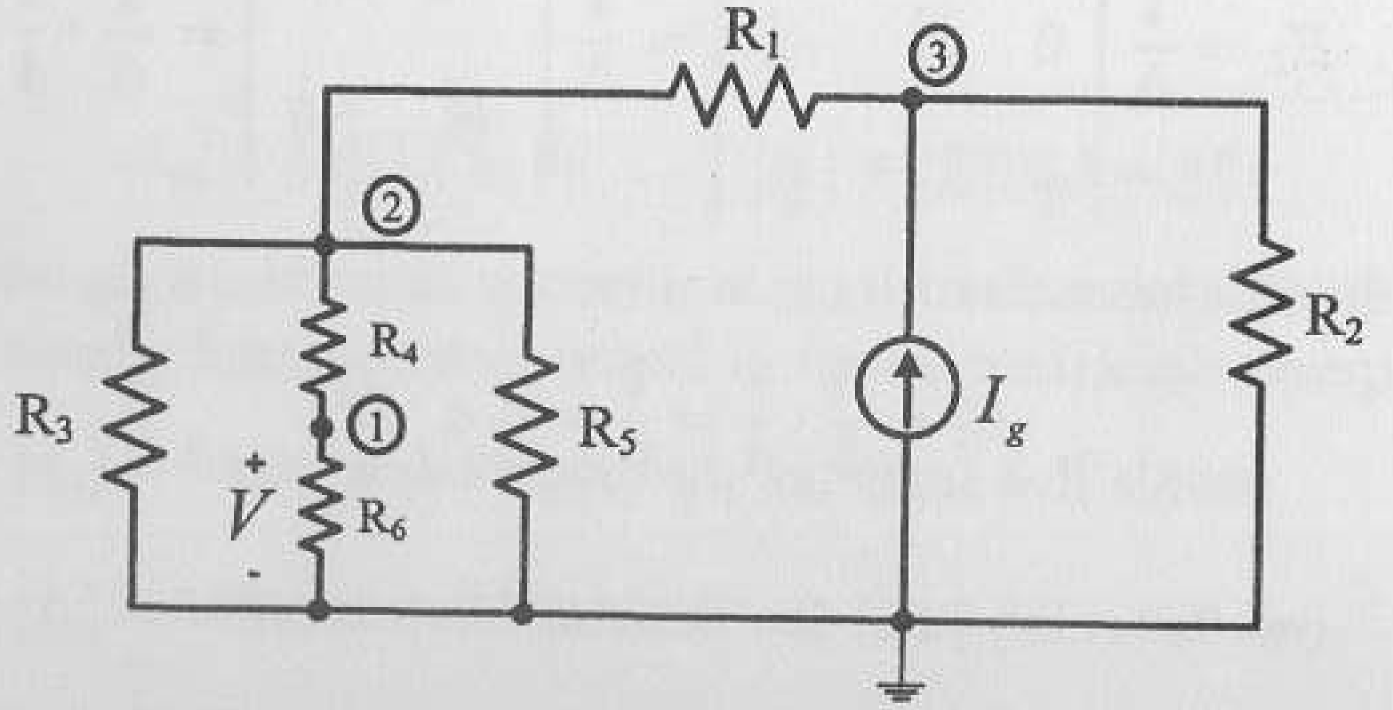
Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V$, nel verso indicato, tramite il metodo di analisi su base nodi.




$$R_1 = R_2 = R_4 = 2\,[\Omega]\,;\; R_5 = 6\,[\Omega]\,;\; R_3 = R_6 = 4\,[\Omega]\,;\; I_g = 1\,[A].$$

### Svolgimento

Se si vuole determinare direttamente l'incognita $V$, occorre considerare i 3 nodi evidenziati in figura:




Il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ossia:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{17}{12} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo con il metodo di Cramer:

$$\Delta = \frac{3}{4}\begin{vmatrix} \frac{17}{12} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{3}{4}\left(\frac{17}{12}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{17-3}{12}\right)-\frac{1}{4} = \frac{14}{16}-\frac{1}{4} = \frac{7}{8}-\frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

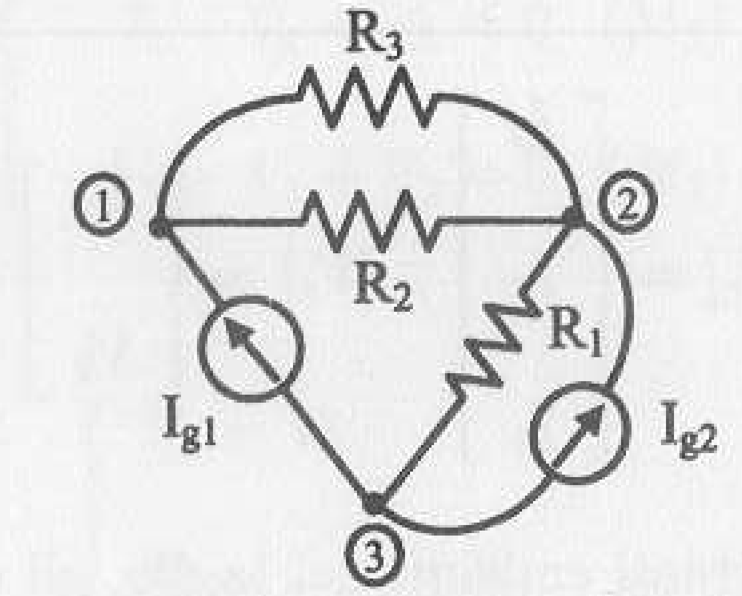
$$E_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{17}{12} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{17}{12} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{4}$$

$$E_1 = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad [V]$$

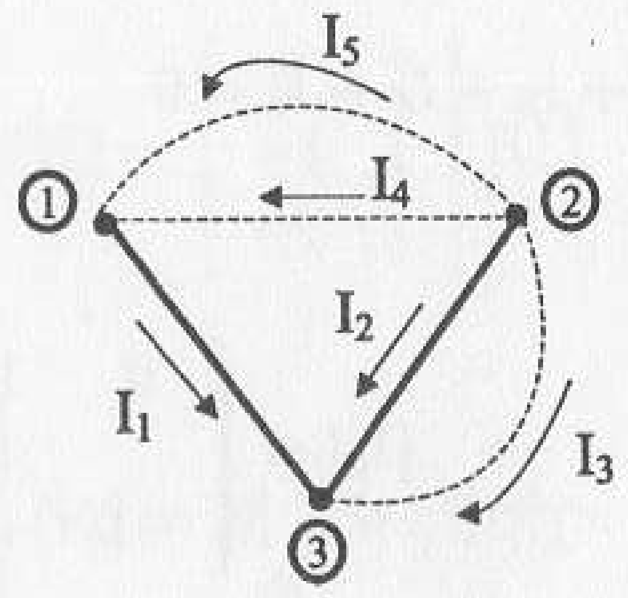


## Esercizio ~~1.4~~ OK

Dato il circuito in figura:




e scelto l'albero in figura:




verificare che

$$[B] = -[A]^T$$

essendo

$$[I_a] + [A][I_c] = [0] \qquad [V_c] + [B][V_a] = [0]$$

rispettivamente gli equilibri di corrente ai tagli fondamentali e gli equilibri di tensione alle maglie fondamentali scritti in forma matriciale compatta, con:

$[I_a]$ = Vettore delle correnti sui rami dell'albero

$[I_c]$ = Vettore delle correnti sui rami del co-albero

$[V_c]$ = Vettore delle tensioni sui rami del co-albero

$[V_a]$ = Vettore delle tensioni sui rami dell'albero

### Svolgimento

Assumendo la notazione ed i versi delle correnti adottati nella precedente scelta dell'albero si ha:

$$[I_a] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} ; \; [I_c] = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} ; \; [V_a] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} ; \; [V_c] = \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

Prese come positive le correnti entranti nel taglio, gli equilibri di corrente ai 2 tagli fondamentali (equilibri sui nodi 1 e 2) possono essere scritti come segue:

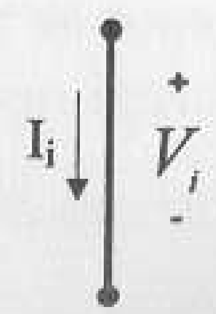
$$\begin{cases} I_4 + I_5 - I_1 = 0 & (T_1) \\ I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0 & (T_2) \end{cases}$$

Riordinando si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = I_4 + I_5 \\ I_2 = -I_3 - I_4 - I_5 \end{cases} \Rightarrow [I_a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} [I_c] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; [I_a] + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [I_c] = [0] \; \Rightarrow \; [A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerati i versi delle tensioni coordinati con quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore in figura:




e percorrendo le maglie fondamentali in senso antiorario (partendo sempre dal nodo 3), gli equilibri di tensione alle maglie fondamentali possono essere scritti come segue:



$$\begin{cases} -V_2 + V_3 = 0 \;\; (M_1) \\ -V_4 - V_1 + V_2 = 0 \;\; (M_2) \\ -V_5 - V_1 + V_2 = 0 \;\; (M_3) \end{cases}$$

riordinando:

$$\begin{cases} V_3 = V_2 \\ V_4 = -V_1 + V_2 \\ V_5 = -V_1 + V_2 \end{cases} \Rightarrow$$

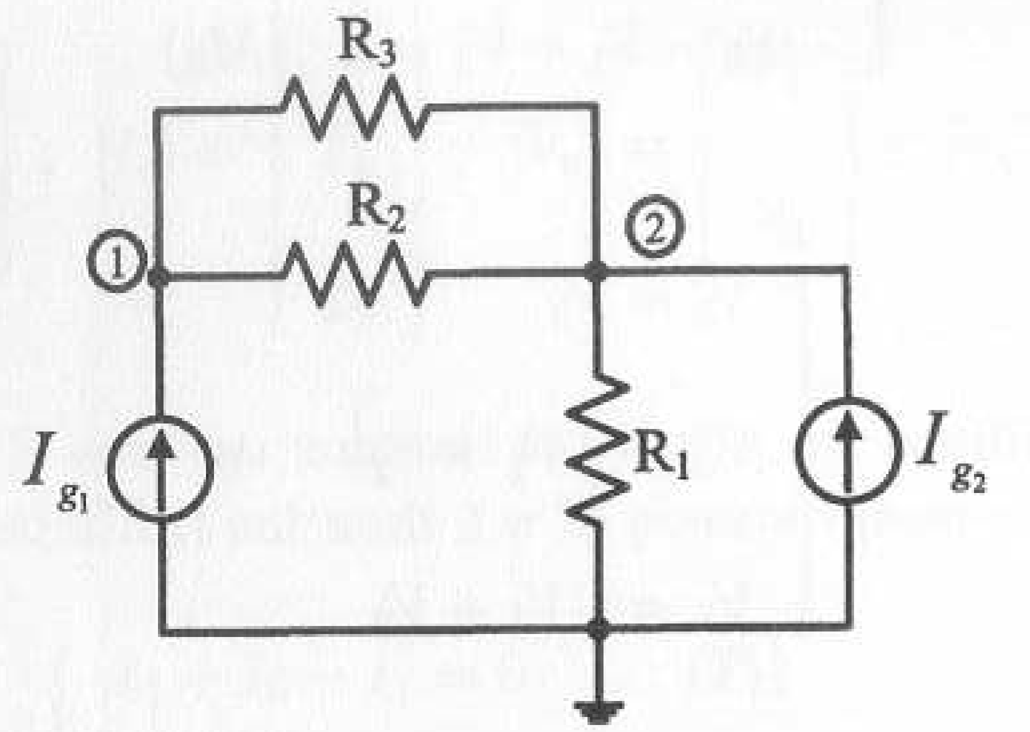
$$\Rightarrow \; [V_c] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [V_a] \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; [V_c] + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [V_a] = [0] \; \Rightarrow \; [B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -[A]^T$$

# Esercizio 1.5

OK CALCOLO TENSIONI CON METODO DEI NODI

Dato il circuito in figura, verificare l'ortogonalità dei vettori delle tensioni e delle correnti:




$$R_1 = R_2 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 4\,[\Omega]\ ;\ I_{g_1} = 2\ [A]\ ;\ I_{g_2} = 3\ [A].$$

## Svolgimento

Occorre calcolare tutte le tensioni e le correnti presenti sui bipoli del circuito. Scelto il nodo di riferimento come in figura è possibile calcolare le tensioni di nodo $E_1$ ed $E_2$ tramite il metodo di analisi su base nodi. Il sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Risolvendo con il metodo di Cramer:

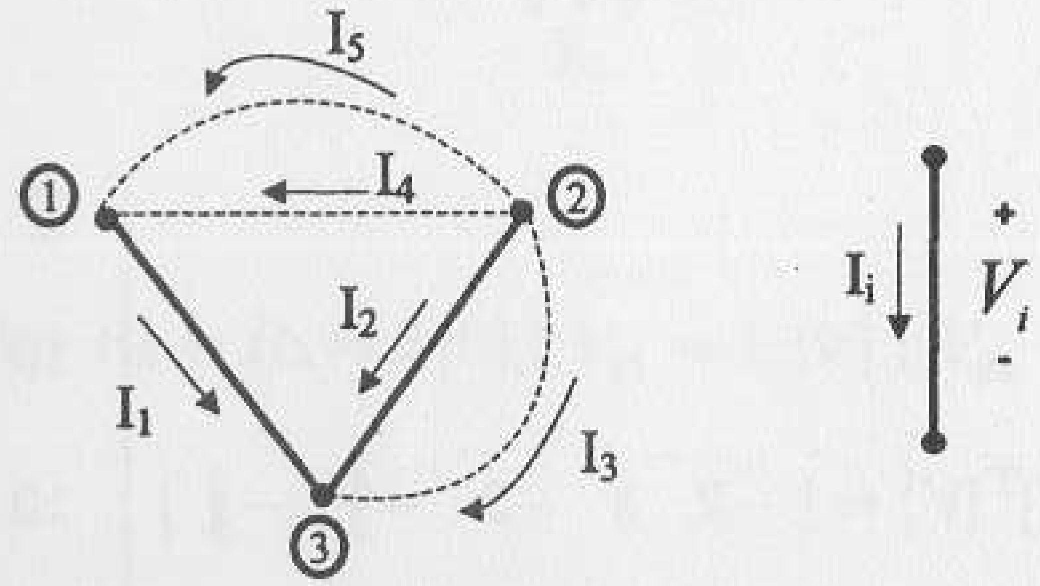
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = \frac{15}{16} - \frac{9}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}\,;$$



$$E_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ 3 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = \frac{8}{3}\left(\frac{10}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{19}{4} = \frac{2\cdot 19}{3} = \frac{38}{3}\,;$$

$$E_2 = \frac{8}{3} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 \\ -\frac{3}{4} & 3 \end{vmatrix} = \frac{8}{3}\left(\frac{9}{4} + \frac{6}{4}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{15}{4} = 2\cdot 5 = 10\,.$$

Con riferimento ai versi delle correnti in figura:




e delle conseguenti tensioni, avendo adottato la convenzione dell'utilizzatore, si ha:

$$I_1 = -I_{g_1} = -2\,;$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_1} = \frac{10}{2} = 5\,;$$

$$I_3 = -I_{g_2} = -3\,;$$

$$I_4 = \frac{E_2 - E_1}{R_2} = \frac{10 - \frac{38}{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{30-38}{3} = -\frac{4}{3}\,;$$

$$I_5 = \frac{E_2 - E_1}{R_3} = \frac{10 - \frac{38}{3}}{4} = -\frac{2}{3}\,.$$

Inoltre:

$$V_1 = E_1 = \frac{38}{3};$$

$$V_2 = E_2 = 10;$$

$$V_3 = E_2 = 10;$$

$$V_4 = V_5 = E_2 - E_1 = -\frac{8}{3}.$$

Pertanto:

$$[I]^T[V] = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{38}{3} \\ 10 \\ 10 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$[I]^T[V] = -\frac{38}{3} \cdot 2 + 50 - 30 + \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{16}{9} = -\frac{76}{3} + 20 + \frac{32}{9} + \frac{16}{9}$$

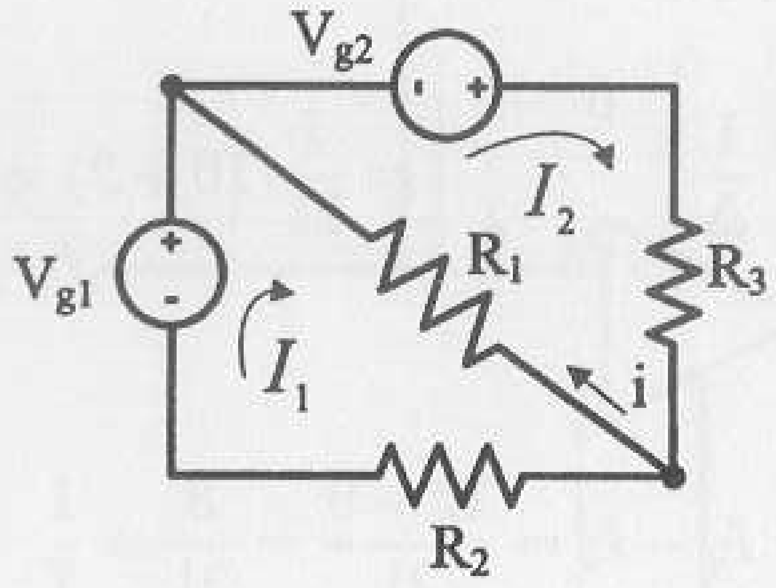
$$[I]^T[V] = \frac{-76 \cdot 3 + 20 \cdot 9 + 48}{9} = 0$$





## Esercizio ~~1.6~~ OK

Dato il circuito in figura, calcolare la corrente $i$ che scorre sul resistore $R_1$ nel verso indicato:




$$R_1 = 2\,[\Omega]\,;\; R_2 = R_3 = 3\,[\Omega]\,;\; V_{g_1} = 1\ [V]\,;\; V_{g_2} = 2\ [V].$$

### Svolgimento

Applicando il metodo di analisi su base maglie e adottando il verso delle correnti fittizie di maglia in figura, il sistema risolvente può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{g_1} \\ V_{g_2} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di Cramer, il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21\,.$$

Pertanto:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{21}(5+4) = \frac{9}{21};$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{21}(10+2) = \frac{12}{21};$$

e quindi:

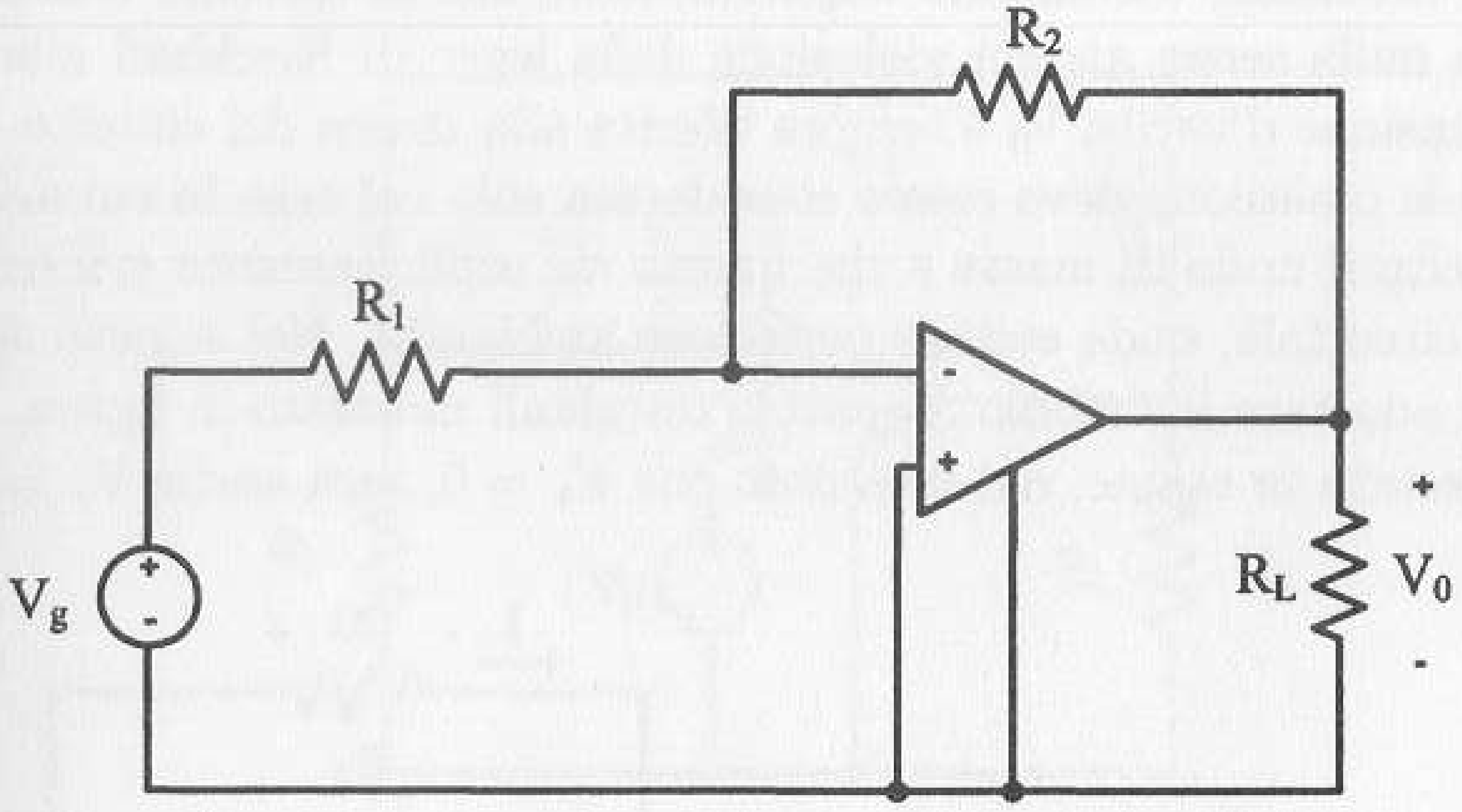
$$i = I_2 - I_1 = \frac{12-9}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \quad [A]$$





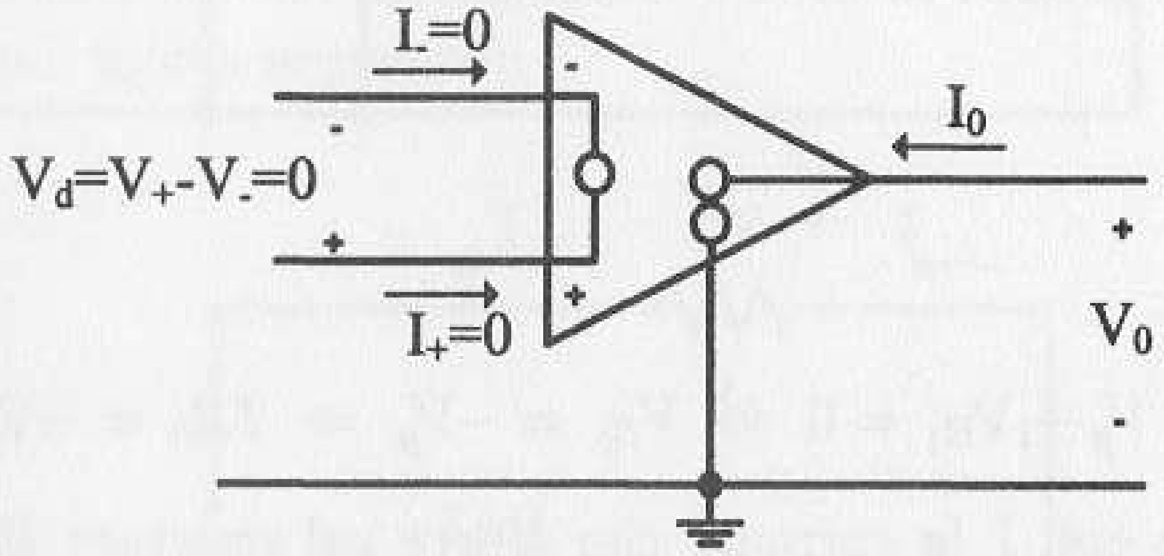
## Esercizio 1.7 OK

Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V_0$ nel verso indicato.




### Svolgimento

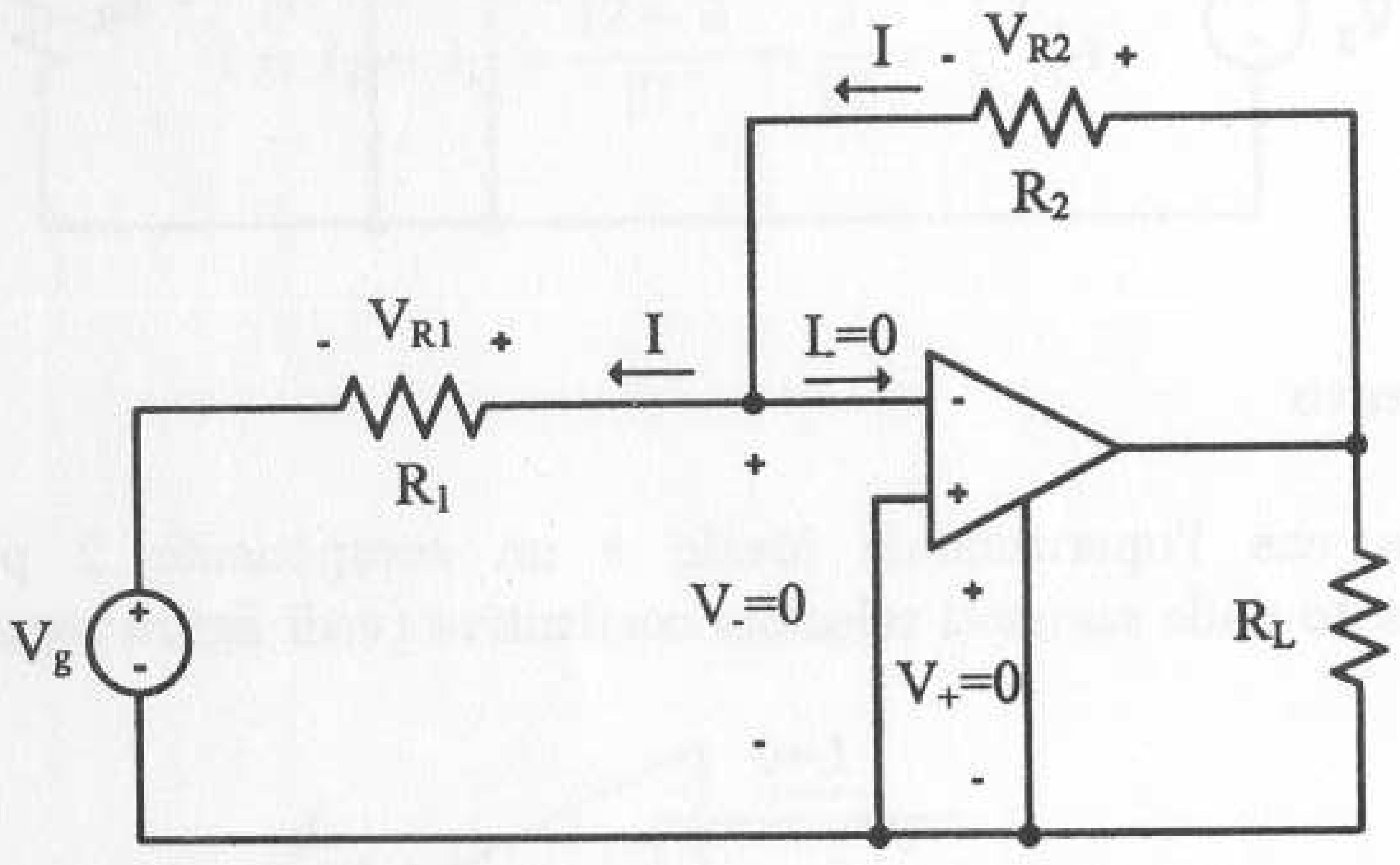
Si ricorda che l'operazionale ideale è un componente 2 porte attivo, caratterizzato dalle seguenti relazioni costitutive (vedi figura seguente):




$$\begin{cases} I_0,\ V_0 \quad \text{qualunque} \\ I_- = I_+ = 0 \\ V_d = V_+ - V_- = 0 \end{cases}$$

Il morsetto che esce dalla parte inferiore del simbolo grafico dell'operazionale ideale non sempre corrisponde fisicamente ad un terminale del circuito integrato. Esso rappresenta il collegamento verso massa del circuito di alimentazione dell'integrato stesso. Rendere esplicito tale collegamento ha l'indubbio vantaggio di evitare una violazione della legge di Kirchhoff alle correnti; infatti, in sua assenza, considerando il taglio che comprende i soli morsetti di ingresso e quello di uscita, risulterebbe necessariamente nulla la corrente d'uscita $I_0$,

contro il fatto fisico che tale corrente esiste e si scarica verso massa attraverso il circuito di alimentazione.
Stabilito questo fatto, il collegamento a massa può anche essere omesso nel simbolo circuitale, assumendo implicitamente che la corrente d'uscita può essere non nulla senza alcuna violazione della legge di Kirchhoff alle correnti e che la tensione d'uscita $V_0$ è sempre riferita alla massa del circuito. Evidentemente tale omissione deve essere considerata solo nel caso in cui nel circuito è stato scelto il nodo di massa e che questo sia esplicitamente evidenziato nello schema circuitale, onde evitare pericolose ambiguità. Nel seguito si preferisce tuttavia adottare il simbolo a quattro terminali mostrato in figura.
Per il circuito in esame, dal momento che $V_+ = 0$, sarà anche $V_- = 0$:




Di conseguenza:

$$V_g + V_{R_1} = 0 \Rightarrow V_{R_1} = -V_g \Rightarrow IR_1 = -V_g\,,$$

avendo indicato con $I$ la corrente che scorre sul resistore $R_1$, da destra verso sinistra, come riportato in figura. Inoltre, la corrente su $R_2$ è proprio pari ad $I$, dal momento che $I_- = 0$. Ricordando che la tensione $V_-$ è nulla si ha che

$$V_0 = V_{R_2} = R_2 I \Rightarrow I = \frac{V_0}{R_2}\,,$$

quindi

$$\frac{V_0}{R_2}R_1 = -V_g \Rightarrow V_0 = -\frac{R_2}{R_1}V_g\,.$$

E' interessante notare che l'espressione di $V_0$ è indipendente dal bipolo di carico $R_L$. Lo schema circuitale trattato è inoltre noto come "operazionale ideale in configurazione invertente".

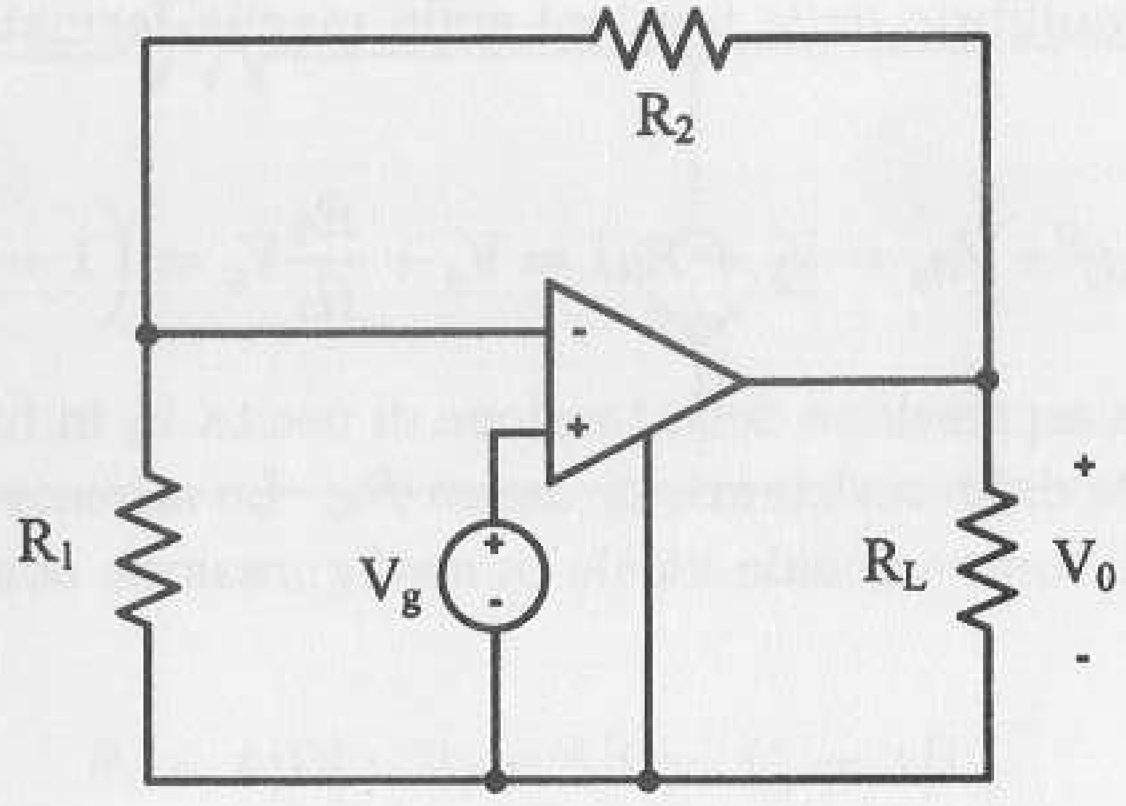




# Esercizio 1.8

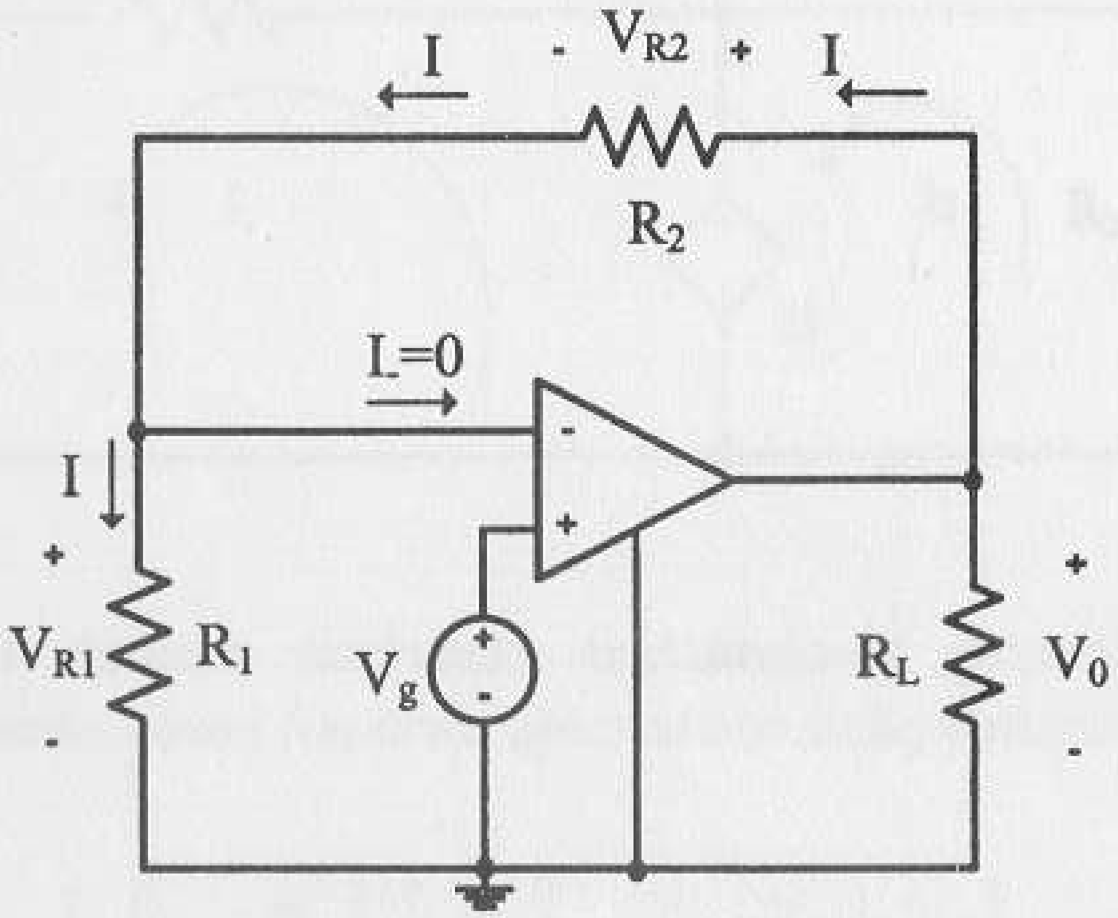
OK

Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V_0$ nel verso indicato.




## Svolgimento

Poiché $V_d = 0$, il potenziale al morsetto invertente dell'operazionale (rispetto alla massa) è pari a $V_g$. Di conseguenza è nota la caduta di tensione $V_{R_1}$ sul resistore $R_1$ (vedi figura seguente):



Pertanto:

$$V_{R_1} = V_g \Rightarrow V_g = R_1 I \Rightarrow I = \frac{V_g}{R_1}.$$

Considerando l'equilibrio delle tensioni sulla maglia formata dai resistori $R_1$, $R_2$ e $R_L$, si ha:

$$V_0 = V_{R_1} + V_{R_2} = V_g + R_2 I = V_g + \frac{R_2}{R_1} V_g = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_g.$$

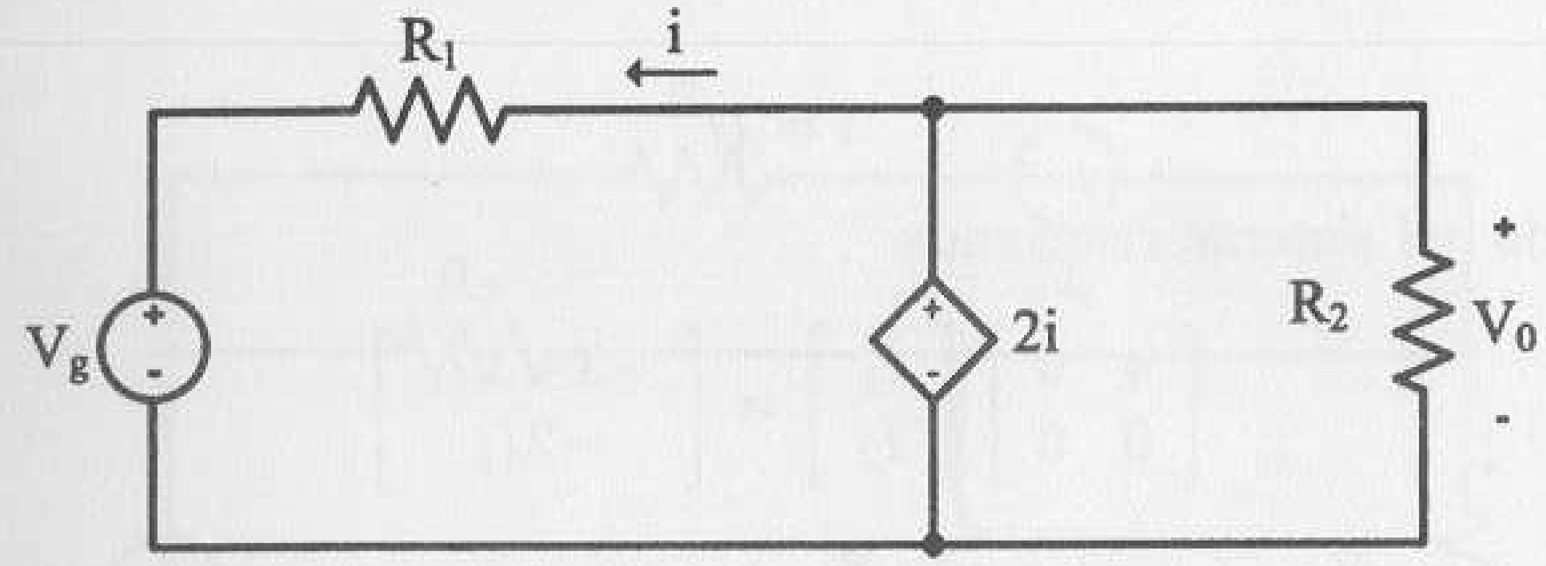
Si noti che questa espressione della tensione di uscita $V_0$ in funzione dell'ingresso $V_g$ non dipende dalla resistenza di carico $R_L$. Lo schema circuitale trattato prende il nome di "operazionale ideale in configurazione non invertente".





## Esercizio 1.9 OK

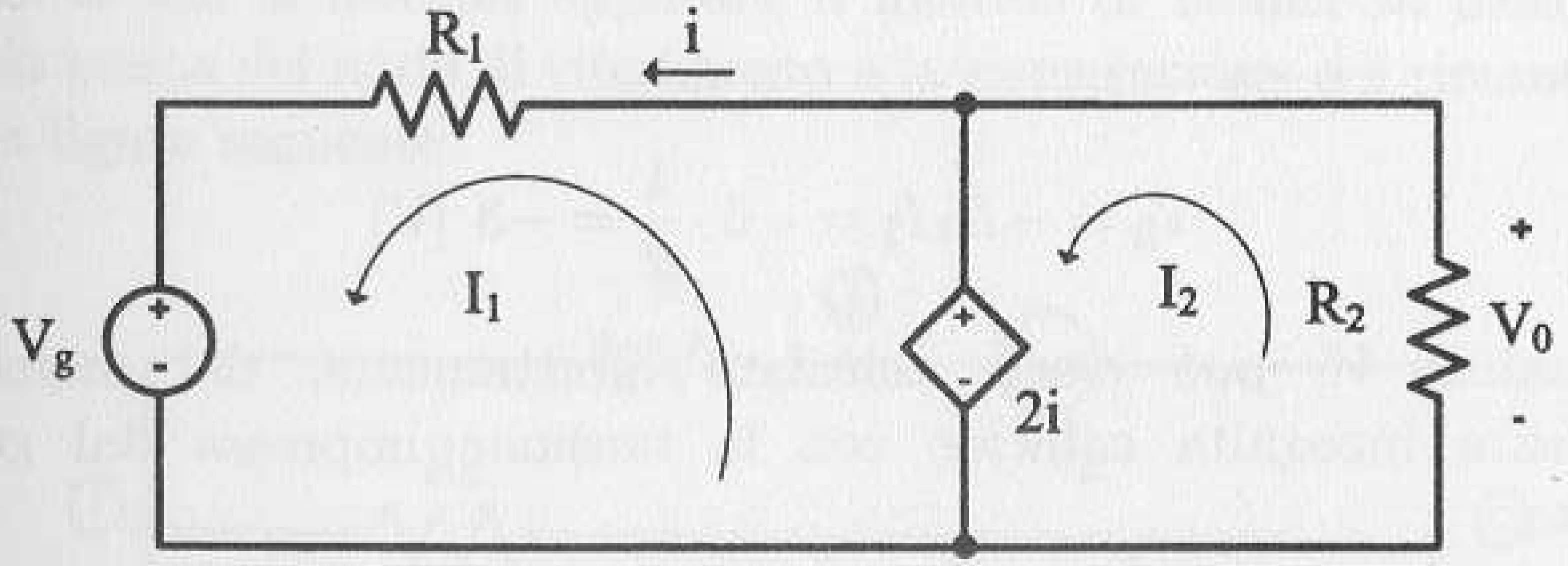
Dato il circuito in figura, determinare la tensione $V_0$ nel verso indicato.




$$R_1 = 4\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 6\,[\Omega]\ ;\ V_g = 3\,[V].$$

### Svolgimento

Applicando il metodo di analisi su base maglie, si consideri il verso delle due correnti di maglia come indicato nella figura seguente.




Si può scrivere il sistema risolvente trattando il generatore di tensione controllato in corrente come fosse un generatore indipendente di tensione:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_g + 2i \\ -2i \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema di 2 equazioni nelle 3 incognite $I_1$, $I_2$, $i$. La terza equazione necessaria a rendere il sistema risolvente determinato è data dall'espressione della variabile di controllo in termini delle correnti fittizie di maglia. In questo caso si ha banalmente:

$$i = I_1$$

Sostituendo nel sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2I_1 \\ -2I_1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{cases} 4I_1 = -3 + 2I_1 \\ 6I_2 = -2I_1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si può calcolare immediatamente $I_1$:

$$(4-2)I_1 = -3 \Rightarrow I_1 = -\frac{3}{2}.$$

Sostituendo tale valore di $I_1$ nella $2^a$ equazione del precedente sistema, otteniamo:

$$I_2 = -\frac{2}{6}I_1 = -\frac{1}{3}I_1 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto:

$$V_0 = -R_2 I_2 = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \; [V]$$

In alternativa $V_0$ può essere calcolato direttamente, dal momento che la grandezza incognita coincide con la tensione impressa dal generatore controllato:

$$V_0 \equiv 2i = 2I_1 = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \; [V]$$

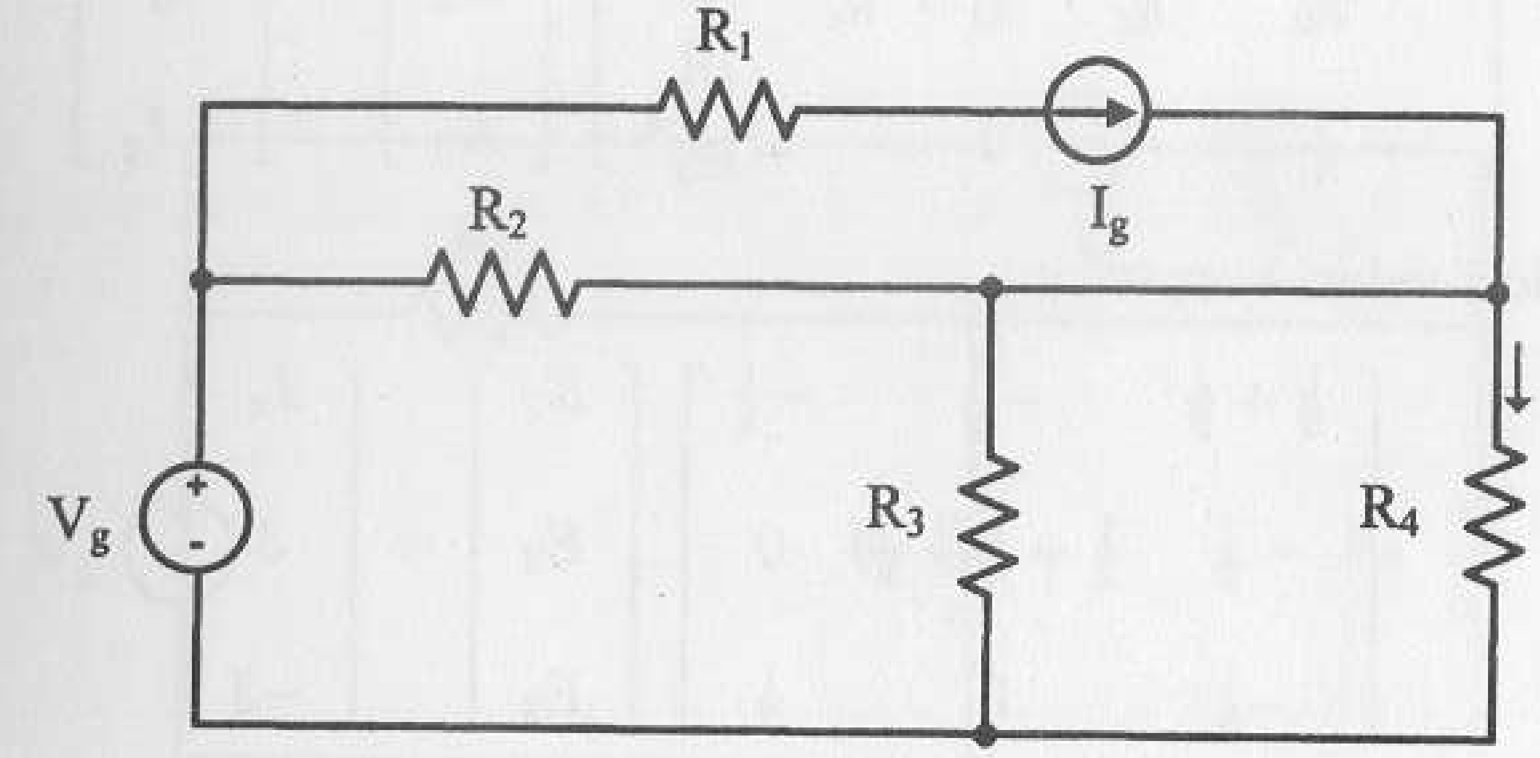




## Esercizio 1.10

OK

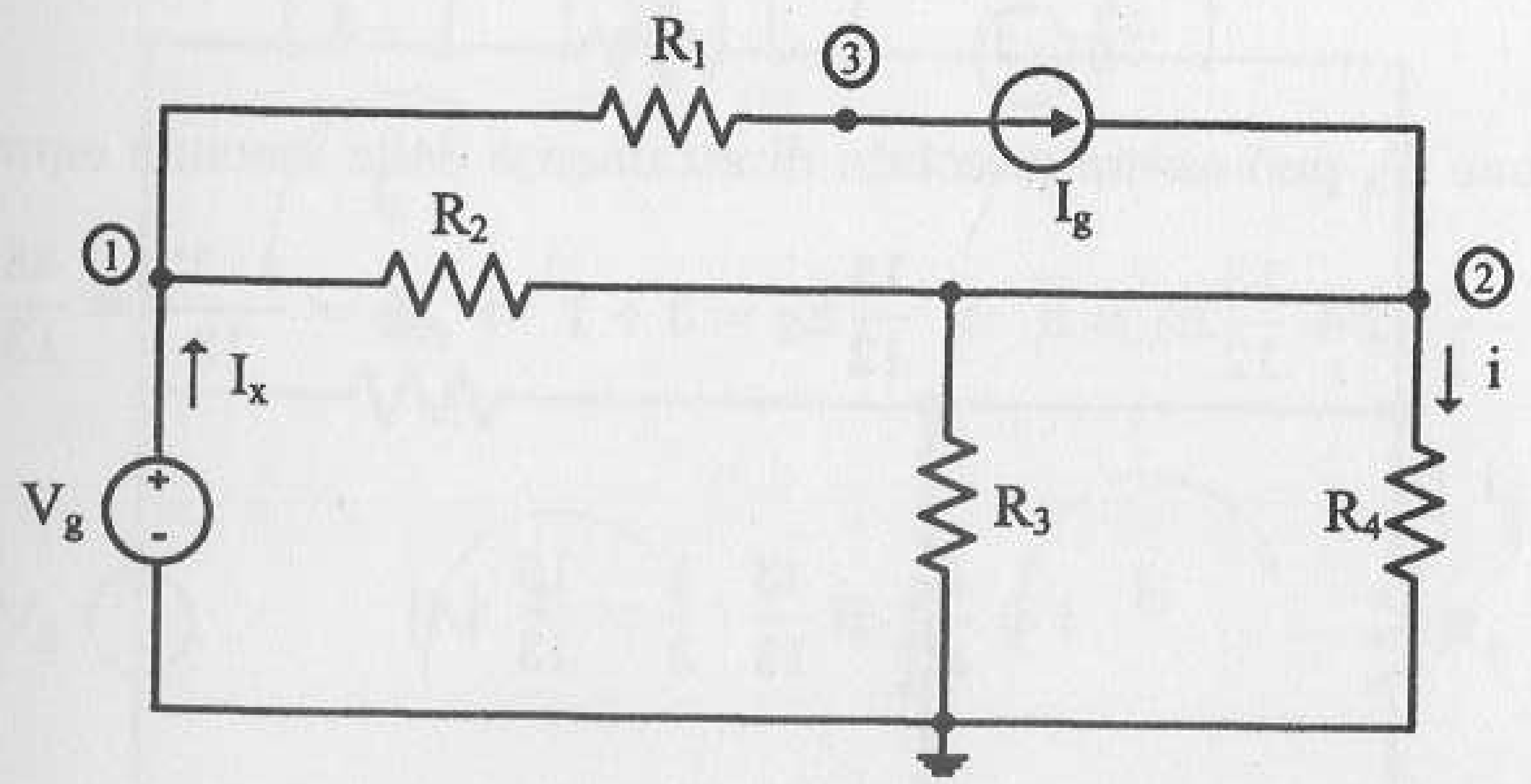
Dato il circuito in figura, determinare la corrente $i$ che scorre sul resistore $R_4$ nel verso indicato.




$$R_1 = R_2 = 2\,[\Omega]\;;\; R_3 = 4\,[\Omega]\;;\; R_4 = 3\,[\Omega]\;;\; V_g = 2\,[V]\;;\; I_g = 3\,[A].$$

### Svolgimento

Nell'ipotesi in cui si intenda applicare il metodo di analisi su base nodi, si consideri la scelta del nodo di riferimento e la numerazione dei rimanenti nodi come nella figura seguente:




Per la presenza del generatore di tensione, si introduce come incognita aggiuntiva la corrente $I_x$ uscente dal morsetto positivo.

Il sistema risolvente può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ I_g \\ -I_g \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite $E_1$, $E_2$, $E_3$, $I_x$. Si può scrivere la quarta equazione mancante considerando il vincolo sulle tensioni di nodo imposto dal generatore indipendente di tensione. In questo caso si ha, banalmente:

$$E_1 = V_g = 2\,.$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{12} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La tensione $E_2$ può essere calcolata direttamente dalla seconda equazione:

$$-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{13}{12}E_2 = 3 \Rightarrow \frac{13}{12}E_2 = 3+1 \Rightarrow E_2 = \frac{4\cdot 12}{13} = \frac{48}{13}\,.$$

Quindi:

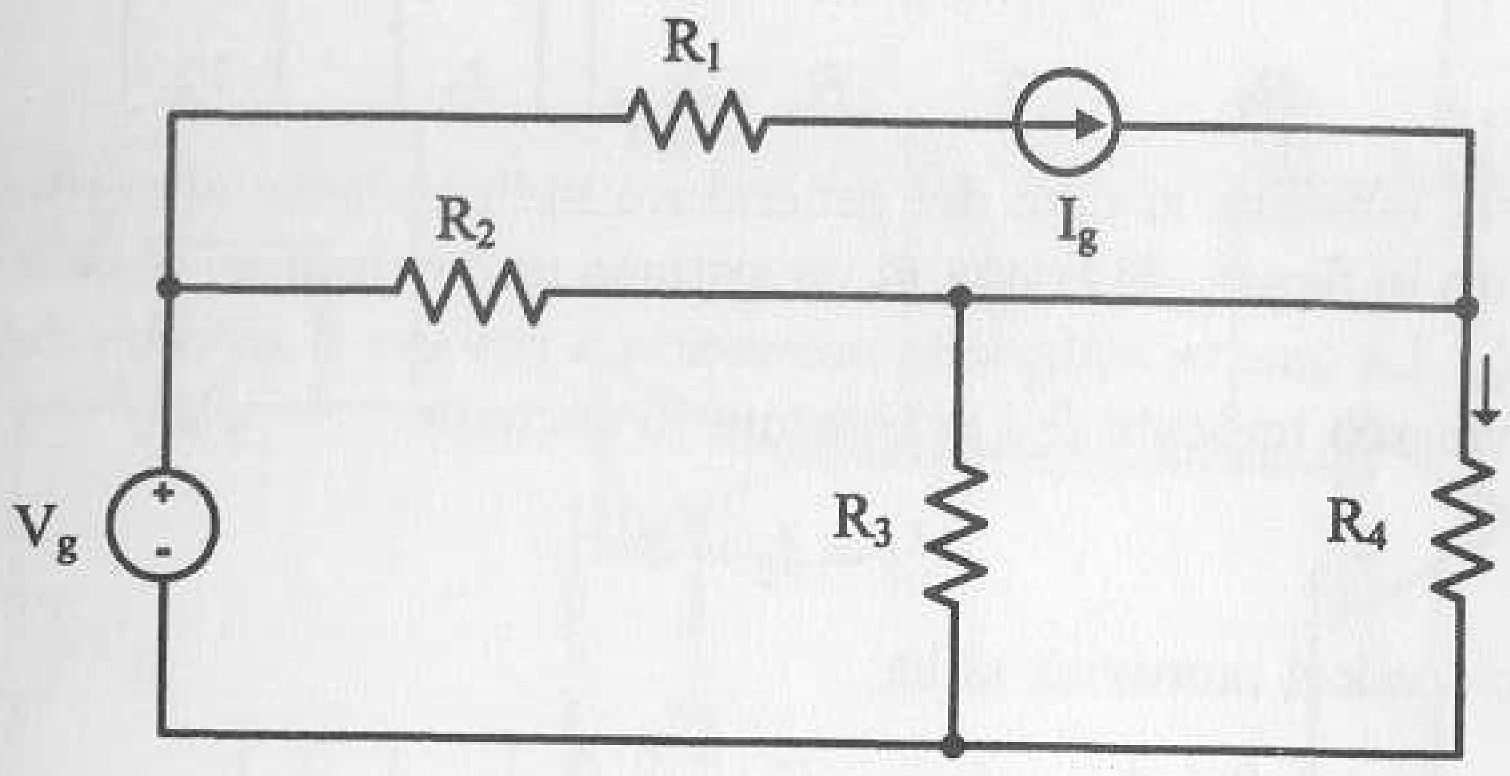
$$i = \frac{E_2}{R_4} = \frac{48}{13}\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{13}\ [A]$$





## Esercizio 1.11 OK

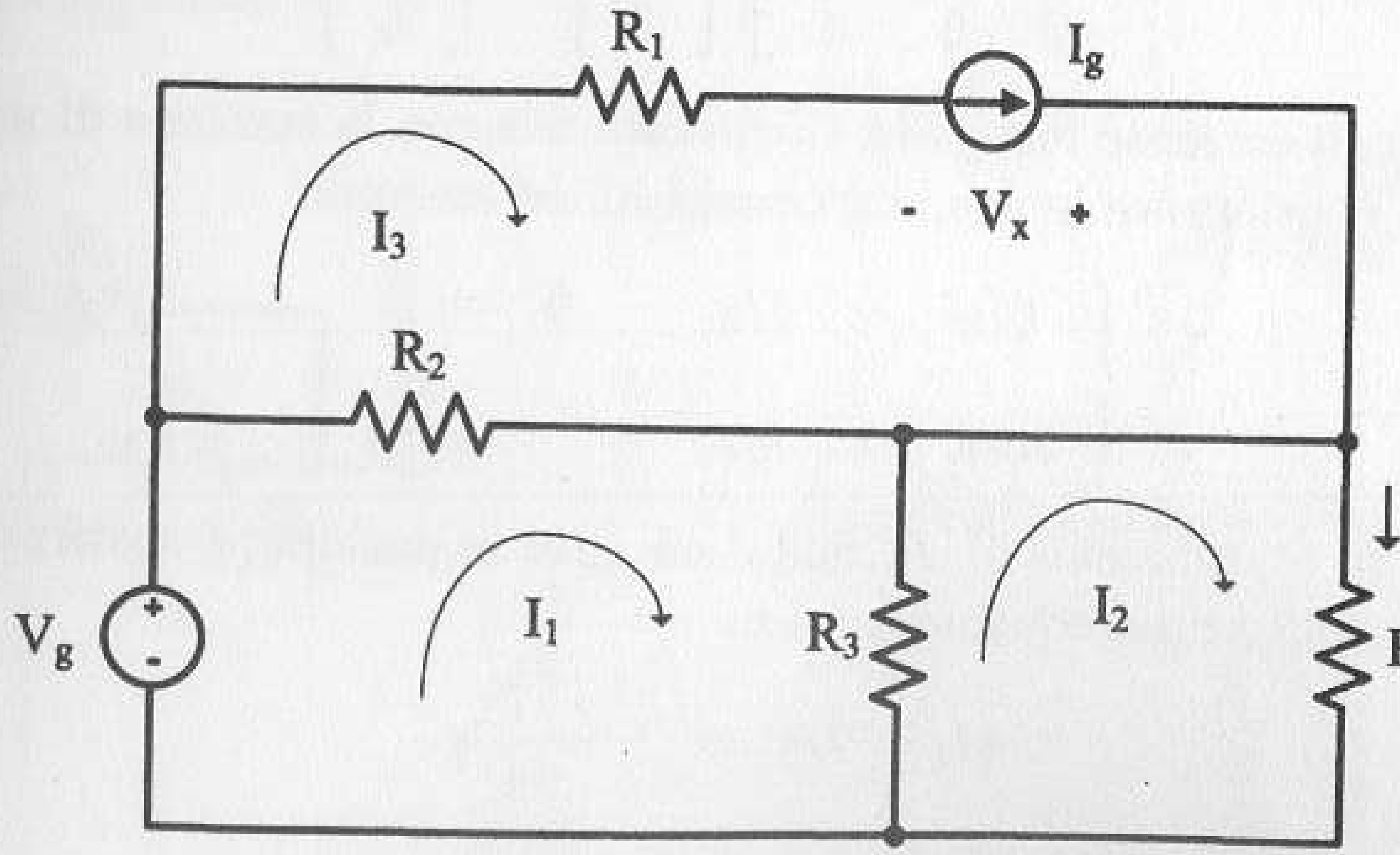
Dato il circuito in figura, determinare la corrente $i$ che scorre sul resistore $R_4$ nel verso indicato, utilizzando il metodo di analisi su base maglie.




$$R_1 = R_2 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 4\,[\Omega]\ ;\ R_4 = 3\,[\Omega]\ ;\ V_g = 2\,[V]\ ;\ I_g = 3\,[A].$$

### Svolgimento

Stabiliti i versi delle correnti fittizie di maglia come nella seguente figura:




Il sistema risolvente può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} R_2+R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_3+R_4 & 0 \\ -R_2 & 0 & R_1+R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ V_x \end{bmatrix}$$

essendo $V_x$ la tensione ai capi del generatore indipendente di corrente, con il verso indicato in figura. Si tratta di un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite $I_1$, $I_2$, $I_3$, $V_x$. La quarta equazione necessaria a rendere il sistema determinato è data dal vincolo imposto dal generatore di corrente:

$$I_3 = I_g = 3\,.$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{bmatrix} 2+4 & -4 & -2 \\ -4 & 4+3 & 0 \\ -2 & 0 & 2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ V_x \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ V_x \end{bmatrix}$$

Per calcolare la corrente incognita $i$ (che coincide con la corrente di maglia $I_2$) è sufficiente considerare le prime 2 equazioni del sistema:

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 - 6 = 2 \\ -4I_1 + 7I_2 = 0 \end{cases}$$

Ricavando $I_1$ in funzione di $I_2$ dalla seconda equazione e sostituendo tale espressione nella prima equazione, si ha:

$$4I_1 = 7I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{7}{4}I_2$$

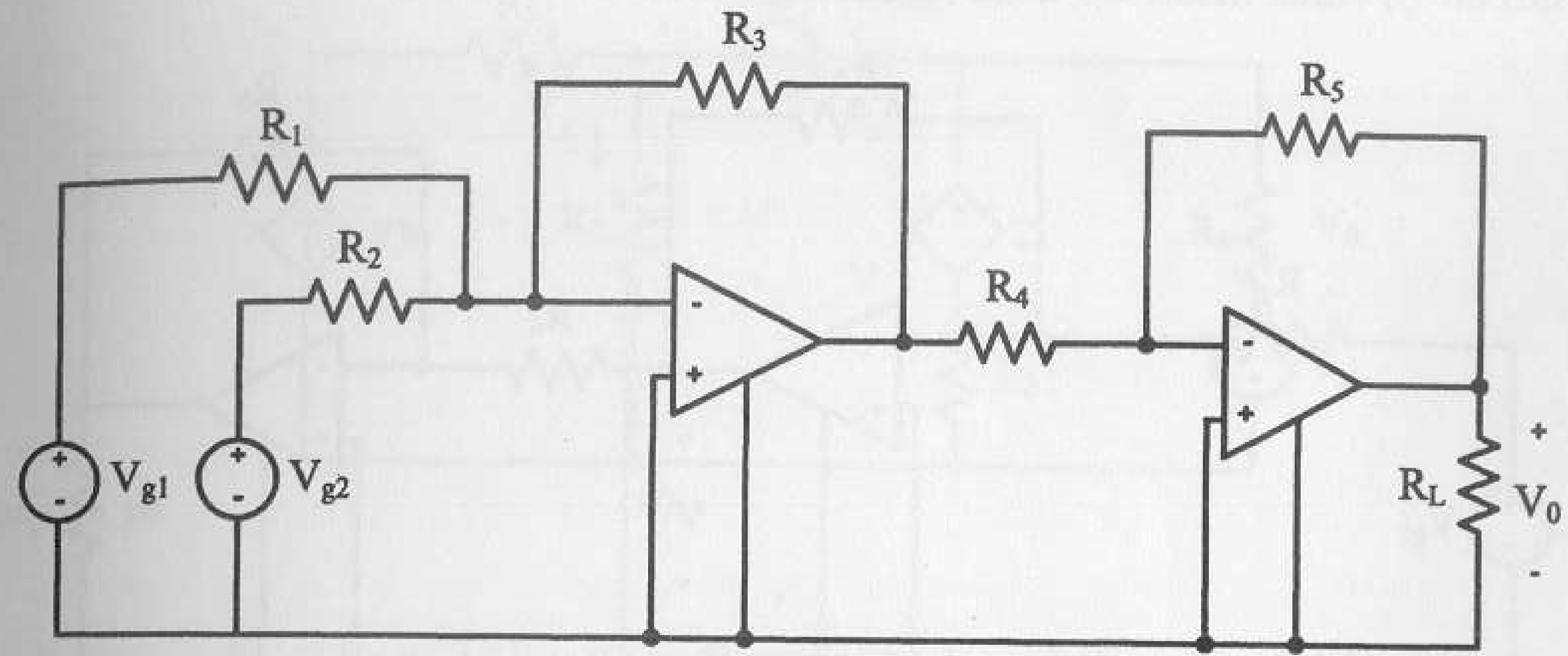
$$6\left(\frac{7}{4}I_2\right) - 4I_2 = 8 \Rightarrow I_2\left(\frac{21}{2} - 4\right) = 8 \Rightarrow \frac{13}{2}I_2 = 8 \Rightarrow I_2 = i = \frac{16}{13}\ [A]$$





## Esercizio 1.12 OK

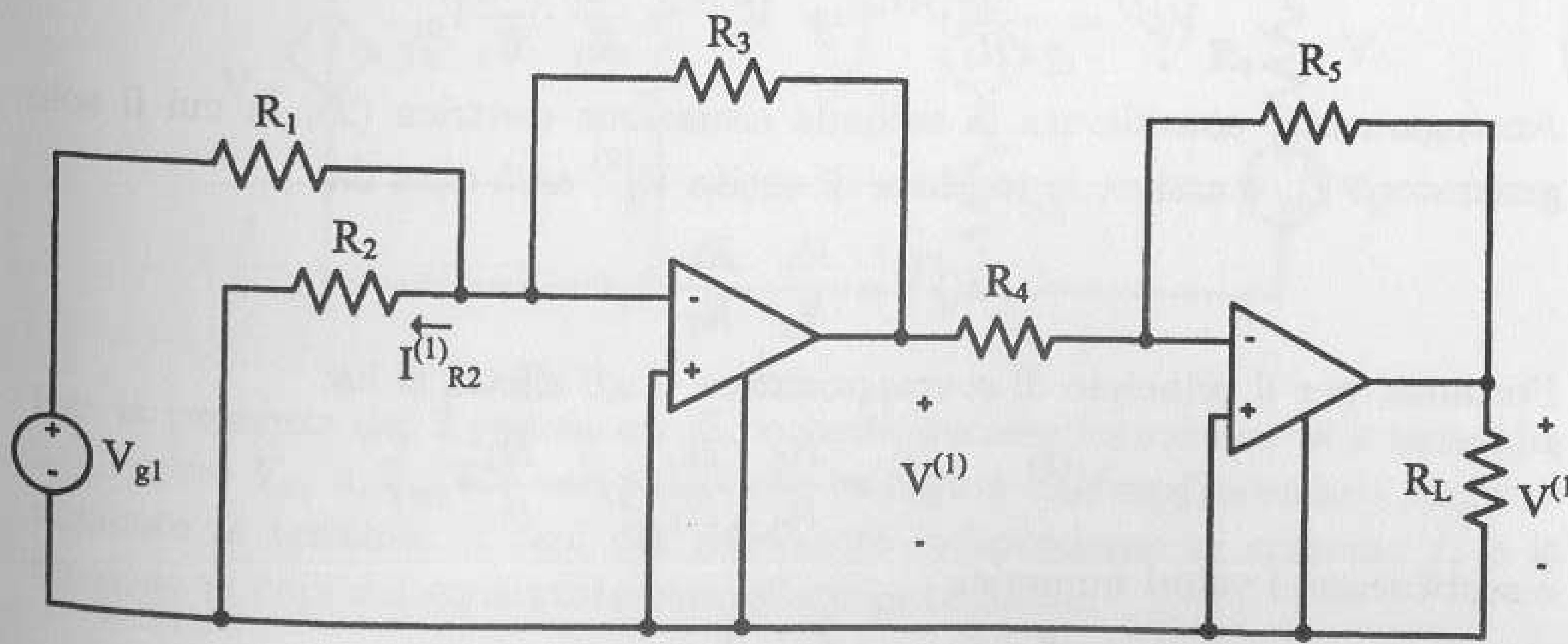
Dato il circuito in figura, calcolare la tensione di uscita $V_0$ in funzione delle tensioni impresse dai generatori $V_{g_1}$ e $V_{g_2}$.



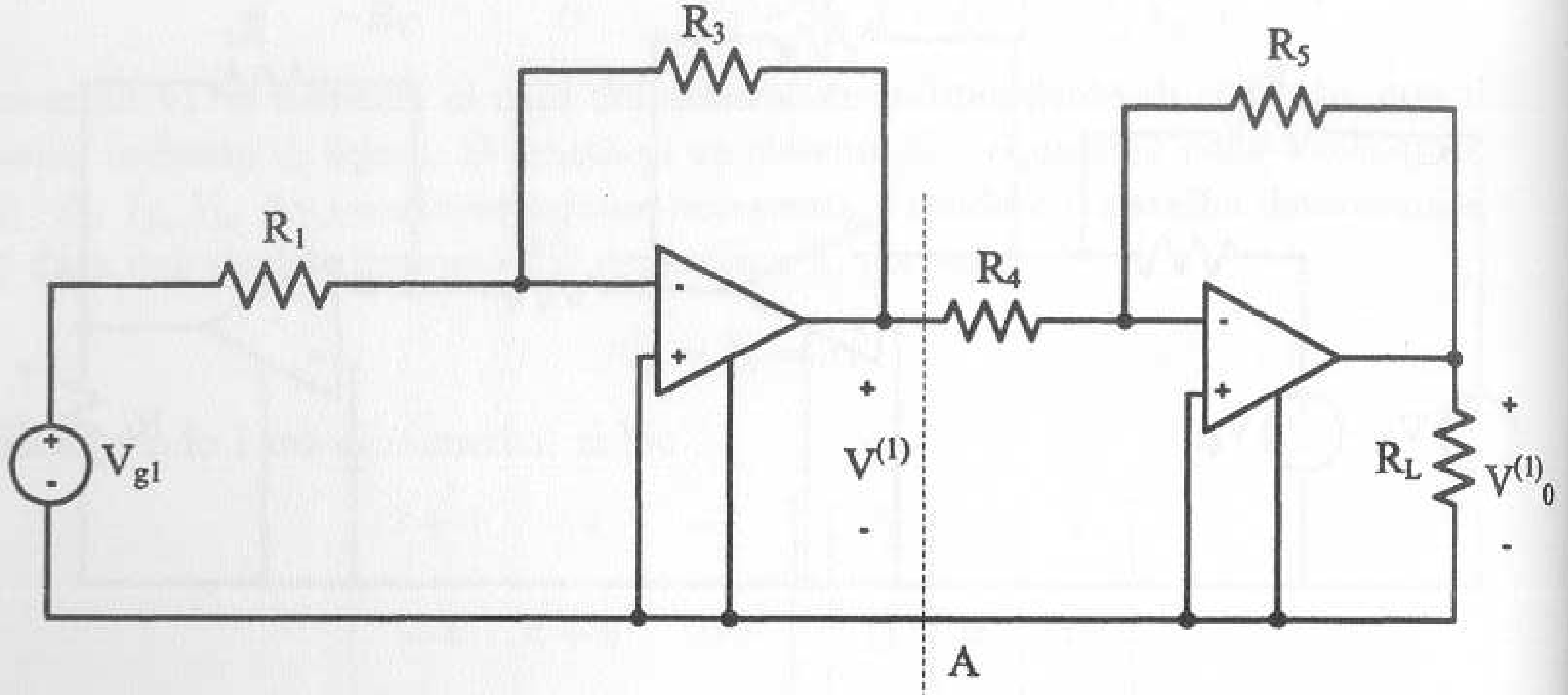

$$R_1 = R_2 = R_3 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_4 = R_5 = 4\,[\Omega].$$

### Svolgimento

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si consideri la prima situazione elettrica (1), nella quale è attivo il solo generatore $V_{g_1}$, come mostrato nella figura seguente:



Dal momento che il resistore $R_2$ è connesso ai morsetti invertente e non invertente, e che questi sono al medesimo potenziale elettrico, la tensione ai capi di $R_2$ è nulla; di conseguenza è nulla anche la corrente $I_{R_2}^{(1)}$. Pertanto il resistore $R_2$ può essere sostituito da un bipolo "circuito aperto" (ossia eliminato dal circuito), come mostrato nella figura seguente:




Il circuito così ottenuto è costituito dalla cascata di 2 operazionali in configurazione invertente. Pertanto la tensione $V^{(1)}$ evidenziata in figura sarà:

$$V^{(1)} = -\frac{R_3}{R_1} V_{g_1},$$

indipendentemente dalla parte di circuito a destra del taglio $A$. Inoltre, indipendentemente dal resistore di carico $R_L$, si ha:

$$V_0^{(1)} = -\frac{R_5}{R_4} V^{(1)} \Rightarrow V_0^{(1)} = \frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{R_3}{R_1} V_{g_1}.$$

Analogamente, considerata la seconda situazione elettrica (2), in cui il solo generatore $V_{g_2}$ è attivo, la tensione di uscita $V_0^{(2)}$ sarà data da:

$$V_0^{(2)} = \frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{R_3}{R_2} V_{g_2}.$$

Pertanto, per il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} = \frac{R_5}{R_4}\left(\frac{R_3}{R_1} V_{g_1} + \frac{R_3}{R_2} V_{g_2}\right),$$

e sostituendo i valori numerici:

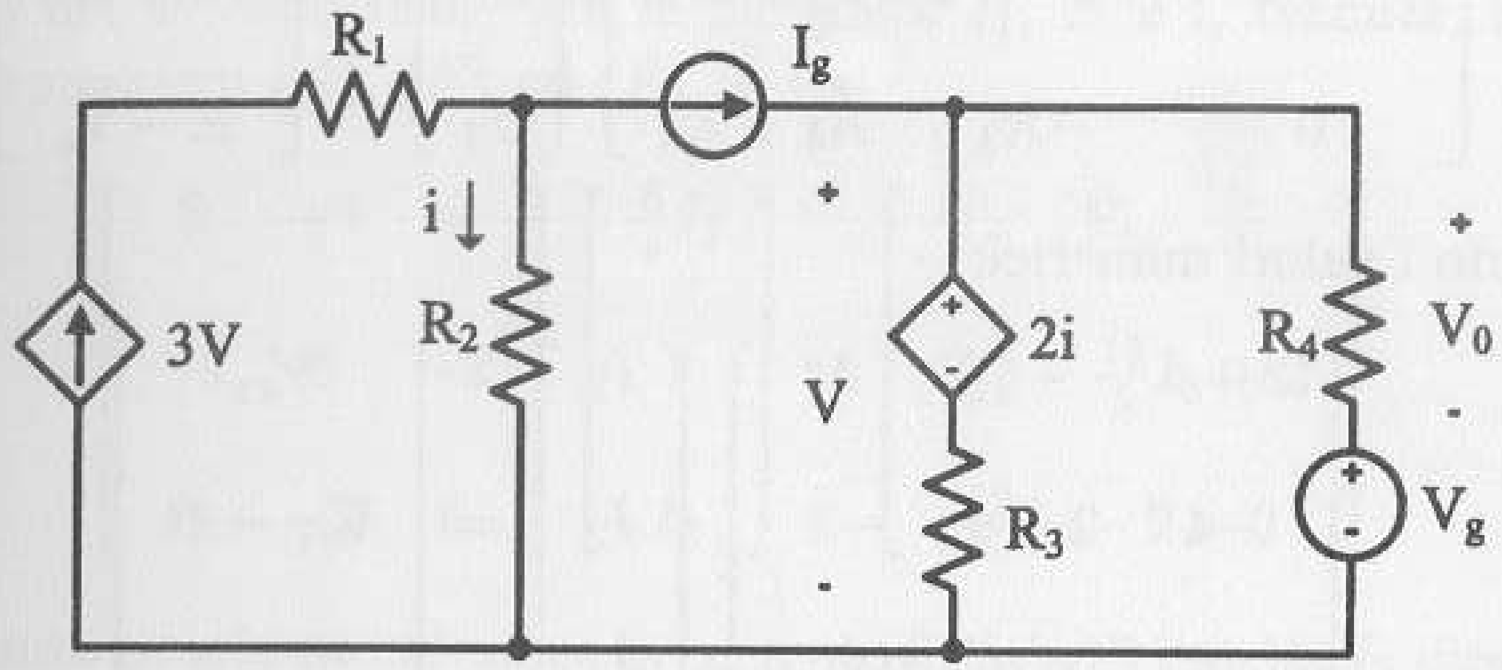
$$V_0 = \frac{4}{4}\left(\frac{2}{2} V_{g_1} + \frac{2}{2} V_{g_2}\right) = V_{g_1} + V_{g_2}\ [V]$$





## Esercizio 1.13 OK

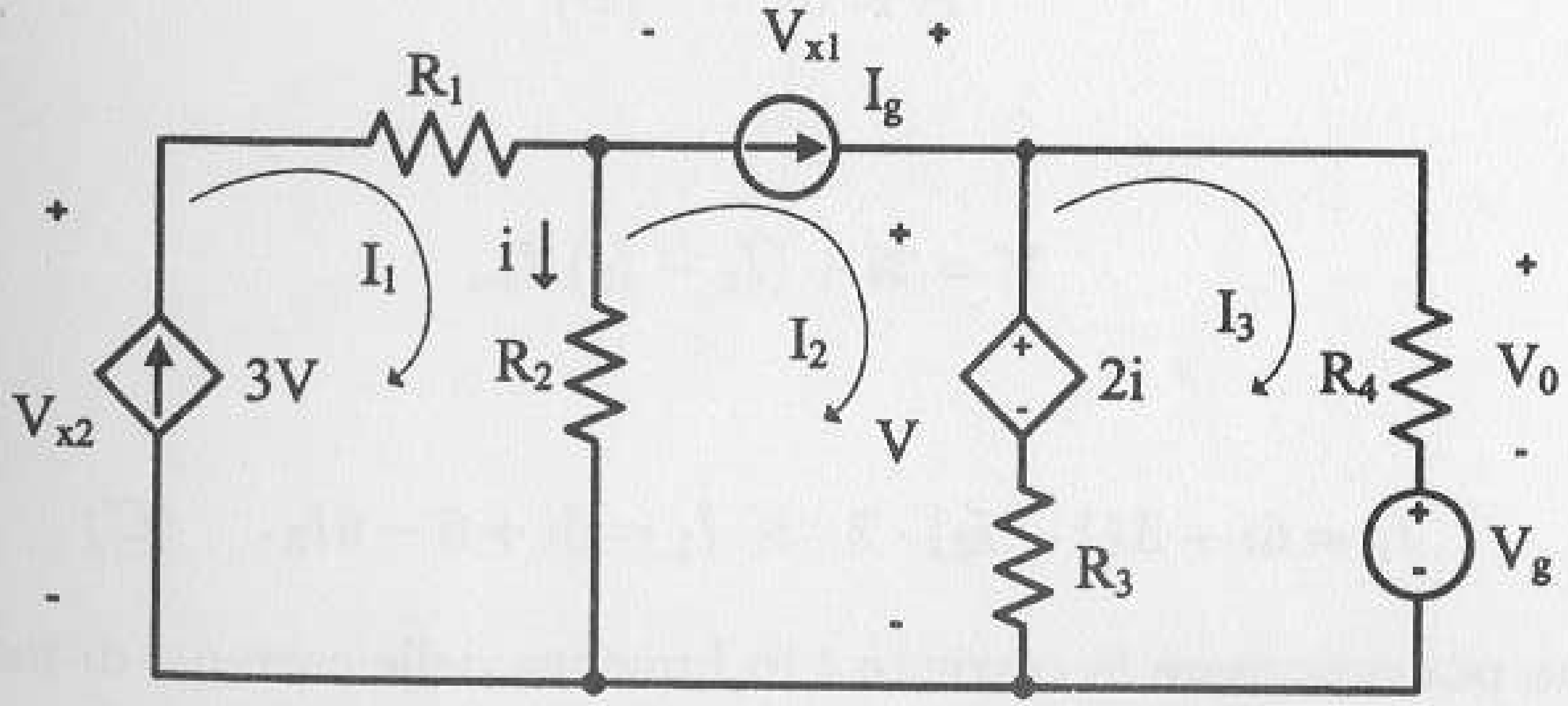
Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V_0$ sul resistore resistore $R_4$, nel verso indicato:




$$R_1 = R_3 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_2 = R_4 = 4\,[\Omega]\ ;\ V_g = 2\,[V]\ ;\ I_g = 1\,[A].$$

### Svolgimento

Adottando il metodo di analisi su base maglie, si fissino i versi delle correnti fittizie di maglia come indicato in figura:




Per la presenza dei 2 generatori di corrente occorre introdurre le 2 incognite aggiuntive $V_{x_1}$ e $V_{x_2}$ nel verso indicato in figura, che rappresentano rispettivamente la tensione ai capi del generatore indipendente di corrente $I_g$ e la tensione ai capi del generatore controllato in tensione.

Il sistema risolvente può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{x1} - 2i \\ 2i - V_g \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{bmatrix} 2+4 & -4 & 0 \\ -4 & 2+4 & -2 \\ 0 & -2 & 2+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{x1} - 2i \\ 2i - 2 \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni nelle 6 incognite $I_1$, $I_2$, $I_3$, $V_{x1}$, $V_{x2}$, $i$. Occorre pertanto scrivere altre 3 equazioni linearmente indipendenti. Anzitutto, la corrente di maglia $I_2$ coincide con $I_g$:

$$I_2 = I_g = 1 \,. \quad (A)$$

Inoltre:

$$I_1 = 3V \,. \quad (B)$$

Poiché

$$V = 2i + (I_2 - I_3)R_3 \,,$$

si ha:

$$I_1 = 6i + 3\,(1 - I_3)\cdot 2 \Rightarrow I_1 = 6i + 6 - 6I_3 \,. \quad (C)$$

Possiamo poi esprimere la corrente $i$ in funzione delle correnti di maglia:

$$i = I_1 - I_2 = I_1 - 1 \,; \quad (D)$$

sostituendo la relazione $(D)$ nella $(C)$, si ha:

$$I_1 = 6\,(I_1 - 1) + 6 - 6I_3 \Rightarrow I_1 = 6I_1 - 6 + 6 - 6I_3$$

$$5I_1 = 6I_3 \Rightarrow I_1 = \frac{6}{5} I_3 \,. \quad (E)$$





Inoltre dalla $(D)$ e dalla $(E)$ si ha:

$$i = \frac{6}{5} I_3 - 1 \Rightarrow 2i = \frac{12}{5} I_3 - 2 \,. \quad (F)$$

Sostituendo nel sistema risolvente le incognite $I_1$, $I_2$ e $i$, tramite, rispettivamente, le espressioni $(A)$, $(E)$ ed $(F)$, si ha:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} I_3 \\ 1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{x1} - \frac{12}{5} I_3 + 2 \\ \frac{12}{5} I_3 - 2 - 2 \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo calcolare la corrente fittizia di maglia $I_3$ direttamente dalla $3^a$ equazione:

$$-2 + 6I_3 = \frac{12}{5} I_3 - 4 \Rightarrow \frac{30 - 12}{5} I_3 = -4 + 2 \Rightarrow \frac{18}{5} I_3 = -2 \Rightarrow I_3 = -\frac{5}{9} \,.$$

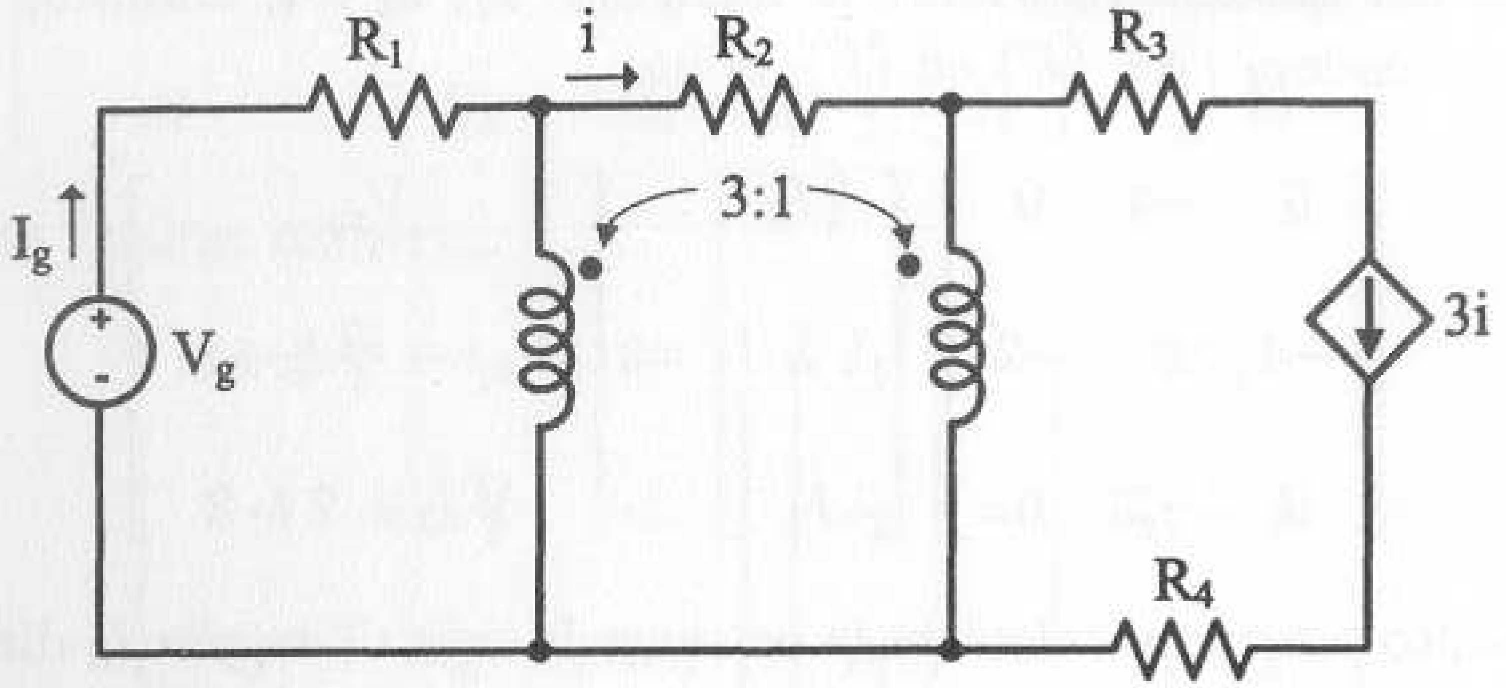
Pertanto:

$$V_0 = R_4 I_3 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{20}{9} \; [V]$$

# Esercizio 1.14

ok

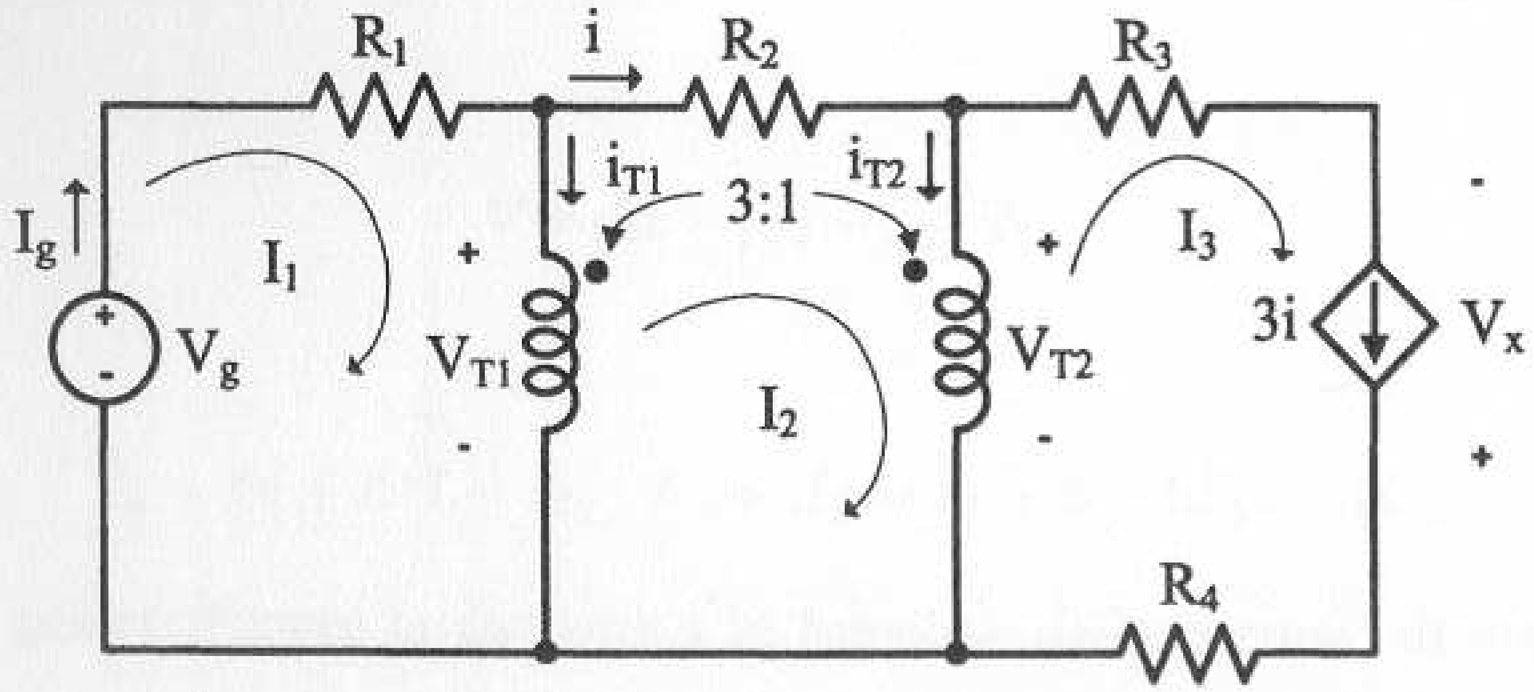
Dato il circuito in figura, calcolare, tramite il metodo di analisi su base maglie, la corrente $I_g$ erogata dal generatore indipendente di tensione.




$$R_1 = R_4 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 4\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 1\,[\Omega]\ ;\ V_g = 2\,[V].$$

**Svolgimento**

Fissati i versi delle correnti fittizie di maglia come nella figura seguente, si introduce come incognita aggiuntiva la tensione $V_x$ ai capi del generatore controllato, nel verso indicato:




Dati i versi indicati delle tensioni $V_{T_1}$ e $V_{T_2}$ e delle correnti $i_{T_1}$ e $i_{T_2}$ sul primario e sul secondario del trasformatore ideale, le relazioni costitutive sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_{T_1} = 3V_{T_2} & (A) \\ i_{T_1} = -\frac{1}{3} i_{T_2} & (B) \end{cases}$$





Considerando le tensioni $V_{T_1}$ e $V_{T_2}$ al primario ed al secondario del trasformatore ideale come fissate da 2 generatori di tensione, il sistema risolvente può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g - V_{T_1} \\ V_{T_1} - V_{T_2} \\ V_{T_2} + V_x \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - V_{T_1} \\ V_{T_1} - V_{T_2} \\ V_{T_2} + V_x \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni nelle 6 incognite $I_1$, $I_2$, $I_3$, $V_{T_1}$, $V_{T_2}$, $V_x$. Occorrono altre 3 equazioni per rendere il sistema risolvente determinato; a tale scopo si utilizzano il vincolo imposto dal generatore controllato e le relazioni costitutive del trasformatore ideale. Anzitutto si esprimono le correnti al primario ed al secondario in funzione delle correnti fittizie di maglia:

$$i_{T_1} = I_1 - I_2\ ;\ i_{T_2} = I_2 - I_3\ ;$$

pertanto, dalla $(B)$, si ha:

$$I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}(I_2 - I_3)\ . \quad (C)$$

Inoltre, per il vincolo imposto dal generatore controllato, si ha:

$$I_3 = 3i = 3I_2\ ; \quad (D)$$

sostituendo la $(D)$ nella $(C)$:

$$I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}\cdot 3I_2$$

$$I_1 = I_2 - \frac{1}{3}I_2 + I_2 = \frac{5}{3}I_2$$

$$I_2 = \frac{3}{5} I_1 \,. \quad (E)$$

A questo punto, sostituendo la $(E)$ nella $(D)$, si può esprimere anche la corrente $I_3$ in funzione della sola $I_1$:

$$I_3 = 3 \cdot \frac{3}{5} I_1 = \frac{9}{5} I_1 \,. \quad (F)$$

Sostituendo nel sistema risolvente $V_{T_1}$, $I_2$ e $I_3$ tramite, rispettivamente, le espressioni $(A)$, $(E)$ ed $(F)$ si ha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \frac{3}{5} I_1 \\ \frac{9}{5} I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3V_{T_2} \\ 3V_{T_2} - V_{T_2} \\ V_{T_2} + V_x \end{bmatrix}$$

che è un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite $I_1$, $V_{T_2}$, $V_x$. La corrente erogata dal generatore indipendente di tensione coincide con la corrente fittizia di maglia $I_1$. Si noti che $I_1$ può essere calcolata considerando solamente le prime 2 equazioni del sistema:

$$\begin{cases} 2I_1 &= 2 - 3V_{T_2} \\ \frac{12}{5} I_1 &= 2V_{T_2} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha:

$$V_{T_2} = \frac{12}{10} I_1 \,;$$

sostituendo tale espressione di $V_{T_2}$ nella prima equazione:

$$2I_1 = 2 - 3 \cdot \frac{12}{10} I_1$$

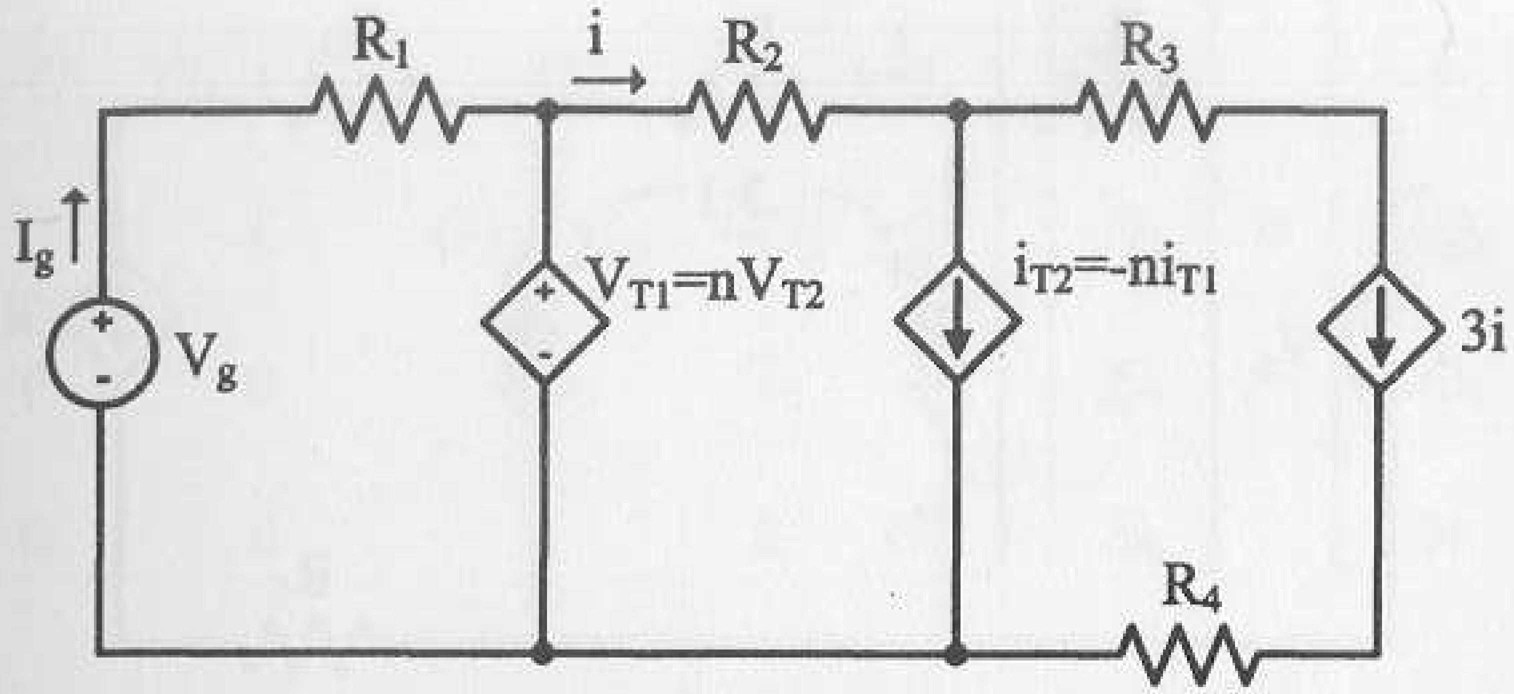
$$\left(2 + \frac{36}{10}\right) I_1 = 2$$

$$\frac{20 + 36}{10} I_1 = 2$$

$$I_1 \equiv I_g = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \; [A]$$



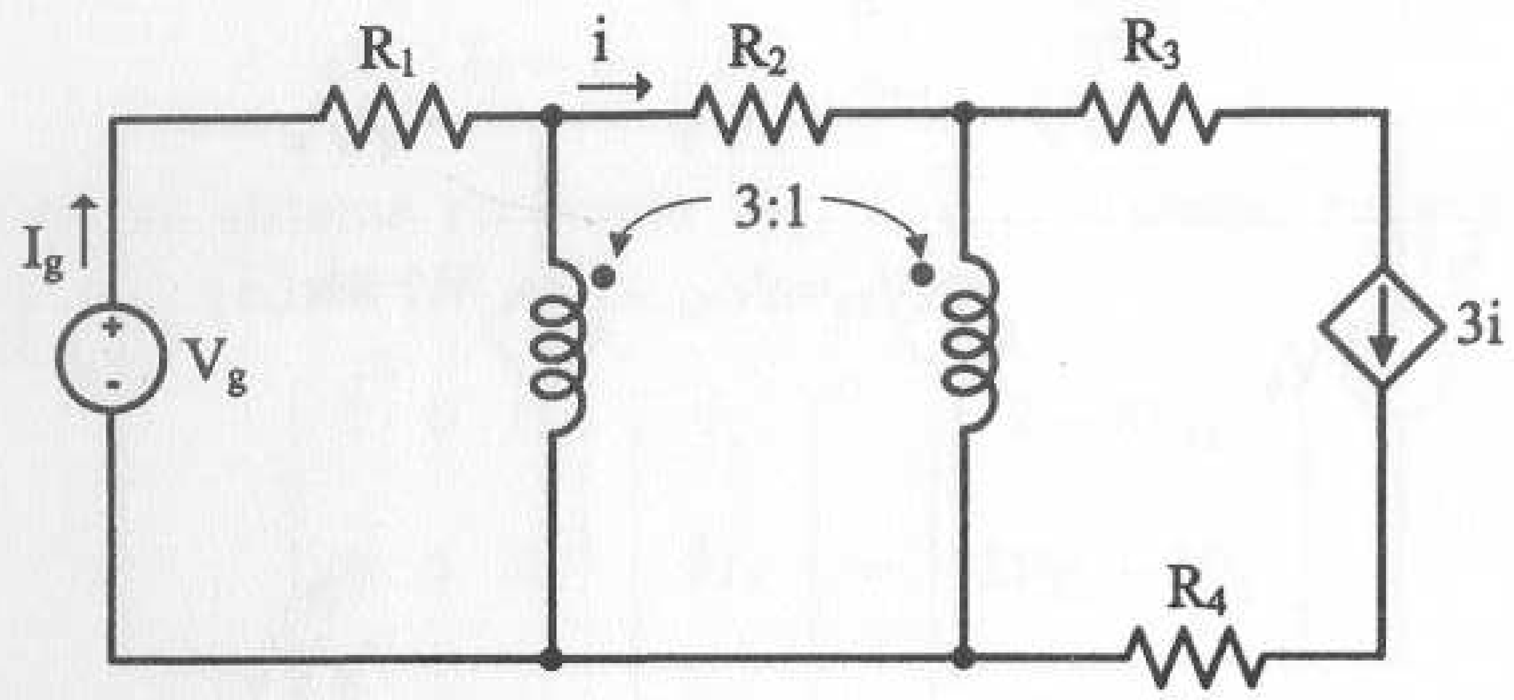
Un approccio alternativo, del tutto equivalente al precedente per circuiti contenenti trasformatori ideali, consiste nel sostituire i due avvolgimenti del trasformatore con un generatore di tensione controllato in tensione ed un generatore di corrente controllato in corrente, come mostrato in figura:




Successivamente, procedendo all'analisi del circuito applicando il metodo su base maglie (o nodi) in presenza di generatori controllati, si perviene alle equazioni ed alla soluzione precedentemente ottenute.

## Esercizio 1.15

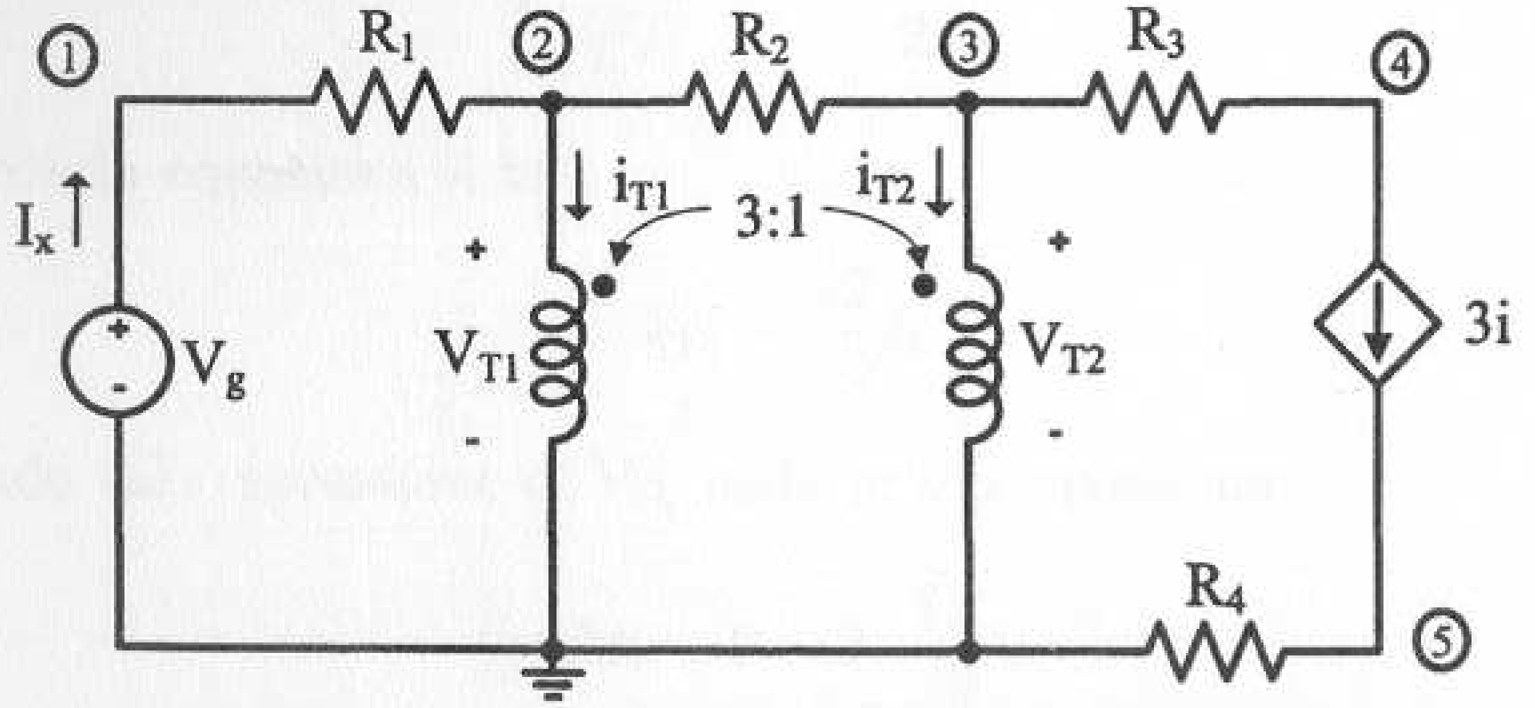
Dato il circuito in figura, calcolare, tramite il metodo di analisi su base nodi, la corrente $I_g$ erogata dal generatore indipendente di tensione.




$$R_1 = R_4 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 4\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 1\,[\Omega]\ ;\ V_g = 2\,[V].$$

**Svolgimento**

Scelto il nodo di riferimento e numerati i nodi rimanenti come indicato in figura, si considerino i versi delle grandezze di porta al primario ed al secondario del trasformatore come evidenziato:




In base ai versi delle tensioni e correnti sul primario e sul secondario, le relazioni costitutive del trasformatore ideale si scrivono come segue:

$$\begin{cases} V_{T_1} = 3V_{T_2} & (A) \\ i_{T_1} = -\frac{1}{3} i_{T_2} & (B) \end{cases}$$





Immaginando che le correnti $i_{T_1}$ e $i_{T_2}$ al primario e al secondario del trasformatore siano imposte da due generatori di corrente, il sistema risolvente su base nodi sarà:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_3 & -G_3 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ -i_{T_1} \\ -i_{T_2} \\ -3i \\ 3i \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $G_i = \frac{1}{R_i}$ la conduttanza dell' $i$−esimo resistore. Si tratta di un sistema di 5 equazioni nelle 9 incognite $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, $E_5$, $I_x$, $i_{T_1}$, $i_{T_2}$, $i$. Mancano pertanto 4 equazioni indipendenti per rendere il sistema determinato. Al solito, si utilizzano i vincoli imposti dai generatori controllati, da quelli indipendenti e dalle relazioni costitutive del trasformatore. Anzitutto, il generatore indipendente di tensione impone la tensione di nodo $E_1$:

$$E_1 = V_g = 2\ . \quad (C)$$

Inoltre, dalla $(B)$, si ha:

$$i_{T_2} = -3i_{T_1}\ . \quad (D)$$

Possiamo poi esprimere la corrente di controllo $i$ in funzione delle tensioni di nodo $E_2$ ed $E_3$:

$$i = G_2(E_2 - E_3) = \frac{1}{4}(E_2 - E_3)\ ; \quad (E)$$

inoltre, essendo $V_{T_1} = E_2$ e $V_{T_2} = E_3$, dalla $(A)$ si ha:

$$E_2 = 3E_3\ . \quad (F)$$

Quindi, sostituendo la $(F)$ nella $(E)$:

$$i = \frac{1}{4}(3E_3 - E_3) = \frac{1}{2}E_3\ . \quad (G)$$

Possiamo pertanto sostituire nel sistema risolvente le incognite $E_1$, $i_{T_2}$, $E_2$ ed $i$ tramite, rispettivamente, le espressioni $(C)$, $(D)$, $(F)$ e $(G)$. Considerando anche i valori numerici delle conduttanze, si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3E_3 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ -i_{T_1} \\ 3i_{T_1} \\ -\frac{3}{2}E_3 \\ \frac{3}{2}E_3 \end{bmatrix}$$

Dal momento che occorre calcolare solamente l'incognita $I_x$, possiamo limitarci a considerare le prime 4 equazioni:

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{2}E_3 = I_x \\ -1 + \frac{3}{4}\cdot 3E_3 - \frac{1}{4}E_3 = -i_{T_1} \\ -\frac{3}{4}E_3 + \frac{5}{4}E_3 - E_4 = 3i_{T_1} \\ - E_3 + E_4 = -\frac{3}{2}E_3 \end{cases}$$

Dalla quarta equazione si ha:

$$E_4 = \left(-\frac{3}{2}+1\right)E_3 = -\frac{1}{2}E_3 \, .$$

Sostituendo tale espressione di $E_4$ nella $3^a$ equazione:

$$\begin{cases} -I_x - \frac{3}{2}E_3 = -1 \\ + \left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)E_3 + i_{T_1} = 1 \\ \left(\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\right)E_3 - 3i_{T_1} = 0 \end{cases}$$

Dalla $3^a$ equazione si ha:

$$E_3 = 3i_{T_1} \Rightarrow i_{T_1} = \frac{1}{3}E_3 \, .$$





Sostituendo tale espressione di $E_3$ nella $2^a$ equazione:

$$2E_3 + \frac{1}{3}E_3 = 1 \Rightarrow \frac{7}{3}E_3 = 1 \Rightarrow E_3 = \frac{3}{7} \, ,$$

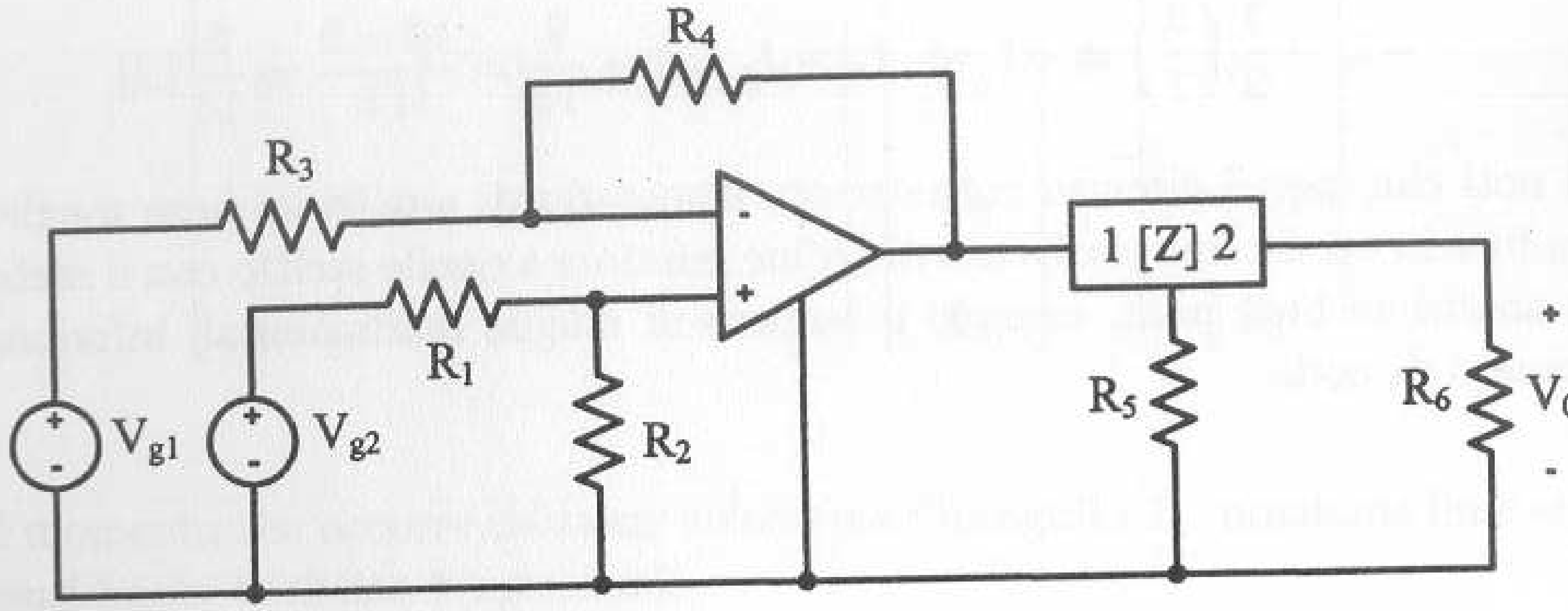
ed infine, dalla $1^a$ equazione:

$$-I_x - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{7}\right) = -1 \Rightarrow I_x \equiv I_g = 1 - \frac{9}{14} = \frac{14-9}{14} = \frac{5}{14}\,[A]$$

Si noti che, per il circuito considerato, il metodo di analisi su base maglie si traduce in un sistema risolvente di ordine inferiore a quello scritto con il metodo di analisi su base nodi, essendo il numero di maglie fondamentali inferiore al numero di nodi.

## Esercizio 1.16

Dato il circuito in figura, calcolare la tensione $V_0$ sul resistore $R_6$, nel verso indicato, in funzione delle grandezze impresse dai generatori indipendenti di tensione.

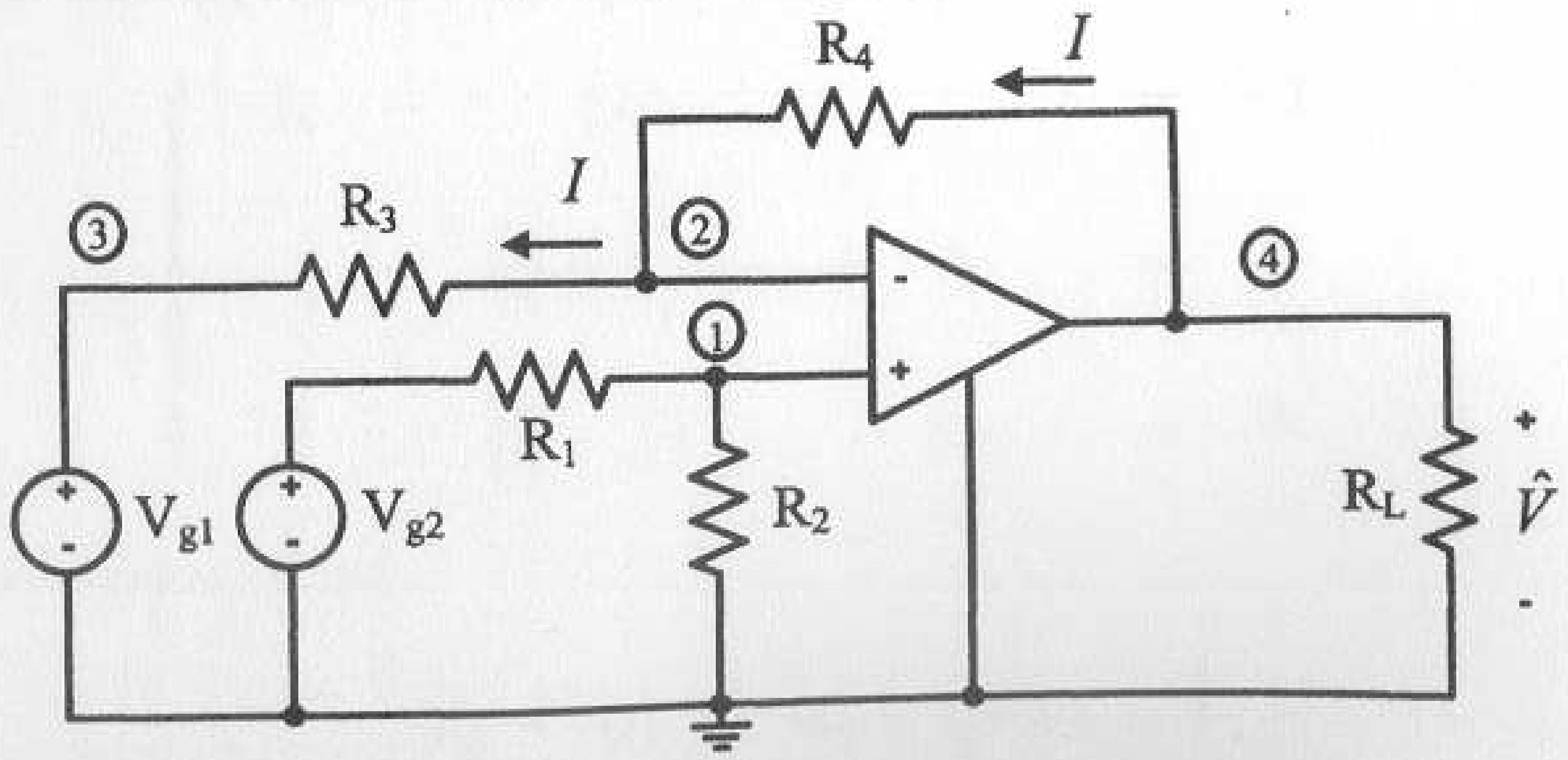



$$R_1 = 1\,[\Omega]\ ;\ R_2 = R_6 = 3\,[\Omega]\ ;\ R_3 = R_4 = 2\,[\Omega]\ ;$$

$$R_5 = 4\,[\Omega]\ ;\ [Z] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} [\Omega]\ .$$

### Svolgimento

La tensione $V_0$ può essere calcolata affrontando l'analisi del circuito in due passi successivi. Si consideri il circuito seguente, ove si è indicato con $R_L$ un generico resistore di carico:








Si proceda ora al calcolo della tensione $\widehat{V}$ in funzione della tensione impressa dai due generatori. Detta $E_i$ la tensione dell'i-esimo nodo rispetto al riferimento evidenziato in figura, la tensione al nodo 1 può essere espressa direttamente applicando la formula del partitore di tensione:

$$E_1 = V_{g_2}\frac{R_2}{R_1 + R_2}\ ;$$

per il vincolo imposto dall'operazionale ideale, si ha inoltre:

$$E_2 = E_1\ .$$

La corrente $I$ che scorre sul resistore $R_3$ nel verso indicato in figura, può essere calcolata come segue:

$$I = \frac{E_2 - E_3}{R_3}\ .$$

Dal momento che è nulla la corrente entrante nel morsetto invertente dell'operazionale ideale, la medesima corrente $I$ scorre anche sul resistore $R_4$ (nel verso indicato) e pertanto:

$$E_4 - E_2 = R_4 I\ .$$

Quindi:

$$E_4 = R_4 I + E_2 = R_4\frac{E_2 - E_3}{R_3} + E_2$$

$$E_4 = \left(\frac{R_4}{R_3} + 1\right) E_2 - \frac{R_4}{R_3}E_3\ .$$

Essendo evidentemente $\widehat{V} \equiv E_4$ si ha:

$$\widehat{V} = \left(\frac{R_4}{R_3} + 1\right)\cdot V_{g_2}\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3}V_{g_1}\ . \qquad (A)$$

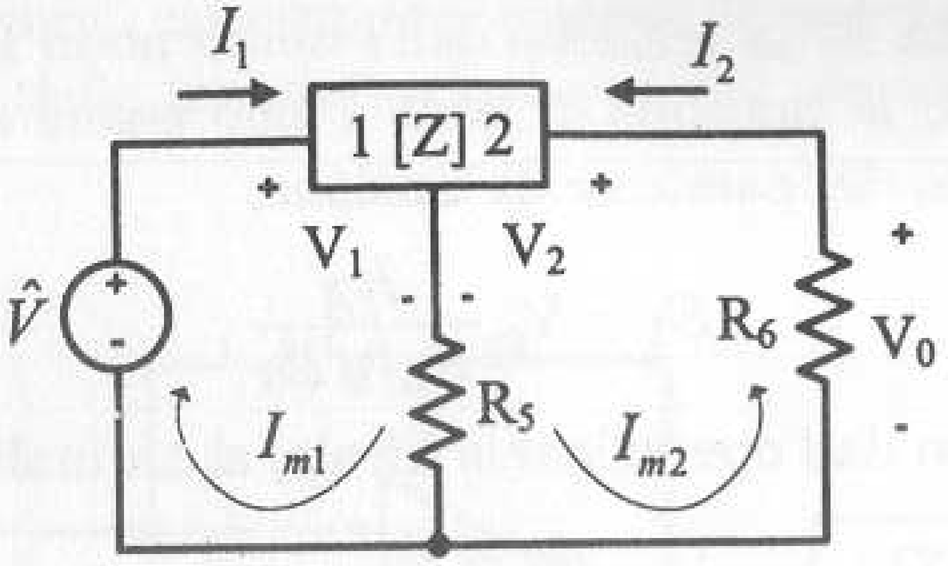
Sostituendo i valori numerici delle resistenze:

$$\widehat{V} = \left(\frac{2}{2} + 1\right)\cdot V_{g_2}\frac{3}{4} - \frac{2}{2}V_{g_1}$$

$$\widehat{V} = \frac{3}{2}V_{g_2} - V_{g_1}\ . \qquad (B)$$

Si noti che la tensione $\widehat{V}$ non dipende da $R_L$; ciò significa che la parte di circuito alla sinistra della porta costituita dal nodo di riferimento e dal nodo 4 equivale ad un generatore ideale di tensione di grandezza impressa pari all'espressione $(B)$. In altre parole è nulla la resistenza equivalente "vista" dal carico (resistenza di uscita). Ciò giustifica il procedimento adottato.

Il problema originale equivale pertanto all'analisi del seguente circuito:




Fissato il verso delle correnti fittizie di maglia come mostrato in figura, si tratta di calcolare $V_0$ in funzione di $\hat{V}$ tramite il metodo di analisi su base maglie. Poiché $V_0 = -R_6 I_{m_2} = -3I_{m_2}$, è sufficiente determinare la corrente $I_{m_2}$ sulla seconda maglia. Immaginando che le 2 tensioni di porta $V_1$ e $V_2$ della rete 2 porte siano fissate da 2 generatori di tensione, il sistema risolvente può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} R_5 & R_5 \\ R_5 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V} - V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

sostituendo i valori numerici:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V} - V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \qquad (C)$$

Si tratta di un sistema di 2 equazioni nelle 4 incognite $I_{m_1}$, $I_{m_2}$, $V_1$ e $V_2$. Per rendere determinato il sistema mancano evidentemente altre 2 equazioni. Dobbiamo infatti considerare le relazioni tra le variabili di porta $V_1$, $V_2$, $I_1$ e $I_2$ della rete 2-porte. Poiché è nota la matrice delle impedenze a vuoto, tali relazioni sono:

$$\begin{cases} V_1 = 2I_1 - I_2 \\ V_2 = I_1 + 3I_2 \end{cases}$$

che possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} V_1 = 2I_{m1} - I_{m2} \\ V_2 = I_{m1} + 3I_{m2} \end{cases} \qquad (D)$$





dal momento che evidentemente, per la scelta dei versi delle correnti fittizie di maglia, si ha:

$$I_1 = I_{m_1} \; ; \qquad I_2 = I_{m_2} \; .$$

Sostituendo le espressioni $(D)$ nel sistema $(C)$, si ha:

$$\begin{cases} 4I_{m1} + 4I_{m2} = \hat{V} - 2I_{m1} + I_{m2} \\ 4I_{m1} + 7I_{m2} = -I_{m1} - 3I_{m2} \end{cases}$$

e quindi, in forma matriciale compatta:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 60 - 15 = 45 \; ;$$

$$I_{m2} = \tfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 6 & \hat{V} \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{45}\left(-5\hat{V}\right) = -\tfrac{1}{9}\hat{V} \; ;$$

e pertanto:

$$V_0 = -3\left(-\frac{1}{9}\right)\hat{V} = \frac{1}{3}\hat{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}V_{g_2} - V_{g_1}\right)$$

$$V_0 = \frac{1}{2}V_{g_2} - \frac{1}{3}V_{g_1} \; .$$

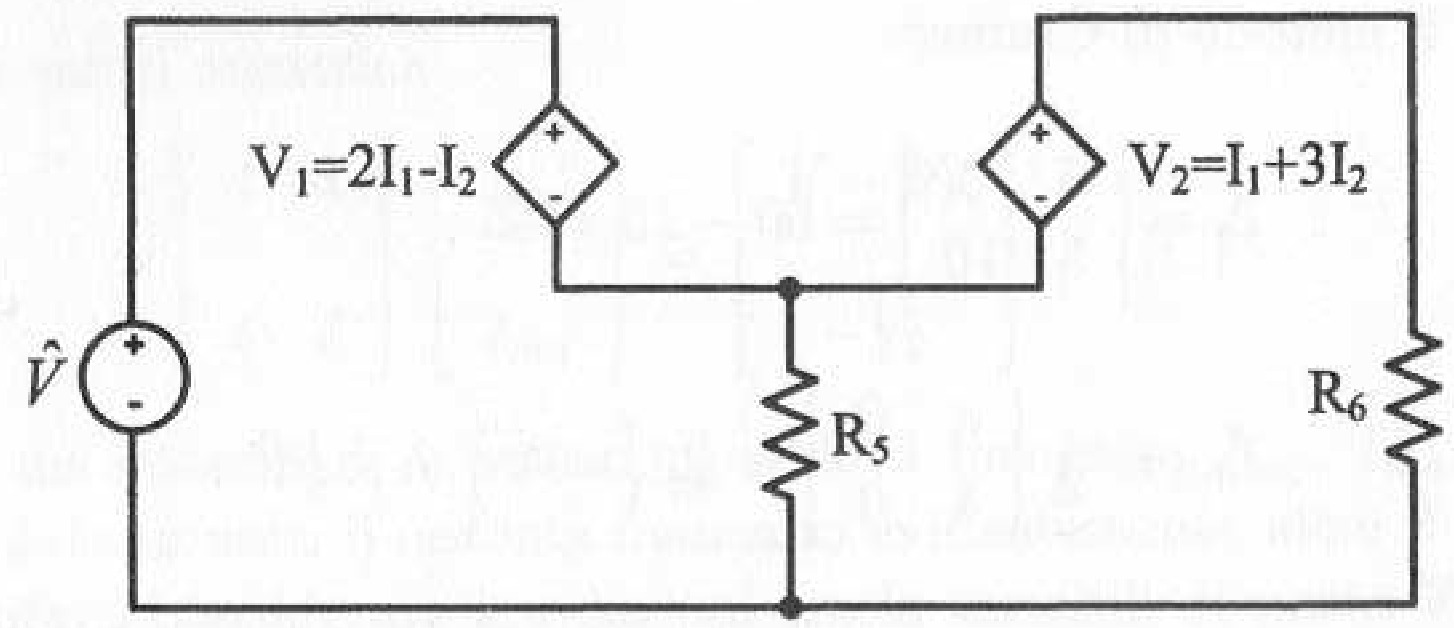
Un approccio del tutto equivalente al precedente, per l'analisi dei circuiti contenenti reti 2-porte, consiste nel sostituire ciascuna porta con un generatore controllato e nell'applicare, successivamente, il metodo di analisi su base maglie (o nodi) in presenza di generatori controllati. Nel caso in cui, come nel precedente, è data la matrice delle impedenze a vuoto $[Z]$, si considerano due generatori di tensione controllati dalle 2 correnti di porta $I_1$ e $I_2$, definiti come segue:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

In particolare, per l'analisi del circuito dato, si sostituiscono due generatori di tensione controllati in corrente:

$$\begin{cases} V_1 = 2I_1 - I_2 \\ V_2 = I_1 + 3I_2 \end{cases}$$

Il circuito da analizzare è pertanto il seguente:

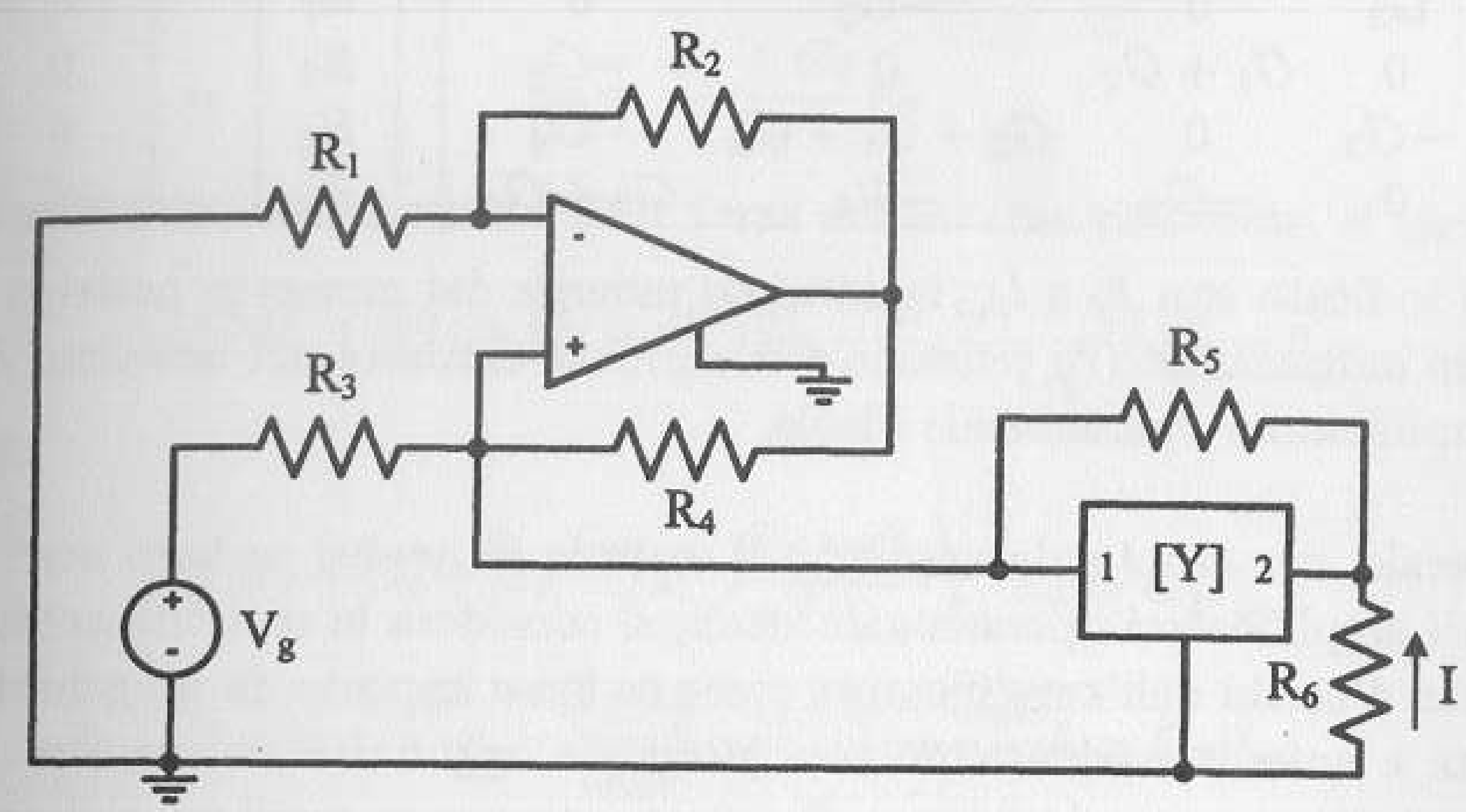







## Esercizio 1.17

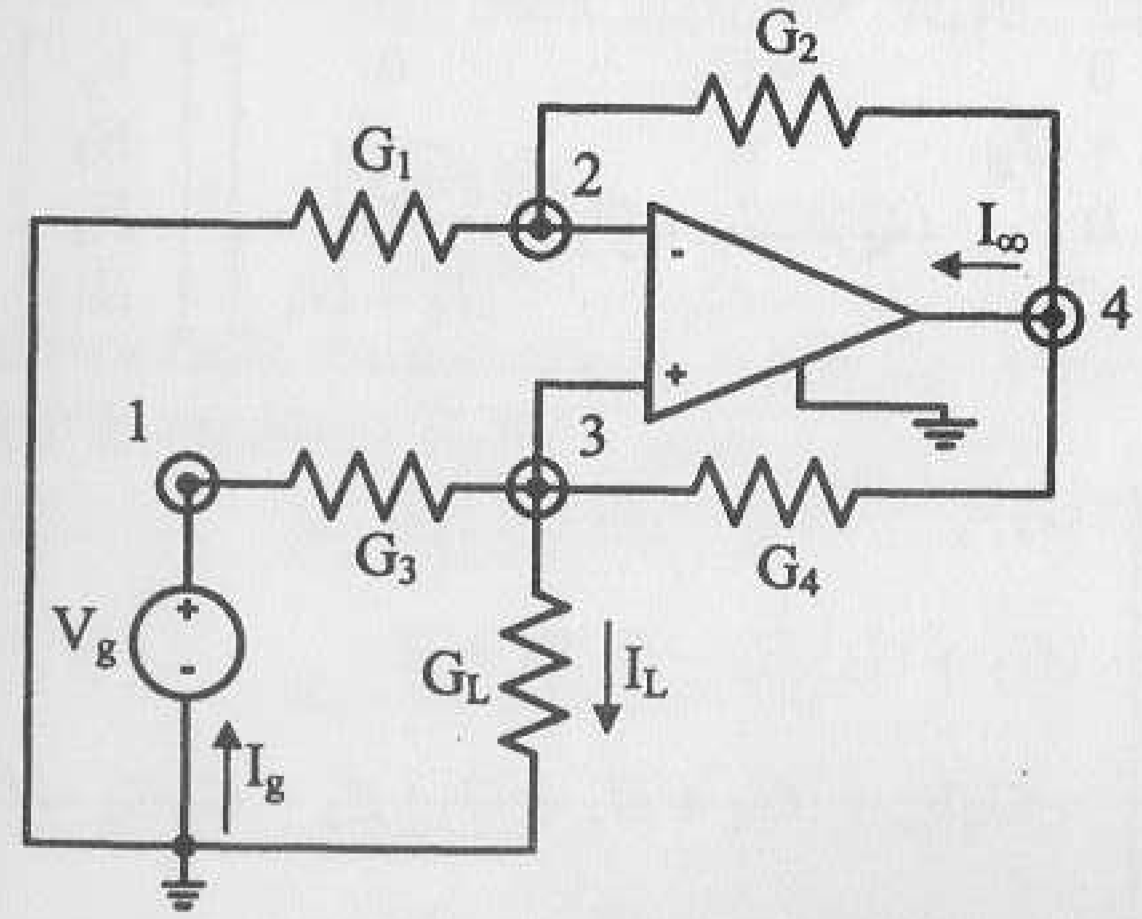
Dato il circuito in figura, calcolare la corrente $I$ in funzione della tensione impressa $V_g$, che scorre nel resistore $R_6$ nel verso indicato.




$$R_1 = R_5 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 4\,[\Omega]\ ;\ R_3 = R_6 = 3\,[\Omega]\ ;$$
$$R_4 = 6\,[\Omega]\ ;\ [Y] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} [\Omega^{-1}]\ .$$

### Svolgimento

La corrente incognita $I$ può essere calcolata in due passi successivi. Si consideri il circuito nella seguente figura, ove si è indicato con $G_i$ la conduttanza dell'i-esimo resistore e con $G_L$ la conduttanza di un generico resistore di carico:



Scelto il nodo di riferimento e numerati i rimanenti nodi come in figura, il sistema risolvente secondo il metodo di analisi su base nodi si scrive come segue:

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & -G_3 & 0 \\ 0 & G_1+G_2 & 0 & -G_2 \\ -G_3 & 0 & G_3+G_4+G_L & -G_4 \\ 0 & -G_2 & -G_4 & G_2+G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \\ -I_\infty \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $I_g$ e $I_\infty$ la corrente uscente dal morsetto positivo del generatore indipendente di tensione e la corrente entrante nel morsetto d'uscita dell'amplificatore operazionale ideale.

In generale, ove si intenda applicare il metodo di analisi su base nodi in presenza di amplificatori operazionali ideali, si considera la corrente entrante nel morsetto d'uscita dell'amplificatore come se fosse imposto da un generatore di corrente e quindi considerando tale incognita aggiuntiva nel vettore dei termini noti del sistema risolvente. Il sistema risolvente consiste in 4 equazioni nelle 6 incognite $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, $I_g$, $I_\infty$. Per rendere determinato il sistema occorre considerare il vincolo sulle tensioni di nodo imposto dal generatore indipendente di tensione:

$$E_1 = V_g$$

e quello imposto dall'operazionale ideale:

$$E_2 = E_3 \,.$$

Introducendo tali vincoli nel sistema risolvente si ha:

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & -G_3 & 0 \\ 0 & G_1+G_2 & 0 & -G_2 \\ -G_3 & 0 & G_3+G_4+G_L & -G_4 \\ 0 & -G_2 & -G_4 & G_2+G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ E_3 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \\ -I_\infty \end{bmatrix}$$

ossia:

$$\begin{cases} G_3 V_g - G_3 E_3 = I_g \\ (G_1+G_2)\, E_3 - G_2 E_4 = 0 \\ -G_3 V_g + (G_3+G_4+G_L)\, E_3 - G_4 E_4 = 0 \\ -G_2 E_3 - G_4 E_3 + (G_2+G_4)\, E_4 = 0 \end{cases}$$





Dalla seconda equazione si ha:

$$(G_1+G_2)\, E_3 = G_2 E_4 \,,$$

da cui:

$$E_4 = \frac{G_1+G_2}{G_2} E_3 \,.$$

Sostituendo l'ultima equazione nella terza del sistema risolvente, si ha:

$$-G_3 V_g + (G_3+G_4+G_L)\, E_3 - G_4 \frac{G_1+G_2}{G_2} E_3 = 0$$

e quindi:

$$\left( G_3 + G_4 + G_L - G_4 \cdot \frac{G_1+G_2}{G_2} \right) \cdot E_3 = G_3 V_g$$

$$\frac{G_3G_2 + G_4G_2 + G_LG_2 - G_4G_1 - G_4G_2}{G_2} = G_3 V_g \,.$$

Pertanto:

$$E_3 = \frac{G_2G_3}{G_3G_2 + G_4G_2 + G_LG_2 - G_4G_1 - G_4G_2} V_g$$

$$= \frac{G_2G_3}{G_3G_2 + G_LG_2 - G_4G_1} V_g \,.$$

La corrente $I_L$ può quindi essere calcolata come segue:

$$I_L = G_L E_3 = \frac{G_2G_3G_L}{G_3G_2 - G_4G_1 + G_LG_2} V_g \,.$$

Nel caso in cui $G_3G_2 = G_4G_1$, ossia $R_3R_2 = R_4R_1$, tale espressione si semplifica:

$$I_L = \frac{G_2G_3G_L}{G_LG_2} \cdot V_g = G_3 V_g \,,$$

risultando indipendente dalla conduttanza di carico $G_L$. I valori delle resistenze assegnate soddisfano la relazione $R_3R_2 = R_4R_1$, essendo:

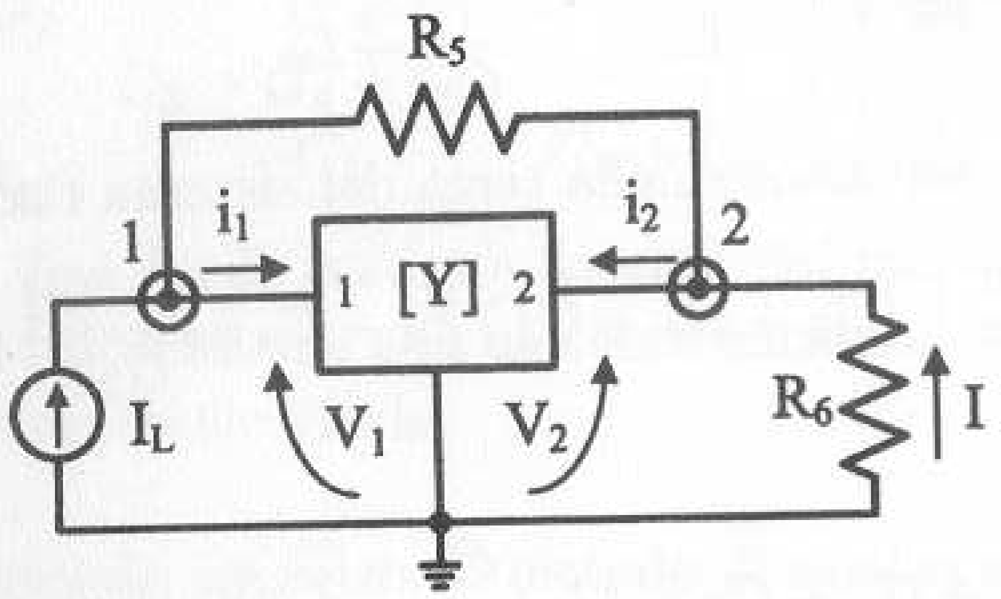
$$R_3 \cdot R_2 = 3 \cdot 4 = 12 \,;$$

$$R_4 \cdot R_1 = 6 \cdot 2 = 12 \,.$$

Si ha pertanto:

$$I_L = \frac{1}{3} V_g \,.$$

Il circuito rappresentato nella seconda figura equivale ad un generatore di corrente controllato dalla tensione $V_g$. Il fatto che $I_L$ è indipendente da $G_L$, giustifica il procedimento a due passi adottato. Il circuito originale equivale quindi al seguente:




Scelto il nodo di riferimento e numerati i rimanenti nodi come in figura, si applica nuovamente il metodo di analisi su base nodi:

$$\begin{bmatrix} G_5 & -G_5 \\ -G_5 & G_5+G_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L - i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

dove $i_1$ e $i_2$ sono le due correnti della rete 2-porte immaginate come imposte da due generatori di corrente. Il sistema risolvente consiste in 2 equazioni nelle 4 incognite $E_1$, $E_2$, $i_1$, $i_2$. Per rendere il sistema determinato occorrono altre due equazioni linearmente indipendenti; a tal fine è necessario considerare le relazioni costitutive della rete 2-porte:

$$\begin{cases} i_1 = V_1 - V_2 \\ i_2 = 2V_1 - V_2 \end{cases}$$

Ovviamente si ha $V_1 = E_1$, $V_2 = E_2$ e quindi:

$$\begin{cases} i_1 = E_1 - E_2 \\ i_2 = 2E_1 - E_2 \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni precedenti nel sistema risolvente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}E_1 - \frac{1}{2}E_2 = I_L - E_1 + E_2 \\ -\frac{1}{2}E_1 + \frac{5}{6}E_2 = -2E_1 + E_2 \end{cases}$$





da cui:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}E_1 - \frac{3}{2}E_2 = I_L \\ \left(-\frac{1}{2}+2\right)E_1 + \left(\frac{5}{6}-1\right)E_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del precedente sistema si ha:

$$\frac{3}{2}E_1 - \frac{1}{6}E_2 = 0$$

ossia

$$E_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}E_2 = \frac{1}{9}E_2\,.$$

Sostituendo l'espressione ottenuta nella prima equazione dell'ultimo sistema:

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{3}{2}\right)E_2 = I_L \Rightarrow \left(\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\right)E_2 = I_L \Rightarrow \frac{1-9}{6}E_2 = I_L$$

e quindi

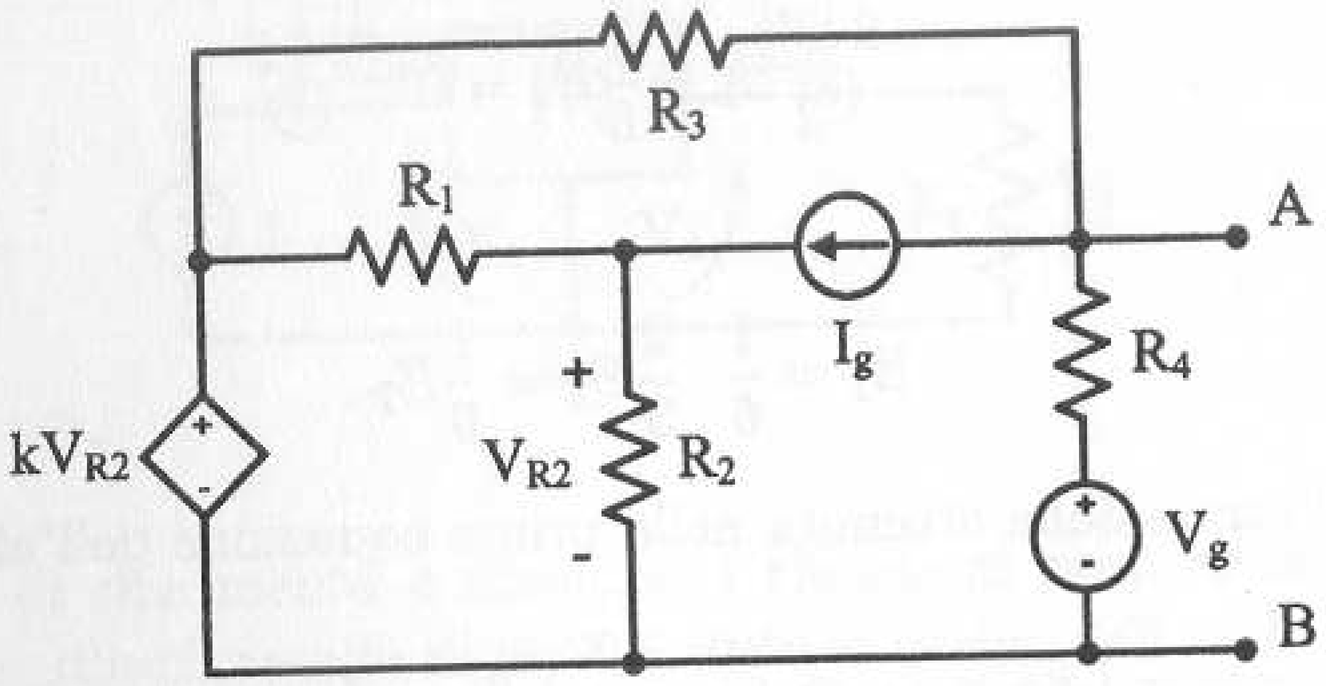
$$E_2 = -\frac{6}{8}I_L = -\frac{3}{4}I_L\,.$$

Dunque:

$$I = -G_6E_2 = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)I_L = \frac{1}{4}I_L = \frac{1}{4}G_3V_g = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V_g = \frac{1}{12}V_g\ [A]$$

## Esercizio 1.18

Applicare il teorema di Thevenin alla porta A-B evidenziata nel circuito riportato nella figura. Considerando il circuito ottenuto dall'applicazione del teorema come un generatore reale di tensione, calcolare il rendimento della potenza erogata quando esso è chiuso su una resistenza di valore pari ad 1 Ω.

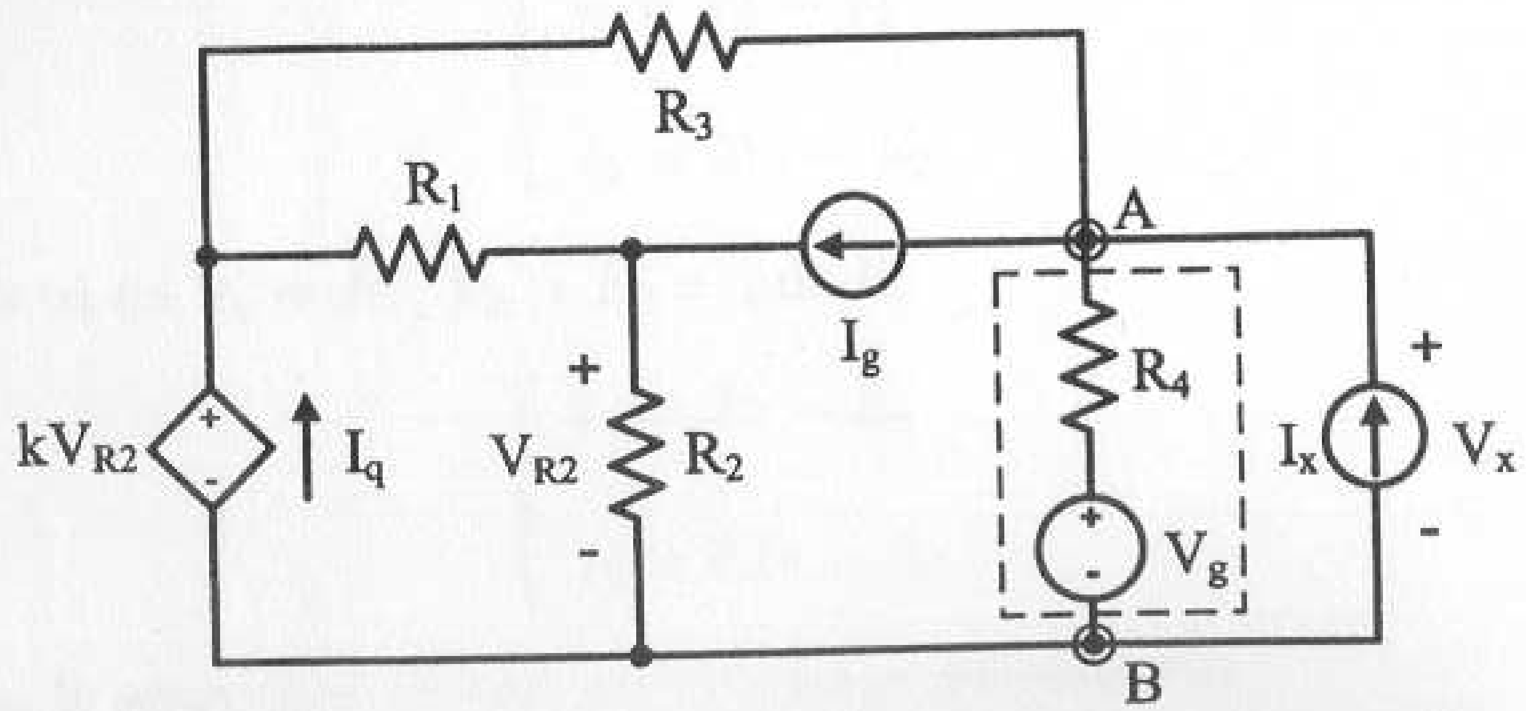



$$V_g(t) = \sin(t)\,[V]\ ;\ I_g(t) = e^{-2t}\,[A]\ ;\ R_1 = 1\,[\Omega]\ ;$$

$$R_2 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 2\,[\Omega]\ ;\ R_4 = 1\,[\Omega]\ ;\ k = \frac{1}{2}\,.$$

### Svolgimento

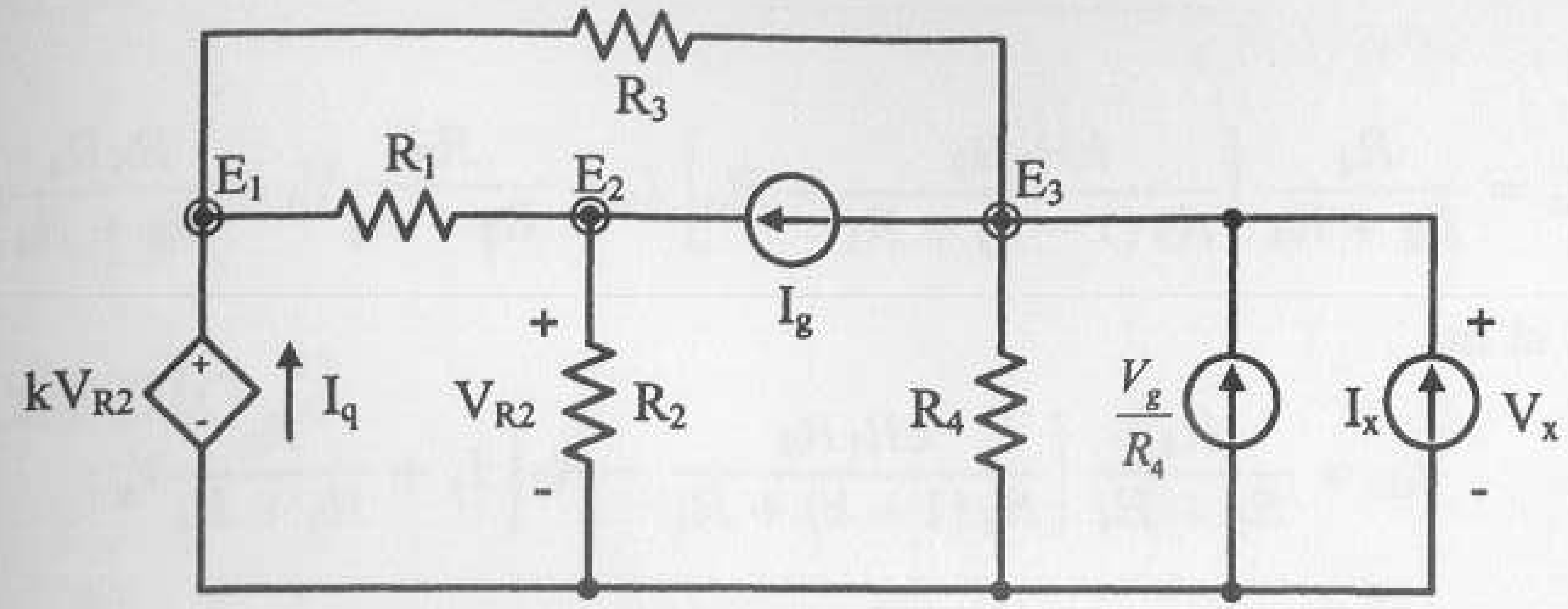
Si applica il generatore di corrente $I_x$ alla porta A-B:




Il generatore reale di tensione costituito da $V_g$ ed $R_4$, evidenziato in figura, può essere sostituito da un generatore reale di corrente, ottenendo il circuito mostrato in figura:








Analizzando il circuito con il metodo dei nodi, e aggiungendo la corrente $I_q$ come incognita ausiliaria sul generatore di tensione, si ottiene:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)E_1 - \frac{1}{R_1}E_2 - \frac{1}{R_3}E_3 = I_q \\ -\frac{1}{R_1}E_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)E_2 = I_g \\ -\frac{1}{R_3}E_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)E_3 = -I_g + \frac{V_g}{R_4} + I_x \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} E_1 = kV_{R_2} = kE_2 \\ E_3 = V_x \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$-\frac{k}{R_1}E_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)E_2 = I_g$$

da cui

$$E_2 = \frac{R_1R_2}{R_2(1-k)+R_1}I_g\,.$$

Sostituendo nella terza equazione si avrà:

$$-\frac{k}{R_3}E_2 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_x = -I_g + \frac{V_g}{R_4} + I_x$$

$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_x = \left[\frac{k}{R_3}\cdot\frac{R_1R_2}{R_2(1-k)+R_1} - 1\right]I_g + \frac{V_g}{R_4} + I_x$$

e quindi

$$V_x = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\left[\frac{kR_1R_2}{R_2(1-k)+R_1} - R_3\right] I_g + \frac{R_3}{R_3+R_4}V_g + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}I_x\,,$$

in cui si ha:

$$V_{th} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\left[\frac{kR_1R_2}{R_2(1-k)+R_1} - R_3\right] I_g + \frac{R_3}{R_3+R_4}V_g\,;$$

$$R_{th} = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\,.$$

Sostituendo i valori numerici nelle ultime due equazioni si ottiene:

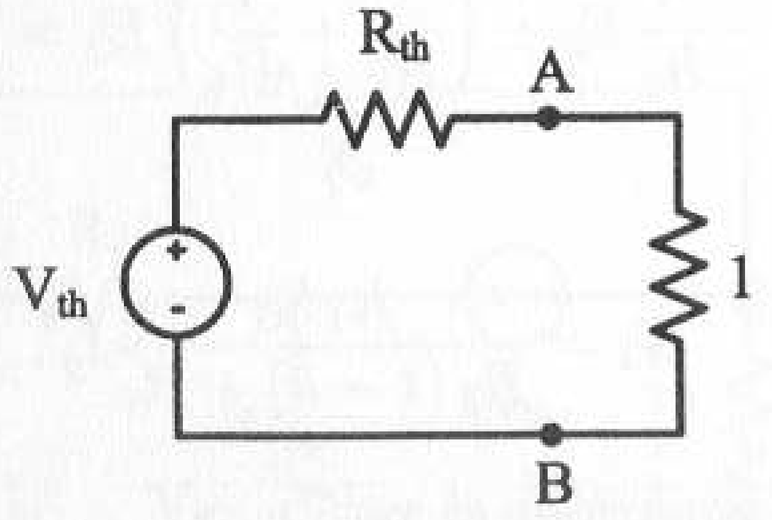
$$V_{th} = \frac{1}{1+2}\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)+1} - 2\right]\cdot e^{-2t} + \frac{2}{2+1}\sin(t)$$

$$V_{th} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right)e^{-2t} + \frac{2}{3}\sin(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}\sin(t)\ [V]$$

e

$$R_{th} = \frac{2\cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}\ [\Omega]$$

Per il calcolo del rendimento $\eta$ si avrà il seguente circuito:




in cui

$$\eta = \frac{R}{R+R_{th}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} \Rightarrow \eta = \frac{3}{5}\,.$$

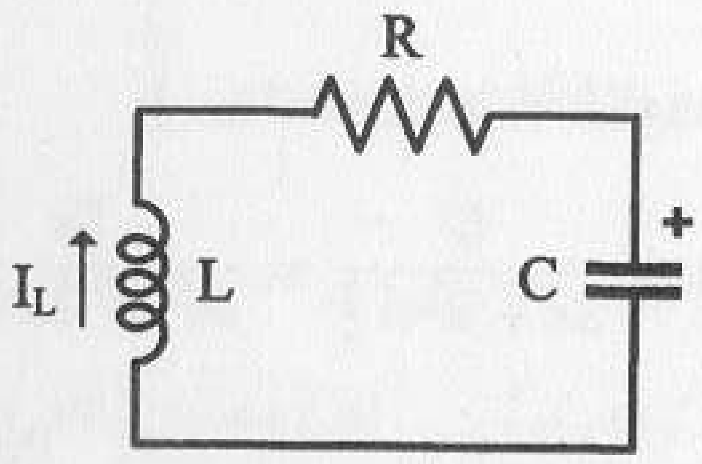


# Capitolo 2

# Analisi in regime transitorio

## Esercizio 2.1 ?

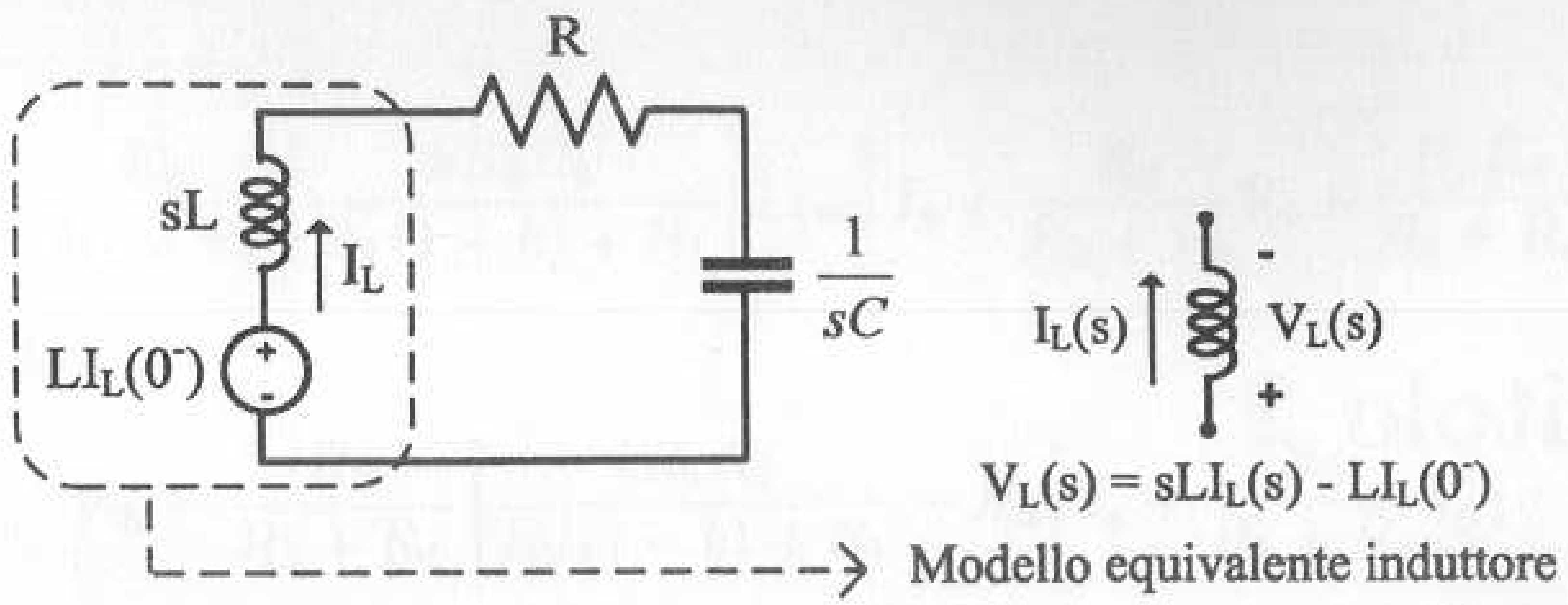
Determinare l'andamento nel tempo, per $t \geq 0$, della tensione sul condensatore nel circuito in figura.



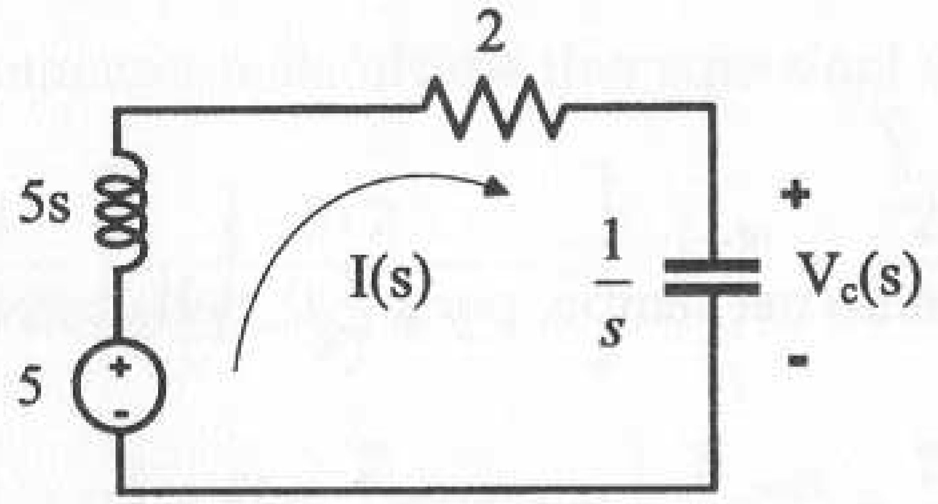

$$C = 1\,[F];\ R = 2\,[\Omega];\ L = 5\,[H];\ V_C(0^-) = 0\,[V];\ I_L(0^-) = 1\,[A].$$

### Svolgimento

Si determina la soluzione nel dominio di Laplace, considerando le condizioni iniziali dell'induttore (quelle del condensatore sono nulle). Il circuito da analizzare è il seguente:




Per cui si avrà:




Dall'unica equazione di maglia si ottiene:

$$I(s) = \frac{5}{5s + 2 + \frac{1}{s}} = \frac{5s}{5s^2 + 2s + 1}$$

e quindi

$$V_C(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC} = \frac{5s}{5s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{5s^2 + 2s + 1},$$

da cui il contributo nel tempo è

$$V_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\}.$$

Per antitrasformare bisogna determinare i poli di $V_C(s)$:

$$5s^2 + 2s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{5} = \frac{-1 \pm 2j}{5}.$$

Si ha una coppia di poli complessi e coniugati $p$ e $p^*$ per i quali risulta:

$$V_C(s) = \frac{5}{5(s-p)(s-p^*)} = \frac{1}{(s-p)(s-p^*)}$$ ?





(notare che il coefficiente 5 del termine di 2° grado rimane nella fattorizzazione del denominatore).

Lo sviluppo in frazioni parziali sarà quindi il seguente:

$$V_C(s) = \frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*},$$

in cui i residui sono l'uno il complesso coniugato dell'altro. Tralasciando per il momento il calcolo di $A$, avremo:

$$V_C(t) = \left[Ae^{pt} + A^* e^{p^* t}\right] u_{-1}(t),$$

dove

$$\begin{cases} p = \sigma + j\omega \\ p^* = \sigma - j\omega \end{cases}$$

con $\sigma = -\frac{1}{5}$, $\omega = \frac{2}{5}$ e, in generale, ?

$$\begin{cases} A = |A|e^{j\angle A} \\ A^* = |A|e^{-j\angle A} \end{cases}$$

Per cui:

$$V_C(t) = \left[|A|e^{j\angle A}e^{\sigma t}e^{j\omega t} + |A|e^{-j\angle A}e^{\sigma t}e^{-j\omega t}\right] u_{-1}(t)$$
$$V_C(t) = |A|e^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t + \angle A)} + e^{-j(\omega t + \angle A)}\right] u_{-1}(t).$$

Poiché è sempre vero che $e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2\cos(\alpha)$, allora

$$V_C(t) = 2|A|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \angle A)\, u_{-1}(t).$$

Ora è necessario calcolare $A$:

$$A = \frac{1}{(s-p)(s-p^*)} \cdot (s-p)\Big|_{s=p} = \frac{1}{p-p^*} = \frac{1}{\frac{-1+2j}{5} - \frac{-1-2j}{5}}$$

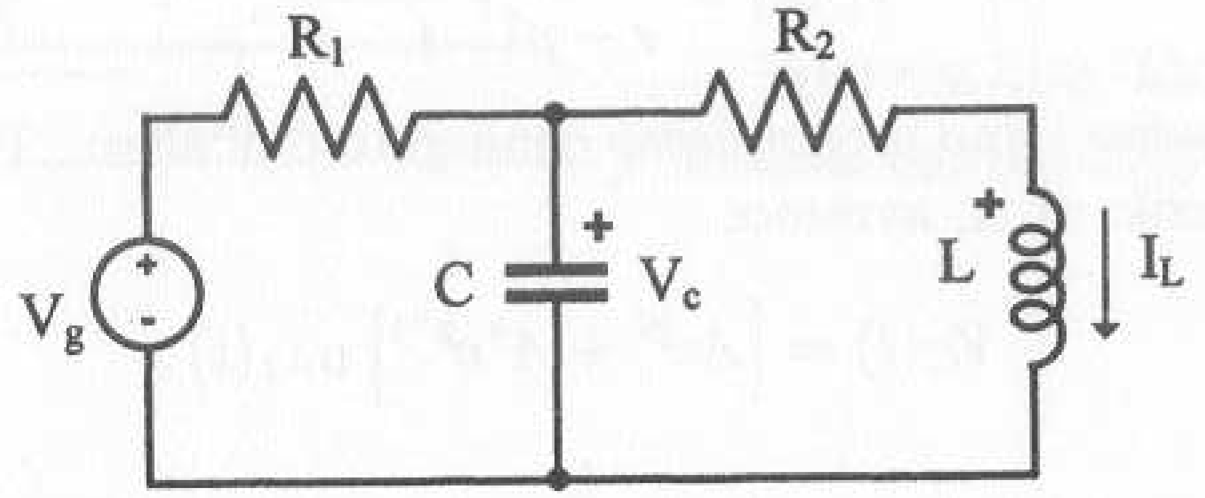
$$A = \frac{5}{-1+2j+1+2j} = -\frac{5}{4}j \quad \Rightarrow \quad |A| = \frac{5}{4},\ \angle A = -\frac{\pi}{2}.$$

Ricapitolando:

$$V_C(t) = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{5}t}\cos\left(\frac{2}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) u_{-1}(t) = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{5}t}\sin\left(\frac{2}{5}t\right) u_{-1}(t) \quad [V]$$

## Esercizio 2.2 OK

Calcolare, per il circuito in figura, l'andamento della tensione ai capi dell'induttore per $t \geq 0$.

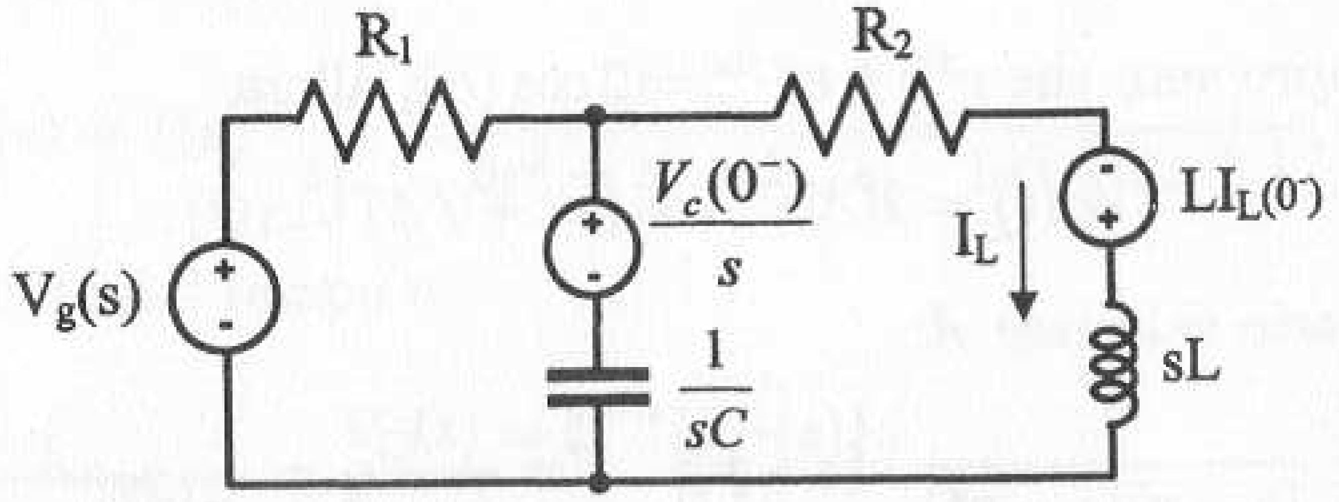



$$R_1 = 1\,;\; R_2 = 4\,;\; C = 1\,;\; L = 2\,;\; V_g(t) = \begin{cases} 5 \text{ per } t < 0 \\ 0 \text{ per } t \geq 0 \end{cases};$$

$$V_C(0^-) = 4\,;\; I_L(0^-) = 1\,;\; [\Omega, F, H, V, A]\,.$$

### Svolgimento

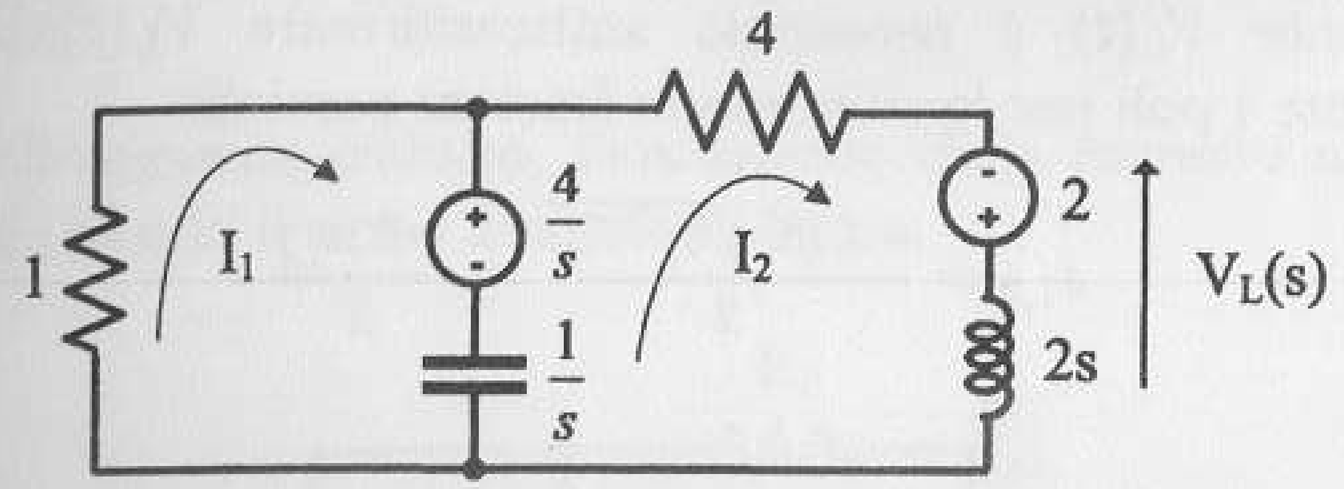
Il circuito è analizzato nel dominio di Laplace:



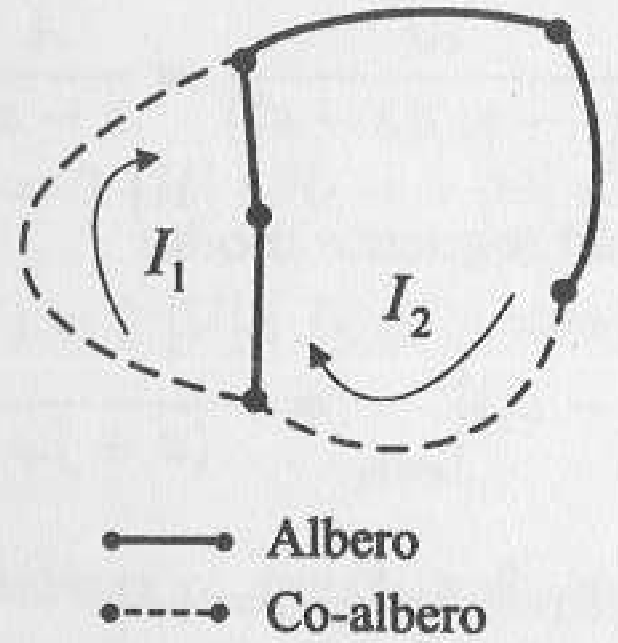

Per $t \geq 0$ risulta $V_g(t) = 0$; per cui, utilizzando i valori numerici dei componenti, avremo:








in cui le correnti di maglia $I_1$ e $I_2$ sono riferite al co-albero di seguito riportato:




Con tale scelta il sistema risolvente su base maglie è il seguente:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_1 - \frac{1}{s} I_2 = -\frac{4}{s} \\ -\frac{1}{s} I_1 + \left(\frac{1}{s} + 4 + 2s\right) I_2 = \frac{4}{s} + 2 \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare la corrente $I_2$, necessaria per il calcolo di $V_L$:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -\frac{4}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{4}{s} + 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} + 4 + 2s \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} + 2 + \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2}}{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 4 + \frac{4}{s} + 2s + 2 - \frac{1}{s^2}} = \frac{2s + 6}{2s^2 + 6s + 5}$$

e quindi

$$V_L(s) = 2sI_2 - 2 = \frac{4s^2 + 12s - 4s^2 - 12s - 10}{2s^2 + 6s + 5} = -\frac{10}{2s^2 + 6s + 5}\,.$$

Per determinare $V_L(t)$ è necessario antitrasformare $V_L(s)$, calcolandone preventivamente i poli per lo sviluppo in frazioni parziali:

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{-3 \pm j}{2}$$

da cui risulta

$$s_1 = \frac{-3+j}{2} = \sigma + j\omega\,, \qquad s_2 = s_1^* = \frac{-3-j}{2} = \sigma - j\omega\,,$$

con $\sigma = -\frac{3}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}$. Lo sviluppo in frazioni parziali sarà dunque:

$$V_L(s) = -\frac{10}{2(s-s_1)(s-s_1^*)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{A^*}{s-s_1^*}\,,$$

dove il residuo $A$ si ricava nel seguente modo:

$$A = -\frac{10}{2(s-s_1)(s-s_1^*)}(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = -\frac{5}{(\sigma+j\omega-\sigma+j\omega)} = -\frac{5}{2j\omega} = 5j\,.$$

La generica forma polare del residuo è $A = |A|e^{j\angle A}$; in questo particolare caso risulta

$$|A| = 5\,, \qquad \angle A = \frac{\pi}{2}\,.$$

Antitrasformando $V_L(s)$ si ottiene:

$$V_L(t) = \left\{Ae^{s_1 t} + A^* e^{s_1^* t}\right\} u_{-1}(t)$$

$$V_L(t) = \left\{|A|e^{j\angle A}e^{(\sigma+j\omega)t} + |A|e^{-j\angle A}e^{(\sigma-j\omega)t}\right\} u_{-1}(t)$$

$$V_L(t) = 2|A|e^{\sigma t}\left\{\frac{e^{j(\omega t+\angle A)} + e^{-j(\omega t+\angle A)}}{2}\right\} u_{-1}(t)$$

$$V_L(t) = 2|A|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \angle A)\, u_{-1}(t) = 10e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) u_{-1}(t)\,.$$

Poiché $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$, allora il risultato definitivo sarà:

$$V_L(t) = -10e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) u_{-1}(t) \quad [V]$$

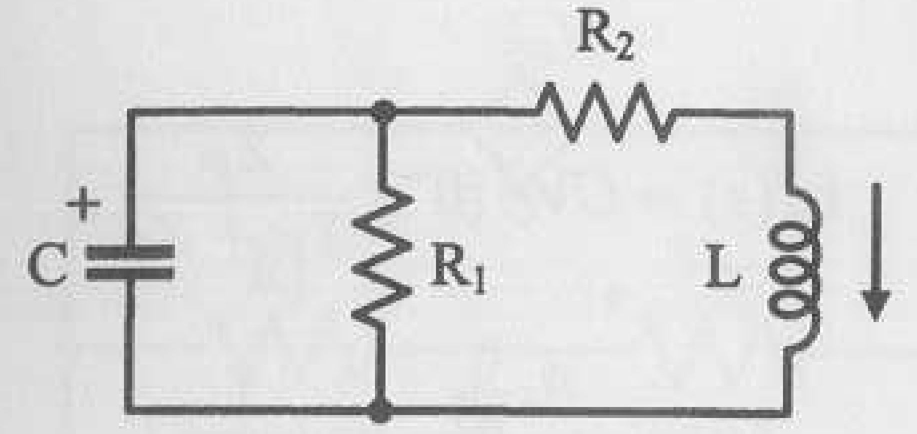




## Esercizio 2.3

OK

Calcolare, per il seguente circuito, l'andamento della corrente nell'induttore per $t \geq 0$, considerando il verso indicato in figura.

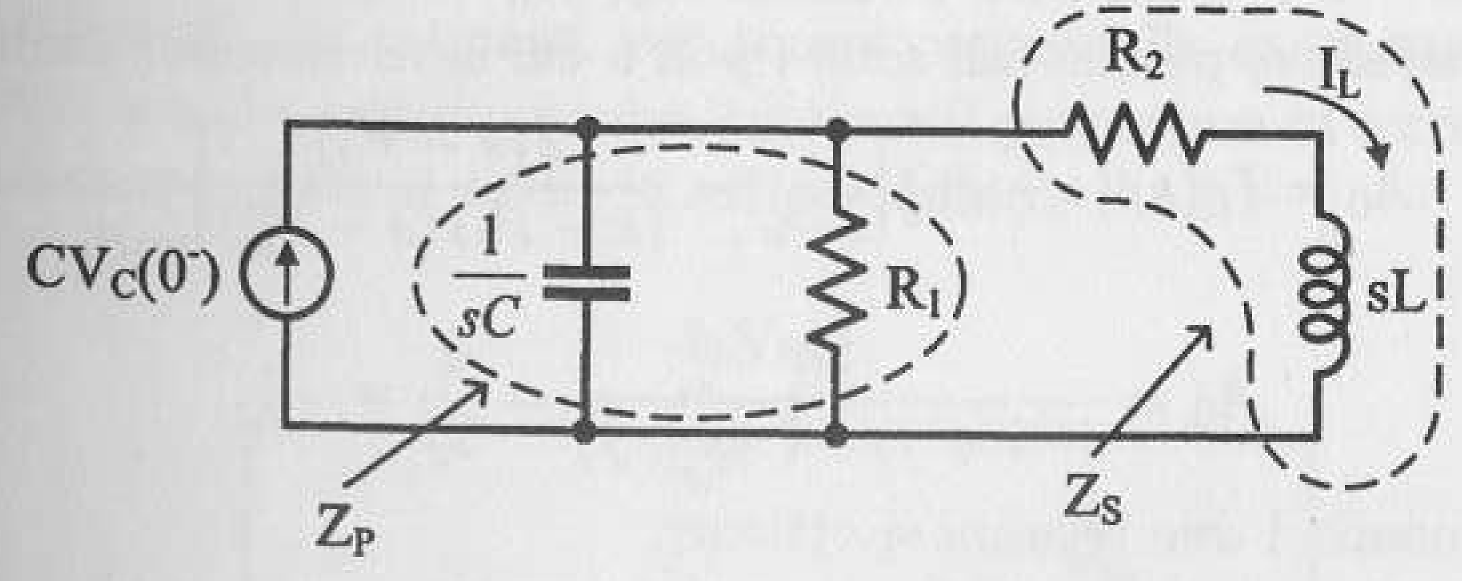



$$C = 1\ [F]\ ;\ L = 1\ [H]\ ;\ R_1 = 1\ [\Omega]\ ;\ R_2 = 1\ [\Omega]\ ;$$

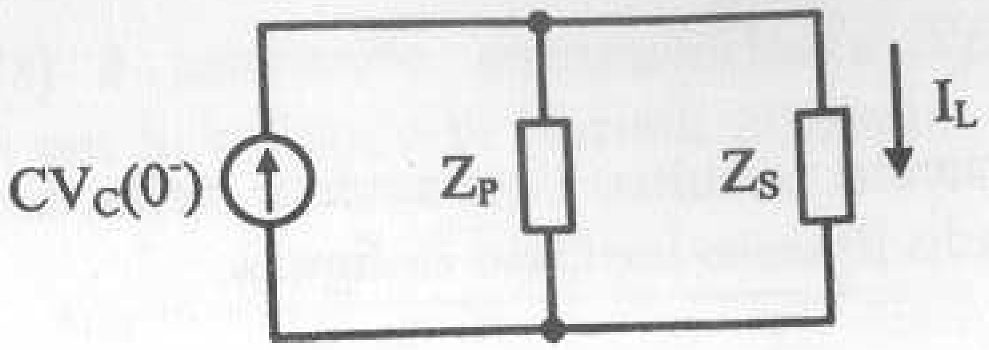
$$V_C(0^-) = 2\ [V]\ ;\ I_L(0^-) = 0\ [A]\,.$$

### Svolgimento

Si analizza il circuito in transitorio, per $t \geq 0$, nel dominio di Laplace. Si deve però tener conto delle condizioni iniziali sul condensatore ($V_C(0^-) \neq 0$), mentre l'induttore risulta scarico all'istante iniziale ($I_L(0^-) = 0$). Si ottiene quindi il seguente circuito, in cui è stato utilizzato il modello con il generatore di corrente, pari a $CV_C(0^-)$, per le condizioni iniziali sul condensatore:




La corrente $I_L$ che scorre nell'induttore è pari alla corrente che scorre nell'impedenza $Z_S$, costituita dalla serie di $R_2$ e di $sL$. Considerando anche il parallelo $Z_P$ di $R_1$ e $\frac{1}{sC}$, la corrente $I_L$ si può ottenere come semplice partitore di corrente:




$$I_L(s) = CV_C(0^-)\,\frac{Z_P}{Z_P+Z_S},$$

con

$$Z_P = \frac{R_1\frac{1}{sC}}{R_1+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{s+1};$$

$$Z_S = R_2 + sL = 1 + s\,.$$

Quindi:

$$I_L(s) = 2\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1}+s+1} = \frac{2}{s^2+2s+2}.$$

Per antitrasformare $I_L(s)$ si considerano i poli del denominatore:

$$s^2+2s+2=0 \Rightarrow s_{1/2} = -1\pm\sqrt{1-2} = -1\pm j\,.$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$I_L(s) = \frac{A_0}{s-P_0} + \frac{A_0^*}{s-P_0^*},$$

in cui $P_0 = -1+j$, mentre i residui $A_0$, $A_0^*$ risultano l'uno il complesso coniugato dell'altro, perché tali sono i poli a cui si riferiscono. Inoltre:

$$A_0 = I_L(s)\,(s-P_0)\Big|_{s=P_0} = \frac{2\,(s-P_0)}{(s-P_0)\,(s-P_0^*)}\bigg|_{s=P_0}$$

$$A_0 = \frac{2}{(-1+j)-(-1-j)} = \frac{2}{2j} = -j\,.$$

Antitrasformando i due termini si ottiene:

$$I_L(t) = \left[A_0e^{P_0t} + A_0^*e^{P_0^*t}\right]u_{-1}(t) = \left[-je^{-t}e^{jt}+je^{-t}e^{-jt}\right]u_{-1}(t)\,.$$

Moltiplicando e dividendo per $2j$ si ha:

$$I_L(t) = 2e^{-t}\left[\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right]u_{-1}(t)$$

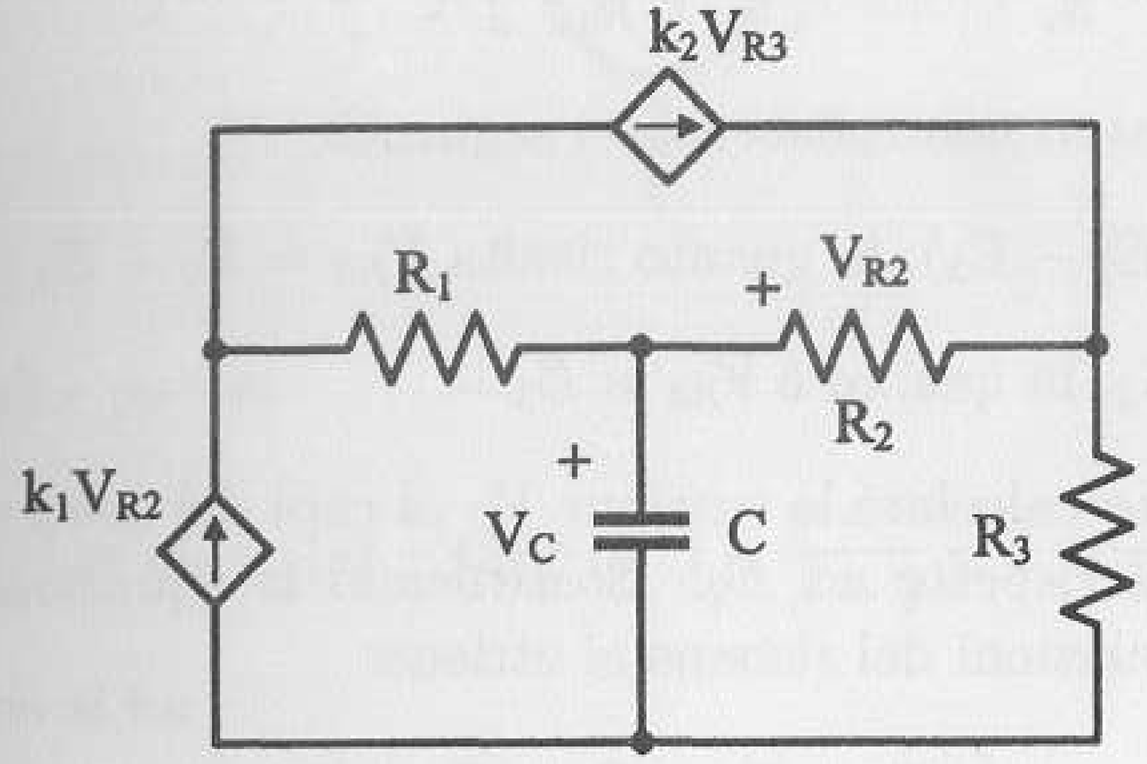
ed infine:

$$I_L(t) = 2e^{-t}\sin(t)\,u_{-1}(t)\;\;[A]$$



## Esercizio ~~2.4~~ OK

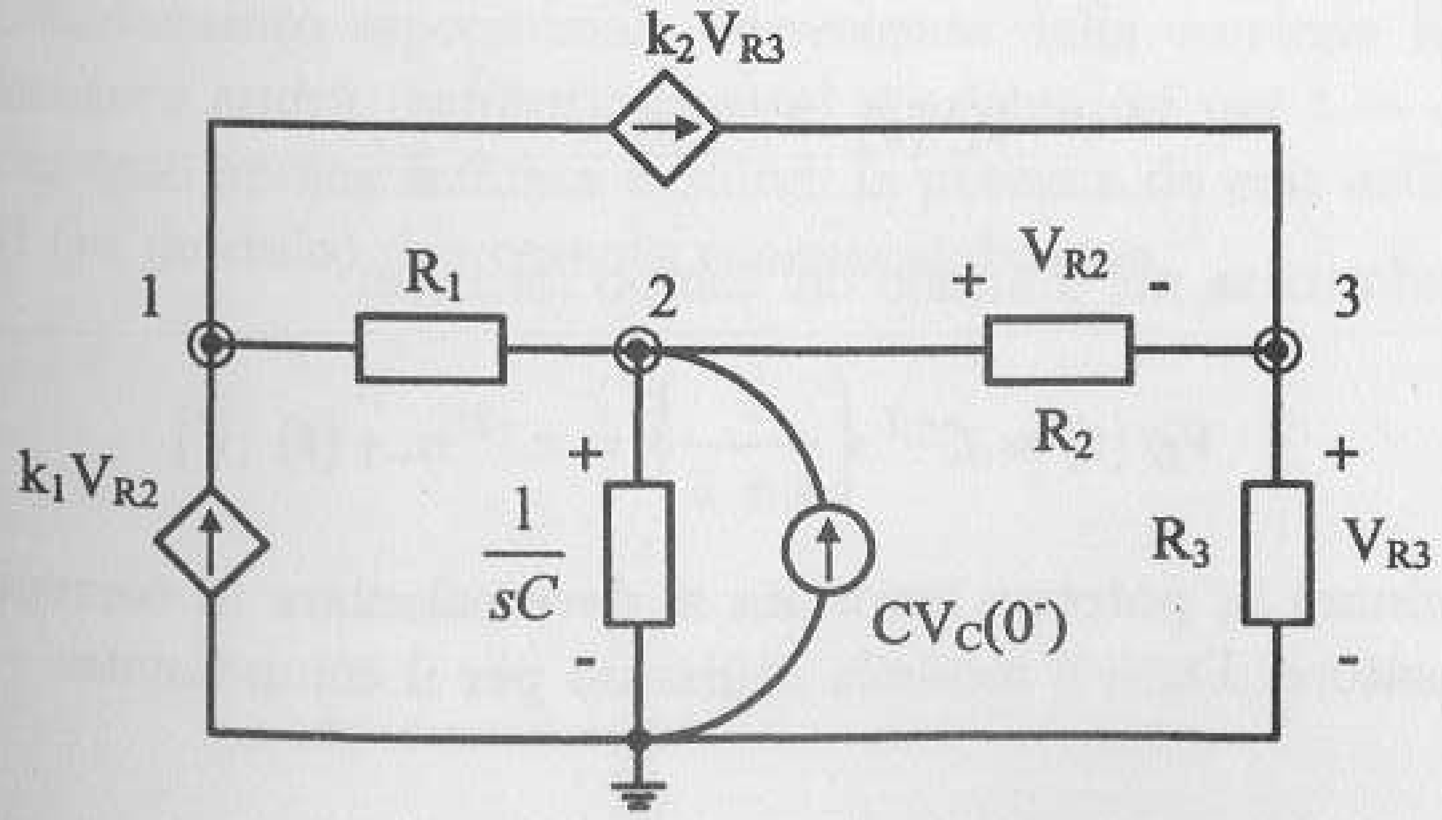
Nel circuito in figura, determinare gli andamenti della tensione $V_C$ e della potenza istantanea assorbita dal condensatore per $t \geq 0$.




$$V_C(0^-) = 1\,[V]\,; R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]\,; R_3 = 2\,[\Omega]\,; C = 1\,[F]\,; k_1 = k_2 = 1\left[\frac{A}{V}\right].$$

### Svolgimento

Il circuito deve essere analizzato nel dominio di Laplace. Data la topologia del circuito e la presenza di due generatori di corrente, conviene utilizzare il metodo dei nodi. In tal caso, per tenere conto delle condizioni iniziali sul condensatore, si usa il circuito equivalente con il generatore di corrente in modo da non introdurre ulteriori nodi. Si ottiene quindi:



Il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+sC+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 V_{R2} - k_2 V_{R3} \\ C V_C\left(0^-\right) \\ k_2 V_{R3} \end{bmatrix}$$

I vincoli dei generatori controllati sono i seguenti:

- $k_1 V_{R2} = k_1(E_2 - E_3)$, in quanto risulta $V_{R2} = E_2 - E_3$;
- $k_2 V_{R3} = k_2 E_3$, in quanto è $V_{R3} = E_3$.

Si deve innanzitutto calcolare la tensione $V_C$ ai capi del condensatore e quindi risolvere il sistema rispetto ad $E_2$. Sostituendo le equazioni dei generatori controllati nelle equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = E_2 - E_3 - E_3 \\ -E_1 + (s+2)\,E_2 - E_3 = 1 \\ -E_2 + \frac{3}{2}E_3 = E_3 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ha $E_3 = 2E_2$, che sostituita nella prime due dà

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = E_2 - 4E_2 \\ -E_1 + (s+2)\,E_2 - 2E_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = -2E_2 \\ sE_2 = 1 + E_1 \end{cases}$$

Sostituendo $E_1$ nella seconda equazione si ottiene

$$sE_2 = 1 - 2E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{s+2}.$$

La tensione nel condensatore è quindi:

$$V_C\,(s) = E_2(s) = \frac{1}{s+2},$$

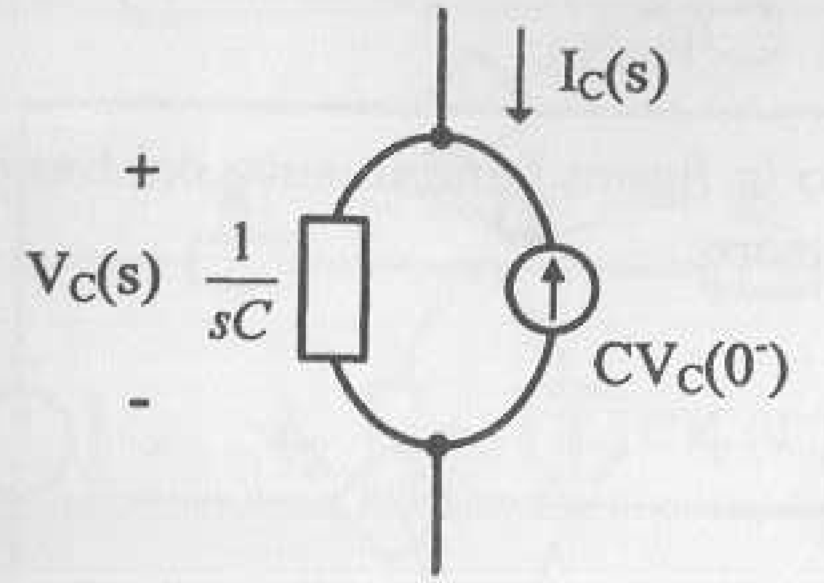
che antitrasformata nel dominio del tempo fornisce:

$$V_C\,(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}u_{-1}\,(t)\ [V]$$

Per determinare la potenza assorbita si deve calcolare la corrente che scorre nel condensatore. Dato il modello utilizzato per il componente:








la corrente $I_C(s)$ è pari a:

$$I_C\,(s) = sCV_C\,(s) - CV_C\,(0^-) = \frac{s}{s+2} - 1 = -\frac{2}{s+2};$$

quindi nel tempo si ha

$$I_C(t) = -2e^{-2t}u_{-1}(t).$$

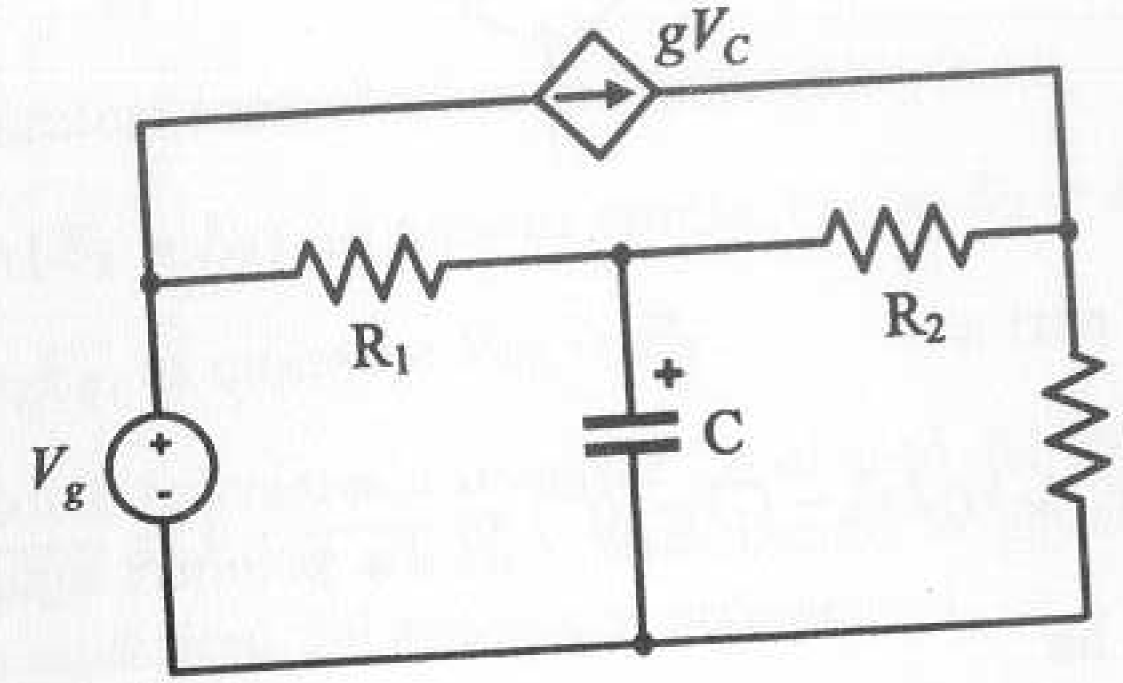
Visto che si è considerata la corrente $I_C(t)$ entrante nel morsetto positivo di $V_C(t)$, la potenza istantanea assorbita è pari, per $t \geq 0$, a:

$$P\,(t) = V_C\,(t)\,I_C\,(t) = -2e^{-2t}e^{-2t}u_{-1}\,(t) = -2e^{-4t}u_{-1}\,(t)\ [W]$$

Nota: il valore di $P(t)$ è sempre negativo per $t > 0$. Ciò significa che il condensatore cede sempre energia in tale intervallo di tempo. Essendo il condensatore un elemento passivo ($C > 0$), ciò significa che l'energia ceduta proviene da quella immagazzinata all'istante iniziale, dato che le condizioni iniziali sono non nulle. L'andamento esponenziale decrescente della tensione $V_C(t)$ indica che il condensatore andrà (asintoticamente) scaricandosi per $t \to \infty$, così come l'energia in esso immagazzinata e quindi la potenza da esso ceduta. Anche $P(t)$ è infatti (in modulo) decrescente esponenzialmente.

## Esercizio 2.5 OK

Determinare nel circuito in figura l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della corrente che fluisce nel condensatore.




$$R_1 = R_2 = R_3 = 1\,[\Omega];\ C = 1\,[F];\ g = 1\,[A/V];$$

$$V_g(t) = 2u_{-1}(t)\,[V];\ V_C(0^-) = 1\,[V].$$

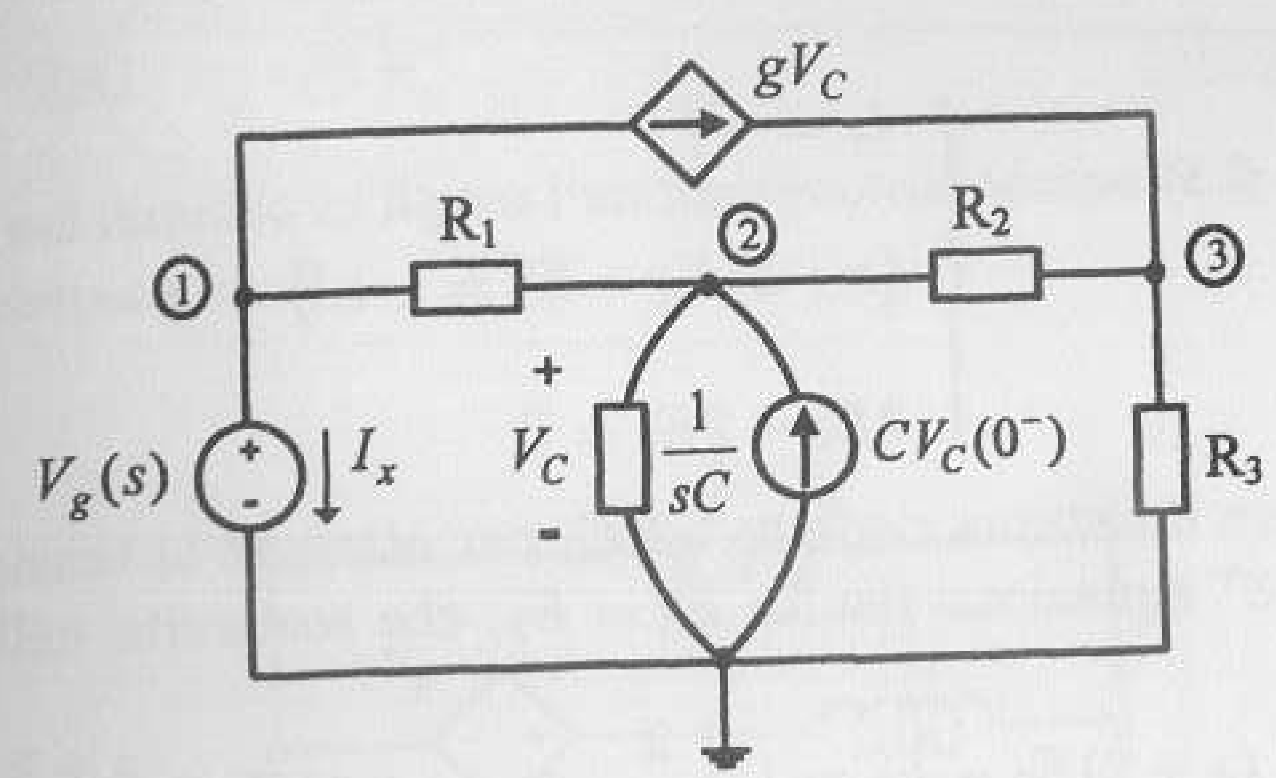
### Svolgimento

Si deve analizzare il circuito nel dominio di Laplace, dove per l'eccitazione $V_g(t)$ risulta:

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{V_g(t)\} = \mathcal{L}\{2u_{-1}(t)\} = \frac{2}{s}.$$

La topologia del circuito porta ad uno stesso numero di equazioni nel sistema risolvente ottenuto con il metodo dei nodi o con il metodo delle maglie. Inoltre è presente sia un generatore di tensione che uno di corrente. Nel seguito si utilizzerà, in modo quindi del tutto indifferente, il metodo dei nodi. Per tenere conto delle condizioni iniziali sul condensatore è conveniente adottare il circuito equivalente con il generatore di corrente, in modo da non introdurre ulteriori nodi nel circuito. Si introduce inoltre l'incognita ausiliaria $I_x$ per il generatore di tensione $V_g$. Dunque si ha:






Il sistema risolvente è quindi il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_x - gV_C \\ CV_C(0^-) \\ gV_C \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore di tensione:

$$V_g(s) = E_1 \ \Rightarrow\ E_1 = \frac{2}{s}.$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$gV_C = gE_2\,,$$

in quanto la tensione $V_C$ sul condensatore è proprio pari a $E_2$.

Sostituendo le equazioni di vincolo nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{2}{s} - E_2 = -I_x - E_2 \\ -\frac{2}{s} + (s+2)E_2 - E_3 = 1 \\ -E_2 + 2E_3 = E_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} I_x = -\frac{2}{s} \\ (s+2)E_2 - E_3 = 1 + \frac{2}{s} \\ 2E_2 - 2E_3 = 0 \end{cases}$$

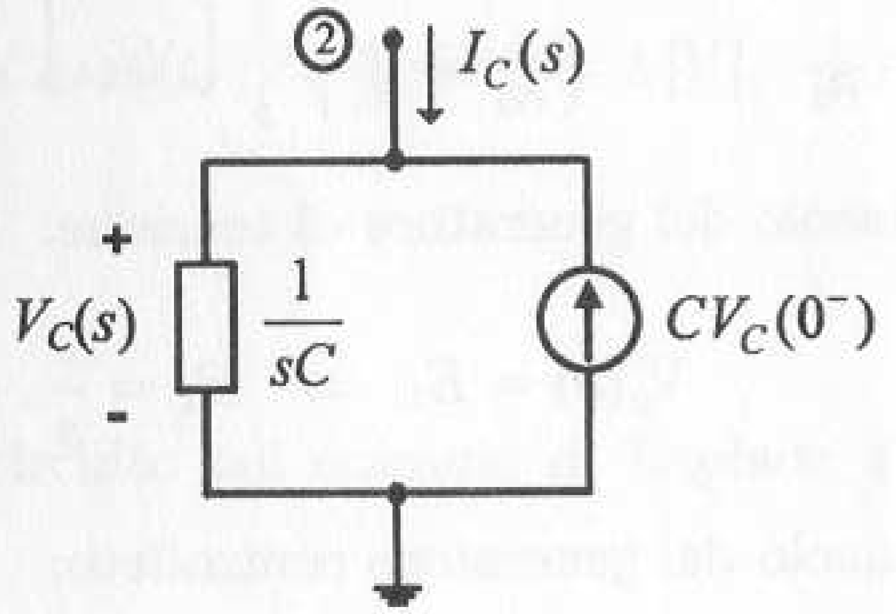
Si deve risolvere il sistema rispetto ad $E_2$ per ottenere la tensione sul condensatore. Dalla $3^a$ equazione risulta $E_3 = E_2$, che sostituita nella $2^a$ equazione porta a:

$$(s+2)E_2 - E_2 = 1 + \frac{2}{s} \Rightarrow (s+1)E_2 = \frac{s+2}{s}$$

e quindi

$$E_2 = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

La corrente che scorre nel condensatore $C$ è dovuta sia al contributo dell'impedenza $\frac{1}{sC}$ che a quella del generatore delle condizioni iniziali $[CV_C(0^-)]$:




Si ottiene quindi:

$$I_C(s) = sCV_C(s) - CV_C(0^-) = sE_2 - 1$$

$$I_C(s) = \frac{s(s+2)}{s(s+1)} - 1 = \frac{s+2-s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1},$$

che nel tempo fornisce il seguente andamento:

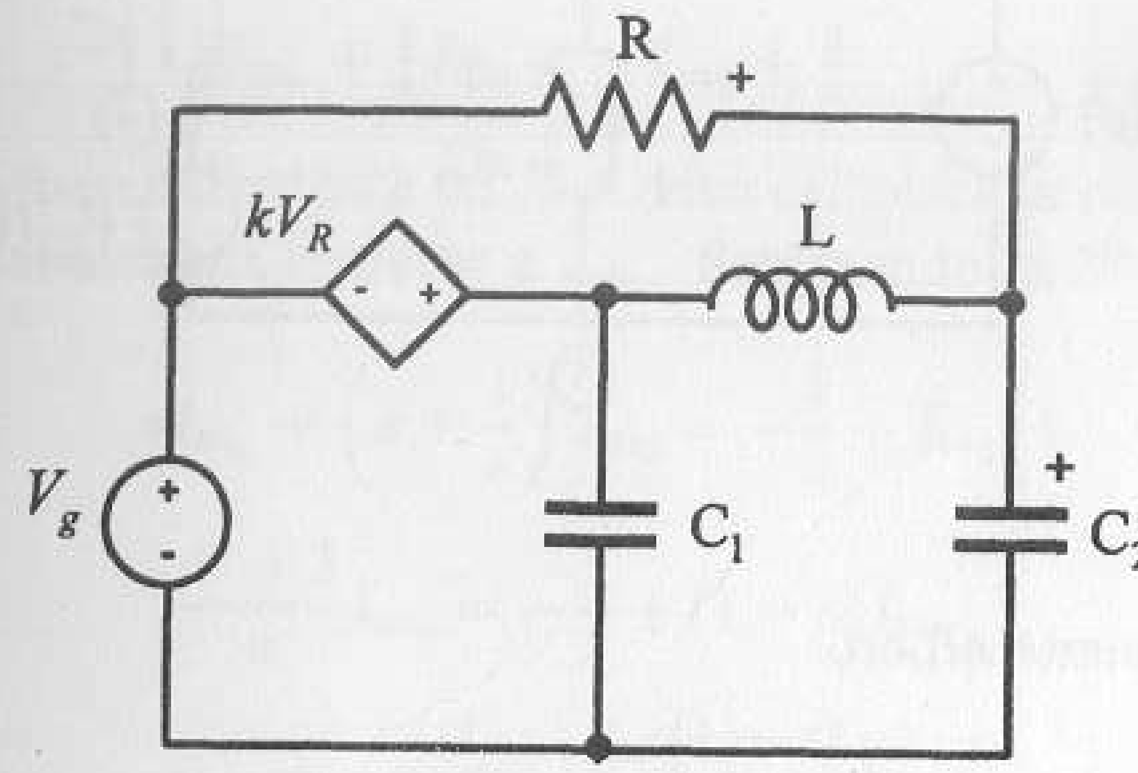
$$I_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u_{-1}(t) \quad [A]$$





## Esercizio 2.6 OK

Determinare nel circuito in figura l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della potenza istantanea dissipata su $R$.




$$R = 1\,[\Omega];\ L = 1\,[H];\ C_1 = C_2 = 1\,[F];\ k = 1\,[V/V];$$

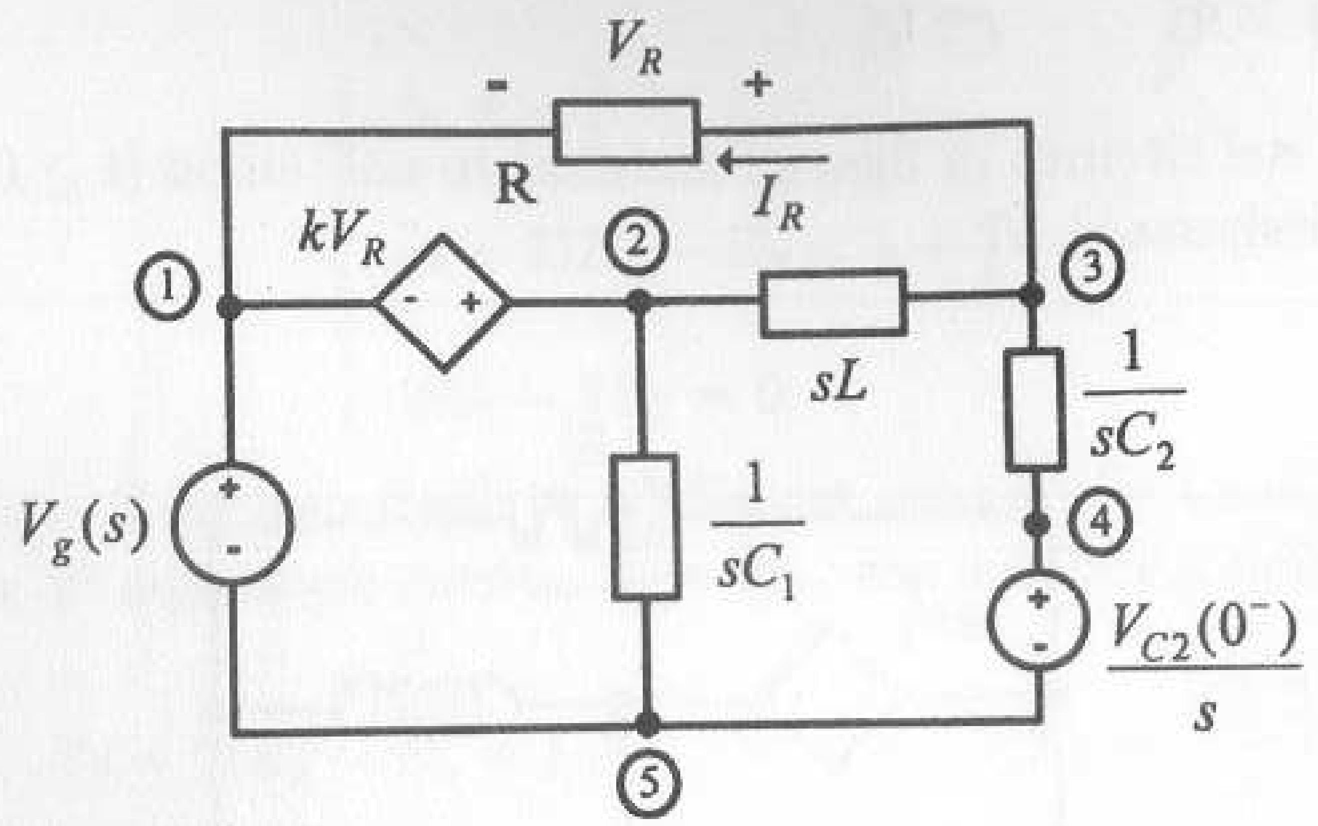
$$V_g(t) = 2u_{-1}(t)\,[V];\ V_{C_1}(0^-) = 0\,[V];\ V_{C_2}(0^-) = 1\,[V];\ I_L(0^-) = 0\,[A].$$

### Svolgimento

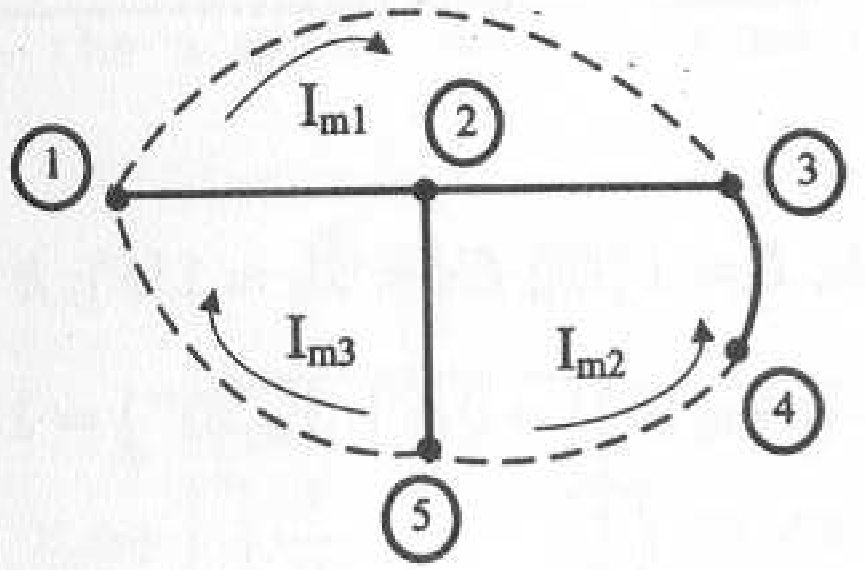
Si deve analizzare il circuito nel dominio di Laplace. Per l'eccitazione esterna $Vg(t)$ risulta:

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{V_g(t)\} = \mathcal{L}\{2u_{-1}(t)\} = \frac{2}{s}.$$

Data la topologia del circuito, il metodo delle maglie e quello dei nodi portano allo stesso numero di equazioni. Essendo presenti solo generatori di tensione, conviene applicare il metodo delle maglie. A tale riguardo, per le condizioni iniziali sul condensatore $C_2$ ($C_1$ ed $L$ sono inizialmente scarichi) conviene utilizzare il circuito equivalente con il generatore di tensione, in modo tale da non introdurre un'ulteriore maglia. Dunque si avrà il seguente circuito:




Scegliendo il seguente albero:




si ottiene il sistema da risolvere:

$$\begin{bmatrix} (R+sL) & sL & 0 \\ sL & (\frac{1}{sC_2}+sL+\frac{1}{sC_1}) & \frac{1}{sC_1} \\ 0 & \frac{1}{sC_1} & \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \\ I_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kV_R \\ \frac{V_{C_2}(0^-)}{s} \\ kV_R + V_g \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$kV_R = kRI_R ,$$

dove $I_R$ è la corrente entrante dal morsetto positivo di $V_R$, cioè:

$$I_R = -I_{m_1} \;\Rightarrow\; kV_R = -kRI_{m_1} = -I_{m_1} .$$





Sostituendo questa equazione di vincolo nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (s+1)I_{m_1} + sI_{m_2} = I_{m_1} \\ sI_{m_1} + \left(\frac{2}{s}+s\right)I_{m_2} + \frac{1}{s}I_{m_3} = \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s}I_{m_2} + \frac{1}{s}I_{m_3} = -I_{m_1} + \frac{2}{s} \end{cases}$$

Per calcolare la potenza dissipata su $R$ si deve calcolare la corrente $I_R = -I_{m_1}$ e quindi risolvere il sistema rispetto a $I_{m_1}$. Sottraendo la $3^a$ equazione alla $2^a$ risulta che:

$$sI_{m_1} + \left(s+\frac{1}{s}\right)I_{m_2} = -\frac{1}{s} + I_{m_1}$$

$$\frac{s^2+1}{s}I_{m_2} = -\frac{1}{s} + (1-s)I_{m_1}$$

$$I_{m_2} = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{s(1-s)}{s^2+1}I_{m_1} .$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella $1^a$ equazione del sistema si ha:

$$(s+1)I_{m_1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{s^2(1-s)}{s^2+1}I_{m_1} = I_{m_1}$$

$$\frac{s(s^2+1)+s^2+1+s^2-s^3-s^2-1}{s^2+1}I_{m_1} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{s^2+s}{s^2+1}I_{m_1} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$I_{m_1}(s) = \frac{1}{s+1}$$

e quindi

$$I_R(s) = -I_{m_1}(s) = -\frac{1}{s+1} .$$

L'andamento nel tempo della corrente in $R$ è dunque dato da

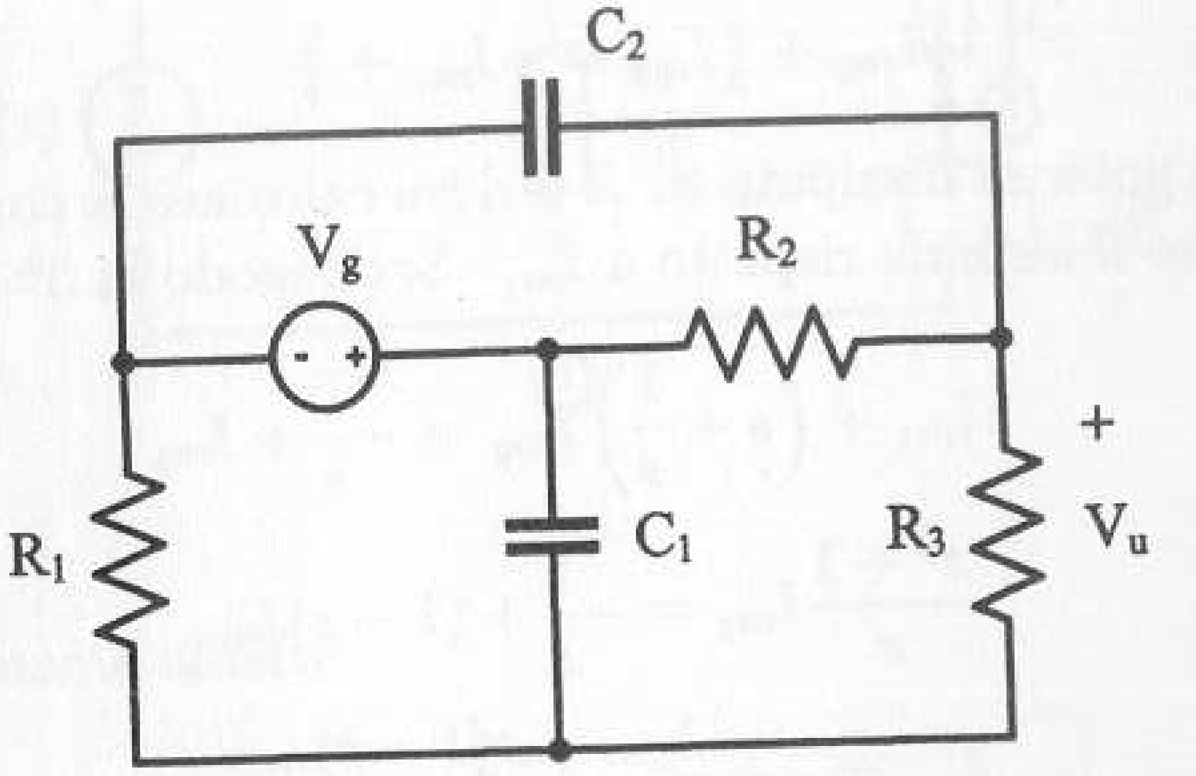
$$I_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s+1}\right\} = -e^{-t}u_{-1}(t) .$$

Poiché $I_R(t)$ è entrante dal morsetto positivo di $V_R(t)$, la potenza istantanea dissipata da $R$ è pari a:

$$P(t) = V_R(t)I_R(t) = RI_R^2(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) \quad [W]$$

## Esercizio 2.7

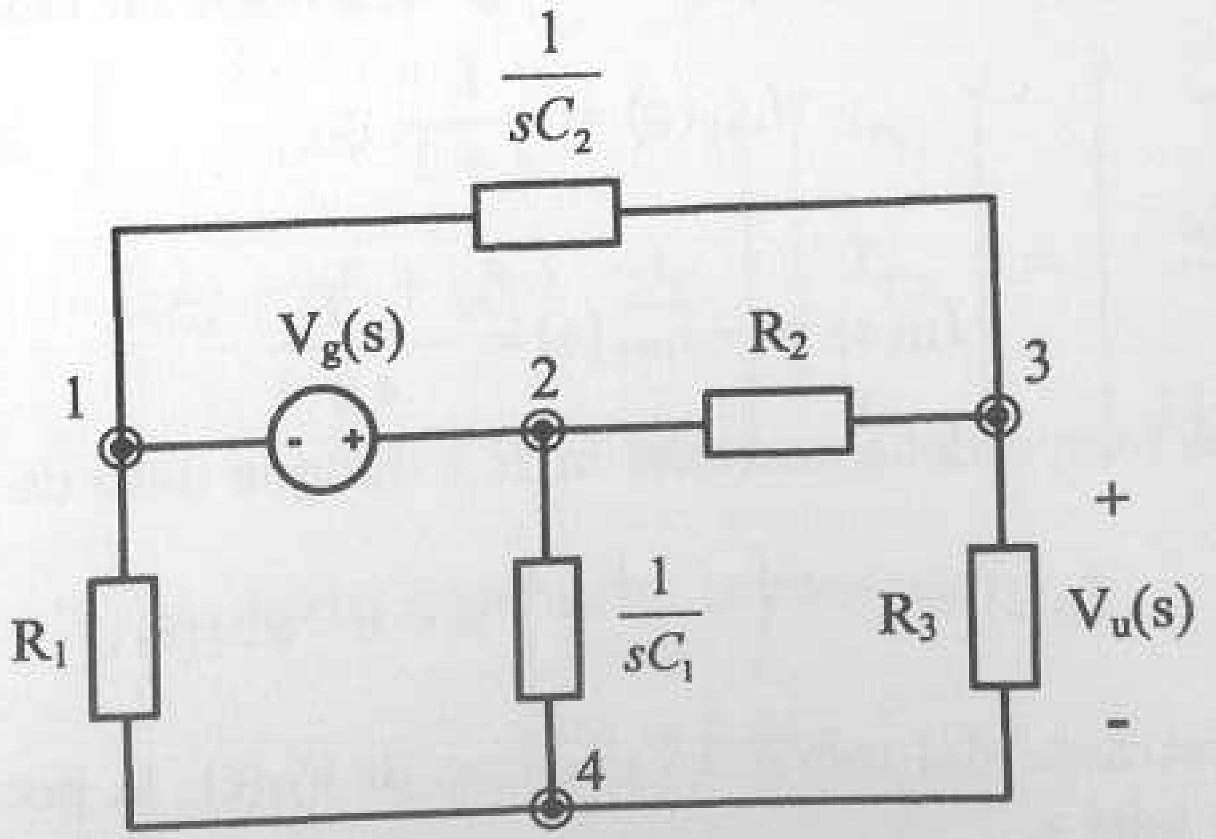
Nel circuito in figura, determinare la funzione di rete tra le tensioni $V_u$ e $V_g$. Determinare inoltre l'andamento nel tempo di $V_u(t)$, per $t \geq 0$, quando $V_g(t) = e^{-3t}u_{-1}(t)$ e le condizioni iniziali sui condensatori sono nulle.




$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]\,; R_3 = 2\,[\Omega]\,; C_1 = C_2 = 1\,[F]\,.$$

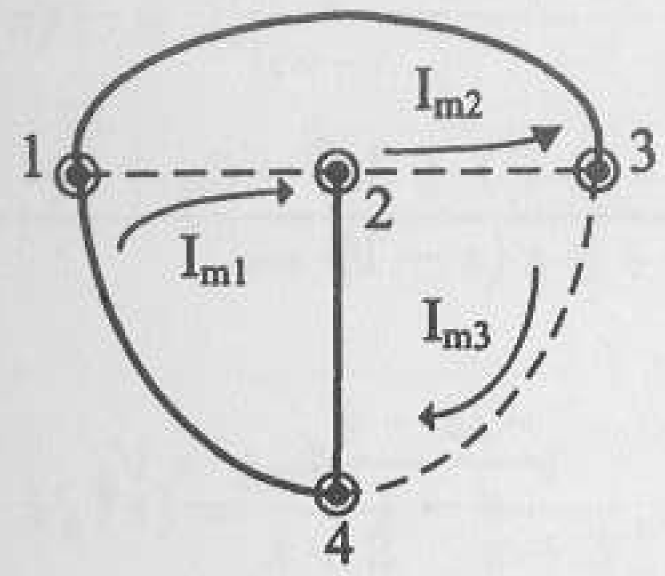
### Svolgimento

Per il calcolo della funzione di rete si esegue l'analisi nel dominio di Laplace. Il circuito diventa il seguente:






Si noti che per il calcolo della funzione di rete non bisogna considerare alcuna condizione iniziale sui componenti con memoria. Sia il metodo delle maglie che quello dei nodi portano alla soluzione di un sistema di tre equazioni. Poiché è presente un generatore di tensione, è più immediato utilizzare il metodo delle maglie scegliendo il seguente albero:




tramite il quale il sistema risolvente diventa il seguente:

$$\begin{cases} \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right)I_{m1} + \left(-R_1 - \frac{1}{sC_1}\right)I_{m2} + R_1 I_{m3} = V_g \\ \left(-R_1 - \frac{1}{sC_1}\right)I_{m1} + \left(R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_1 + \frac{1}{sC_1}\right)I_{m2} + \left(-R_1 - \frac{1}{sC_2}\right)I_{m3} = 0 \\ R_1 I_{m1} + \left(-R_1 - \frac{1}{sC_2}\right)I_{m2} + \left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3\right)I_{m3} = 0 \end{cases}$$

Per il calcolo di $V_u$ si deve risolvere rispetto a $I_{m3}$, dal momento che è $V_u(s) = R_3 I_{m3}(s)$. Dunque si avrà:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m1} - \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} + I_{m3} = V_g \\ -\left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m1} + 2\left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} - \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m3} = 0 \\ I_{m1} - \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} + \left(3 + \frac{1}{s}\right) I_{m3} = 0 \end{cases}$$

Sommando la prima e la seconda equazione si ha:

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} - \frac{1}{s} I_{m3} = V_g \Rightarrow I_{m2} = \frac{s}{s+1} V_g + \frac{1}{s+1} I_{m3}\,.$$

Moltiplicando per 2 la terza equazione e sommando alla seconda si ottiene:

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right) I_{m1} + \left(5 + \frac{1}{s}\right) I_{m3} = 0 \Rightarrow I_{m1} = -\frac{5s+1}{s-1} I_{m3}\,.$$

Si sostituiscono quindi i valori di $I_{m1}$ e $I_{m2}$, appena ottenuti, nella terza equazione del sistema:

$$-\frac{5s+1}{s-1}I_{m3} - \frac{s+1}{s}\cdot\frac{s}{s+1}V_g - \frac{s+1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}I_{m3} + \frac{3s+1}{s}I_{m3} = 0$$

ovvero

$$-\frac{5s+1}{s-1}I_{m3} - V_g - \frac{1}{s}I_{m3} + \frac{3s+1}{s}I_{m3} = 0$$

$$\frac{-5s^2 - s - s + 1 + 3s^2 - 3s + s - 1}{s\,(s-1)}I_{m3} = V_g$$

$$\frac{-2s-4}{s-1}I_{m3} = V_g$$

$$I_{m3} = -\frac{s-1}{2\,(s+2)}V_g\,.$$

Quindi:

$$V_u(s) = R_3 I_{m3}(s) = 2I_{m3}(s) = -\frac{s-1}{s+2}V_g(s)$$

e, in definitiva, la funzione di rete è:

$$H\,(s) = \frac{V_u\,(s)}{V_g\,(s)} = -\frac{s-1}{s+2}\,.$$

Per calcolare l'andamento di $V_u(t)$ per $t \geq 0$ è necessario analizzare il circuito nel dominio di Laplace, tenendo conto delle condizioni iniziali su $C_1$ e $C_2$. Poiché tali condizioni sono nulle, l'analisi coincide con quella effettuata per il calcolo della funzione di rete:

$$V_u\,(s) = H\,(s)\,V_g\,(s)\,,$$

dove

$$V_g\,(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-3t}u_{-1}\,(t)\right\} = \frac{1}{s+3}\,,$$

da cui:

$$V_u\,(s) = -\frac{s-1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+3}\,.$$

Si deve infine antitrasformare $V_u(s)$ nel tempo. Si effettua lo sviluppo in frazioni parziali, considerando che si hanno due poli reali semplici in $s=-2$ e $s=-3$:





$$V_u\,(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}\,,$$

con:

$$A = V_u\,(s)\,(s+2)\Big|_{s=-2} = -\frac{(-2)-1}{-2+3} = 3\,;$$

$$B = V_u\,(s)\,(s+3)\Big|_{s=-3} = -\frac{(-3)-1}{-3+2} = -4\,.$$

Quindi sarà

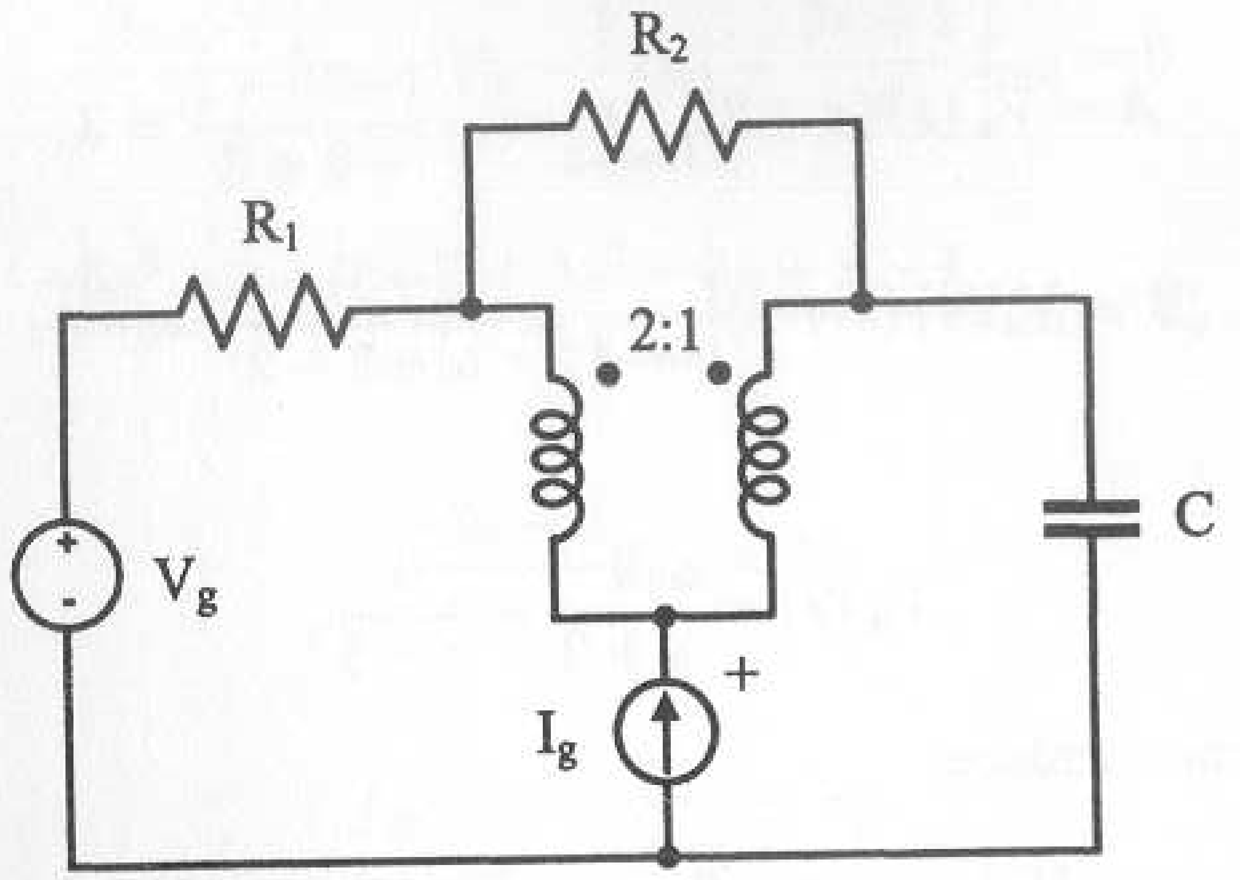
$$V_u\,(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+3}\,,$$

che in conclusione fornisce:

$$V_u\,(t) = \left[3e^{-2t} - 4e^{-3t}\right]u_{-1}(t)\ [V]$$

## Esercizio 2.8

Calcolare l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della tensione ai capi del generatore di corrente, con il verso indicato nel circuito in figura.

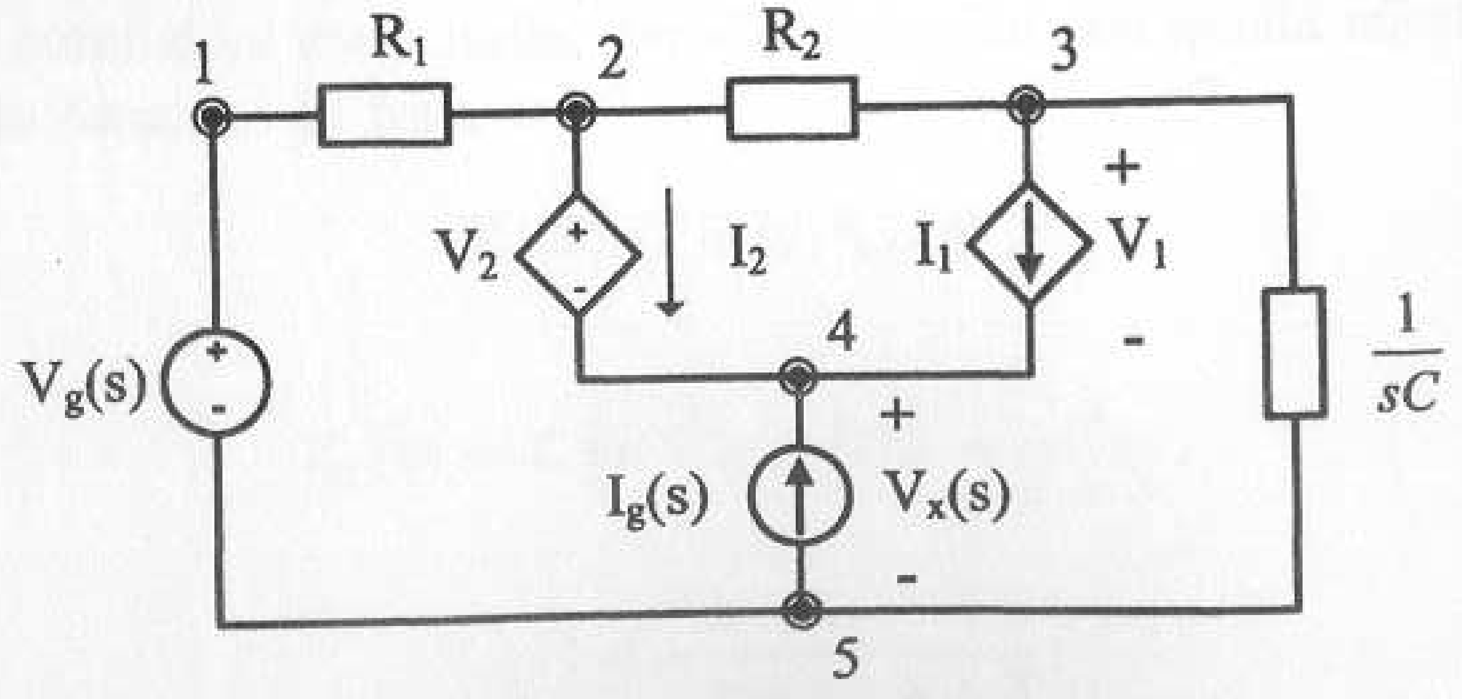



$$V_g(t) = u_{-1}(t)\,[V]\,; V_c(0^-) = 0\,[V]\,; I_g(t) = u_{-1}(t)\,[A]\,;$$

$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]\,; C = 1\,[F]\,.$$

### Svolgimento

Il circuito deve essere analizzato nel dominio di Laplace, tenendo conto che per il condensatore le condizioni iniziali sono nulle. Il circuito diventa quindi:




dove gli avvolgimenti del trasformatore ideale sono stati sostituiti, rispettivamente, da un generatore di tensione (controllato in tensione) e un generatore





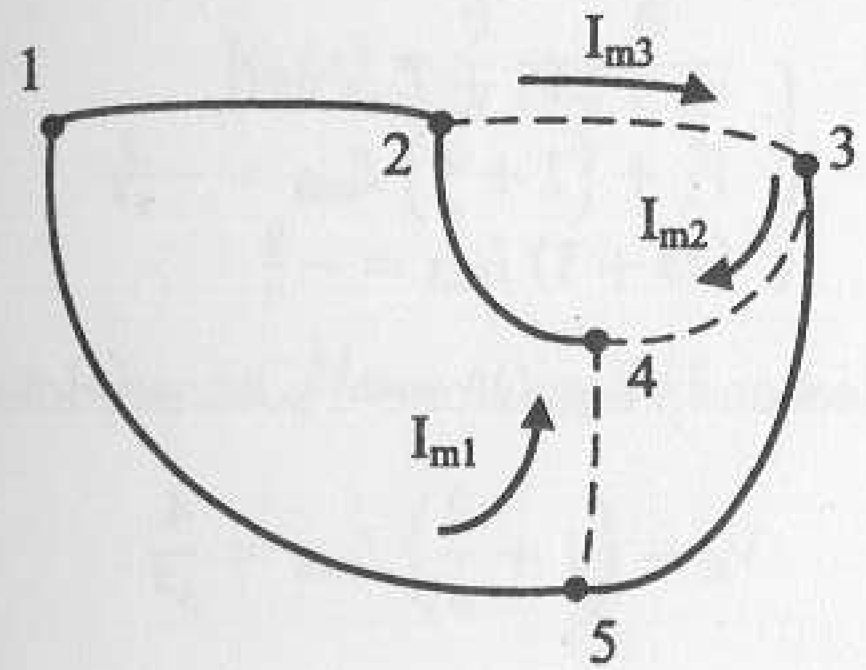
di corrente (controllato in corrente):

$$\begin{cases} V_2 = 2V_1 \\ I_1 = -2I_2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda le eccitazioni risulta:

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}; \qquad I_g(s) = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Si deve calcolare la tensione $V_x(s)$ ai capi del generatore di corrente. Si applica il metodo della maglie, utilizzando come incognite aggiuntive la tensione $V_1$ ai capi del generatore controllato di corrente $I_1$ e proprio la tensione $V_x$. Considerando il seguente grafo del circuito, in cui il co-albero è tratteggiato e contiene entrambi i generatori di corrente, si ottiene il sistema risolvente:




$$\begin{bmatrix} R_1 & R_1 & -R_1 \\ R_1 & \left(R_1 + \frac{1}{sC}\right) & -\frac{1}{sC} - R_1 \\ -R_1 & -\frac{1}{sC} - R_1 & R_1 + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x + V_2 - V_g \\ -V_1 + V_2 - V_g \\ V_g \end{bmatrix}$$

- Equazioni di vincolo dei generatori di corrente:
  1) $I_{m1} = I_g = \frac{1}{s}$.
  2) $I_{m2} = I_1$.
- Equazioni di vincolo dei generatori controllati (trasformatore ideale):
  3) $I_1 = -2I_2$. Non essendo $I_2$ un'incognita del sistema è necessario esplicitarla in funzione delle incognite del sistema stesso. La corrente $I_2$ è quella del ramo dell'albero entrante nel nodo 4:

$$I_2 = -I_{m1} - I_{m2} \Rightarrow I_1 = 2I_{m1} + 2I_{m2}.$$

4) $V_2 = 2V_1$. In questo caso $V_1$ è un'incognita (aggiuntiva) del sistema.

Considerando le prime tre equazioni di vincolo si ottiene:

$$I_{m2} = 2I_{m1} + 2I_{m2} \Rightarrow I_{m2} = -2I_{m1} = -\frac{2}{s}.$$

Sostituendo nel sistema quest'ultima equazione, oltre alla prima e alla quarta equazione di vincolo, si avrà:

$$\begin{cases} \frac{1}{s} - \frac{2}{s} - I_{m3} = V_x + 2V_1 - \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} + \left(1+\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{2}{s}\right) - \left(1+\frac{1}{s}\right) I_{m3} = V_1 - \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} - \left(1+\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{2}{s}\right) + \left(2+\frac{1}{s}\right) I_{m3} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x + 2V_1 + I_{m3} = 0 \\ V_1 + \left(1+\frac{1}{s}\right) I_{m3} = -\frac{2}{s^2} \\ (2s+1)\, I_{m3} = -\frac{2}{s} \end{cases}$$

Moltiplicando per 2 la seconda equazione e sottraendola alla prima si ottiene

$$V_x - \left(1+\frac{2}{s}\right) I_{m3} = \frac{4}{s^2}.$$

Dalla terza equazione si ha:

$$I_{m3} = -\frac{2}{s} \cdot \frac{1}{2s+1}.$$

Sostituendo quest'ultima nella precedente:

$$V_x + \frac{(s+2)}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{2s+1} = \frac{4}{s^2}$$

$$V_x = \frac{4}{s^2} - \frac{2s+4}{s^2\,(2s+1)}$$

$$V_x = \frac{8s+4-2s-4}{s^2\,(2s+1)} = \frac{6s}{s^2\,(2s+1)} = \frac{3}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}.$$



Per calcolare l'andamento nel tempo, per $t \geq 0$, si deve antitrasformare effettuando prima la scomposizione in frazioni parziali:

$$V_x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{2}},$$

dove

$$\begin{cases} A = V_x(s) \cdot s\Big|_{s=0} = \frac{3}{s(s+\frac{1}{2})} \cdot s\Big|_{s=0} = 6 \\ B = V_x(s) \cdot \left(s+\frac{1}{2}\right)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{s(s+\frac{1}{2})}\left(s+\frac{1}{2}\right)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = -6 \end{cases}$$

In definitiva sarà:

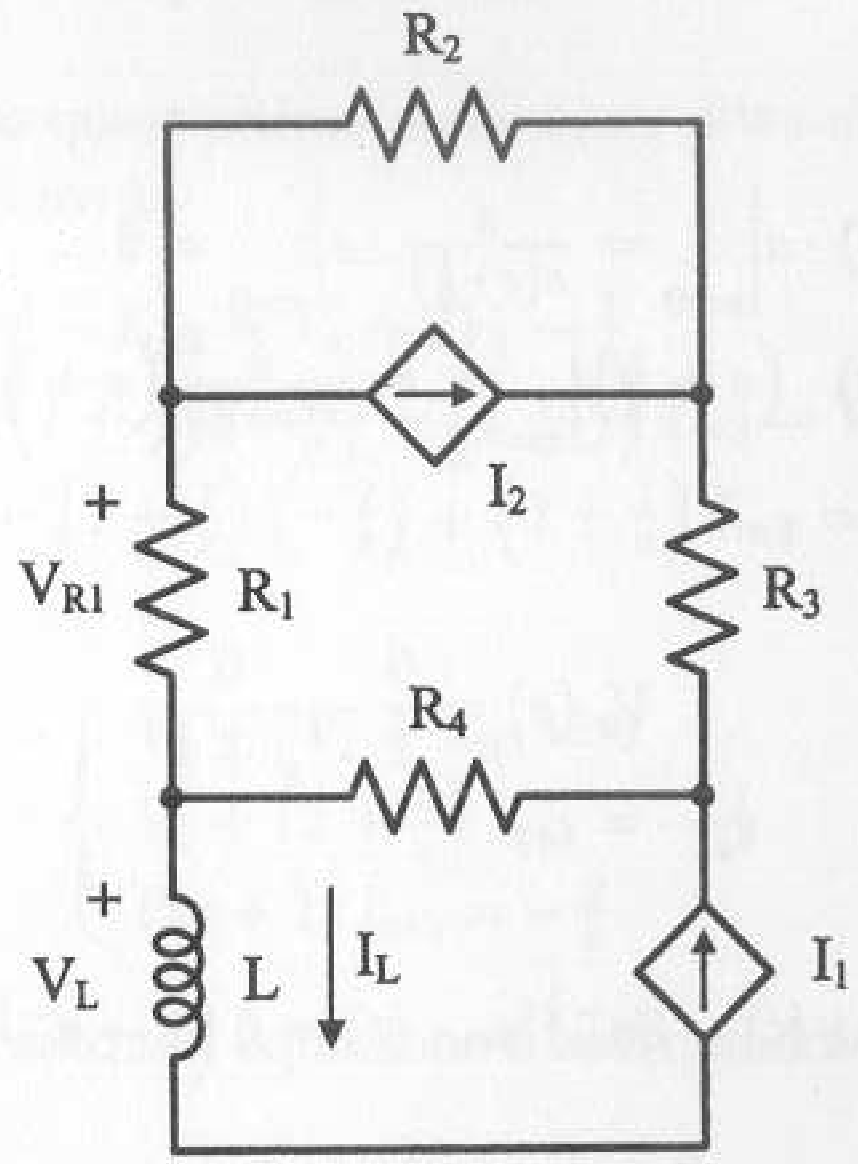
$$V_x(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s+\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$V_x(t) = 6u_{-1}(t) - 6e^{-\frac{1}{2}t}u_{-1}(t) = 6\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)u_{-1}(t) \;\; [V]$$

## Esercizio 2.9

Determinare l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della tensione ai capi dell'induttore del circuito in figura.



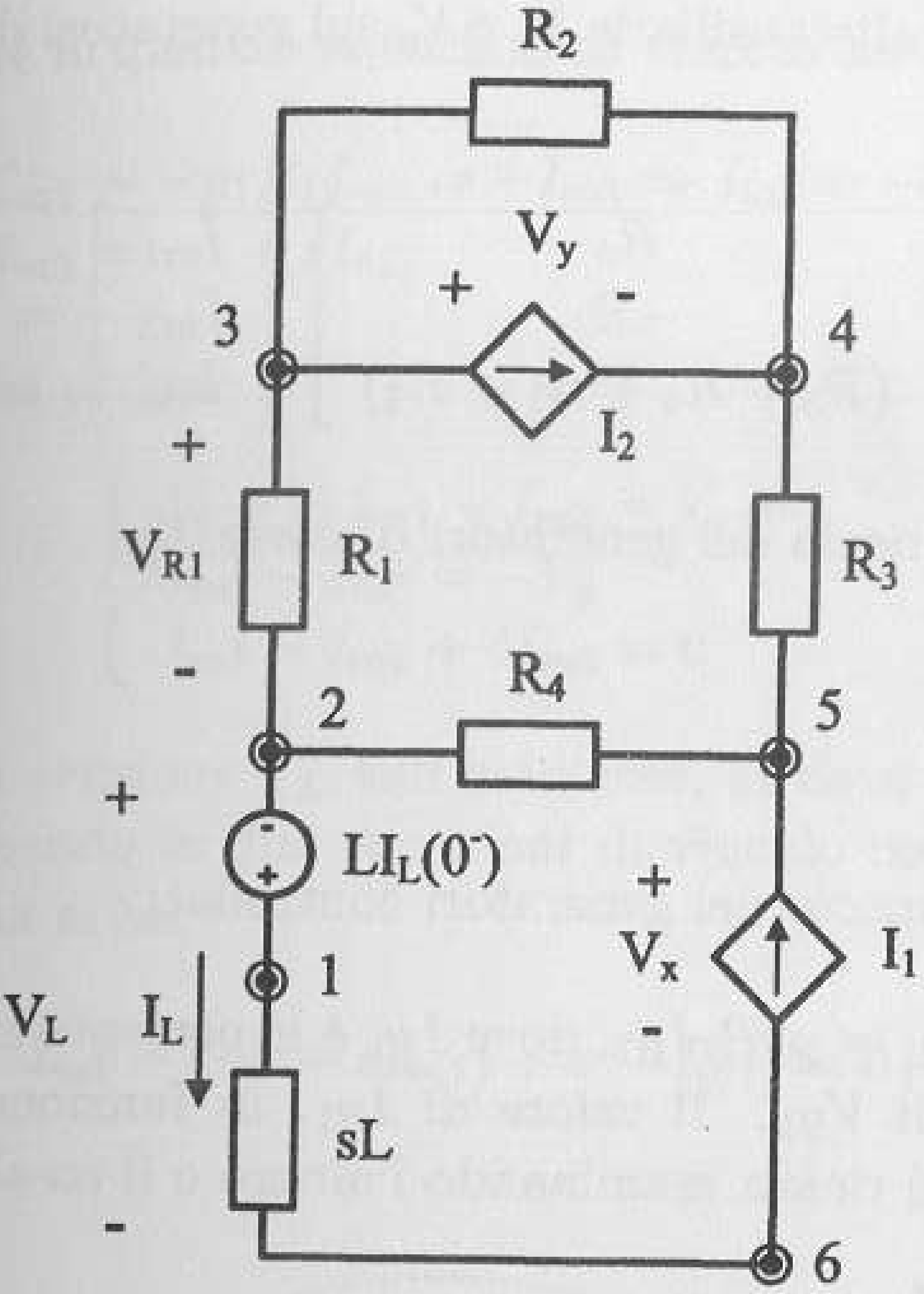

$$I_L\left(0^-\right) = 1\,[A]\ ;\ I_1 = g_1 V_{R1}\,[A]\ ;\ I_2 = g_2 V_L\,[A]\ ;$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\,[\Omega]\ ;\ L = 1\,[H]\ ;\ g_1 = g_2 = 1\left[\frac{A}{V}\right].$$

### Svolgimento

Bisogna analizzare il circuito nel dominio di Laplace. Per tenere conto delle condizioni iniziali sull'induttore si usa il circuito equivalente con il generatore di tensione, in quanto successivamente si utilizzerà il metodo delle maglie e questa scelta non aumenta il numero delle maglie stesse:

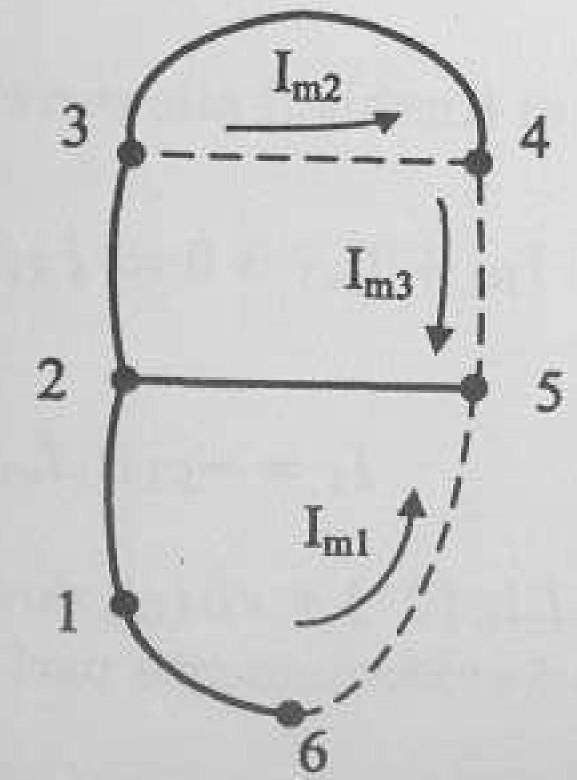





Si noti che la tensione $V_L$ ai capi dell'induttore è data dalla somma delle cadute di potenziale sul generatore di tensione $LI_L(0^-)$ e sull'impedenza $sL$, cioè:

$$V_L = -LI_L(0^-) + sLI_L\,.$$

Si applica il metodo delle maglie scegliendo il seguente albero, in modo che i generatori di corrente giacciano tutti nel co-albero:



ducendo le incognite ausiliarie $V_x$ e $V_y$ sui generatori di corrente, si ottiene
uente sistema:

$$\begin{bmatrix} (R_4+sL) & 0 & R_4 \\ 0 & R_2 & -R_2 \\ R_4 & -R_2 & (R_3+R_4+R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x + LI_L(0^-) \\ -V_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

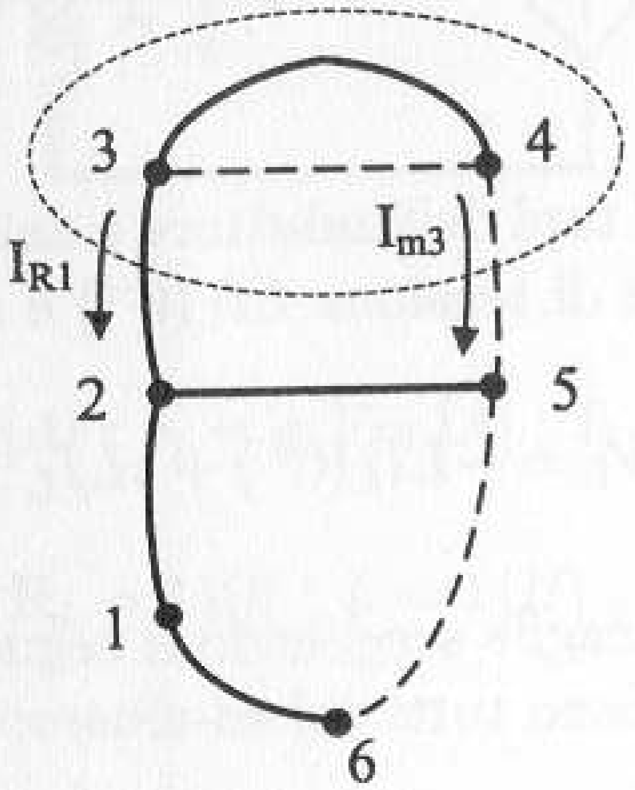
- Equazioni di vincolo dei generatori di corrente:

A) $I_1 = I_{m1}$.

B) $I_2 = I_{m2}$.

- Equazioni di vincolo dei generatori controllati:

C) $I_1 = g_1 V_{R1} = g_1 R_1 I_{R1}$, dove $I_{R1}$ è la corrente entrante dal morsetto positivo di $V_{R1}$. Il valore di $I_{R1}$, in funzione delle incognite del sistema, si ricava esaminando l'albero e il co-albero scelti:




Scrivendo la legge di Kirchhoff alle correnti per il taglio evidenziato, risulta:

$$I_{R1} + I_{m3} = 0 \Rightarrow I_{R1} = -I_{m3}$$

e quindi

$$I_1 = -g_1 R_1 I_{m3}.$$

D) $I_2 = g_2 V_L = g_2 [-LI_L(0^-) + sLI_L]$, dove $I_L$ è la corrente che scorre nell'indutore che è evidentemente pari a $I_{m1}$. Quindi:

$$I_2 = -g_2 LI_L(0^-) + g_2 sLI_{m1}.$$





Combinando insieme le quattro equazioni di vincolo sin qui scritte si ha:

$$\begin{cases} I_{m1} = -g_1 R_1 I_{m3} = -I_{m3} \Rightarrow I_{m3} = -I_{m1} \\ I_{m2} = -1 + sI_{m1} \end{cases}$$

Mentre dal sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (s+1)\, I_{m1} + I_{m3} = V_x + 1 \\ I_{m2} - I_{m3} = -V_y \\ I_{m1} - I_{m2} + 4I_{m3} = 0 \end{cases}$$

Dovendo ricavare la tensione $V_L$ sull'induttore, si deve calcolare la corrente $I_L$ cioè $I_{m1}$. Sostituendo le due equazioni di vincolo complessive nella terza equazione del sistema si ha:

$$I_{m1} - (-1 + sI_{m1}) + 4(-I_{m1}) = 0,$$

da cui

$$I_{m1} + 1 - sI_{m1} - 4I_{m1} = 0 \Rightarrow I_{m1} = \frac{1}{s+3}.$$

Si ottiene quindi:

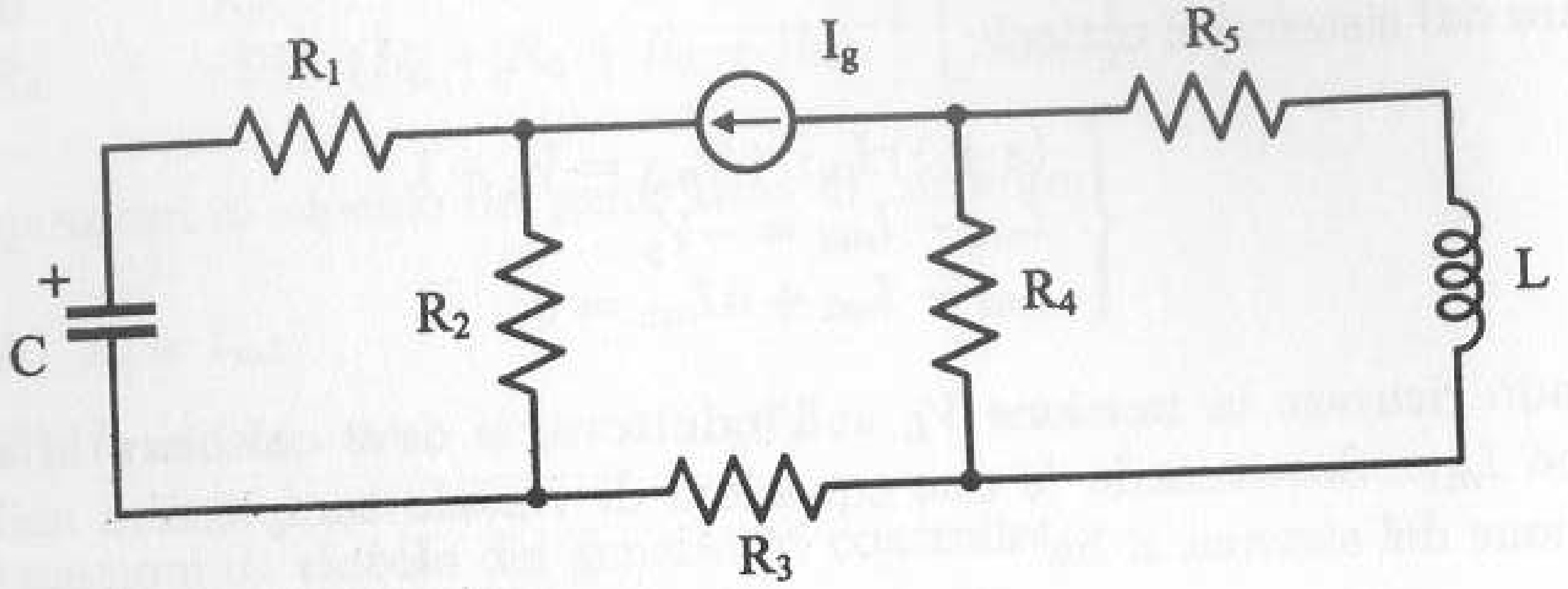
$$V_L = -LI_L(0^-) + sLI_{m1} = -1 + \frac{s}{s+3} = \frac{-s-3+s}{s+3} = -\frac{3}{s+3}.$$

L'andamento per $t \geq 0$ della tensione sull'induttore è dunque pari a:

$$V_L(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{s+3}\right\} = -3e^{-3t}u_{-1}(t)\ [V]$$

## Esercizio 2.10

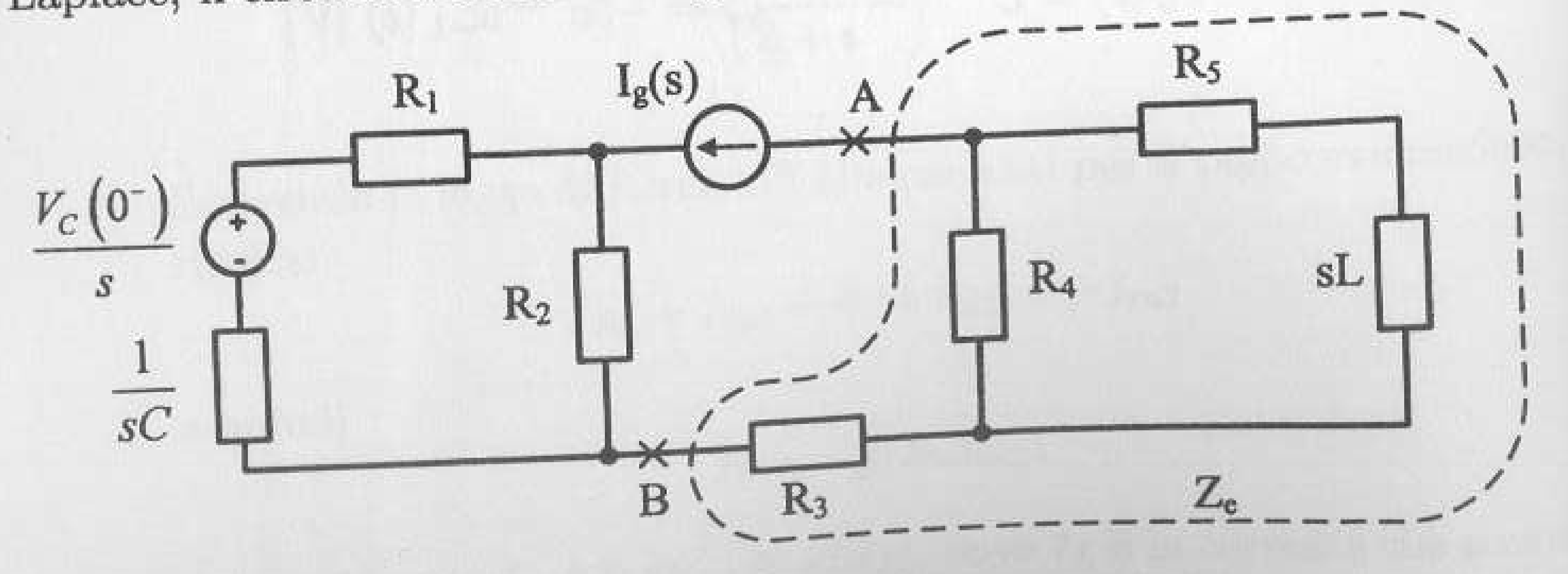
Calcolare l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della potenza istantanea erogata dal generatore nel circuito in figura.




$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\,[\Omega]\ ;\ C = 1\,[F]\ ;\ L = 1\,[H]\ ;$$
$$V_C\left(0^-\right) = 1\,[V]\ ;\ I_L\left(0^-\right) = 0\,[A]\ ;\ I_g\left(t\right) = u_{-1}\left(t\right)[A]\ .$$

### Svolgimento

E' necessario analizzare il circuito nel dominio di Laplace. L'induttore è inizialmente scarico, mentre per il condensatore si deve tenere conto delle condizioni iniziali. Data la topologia del circuito è conveniente utilizzare il metodo delle maglie; quindi per il condensatore si adotta il circuito equivalente con il generatore di tensione, che non introduce ulteriori maglie. Si ottiene, nel dominio di Laplace, il circuito mostrato in figura:

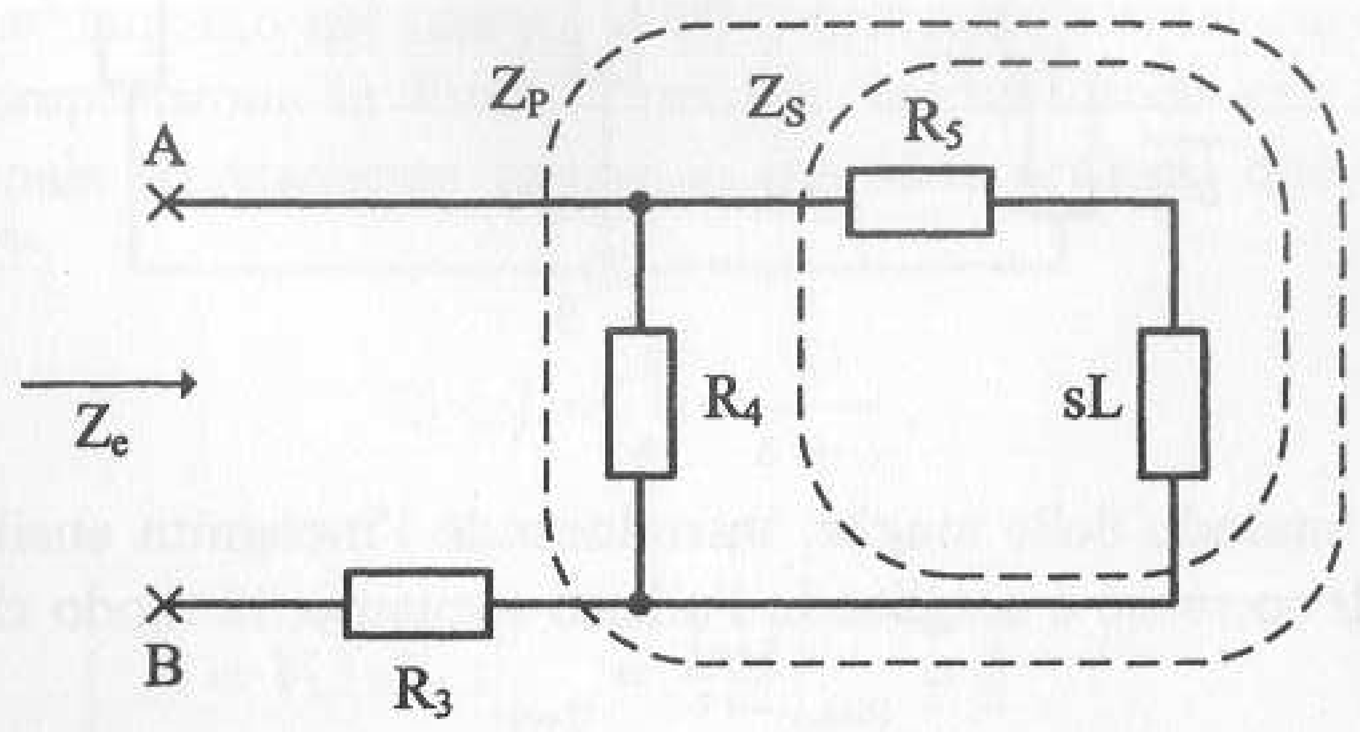



in cui

$$I_g\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{I_g\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{u_{-1}\left(t\right)\right\} = \frac{1}{s}\,.$$



Il complesso delle impedenze all'interno della linea tratteggiata può essere raggruppato in un'unica impedenza equivalente $Z_e$, non essendo necessario il calcolo di alcuna grandezza in quella parte di circuito:



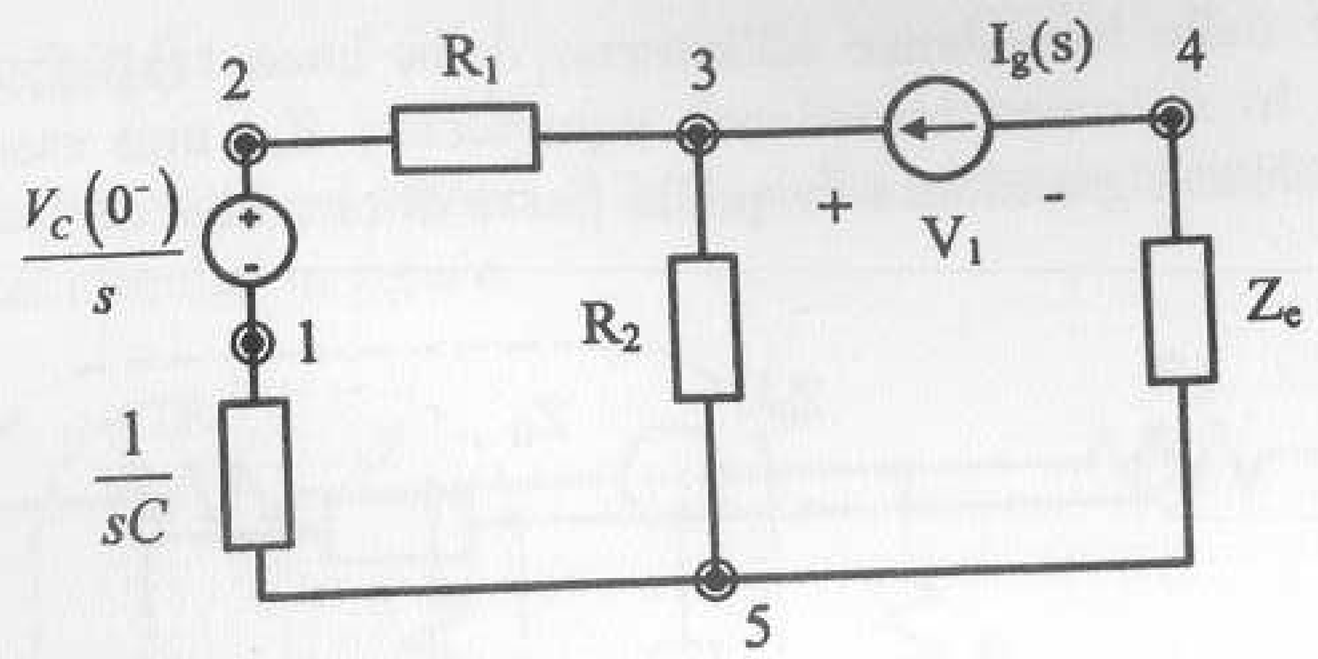

L'impedenza $Z_e$ è la serie di $R_3$ e $Z_P$; quest'ultima è il parallelo tra $R_4$ e la serie $Z_S$ di $R_5$ e $SL$. Quindi:

$$\begin{cases} Z_e = R_3 + Z_P \\ \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{Z_S} \\ Z_S = R_5 + sL \end{cases}$$

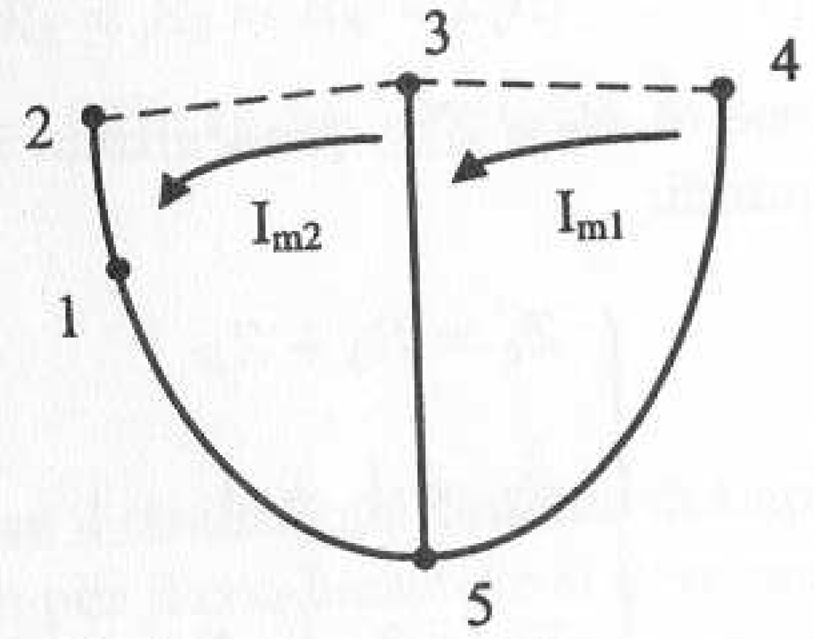
da cui:

$$Z_S = 1 + s\,;$$
$$\frac{1}{Z_P} = 1 + \frac{1}{1+s} \Rightarrow Z_P = \frac{s+1}{s+2}\,;$$
$$Z_e = 1 + \frac{s+1}{s+2} = \frac{2s+3}{s+2}\,.$$

Il circuito diventa quindi il seguente:




Si applica il metodo delle maglie, introducendo l'incognita ausiliaria $V_1$ per il generatore di corrente e scegliendo l'albero seguente, in modo che $I_g$ cada nel co-albero:




Questa scelta dell'albero porta al seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} (Z_e + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -\frac{V_c(0^-)}{s} \end{bmatrix}$$

in cui l'equazione di vincolo del generatore di corrente è semplicemente $I_{m1} = I_g$. Quindi:

$$\begin{cases} \left(\frac{2s+3}{s+2} + 1\right) I_g - I_{m2} = V_1 \\ -I_g + \left(2 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} = -\frac{1}{s} \end{cases}$$

Dovendo calcolare la potenza erogata dal generatore di corrente, si deve risolvere il sistema rispetto a $V_1$. Dalla seconda equazione risulta:

$$-\frac{1}{s} + \left(2 + \frac{1}{s}\right) I_{m2} = -\frac{1}{s} \Rightarrow I_{m2} = 0 \,.$$



Quindi dalla prima equazione si avrà:

$$\frac{3s+5}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = V_1(s) \Rightarrow V_1(s) = \frac{3s+5}{s\,(s+2)} \,.$$

Per ricavare l'andamento nel tempo di $V_1(t)$ occorre antitrasformare $V_1(s)$. Si effettua la scomposizione in frazioni parziali, considerando che $V_1(s)$ è una funzione razionale strettamente propria e che sono presenti due poli reali in $s = 0$ e $s = -2$:

$$V_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \,,$$

con

$$\begin{cases} A = V_1(s) \cdot s\Big|_{s=0} = \frac{3s+5}{s+2}\Big|_{s=0} = \frac{5}{2} \\ B = V_1(s)\,(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{3s+5}{s}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi avremo

$$V_1(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \,,$$

che nel tempo fornisce

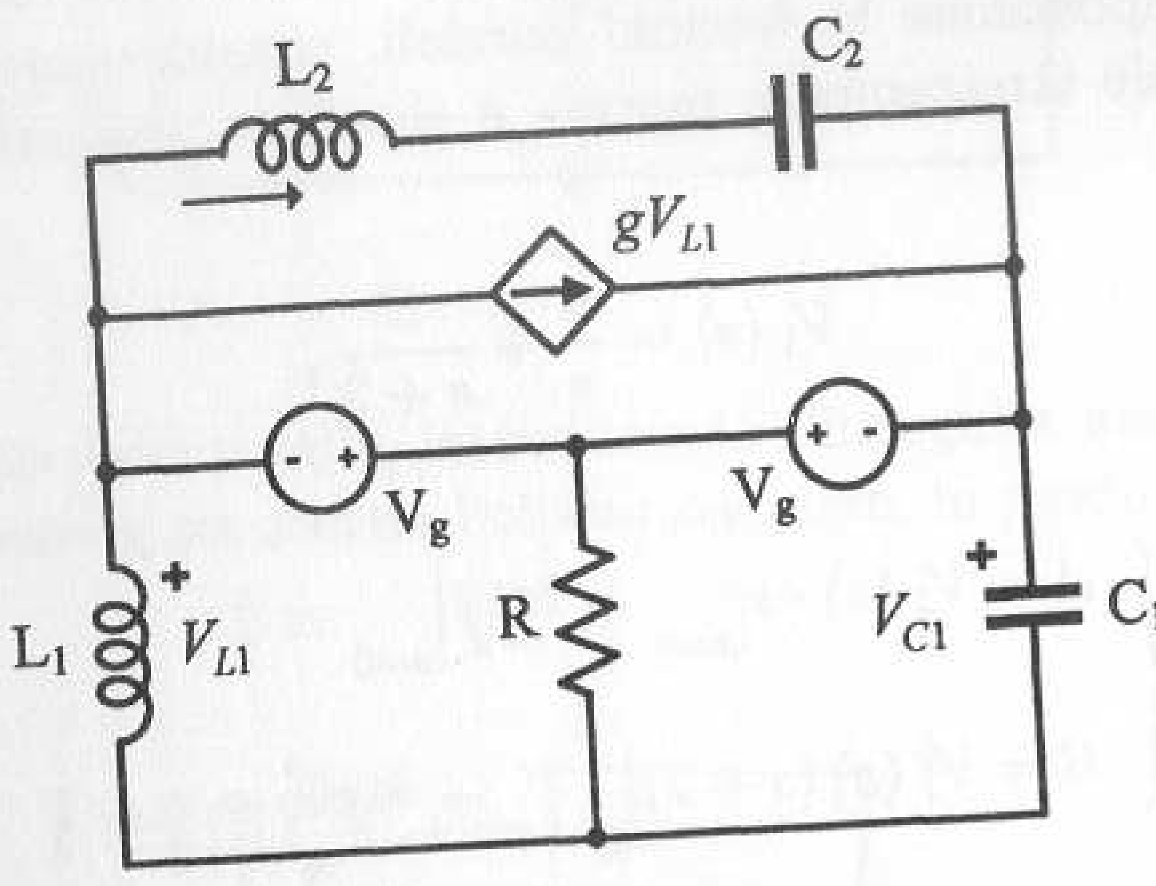
$$V_1(t) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t}\right) u_{-1}(t) \,.$$

Avendo scelto il verso di $V_1$ in modo che la corrente $I_g$ esca dal morsetto positivo, la potenza istantanea $P(t)$ erogata dal generatore di corrente per $t \geq 0$ è

$$P(t) = V_1(t)\, I_g(t) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t}\right) u_{-1}(t) \; [W]$$

## Esercizio 2.11

Determinare l'andamento nel tempo ($t \geq 0$) della tensione ai capi del condensatore $C_1$ con il verso indicato in figura.




$$R = 1\,[\Omega];\ C_1 = C_2 = 1\,[F];\ L_1 = L_2 = 1\,[H];\ g = 1\,[A/V];$$

$$V_g(t) = u_{-1}(t)\,[V];$$

$$V_{C_1}(0^-) = 1\,[V];\ V_{C_2}(0^-) = 0\,[V];$$

$$I_{L_1}(0^-) = 0\,[A];\ I_{L_2}(0^-) = 1\,[A].$$

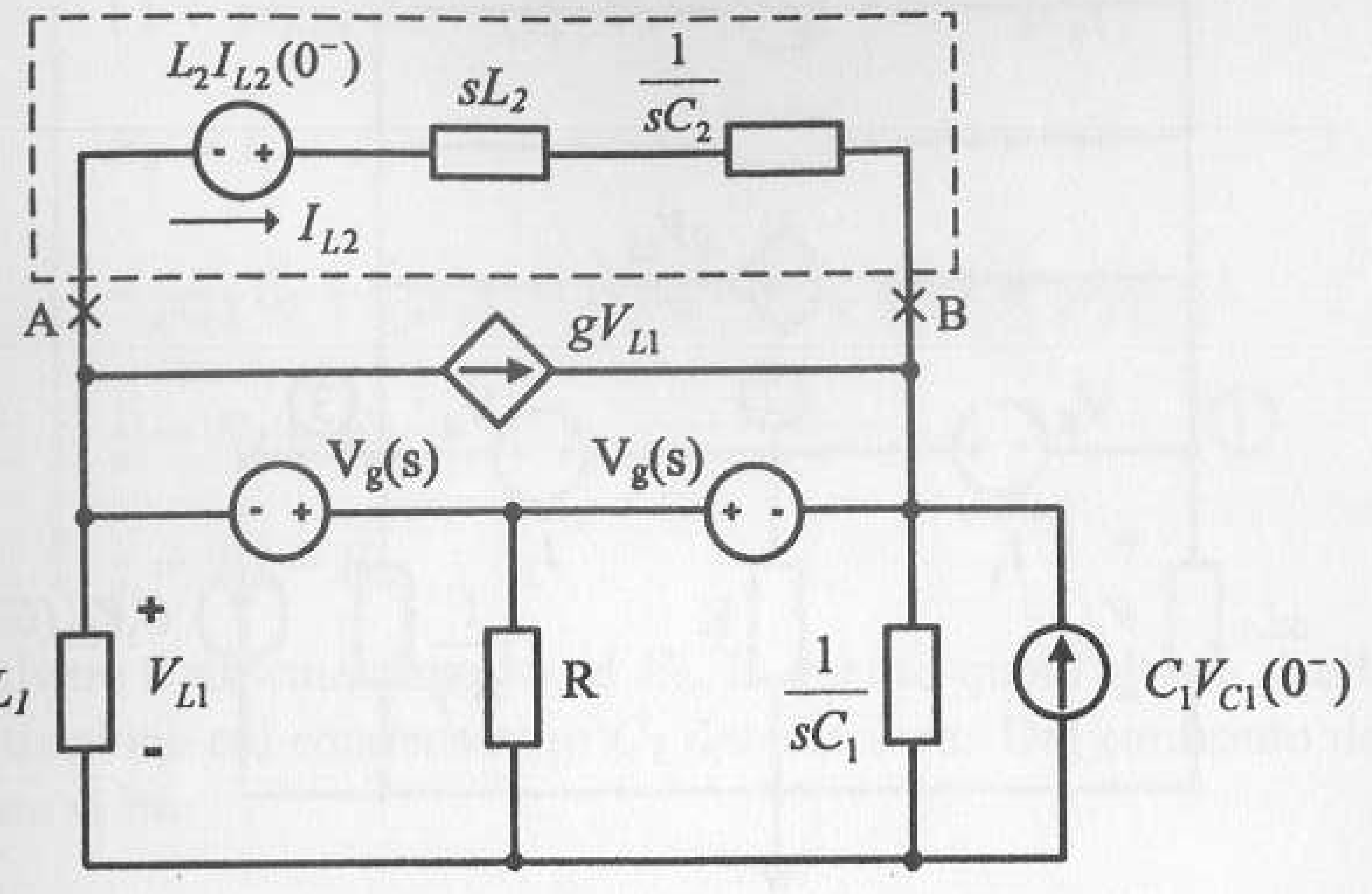
### Svolgimento

Per il calcolo della tensione su $C_1$ è necessario analizzare il circuito nel dominio di Laplace. Innanzitutto per l'eccitazione risulta:

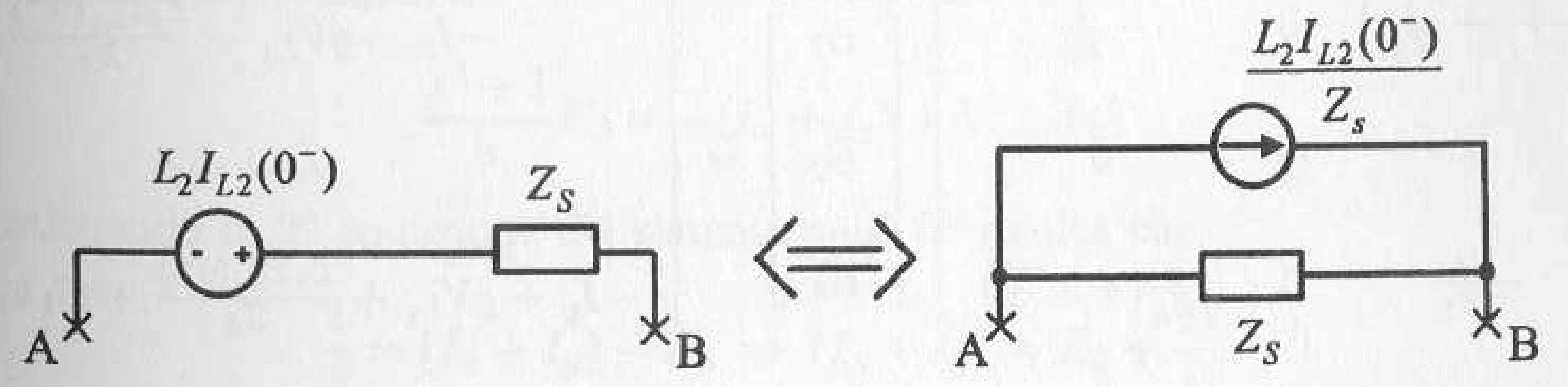
$$V_g(s) = \mathcal{L}\{V_g(t)\} = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s};$$

per quanto riguarda le condizioni iniziali, si consideri il circuito equivalente col generatore di tensione per $L_2$ ed il circuito col generatore di corrente per $C_1$ (mentre $L_1$ e $C_2$ sono inizialmente scarichi):





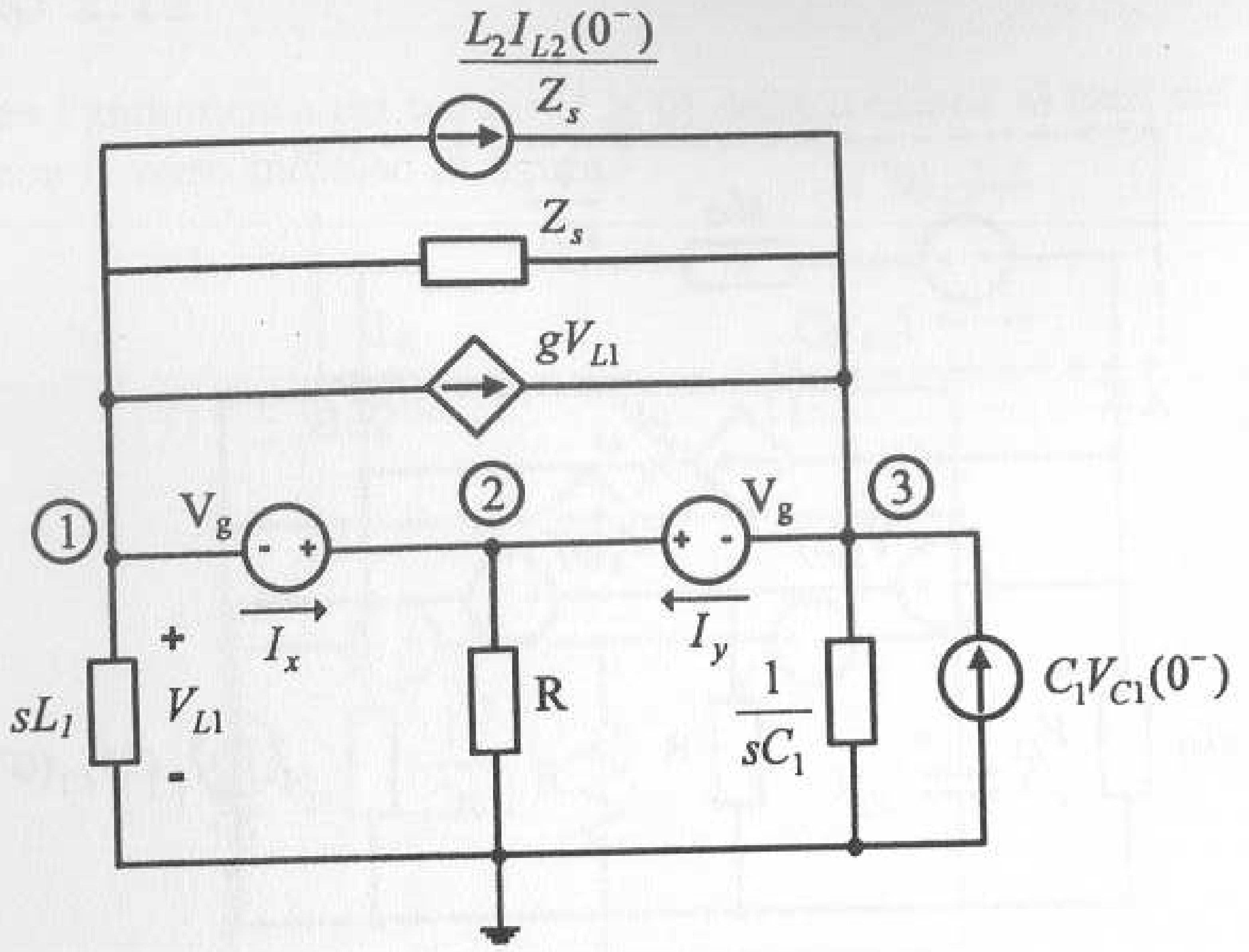

Prima di procedere conviene considerare la parte di circuito nel riquadro tratteggiato come un generatore reale di tensione, in cui l'impedenza $Z_s$ è costituita dalla serie di $sL_2$ e $\frac{1}{sC_2}$. Tale generatore è quindi trasformabile in un generatore reale di corrente:




dove l'impedenza $Z_s$ è data da:

$$Z_s = sL_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{s^2+1}{s}.$$

Si può ora applicare il metodo dei nodi al seguente circuito, in cui si introdurranno le incognite ausiliarie $I_x$ ed $I_y$ per i due generatori di tensione, entrambi relativi a $V_g$:




Si noti l'utilità di aver considerato per $C_1$ il circuito equivalente con il generatore di corrente che, nel caso di analisi con il metodo dei nodi, non introduce un ulteriore nodo. Dunque il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{sL_1}+\frac{1}{Z_S}\right) & 0 & -\frac{1}{Z_S} \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{Z_S} & 0 & \left(\frac{1}{Z_S}+sC_1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_x - gV_{L_1} - \frac{L_2I_{L_2}(0^-)}{Z_S} \\ I_x + I_y \\ -I_y + gV_{L_1} + \frac{L_2I_{L_2}(0^-)}{Z_S} + C_1V_{C_1}(0^-) \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo dei generatori di tensione:

$$a)\ V_g = E_2 - E_1\,;$$

$$b)\ V_g = E_2 - E_3\,.$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato di tensione:

$$gV_{L_1} = gE_1\,,$$

in quanto risulta $V_{L_1} = E_1$.





Sostituendo quest'ultima equazione nelle precedenti si ottiene:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right)E_1 - \frac{s}{s^2+1}E_3 = -I_x - E_1 - \frac{s}{s^2+1} \\ E_2 = I_x + I_y \\ -\frac{s}{s^2+1}E_1 + \left(\frac{s}{s^2+1}+s\right)E_3 = -I_y + E_1 + \frac{s}{s^2+1} + 1 \\ \frac{1}{s} = E_2 - E_1 \\ \frac{1}{s} = E_2 - E_3 \end{cases}$$

Si deve risolvere il sistema rispetto ad $E_3$, in quanto quest'ultima risulta essere proprio la tensione sul condensatore $C_1$ da calcolare. Dal confronto della $4^a$ e $5^a$ equazione si ha:

$$E_2 - E_1 = E_2 - E_3 \Rightarrow E_1 = E_3\,.$$

Sommando la $1^a$ e la $3^a$ equazione si ottiene

$$\frac{1}{s}E_1 + sE_3 = -(I_x + I_y) + 1$$

ed essendo $E_1 = E_3$, si ha:

$$\frac{s^2+1}{s}E_3 = -(I_x+I_y) + 1\,. \quad (a)$$

Sostituendo la $2^a$ equazione del sistema nella $5^a$ risulta che:

$$\frac{1}{s} = (I_x + I_y) - E_3 \Rightarrow (I_x + I_y) = E_3 + \frac{1}{s}\,,$$

che sostituita nell'equazione $(a)$ fornisce

$$\frac{s^2+1}{s}E_3 = -E_3 - \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow \frac{s^2+s+1}{s}E_3 = -\frac{1}{s} + 1$$

ed in definitiva:

$$V_{C_1}(s) = E_3(s) = \frac{s-1}{s^2+s+1}\,.$$

L'andamento nel tempo di $V_{C_1}(t)$ si ottiene antitrasformando $V_{C_1}(s)$, che è una funzione razionale reale strettamente propria avente poli in:

$$s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}\,.$$

Lo sviluppo in frazioni parziali di $V_{C_1}(s)$ fornisce:

$$V_{C_1}(s) = \frac{s-1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)},$$

ma essendo $s_2 = s_1^*$ risulta anche $B = A^*$. Quindi:

$$V_{C_1}(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{A^*}{s-s_1^*},$$

con

$$A = V_{C_1}(s)(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{s-1}{(s-s_1^*)}\Big|_{s=s_1} = \frac{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}}$$

$$A = \frac{-3+j\sqrt{3}}{2j\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

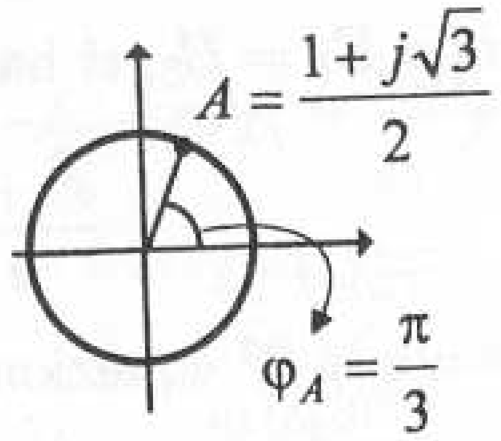
Antitrasformando si ottiene:

$$V_{C_1}(t) = \left[Ae^{s_1t} + A^*e^{s_1^*t}\right]u_{-1}(t)$$

$$V_{C_1}(t) = \left[|A|e^{j\varphi_A}e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}t} + |A|e^{-j\varphi_A}e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}t}\right]u_{-1}(t),$$

dove $A = |A|e^{j\varphi_A}$, $A^* = |A|e^{-j\varphi_A}$ ed inoltre

$$\begin{cases} |A| = \frac{1}{2}\left|1+j\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1 \\ \varphi_A = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ \text{[rad]} \end{cases}$$




Quindi abbiamo:

$$V_{C_1}(t) = \left[e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{1}{2}t}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{1}{2}t}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right]u_{-1}(t)$$

$$V_{C_1}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[e^{j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)}\right]u_{-1}(t).$$

Moltiplicando e dividendo per 2 l'espressione tra parentesi quadre si ottiene:

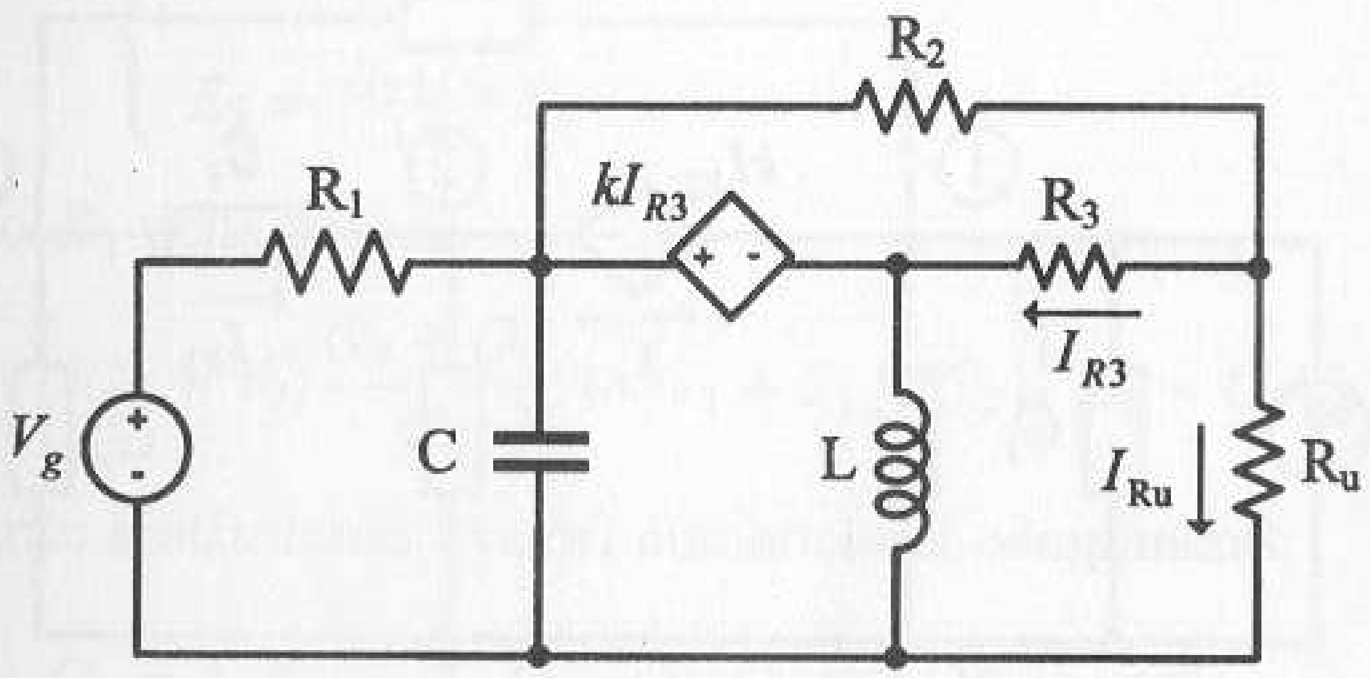
$$V_{C_1}(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)u_{-1}(t) \quad [V]$$



## Esercizio 2.12

Considerando il circuito in figura, ed in particolare la corrente che scorre nel resistore $R_u$ con il verso indicato in figura, calcolare:

- la funzione di rete tra la corrente del resistore $R_u$ ed il generatore di tensione $V_g$;
- la stabilità del circuito secondo tale funzione di rete;
- l'andamento nel tempo, per $t \geq 0$, della corrente nel resistore $R_u$, considerando l'induttore e il condensatore scarichi all'istante iniziale e $V_g(t) = 2u_{-1}(t)$.



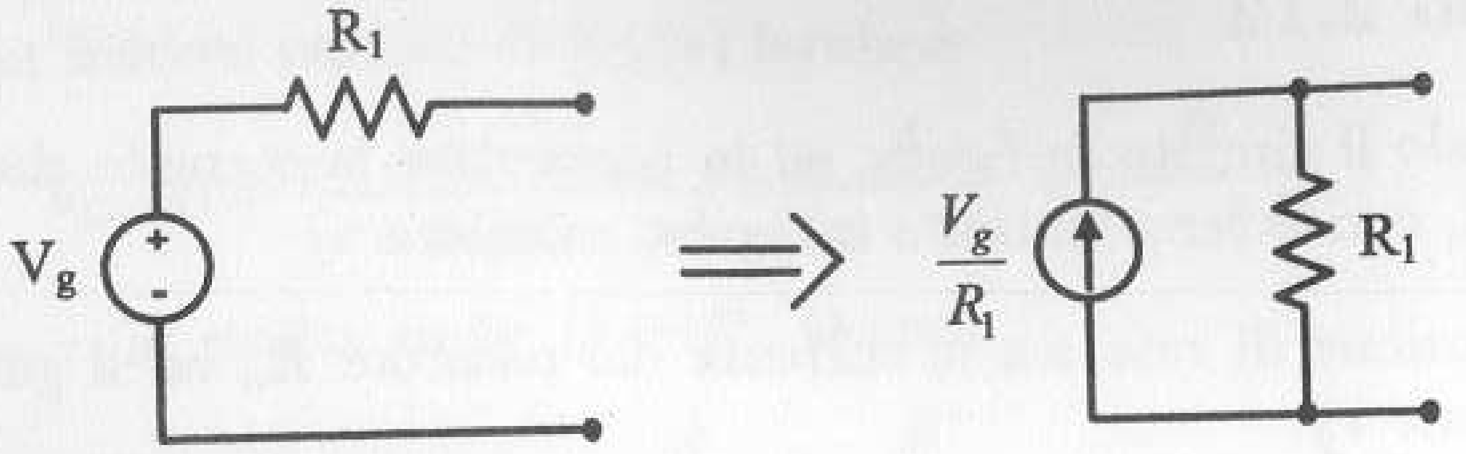

$C = 1$; $L = 1$; $R_1 = 1$; $R_2 = 3$; $R_3 = 1$; $R_u = 1$; $k = 1$; $[F, H, \Omega, V/A]$.

### Svolgimento

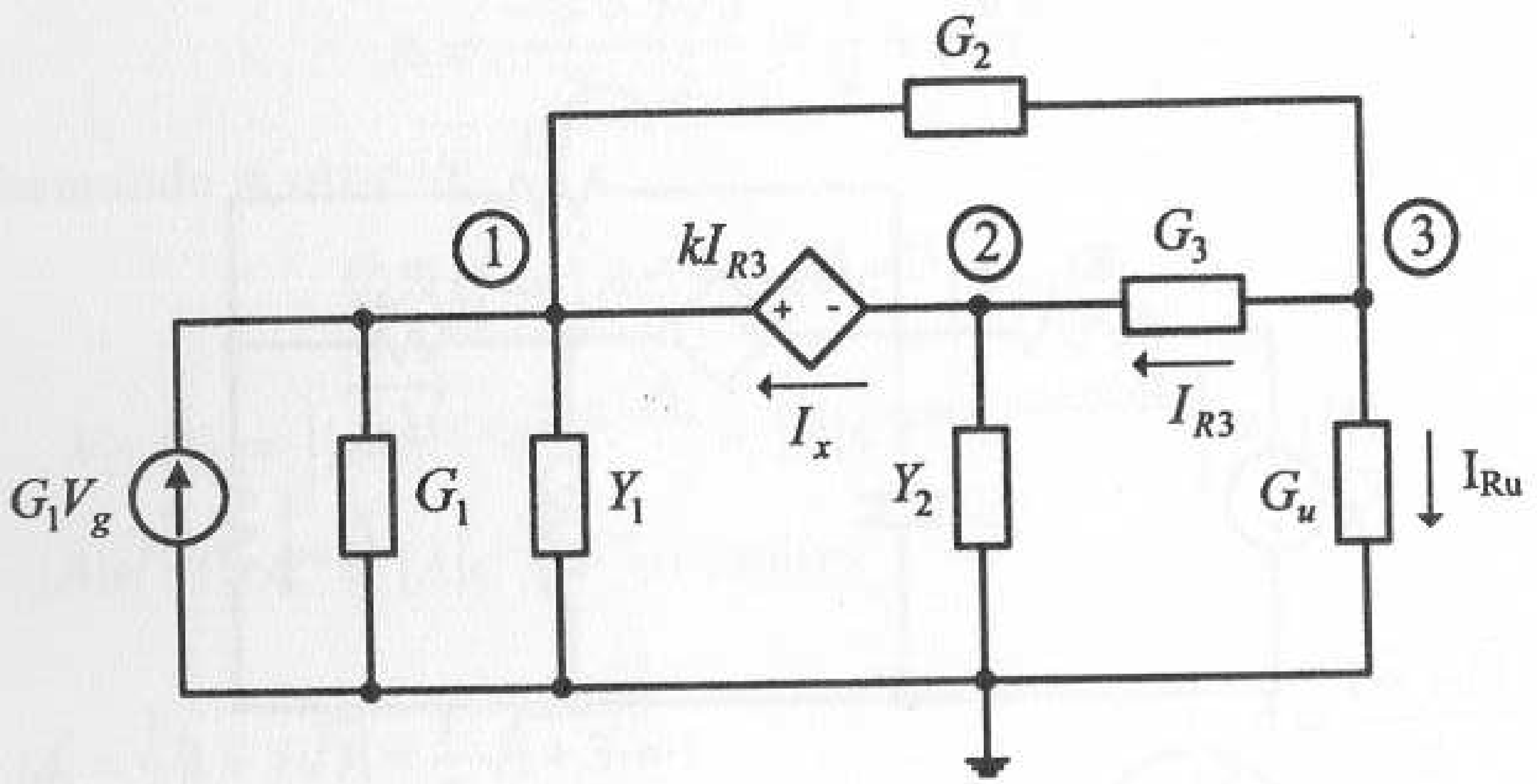
La funzione di rete richiesta è

$$H(s) = \frac{I_{R_u}(s)}{V_g(s)},$$

che si calcola nel dominio di Laplace senza considerare condizioni iniziali sul condensatore e sull'induttore. Si effettua l'analisi col metodo dei nodi, trasformando preliminarmente il generatore reale di tensione costituito dalla serie di $V_g$ ed $R_1$ in un equivalente generatore reale di corrente:




Il circuito da analizzare è quindi il seguente, in cui sono riportate le ammettenze per i bipoli ed è aggiunta l'incognita ausiliaria $I_x$ per il generatore di tensione $kI_{R_3}$:




dove risulta:

$$G_1 = \frac{1}{R_1},\ G_2 = \frac{1}{R_2},\ G_3 = \frac{1}{R_3},\ G_u = \frac{1}{R_u},\ Y_1 = sC,\ Y_2 = \frac{1}{sL}.$$

Scriviamo il sistema risolvente per calcolare $E_3$ e quindi $I_{R_u} = G_u E_3$:

$$\begin{bmatrix} (G_1+Y_1+G_2) & 0 & -G_2 \\ 0 & (G_3+Y_2) & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & (G_2+G_3+G_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x + G_1 V_g \\ -I_x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Vincolo generatore di tensione:

$$E_1 - E_2 = kI_{R_3}.$$

- Vincolo generatore controllato:

$$kI_{R_3} = kG_3\,(E_3 - E_2).$$





Confrontando le ultime due equazioni, essendo $kG_3 = 1$, si ottiene:

$$E_1 - E_2 = E_3 - E_2 \Rightarrow E_1 = E_3.$$

Sostituendo $E_1$ nelle prime tre equazioni del sistema si ha:

$$\begin{cases} (G_1+Y_1)E_3 = I_x + G_1 V_g \\ (G_3+Y_2)E_2 - G_3E_3 = -I_x \\ -G_3E_2 + (G_3+G_u)E_3 = 0 \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} (G_3+Y_2)E_2 + (G_1+Y_1-G_3)E_3 = G_1V_g \\ E_2 = \frac{G_3+G_u}{G_3}E_3 \end{cases}$$

e sostituendo $E_2$ nella prima:

$$\left[(G_3+Y_2)\frac{G_3+G_u}{G_3} + (G_1+Y_1-G_3)\right]E_3 = G_1V_g.$$

A questo punto sostituiamo i valori numerici dei componenti:

$$G_1 = 1,\ G_2 = \frac{1}{3},\ G_3 = 1,\ G_u = 1,\ Y_1 = s,\ Y_2 = \frac{1}{s},$$

ottenendo

$$E_3 = \frac{V_g}{(1+\frac{1}{s})\cdot 2 + (1+s-1)}$$

e quindi

$$I_{R_u} = G_uE_3 = \frac{sV_g}{s^2+2s+2}.$$

La funzione di rete è dunque pari a:

$$H(s) = \frac{I_{R_u}}{V_g} = \frac{s}{s^2+2s+2}.$$

I poli di $H(s)$ si ottengono da

$$s^2+2s+2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j;$$

sono poli complessi coniugati a parte reale negativa, quindi il circuito è asintoticamente stabile.

Poiché si considerano all'istante iniziale ($t = 0^-$) sia il condensatore che l'induttore scarichi, l'andamento nel tempo si ottiene considerando

$$I_{R_u}(s) = H(s)V_g(s)\,,$$

dove

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{2u_{-1}(t)\} = \frac{2}{s} \Rightarrow I_{R_u}(s) = \frac{2}{s^2+2s+2}\,.$$

Lo sviluppo in frazioni parziali di $I_{R_u}(s)$ è del tipo

$$\frac{2}{s^2+2s+2} = \frac{A}{s-(-1+j)} + \frac{A^*}{s-(-1-j)}\,,$$

con

$$A = \left.\frac{2\,[s-(-1+j)]}{[s-(-1+j)]\,[s-(-1-j)]}\right|_{s=-1+j} = \frac{2}{-1+j+1+j} = \frac{1}{j}\,.$$

Dunque:

$$I_{R_u}(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1+j)}\right\} + A^*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1-j)}\right\}$$

$$I_{R_u}(t) = \left\{\frac{1}{j}e^{(-1+j)t} + \left(-\frac{1}{j}\right)e^{(-1-j)t}\right\}u_{-1}(t)$$

$$I_{R_u}(t) = 2e^{-t}\left\{\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right\}u_{-1}(t)$$

$$I_{R_u}(t) = 2e^{-t}\sin(t)u_{-1}(t)\ [A]$$

La stessa soluzione si ottiene considerando che, quando abbiamo poli complessi coniugati, si ha in generale:

$$\frac{2}{s^2+2s+2} = \frac{A}{s-\rho_0} + \frac{A^*}{s-\rho_0^*}\,,$$

per cui risulta

$$I_{R_u}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2s+2}\right\} = 2|A|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi_A)\,u_{-1}(t)\,,$$

con:

$$\begin{cases} A = |A|e^{j\varphi_A} = \frac{1}{j} \;\Rightarrow\; |A| = 1,\ \varphi_A = -\frac{\pi}{2} \\ \rho_0 = \sigma + j\omega = -1+j \;\Rightarrow\; \sigma = -1,\ \omega = 1 \end{cases}$$

e quindi

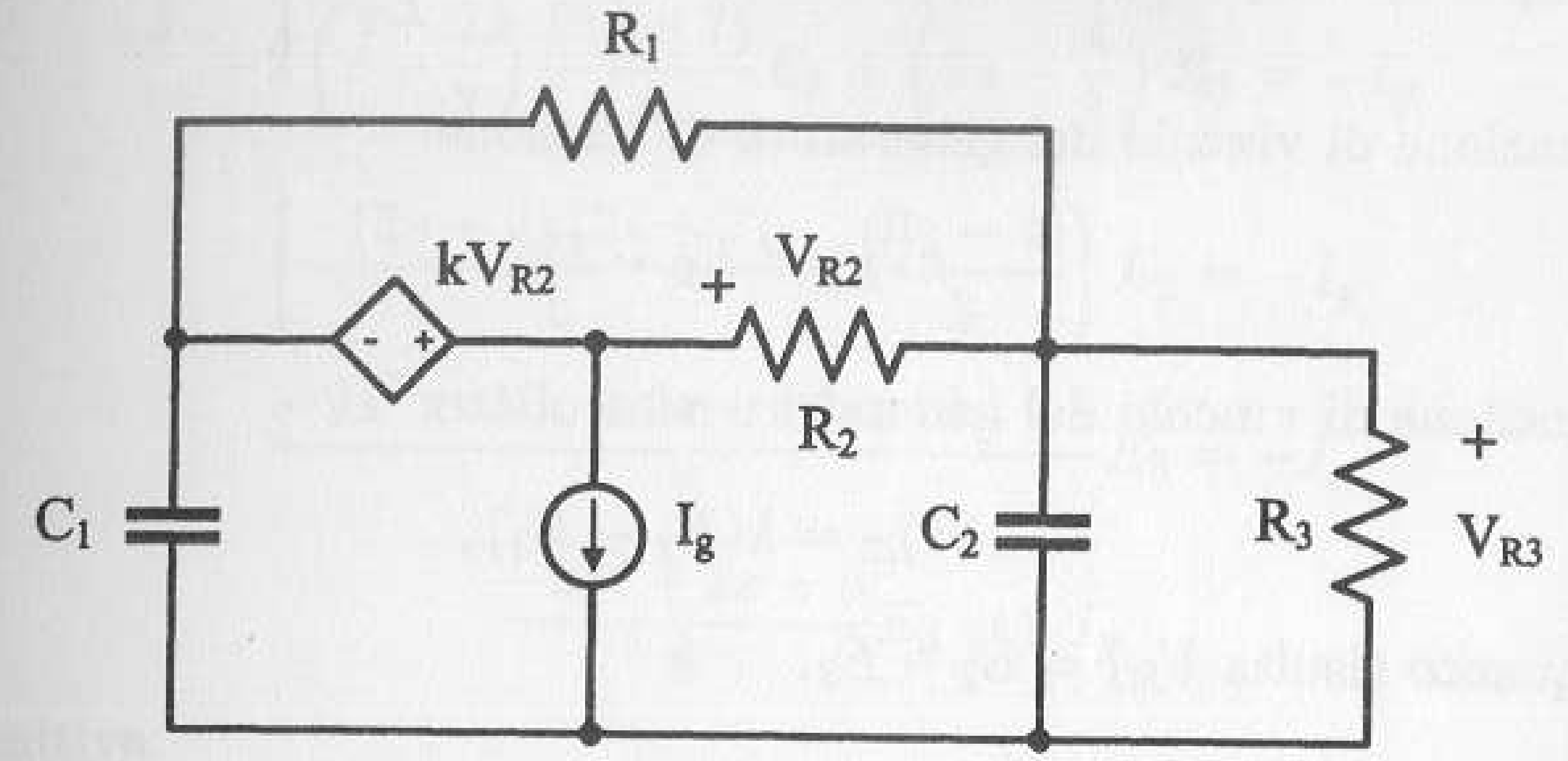
$$I_{R_u}(t) = 2\cdot 1\cdot e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u_{-1}(t) = 2e^{-t}\sin(t)u_{-1}(t)\ [A]$$





## Esercizio 2.13

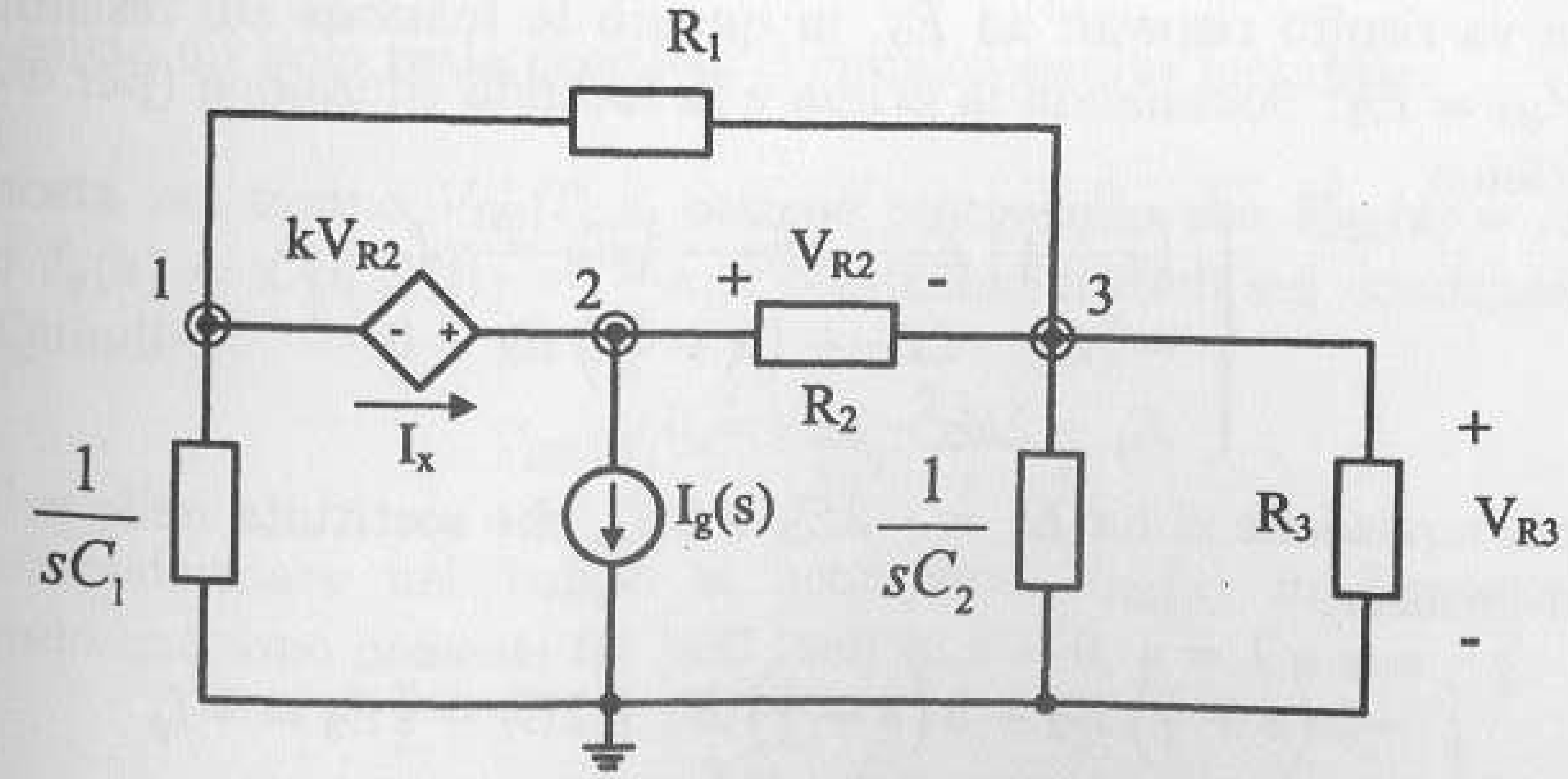
Calcolare, per il circuito in figura, la funzione di rete tra la tensione $V_{R3}$ ai capi del resistore $R_3$, con il verso indicato, e la corrente $I_g$. Valutare la stabilità secondo tale funzione e calcolare il valore della tensione su $R_3$ per $t \simeq 2,269$ secondi, quando $I_g(t) = u_{-1}(t)$ e i condensatori sono scarichi all'istante iniziale.




$$R_1 = 3\,[\Omega]\ ;\ R_2 = \frac{1}{2}\,[\Omega]\ ;\ R_3 = 1\,[\Omega]\ ;\ C_1 = C_2 = 1\,[F]\ ;\ k = 3\,[V/V]\,.$$

### Svolgimento

Per il calcolo della funzione di rete richiesta occorre calcolare la tensione $V_{R3}$ ai capi del resistore $R_3$ nel dominio di Laplace, considerando una generica eccitazione $I_g(s)$ e condizioni iniziali assenti sui condensatori. Quindi si avrà:



Conviene analizzare il circuito con il metodo dei nodi, introducendo l'incognita ausiliaria $I_x$ per il generatore di tensione $kV_{R2}$:

$$\begin{bmatrix} \left(sC_1 + \frac{1}{R_1}\right) & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_2 + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_x \\ I_x - I_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore di tensione:

$$kV_{R2} = E_2 - E_1 .$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$kV_{R2} = k(E_2 - E_3) ,$$

in quanto risulta $V_{R2} = E_2 - E_3$.

Combinando insieme le due equazioni di vincolo risulta:

$$E_2 - E_1 = 3(E_2 - E_3)$$

e complessivamente si avrà:

$$\begin{cases} \left(s + \frac{1}{3}\right) E_1 - \frac{1}{3} E_3 = -I_x \\ 2E_2 - 2E_3 = I_x - I_g \\ -\frac{1}{3}E_1 - 2E_2 + \left(\frac{1}{3} + 2 + s + 1\right) E_3 = 0 \\ E_2 - E_1 = 3E_2 - 3E_3 \end{cases}$$

Il sistema va risolto rispetto ad $E_3$, in quanto la tensione sul resistore $R_3$ è proprio $V_{R3} = E_3$. Sommando la prima e la seconda equazione (per eliminare $I_x$), si ottiene:

$$\begin{cases} \left(s + \frac{1}{3}\right) E_1 + 2E_2 - \frac{7}{3} E_3 = -I_g \\ -\frac{1}{3}E_1 - 2E_2 + \left(s + \frac{10}{3}\right) E_3 = 0 \\ E_1 + 2E_2 - 3E_3 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ha $E_1 = -2E_2 + 3E_3$, che sostituita nelle prime due equazioni fornisce:

$$\begin{cases} -2\left(s + \frac{1}{3}\right) E_2 + 3\left(s + \frac{1}{3}\right) E_3 + 2E_2 - \frac{7}{3} E_3 = -I_g \\ \frac{2}{3}E_2 - E_3 - 2E_2 + \left(s + \frac{10}{3}\right) E_3 = 0 \end{cases}$$





ovvero

$$\begin{cases} -2\left(s - \frac{2}{3}\right) E_2 + \left(3s - \frac{4}{3}\right) E_3 = -I_g \\ -\frac{4}{3}E_2 + \left(s + \frac{7}{3}\right) E_3 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione risulta $E_2 = \frac{3s+7}{4} E_3$, che sostituito nella prima equazione fornisce:

$$-2\left(s - \frac{2}{3}\right) \frac{(3s+7)}{4} E_3 + \left(3s - \frac{4}{3}\right) E_3 = -I_g$$

$$\left[-\frac{(3s-2)(3s+7)}{6} + \frac{(9s-4)}{3}\right] E_3 = -I_g$$

$$\frac{-9s^2 - 21s + 6s + 14 + 18s - 8}{6} E_3 = -I_g$$

$$\frac{-9s^2 + 3s + 6}{6} E_3 = -I_g$$

e in definitiva

$$E_3(s) = \frac{2}{3s^2 - s - 2} I_g(s) .$$

La funzione di rete $H(s)$ è quindi:

$$H(s) = \frac{V_{R3}(s)}{I_g(s)} = \frac{E_3(s)}{I_g(s)} = \frac{2}{3s^2 - s - 2} .$$

Per valutare la stabilità occorre calcolare i poli di $H(s)$. Essi sono la soluzione di:

$$3s^2 - s - 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} \Rightarrow s_1 = 1 ;\ s_2 = -\frac{2}{3} .$$

Poiché esiste un polo reale positivo, il circuito risulta <u>instabile</u>.

La risposta nel tempo $V_{R3}(t)$ si ottiene osservando che $V_{R3}(s) = H(s)I_g(s)$, quando $I_g(s) = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$ e le condizioni iniziali sui condensatori sono nulle. Quindi:

$$V_{R3}(s) = \frac{2}{s\left(3s^2 - s - 2\right)} .$$

Per antitrasformare nel tempo si scompone $V_{R3}(s)$ in frazioni parziali, osservando che sono presenti tre poli reali in $s = 0$, $s = 1$ e $s = -\frac{2}{3}$:

$$V_{R3}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s + \frac{2}{3}} .$$

onviene prima fattorizzare il polinomio di secondo grado a denominatore:

$$3s^2 - s - 2 = 3(s-1)\left(s+\frac{2}{3}\right).$$

i noti nella fattorizzazione la presenza del coefficiente direttore (pari a 3) ssociato al termine di più alto grado. Quindi:

$$\begin{cases} A = V_{R3}(s)\cdot s\Big|_{s=0} = \left.\frac{2}{3\cdot(s-1)\cdot\left(s+\frac{2}{3}\right)}\right|_{s=0} = \frac{2}{3\cdot(-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)} = -1 \\ B = V_{R3}(s)\cdot(s-1)\Big|_{s=1} = \left.\frac{2}{3s\cdot\left(s+\frac{2}{3}\right)}\right|_{s=1} = \frac{2}{3\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{5} \\ C = V_{R3}(s)\cdot\left(s+\frac{2}{3}\right)\Big|_{s=-\frac{2}{3}} = \left.\frac{2}{3s\cdot(s-1)}\right|_{s=-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

al precedente calcolo dei residui si ottiene:

$$V_{R3}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{3}},$$

he nel tempo fornisce:

$$V_{R3}(t) = \left[-1 + \frac{2}{5}e^{t} + \frac{3}{5}e^{-\frac{2}{3}t}\right]u_{-1}(t)\ [V]$$

n questo caso è presente il termine divergente $\frac{2}{5}e^t$ dovuto al polo in $s=1$. er $t \simeq 2,269$ si ha:

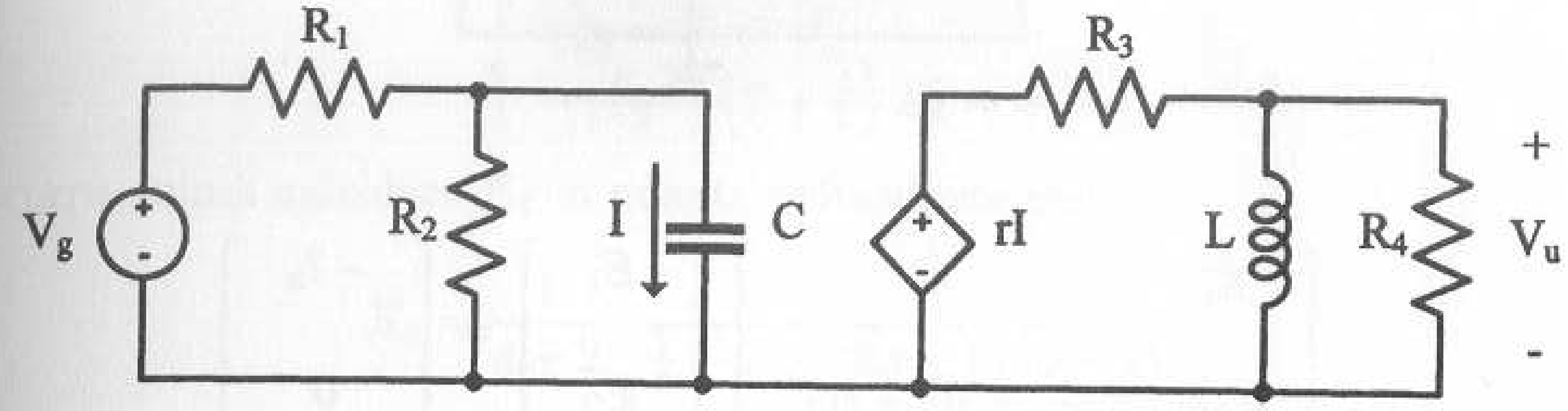
$$V_{R3}(t) = \left[-1 + \frac{2}{5}\cdot e^{2,269} + \frac{3}{5}\cdot e^{-\left(\frac{2}{3}\cdot 2,269\right)}\right] \simeq 2,92\ [V]$$





# Esercizio 2.14

Determinare nel circuito in figura l'andamento nel tempo, per $t \geq 0$, della tensione $V_u(t)$ sapendo che il condensatore e l'induttore sono scarichi all'istante iniziale.

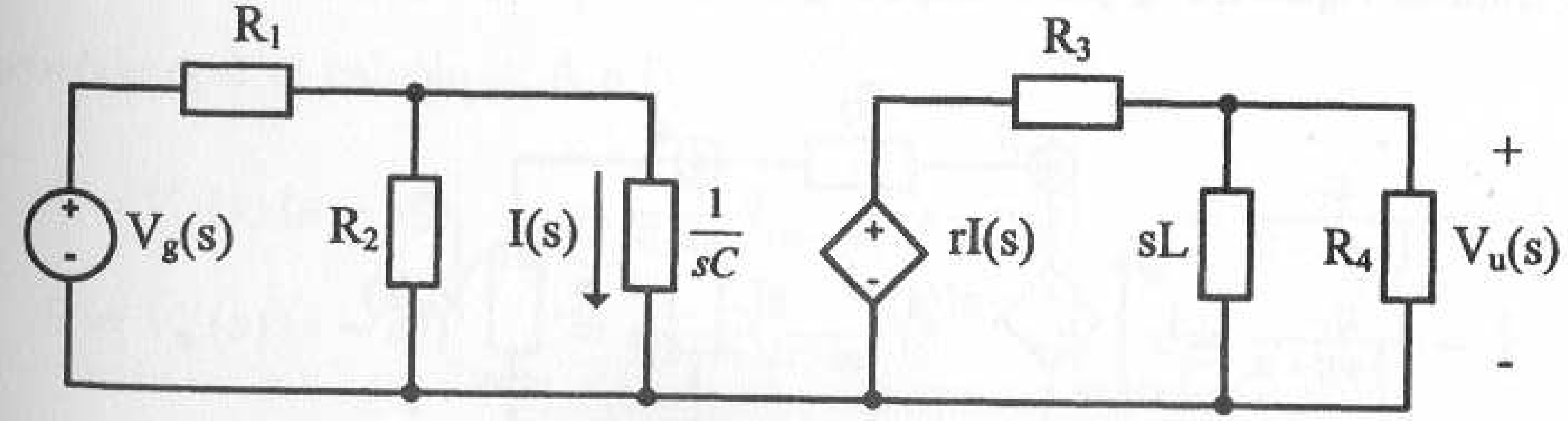



$$V_g(t) = u_{-1}(t)\,[V]\,; R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\,[\Omega]\,;$$

$$C = 1\,[F]\,; L = 1\,[H]\,; r = 1\left[\frac{V}{A}\right].$$

## Svolgimento

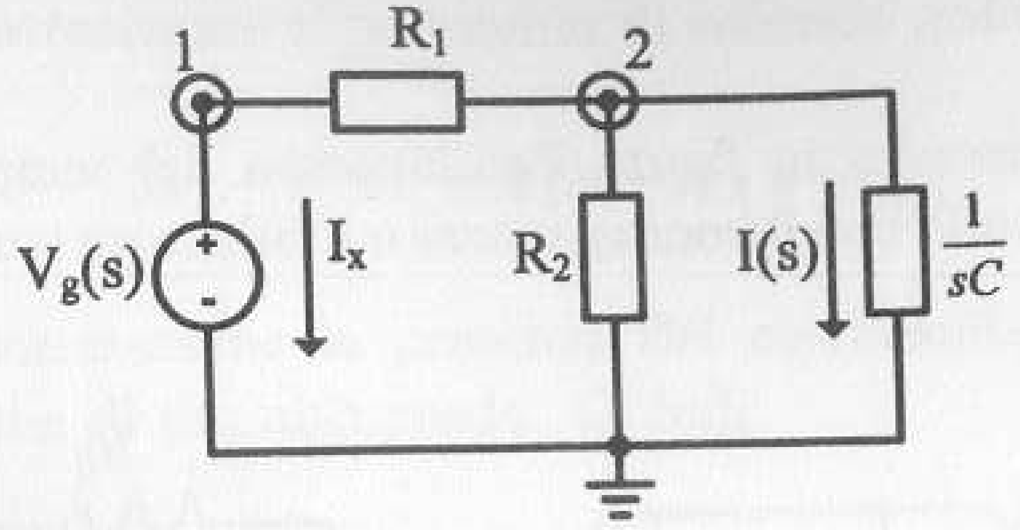
Si analizza il circuito nel dominio di Laplace, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle sull'induttore e sul condensatore all'istante iniziale $t = 0^-$:




La parte sinistra del circuito può essere analizzata indipendentemente dalla parte destra per il calcolo della corrente di controllo $I(s)$, considerando che

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Si applica quindi il metodo dei nodi, in cui è aggiunta l'incognita ausiliaria $I_x$ per il generatore di tensione $V_g$:



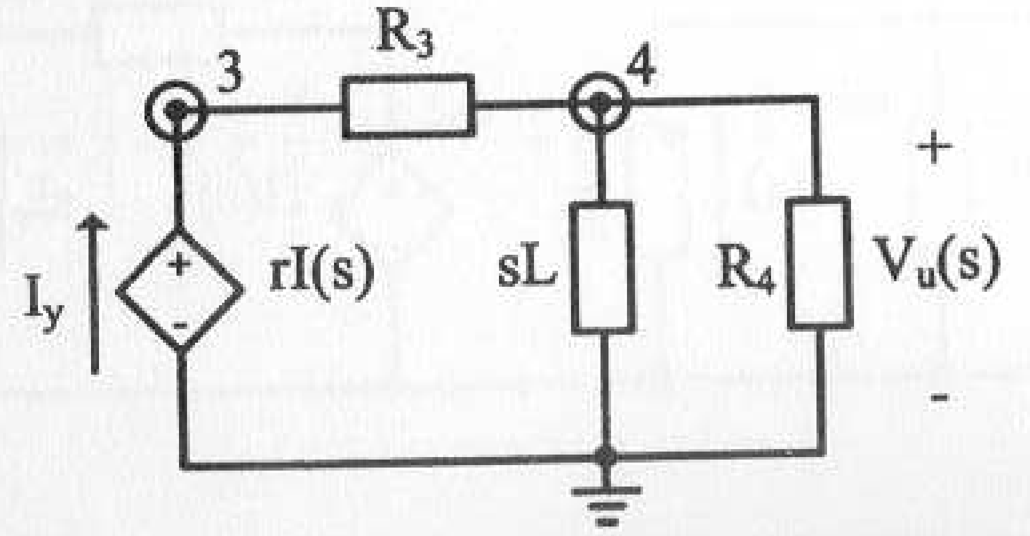

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove per l'equazione di vincolo del generatore di tensione si ha $E_1 = V_g = \frac{1}{s}$. Si noti che la corrente $I(s)$ non è un'incognita di sistema. Essa è solo evidenziata nel circuito in quanto una delle grandezze elettriche in gioco. Quindi sarà:

$$\begin{cases} \frac{1}{s} - E_2 = -I_x \\ -\frac{1}{s} + (s+2)\,E_2 = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \frac{1}{s\,(s+2)} \Rightarrow I\,(s) = sCE_2 = \frac{1}{s+2}.$$

Per quanto riguarda la parte destra del circuito, invece, si avrà:




Anche in questo caso si usa il metodo dei nodi, avendo introdotto la corrente $I_y$ come incognita ausiliaria per il generatore controllato di tensione:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{sL}+\frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y \\ 0 \end{bmatrix}$$





L'equazione di vincolo del generatore è data da $E_3 = rI(s)$. Il secondo membro di tale equazione costituisce l'equazione di vincolo del generatore controllato, pertanto sarà:

$$E_3 = r \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2}.$$

e perciò

$$\begin{cases} \frac{1}{s+2} - E_4 = I_y \\ -\frac{1}{s+2} + \left(2+\frac{1}{s}\right) E_4 = 0 \end{cases}$$

Occorre quindi calcolare $E_4$ in quanto coincidente con $V_u$:

$$E_4 = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{s}+2} = \frac{s}{(2s+1)\,(s+2)},$$

da cui

$$V_u\,(s) = E_4\,(s) = \frac{s}{2s^2+5s+2}.$$

Per calcolare l'andamento nel tempo di $V_u(t)$, per $t \geq 0$, si deve antitrasformare $V_u(s)$, effettuando preliminarmente la scomposizione in frazioni parziali:

$$V_u\,(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2},$$

con $s_1$ ed $s_2$ soluzioni di $2s^2+5s+2=0$:

$$s_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ s_2 = -2.$$

Si procede così al calcolo di A e B:

$$\begin{cases} A = V_u\,(s)\,(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{s}{2(s-s_1)(s-s_2)}\,(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}+2\right)} = -\frac{1}{6} \\ B = V_u\,(s)\,(s-s_2)\Big|_{s=s_2} = \frac{s}{2(s-s_1)(s-s_2)}\,(s-s_2)\Big|_{s=s_2} = \frac{-2}{2\left(-2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Così si avrà in definitiva:

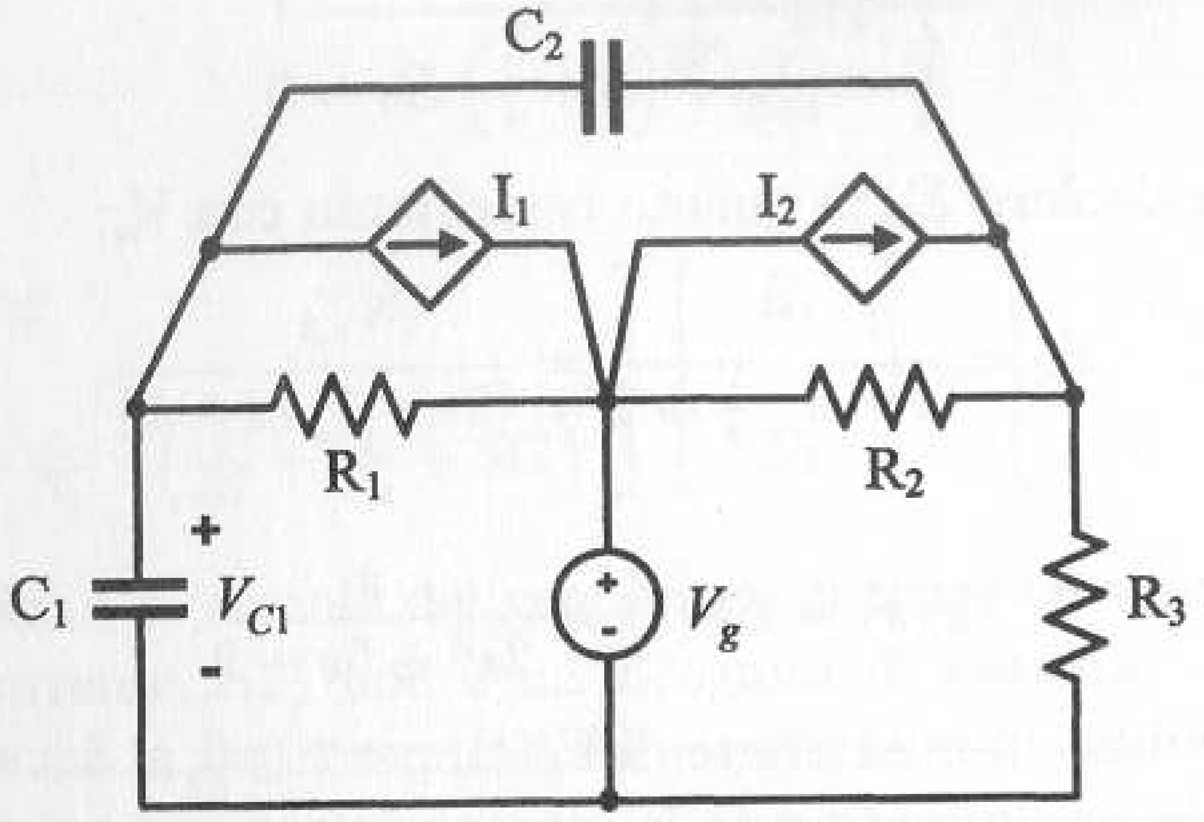
$$V_u\,(s) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

e quindi

$$V_u\,(t) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}t}u_{-1}\,(t) + \frac{2}{3}e^{-2t}u_{-1}\,(t)\ [V]$$

## Esercizio 2.15

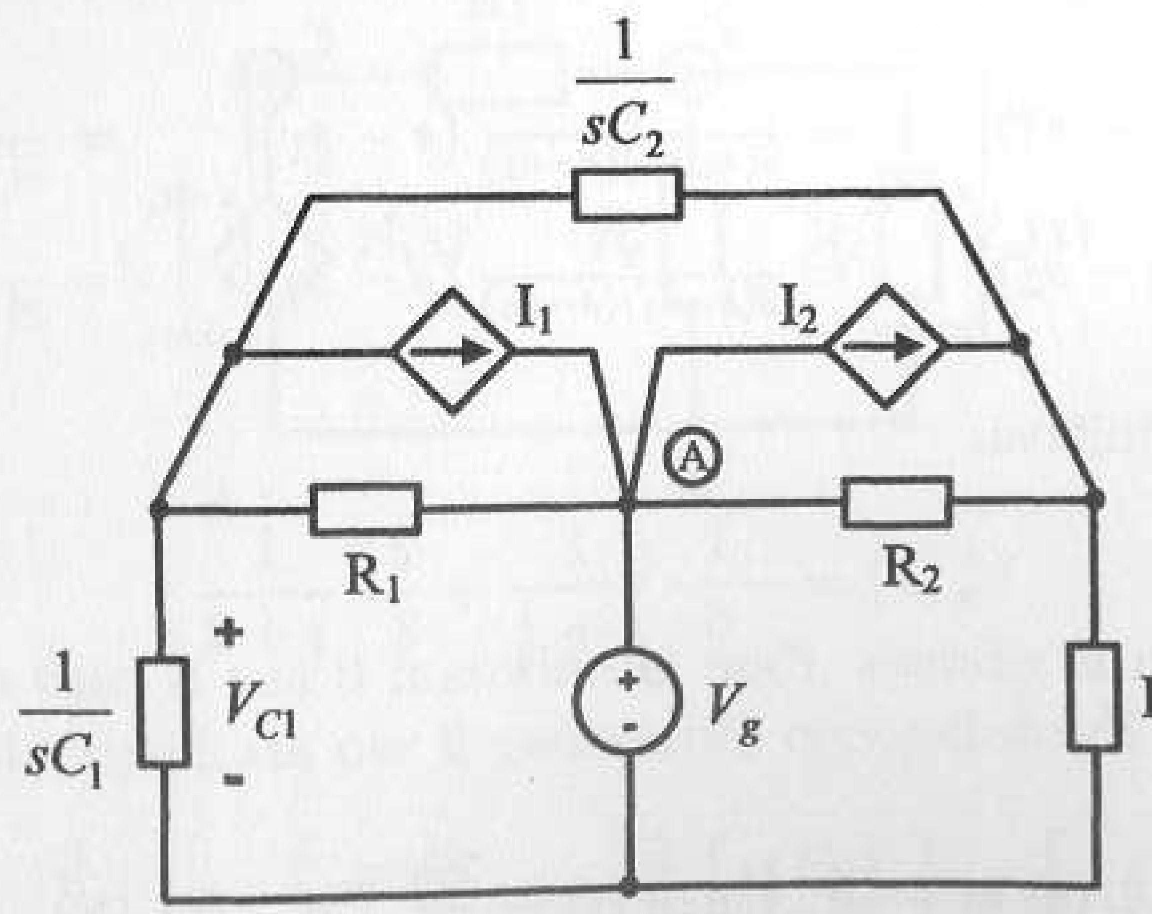
Nel circuito in figura, determinare la funzione di rete tra $V_{C_1}$ e $V_g$. Valutare la stabilità del circuito sulla base di tale funzione. Determinare l'andamento nel tempo (per $t \geq 0$) di $V_{C_1}(t)$ quando $V_g(t) = [2\cos(2t) - \sin(2t)]\, u_{-1}(t)$ e $V_{C_1}(0^-) = V_{C_2}(0^-) = 0\ [V]$.




$$R_1 = R_2 = R_3 = 1\,[\Omega];\ C_1 = C_2 = 1\,[F];\ I_1 = I_2 = gV_{C_1}\,[A];\ g = 1\,[A/V].$$

### Svolgimento

La funzione di rete richiesta si ottiene analizzando il circuito nel dominio di Laplace, in cui $V_g(s)$ è una generica eccitazione e non sono presenti condizioni iniziali sui condensatori $C_1$ e $C_2$. Il circuito da analizzare è quindi il seguente:



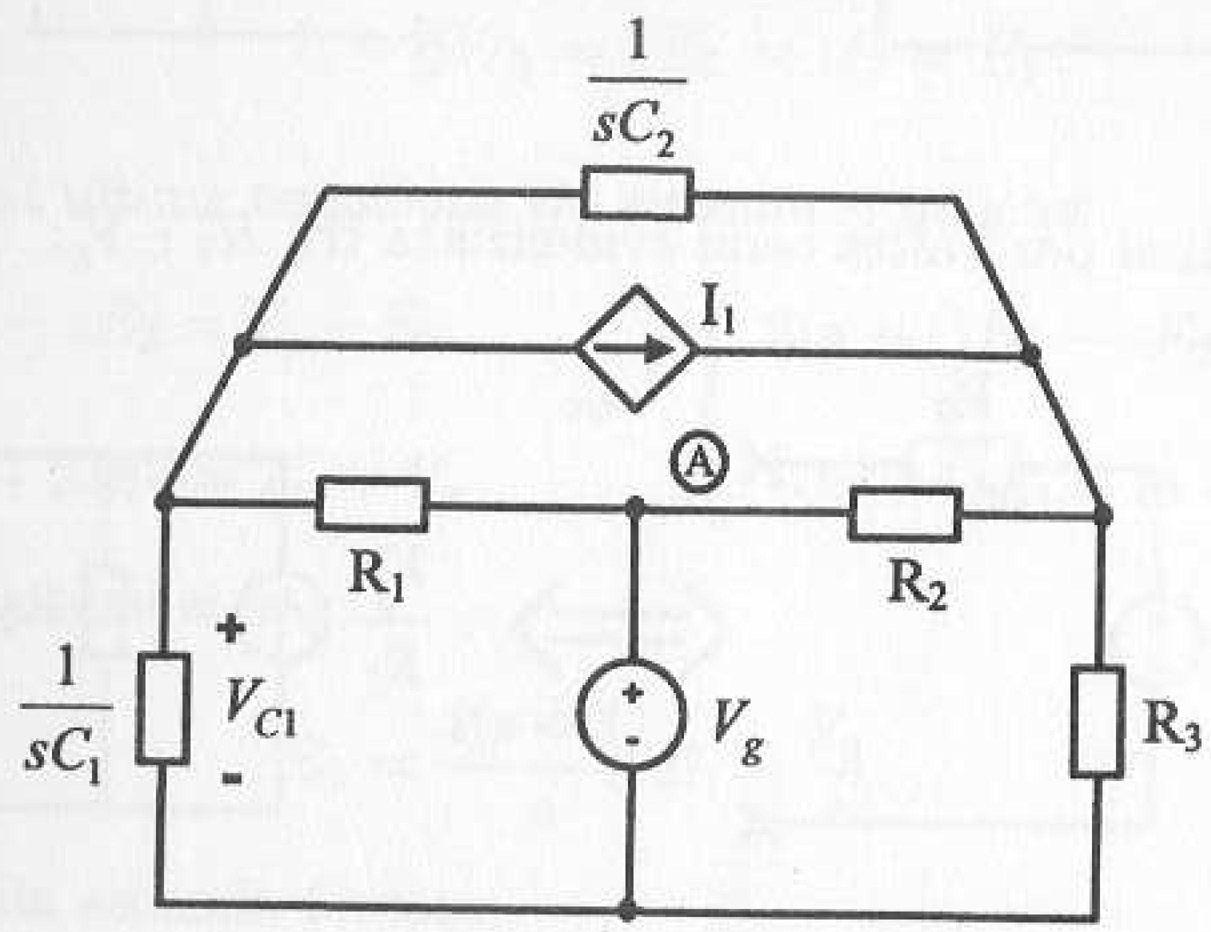




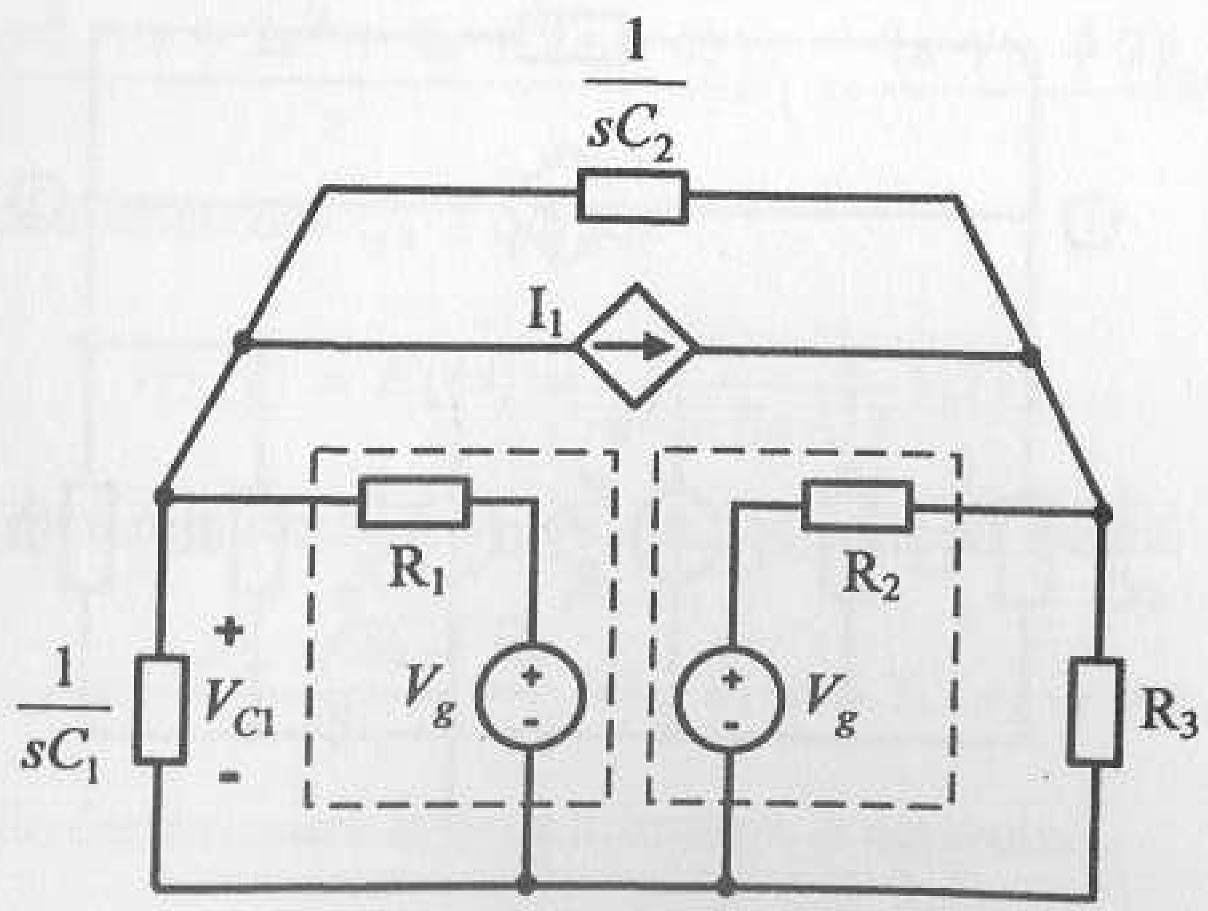

Poiché i generatori controllati $I_1$ e $I_2$ sono identici, essi non influiscono sul bilancio delle correnti al nodo A (indicato in figura). Tale equazione sarà infatti del tipo $I_1 - I_2 + ... = 0$ ovvero, essendo $I_2 = I_1$, sarà

$$\cancel{I_1} - \cancel{I_1} + ... = 0\,.$$

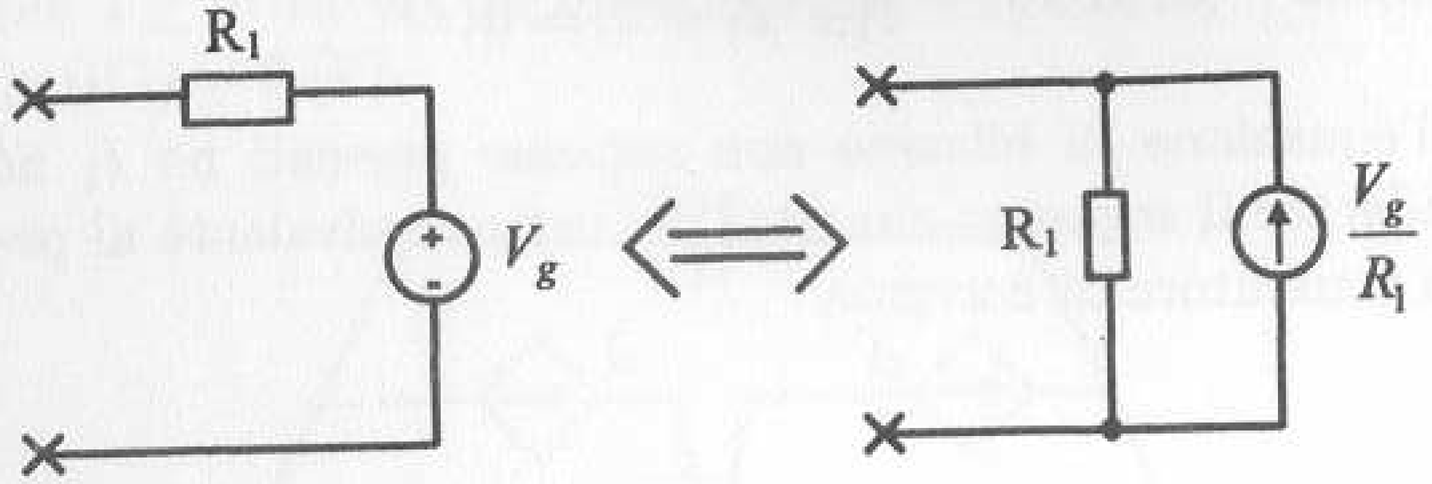
Quindi nell'equazione di bilancio non saranno presenti né $I_1$ né $I_2$. Si può allora considerare il seguente circuito, del tutto equivalente al precedente, ma con un solo generatore di corrente:



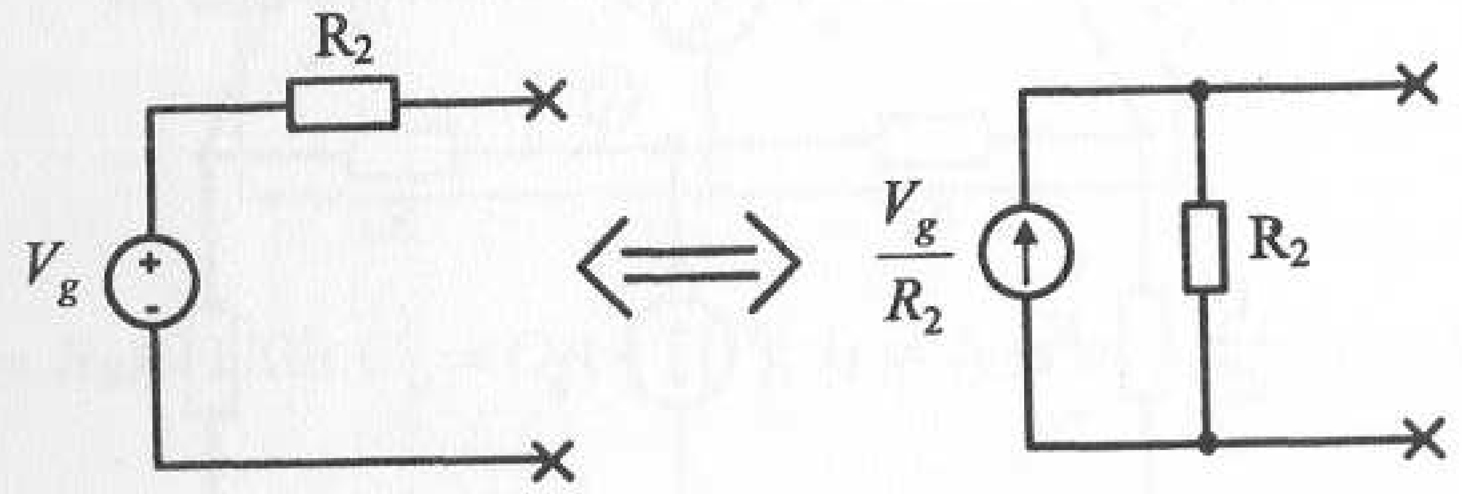

Poiché il generatore di corrente $V_g$ è un generatore ideale di tensione, è possibile il suo sdoppiamento e quindi la sua messa in serie con $R_1$ e con $R_2$:



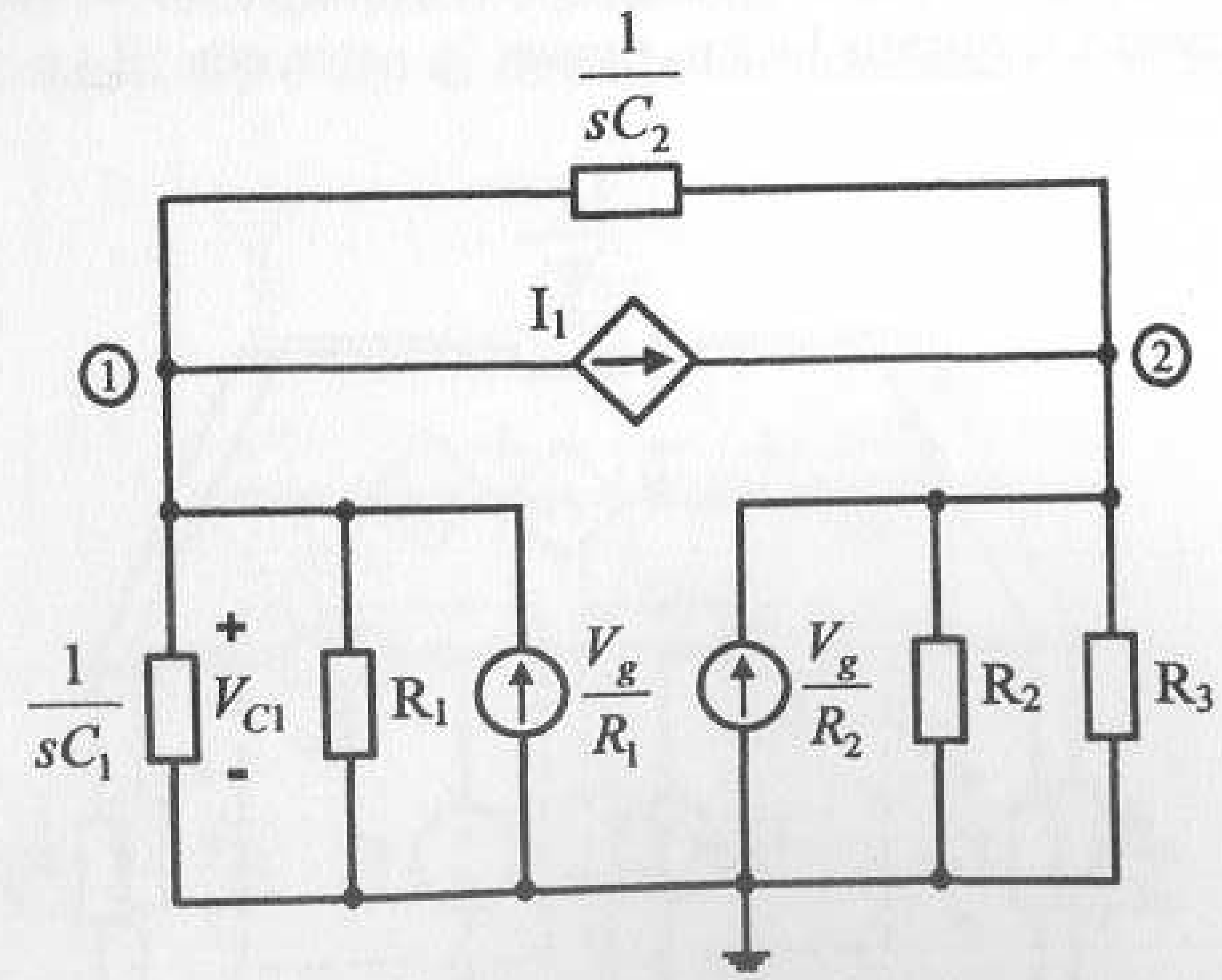
La serie dell'impedenza $R_1$ e del generatore ideale $V_g$, evidenziata nel riquadro tratteggiato, costituisce un generatore reale di tensione che può essere trasformato in un equivalente generatore reale di corrente:




Lo stesso può dirsi per l'altra serie evidenziata tra $R_2$ e $V_g$:




Si ottiene in definitiva il seguente circuito:








Si può quindi analizzare questo circuito per calcolare la tensione $V_{C_1}$ sul condensatore $C_1$, che risulta pari alla tensione $E_1$ sul nodo 1. Il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(sC_1 + \frac{1}{R_1} + sC_2\right) & -sC_2 \\ -sC_2 & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{R_1} - I_1 \\ I_1 + \frac{V_g}{R_2} \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$I_1 = gV_{C_1} = gE_1 \Rightarrow I_1 = E_1 .$$

Sostituendo quest'ultima equazione nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (2s+1)E_1 - sE_2 = V_g - E_1 \\ -sE_1 + (s+2)E_2 = E_1 + V_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(s+1)E_1 - sE_2 = V_g \\ -(s+1)E_1 + (s+2)E_2 = V_g \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$E_2 = \frac{2(s+1)}{s}E_1 - \frac{V_g}{s},$$

che sostituita nella seconda fornisce

$$-(s+1)E_1 + \frac{2}{s}(s+1)(s+2)E_1 - \frac{(s+2)}{s}V_g = V_g$$

e dunque:

$$\frac{(-s^2 - s + 2s^2 + 4s + 2s + 4)}{s}E_1 = \frac{(s+s+2)}{s}V_g .$$

La tensione sul condensatore $C_1$ è quindi:

$$V_{C_1}(s) = E_1(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+5s+4}V_g(s) .$$

Si osserva che il denominatore di $V_{C_1}(s)$ ha le seguenti radici:

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow s_1 = -1; \ s_2 = -4 .$$

E' quindi possibile fattorizzare il denominatore e scrivere

$$V_{C_1}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+4)(s+1)}V_g(s),$$

per cui la funzione di rete richiesta è pari a

$$H(s) = \frac{V_{C_1}(s)}{V_g(s)} = \frac{2}{s+4}.$$

Poiché tale funzione ha un unico polo reale in $s = -4$, il circuito risulta asintoticamente stabile.

Per determinare l'andamento di $V_{C_1}(t)$ si può considerare che, nelle ipotesi fornite, i condensatori $C_1$ e $C_2$ sono inizialmente scarichi. Ciò significa che l'espressione trovata in precedenza per $V_{C_1}(s)$ rimane valida, una volta assegnata a $V_g(s)$ l'espressione derivante dal particolare andamento di $V_g(t)$. In altre parole:

$$V_{C_1}(s) = \frac{2}{s+4} V_g(s),$$

dove

$$V_g(s) = \mathcal{L}\{V_g(t)\} = \mathcal{L}\{[2\cos(2t) - \sin(2t)]\, u_{-1}(t)\}$$

$$V_g(s) = 2\mathcal{L}\{\cos(2t)u_{-1}(t)\} - \mathcal{L}\{\sin(2t)u_{-1}(t)\}\,.$$

Ricordando che:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u_{-1}(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

e che

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u_{-1}(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

si ottiene

$$V_g(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+4}$$

e quindi

$$V_{C_1}(s) = \frac{4(s-1)}{(s+4)(s^2+4)}.$$

Per ottenere l'andamento nel tempo di $V_{C_1}(t)$ si deve effettuare lo sviluppo in frazioni parziali di $V_{C_1}(s)$. Quest'ultima è una funzione razionale reale strettamente propria, avente poli in $-4$ e $\pm 2j$. Quindi:

$$V_{C_1}(s) = \frac{4(s-1)}{(s+4)(s-2j)(s+2j)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2j} + \frac{B^*}{s+2j}.$$





Si noti che i residui $B$ e $B^*$ sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, in quanto relativi alla coppia di poli complessi coniugati $\pm 2j$. Dunque:

$$A = V_{C_1}(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{4(s-1)}{(s^2+4)}\Big|_{s=-4} = \frac{4(-5)}{20} = -1\,;$$

$$B = V_{C_1}(s)(s-2j)\Big|_{s=2j} = \frac{4(s-1)}{(s+4)(s+2j)}\Big|_{s=2j} = \frac{4(2j-1)}{(2j+4)4j} = \frac{2j-1}{2(-1+2j)}$$

$$B = \frac{(2j-1)}{2(-1+2j)} \cdot \frac{(-1-2j)}{(-1-2j)} = \frac{-2j+1+4+2j}{2\cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

Dal calcolo dei residui si ottiene quindi:

$$V_{C_1}(s) = -\frac{1}{s+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2j},$$

la cui antitrasformata nel tempo corrisponde a

$$V_{C_1}(t) = \left[-e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2jt} + \frac{1}{2}e^{-2jt}\right] u_{-1}(t)\,.$$

Considerando che

$$\frac{1}{2}e^{2jt} + \frac{1}{2}e^{-2jt} = \cos(2t)\,,$$

si ottiene in definitiva:

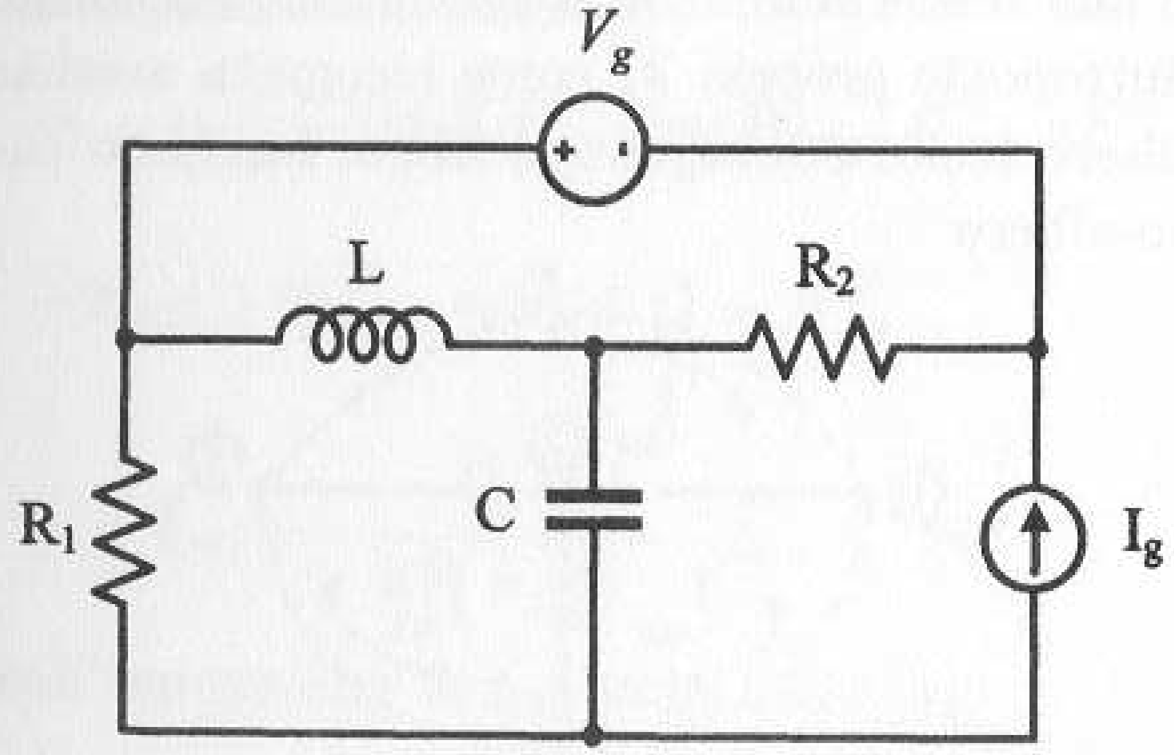
$$V_{C_1}(t) = \left[\cos(2t) - e^{-4t}\right] u_{-1}(t) \quad [V]$$

# Capitolo 3

# Analisi in regime permanente sinusoidale

## Esercizio ~~3.1~~ OK

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare potenza complessa, attiva e reattiva erogata dal generatore di corrente.

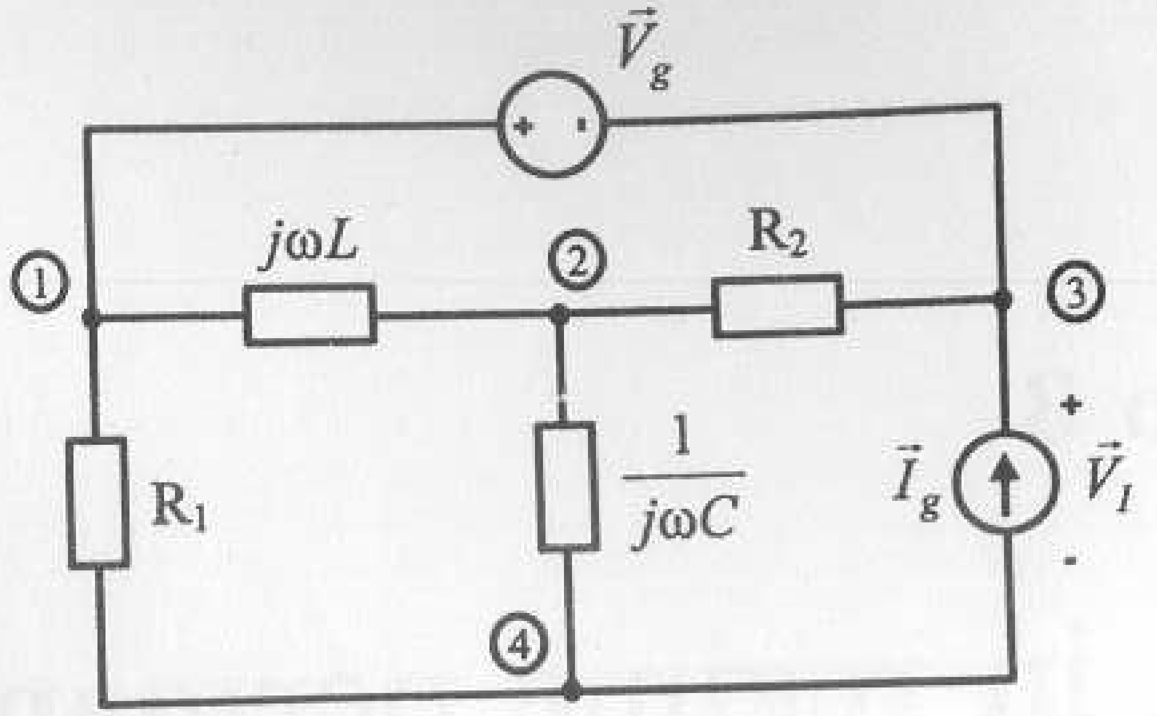



$$V_g(t) = \sin\left(2t + \tfrac{2\pi}{3}\right)[V]\,;\; I_g(t) = 3\cos\left(2t + \tfrac{\pi}{6}\right)[A]\,;$$

$$R_1 = 1\,[\Omega]\,;\; R_2 = 2\,[\Omega]\,;\; C = 1/2\,[F]\,;\; L = 1\,[H]\,.$$

### Svolgimento

Analizziamo il circuito nel dominio dei fasori:

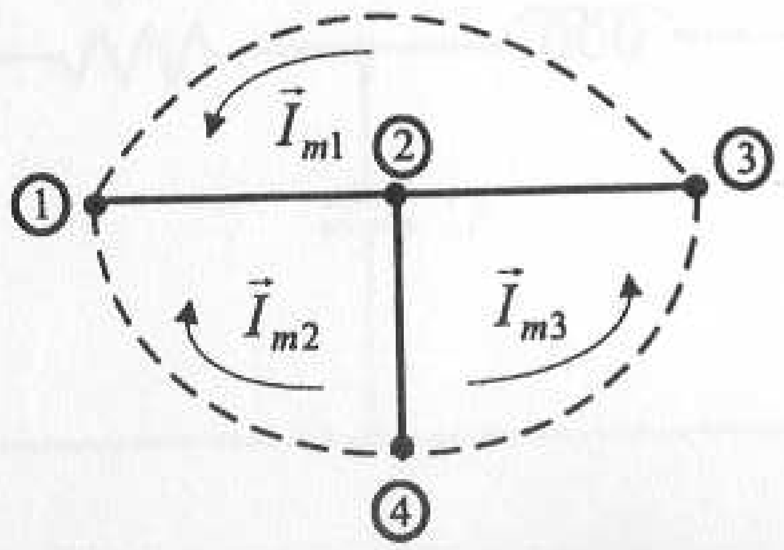



con $\omega = 2$ ed inoltre:

$$V_g(t) = \sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2t + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \vec{V}_g = e^{j\frac{\pi}{6}}\,;$$

$$I_g(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \vec{I}_g = 3e^{j\frac{\pi}{6}}\,.$$

Per il calcolo della potenza erogata dal generatore di corrente dobbiamo determinare la tensione ai suoi capi, indicata con $\vec{V}_I$. Il metodo della maglie e quello dei nodi portano alla stessa complessità risolutiva. Utilizziamo il metodo delle maglie, avendo introdotto proprio $\vec{V}_I$ come incognita ausiliaria sul generatore di corrente. L'albero scelto è il seguente, in cui facciamo cadere il generatore di corrente sul co-albero:




Il sistema risolvente è dunque il seguente:

$$\begin{bmatrix} (j\omega L + R_2) & j\omega L & -R_2 \\ j\omega L & \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R_1\right) & \frac{1}{j\omega C} \\ -R_2 & \frac{1}{j\omega C} & R_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m1} \\ \vec{I}_{m2} \\ \vec{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_g \\ 0 \\ \vec{V}_I \end{bmatrix}$$





in cui l'equazione di vincolo del generatore di corrente porta banalmente a $\vec{I}_{m3} = \vec{I}_g$. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} (2j+2)\,\vec{I}_{m1} + 2j\vec{I}_{m2} - 2\vec{I}_g = \vec{V}_g \\ 2j\vec{I}_{m1} + \left(2j + \frac{1}{2j\frac{1}{2}} + 1\right)\vec{I}_{m2} + \frac{1}{2j\frac{1}{2}}\vec{I}_g = 0 \\ -2\vec{I}_{m1} + \frac{1}{2j\frac{1}{2}}\vec{I}_{m2} + \left(2 + \frac{1}{2j\frac{1}{2}}\right)\vec{I}_g = \vec{V}_I \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2\,(j+1)\,\vec{I}_{m1} + 2j\vec{I}_{m2} = \vec{V}_g + 2\vec{I}_g \\ 2j\vec{I}_{m1} + (1+j)\,\vec{I}_{m2} = j\vec{I}_g \\ -2\vec{I}_{m1} - j\vec{I}_{m2} - \vec{V}_I = -(2-j)\,\vec{I}_g \end{cases}$$

Dalla $2^a$ equazione si ottiene:

$$\vec{I}_{m1} = \frac{1}{2}\vec{I}_g - \frac{1+j}{2j}\vec{I}_{m2}\,. \qquad (a)$$

Sostituendo $\vec{I}_{m1}$ nella prima equazione:

$$(1+j)\,\vec{I}_g - \frac{(1+j)^2}{j}\vec{I}_{m2} + 2j\vec{I}_{m2} = \vec{V}_g + 2\vec{I}_g$$

$$-2\vec{I}_{m2} + 2j\vec{I}_{m2} = \vec{V}_g + (1-j)\,\vec{I}_g$$

e quindi

$$\vec{I}_{m2} = -\frac{\vec{V}_g}{2\,(1-j)} - \frac{1}{2}\vec{I}_g\,. \qquad (b)$$

Sostituendo $\vec{I}_{m2}$ nell'espressione di $\vec{I}_{m1}$ data dalla $(a)$:

$$\vec{I}_{m1} = \frac{1}{2}\vec{I}_g + \frac{(1+j)}{2j}\frac{1}{2\,(1-j)}\vec{V}_g + \frac{(1+j)}{2j}\frac{1}{2}\vec{I}_g\,,$$

per cui

$$\vec{I}_{m1} = \frac{(1+3j)}{4j}\vec{I}_g + \frac{(1+j)}{4j\,(1-j)}\vec{V}_g\,. \qquad (c)$$

Sostituendo le espressioni $(b)$ e $(c)$, trovate rispettivamente per $\vec{I}_{m2}$ e $\vec{I}_{m1}$, nella terza equazione del sistema si ha:

$$-\frac{1+3j}{2j}\vec{I}_g - \frac{1+j}{2j\,(1-j)}\vec{V}_g + \frac{j}{2\,(1-j)}\vec{V}_g + \frac{j}{2}\vec{I}_g - \vec{V}_I = -(2-j)\,\vec{I}_g\,;$$

quindi:

$$\vec{V}_I = \left[\frac{-(1+3j)+(j\cdot j)+(2-j)\,2j}{2j}\right]\vec{I}_g + \left[\frac{-(1+j)+(j\cdot j)}{2j\,(1-j)}\right]\vec{V}_g$$

$$\vec{V}_I = \frac{(-1-3j-1+4j+2)}{2j}3e^{j\frac{\pi}{6}} + \frac{(-1-j-1)}{2j\,(1-j)}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\vec{V}_I = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}} - \frac{2+j}{2\,(1+j)}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{3+3j-2-j}{2\,(1+j)}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{1+2j}{2\,(1+j)}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\vec{V}_I = \frac{(1+2j)\,(1-j)}{2\,(1+j)\,(1-j)}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{1-j+2j+2}{4}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{3+j}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}\ .$$

Essendo la corrente $\vec{I}_g$ uscente dal verso positivo di $\vec{V}_I$, la potenza complessa erogata dal generatore è pari a:

$$\vec{P}_C = \frac{1}{2}\vec{V}_I\vec{I}_g^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{(3+j)}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}\cdot 3e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{8}\,(3+j)\ .$$

Dunque la potenza attiva $P_a$ è pari a

$$P_a = \mathrm{Re}\left\{\vec{P}_c\right\} = \frac{9}{8} = 1,125\ [W]$$

mentre quella reattiva $P_R$ è

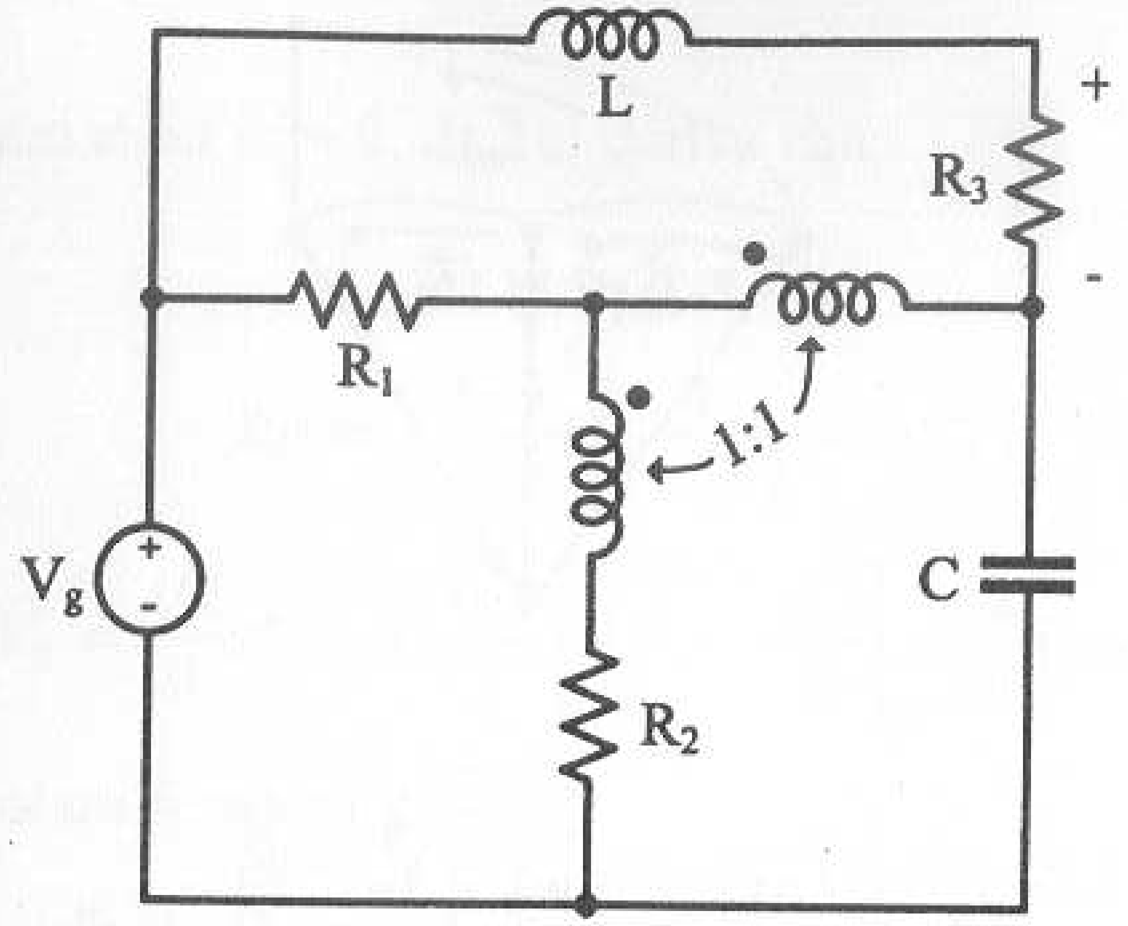
$$P_R = \mathrm{Im}\left\{\vec{P}_c\right\} = \frac{3}{8} = 0,375\ [VAR]\ .$$





## Esercizio 3.2

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare l'andamento nel tempo della tensione ai capi del resistore $R_3$, con il verso indicato in figura.

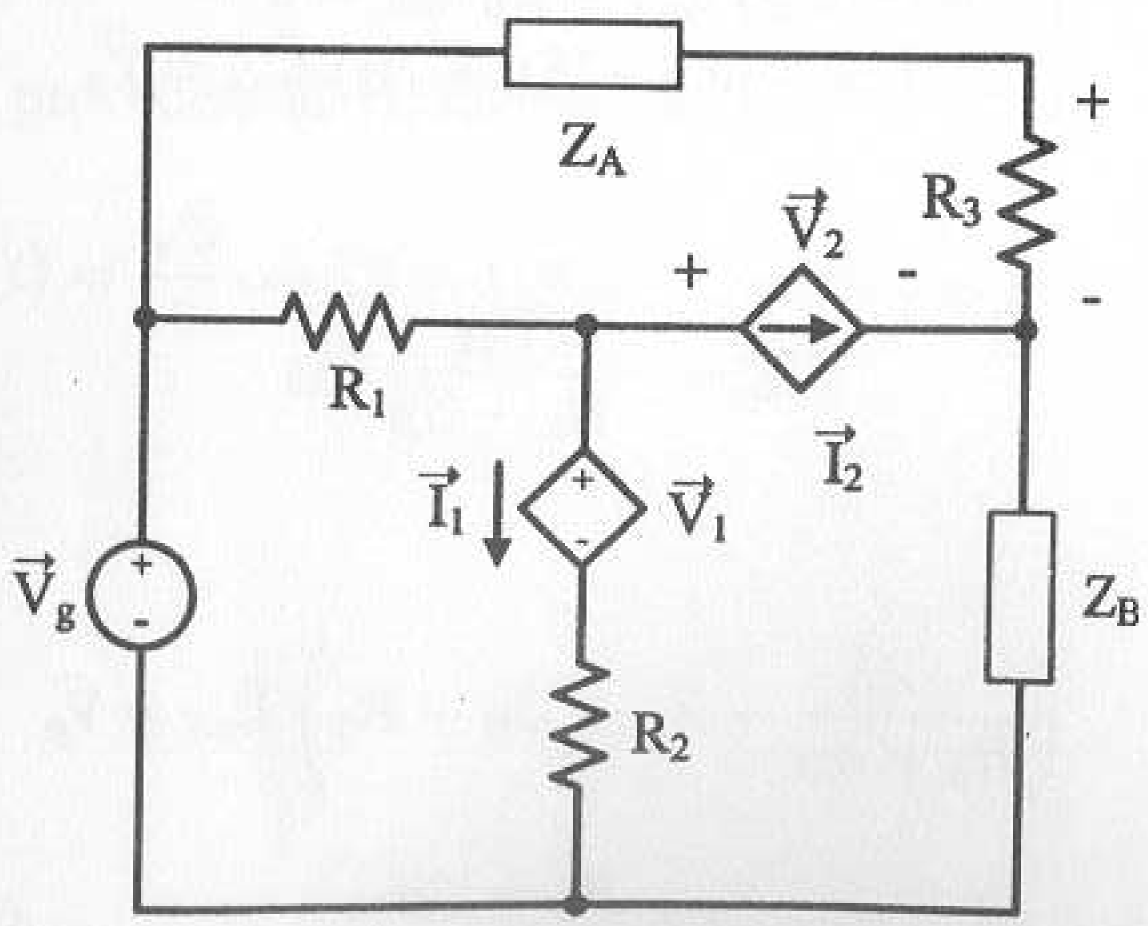



$$V_g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)[V]\ ;\ R_1 = 7\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 1\,[\Omega]\ ;$$

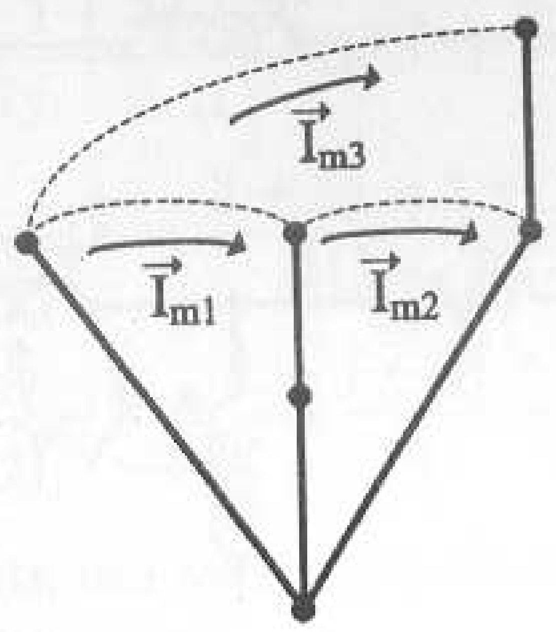
$$R_3 = 4\,[\Omega]\ ;\ L = 1\,[H]\ ;\ C = \frac{1}{4}\,[F]\ .$$

### Svolgimento

Applicando il metodo dei fasori il circuito dato diventa il seguente:



in cui abbiamo sostituito gli avvolgimenti del trasformatore ideale con un generatore di tensione controllato in tensione ed un generatore di corrente controllato in corrente, per i quali $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ e $\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$. Analizzando col metodo delle maglie, per il quale è utilizzato il seguente albero, si ottiene:




$$\begin{cases} (R_1 + R_2)\,\vec{I}_{m1} - R_2\vec{I}_{m2} = \vec{V}_g - \vec{V}_1 \\ -R_2\vec{I}_{m1} + (R_2 + Z_B)\,\vec{I}_{m2} + Z_B\vec{I}_{m3} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ Z_B\vec{I}_{m2} + (Z_A + R_3 + Z_B)\,\vec{I}_{m3} = \vec{V}_g \end{cases}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \\ \vec{I}_1 = -\vec{I}_2 \Rightarrow \vec{I}_{m1} - \vec{I}_{m2} = -\vec{I}_{m2} \Rightarrow \vec{I}_{m1} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione si ottiene:

$$\begin{cases} (R_2 + Z_B)\,\vec{I}_{m2} + Z_B\vec{I}_{m3} = 0 \\ Z_B\vec{I}_{m2} + (Z_A + Z_B + R_3)\,\vec{I}_{m3} = \vec{V}_g \end{cases}$$

da cui

$$\vec{I}_{m2} = -\frac{Z_B}{R_2 + Z_B}\vec{I}_{m3}$$

e quindi

$$\left(\frac{-Z_B^2}{R_2 + Z_B} + Z_A + Z_B + R_3\right)\vec{I}_{m3} = \vec{V}_g$$

$$\vec{I}_{m3} = \frac{R_2 + Z_B}{R_2\,(Z_A + Z_B + R_3) + Z_B\,(Z_A + R_3)}\vec{V}_g\,,$$





ottenendo il fasore della tensione sul resistore $R_3$:

$$\vec{V}_{R_3} = R_3\vec{I}_{m3} = \frac{R_3\,(R_2 + Z_B)}{R_2\,(Z_A + Z_B + R_3) + Z_B\,(Z_A + R_3)}\vec{V}_g\,.$$

Nel caso in esame si ha $\omega = 2$, da cui deriva che:

$$Z_A = j\omega L = 2j\,,$$

$$Z_B = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}} = -2j\,,$$

$$\vec{V}_g = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{1}{2}\,(1 - j)\,.$$

Si può così calcolare il valore di $\vec{V}_{R_3}$:

$$\vec{V}_{R_3} = \frac{4 \cdot (1 - 2j)}{(2j - 2j + 4) - 2j \cdot (2j + 4)} \cdot \frac{1}{2}\,(1 - j)$$

$$\vec{V}_{R_3} = \frac{2 \cdot (1 - 2j)}{4 + 4 - 8j} \cdot (1 - j) = \frac{1}{4} \cdot (1 - 2j)\,.$$

Modulo e fase saranno quindi dati da:

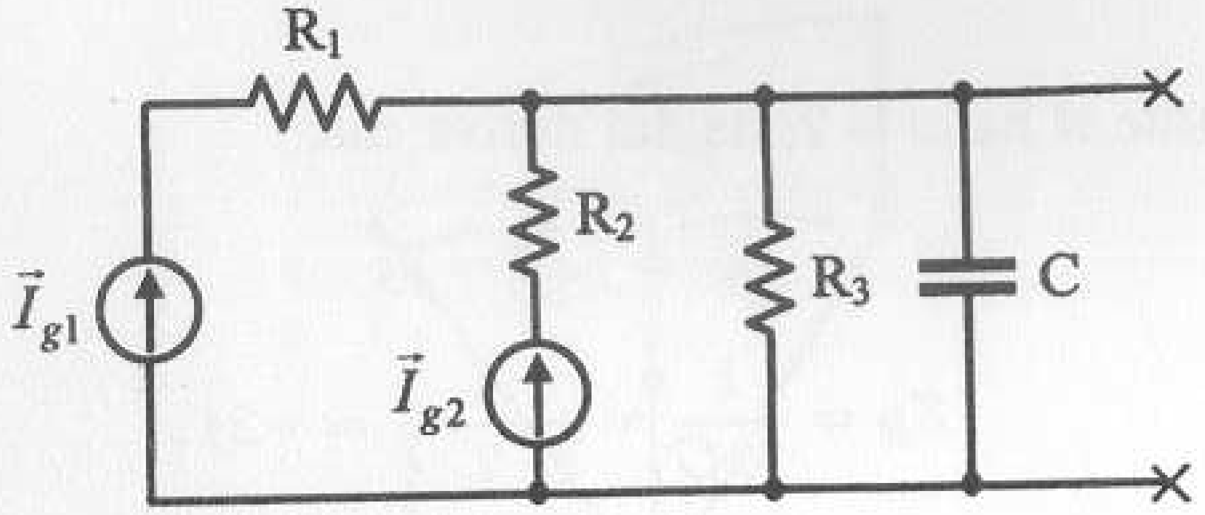
$$\begin{cases} \left|\vec{V}_{R_3}\right| = \frac{1}{4}\,|1 - 2j| = \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4} = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,559 \\ \angle\vec{V}_{R_3} = \angle\frac{1}{4} + \angle\,(1 - 2j) = \arctan{(-2)} = -1,107\,[\mathrm{rad}] \end{cases}$$

e si può infine procedere al calcolo di $V_{R_3}(t)$:

$$V_{R_3}(t) = \frac{\sqrt{5}}{4}\cos{(2t - 1,107)} = 0,559\cos{(2t - 1,107)}\ [V]$$

## Esercizio 3.3 OK

Applicare il teorema di Thevenin, nel dominio dei fasori, al circuito in figura.

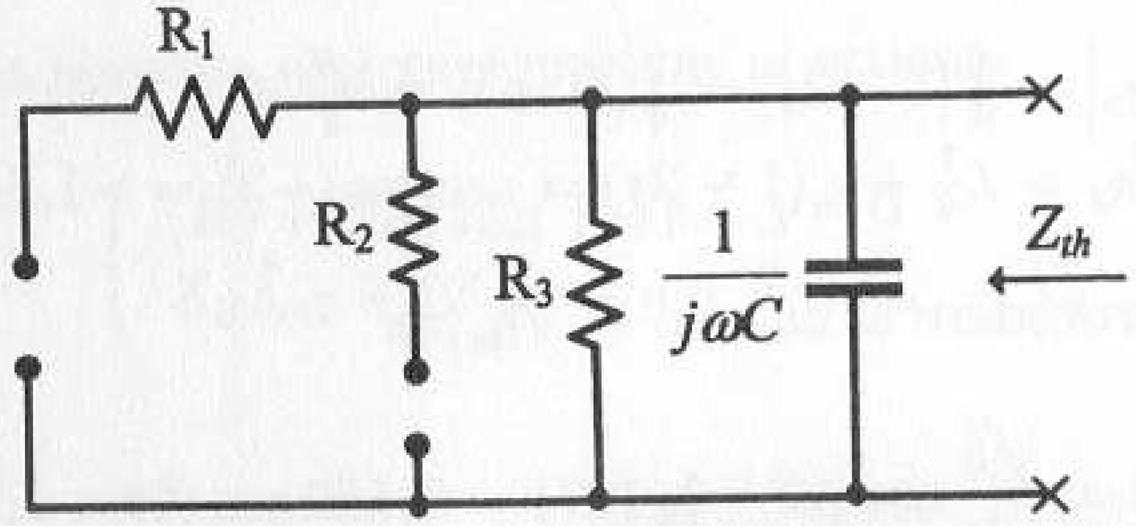



$C = 1$; $R_1 = 0,77$; $R_2 = 2,24$; $R_3 = 1$; $\omega = 1$;

$\vec{I}_{g1} = 5 + 2j$; $\vec{I}_{g2} = 1 + 4j$; $[F, \Omega, \text{rad/sec}, A]$.

### Svolgimento

Calcolo di $Z_{th}$) Si disattivano i generatori (entrambi indipendenti):

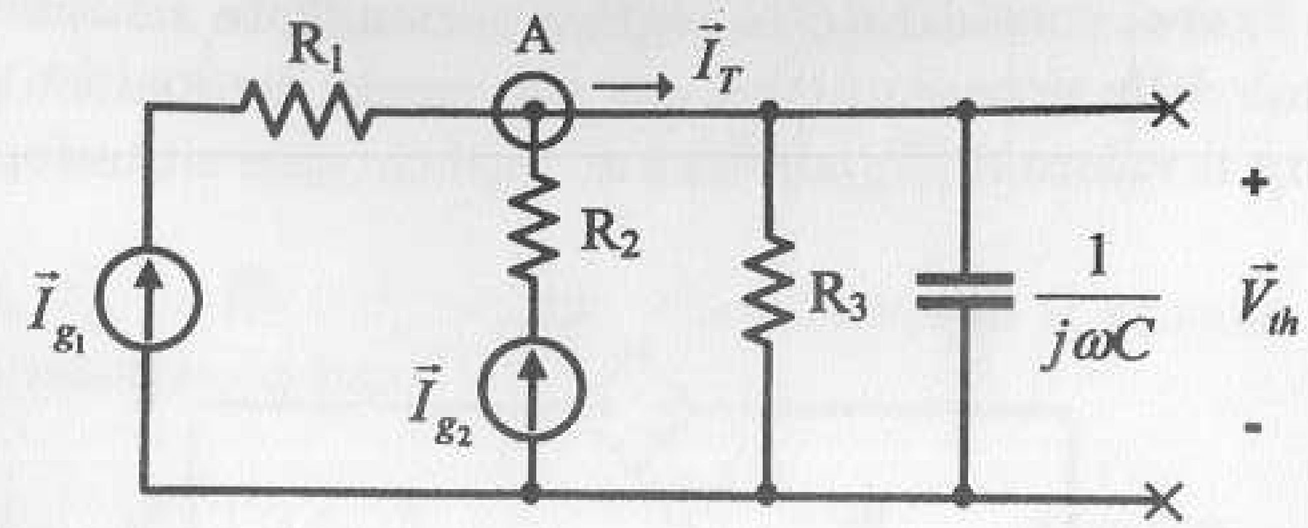



$$Z_{th} = R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C} \implies Z_{th} = \frac{1 \cdot \frac{1}{j}}{1 + \frac{1}{j}} = \frac{1}{j+1}.$$





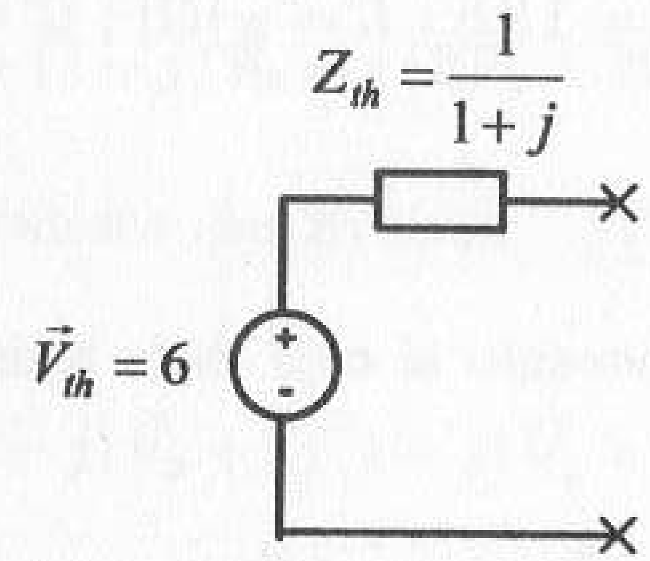
Calcolo di $V_{th}$)




Dal taglio al nodo A si evince che $\vec{I}_T = \vec{I}_{g1} + \vec{I}_{g2}$. Per cui, scorrendo $\vec{I}_T$ nel parallelo di $R_3$ e $\frac{1}{j\omega C}$, si ottiene:

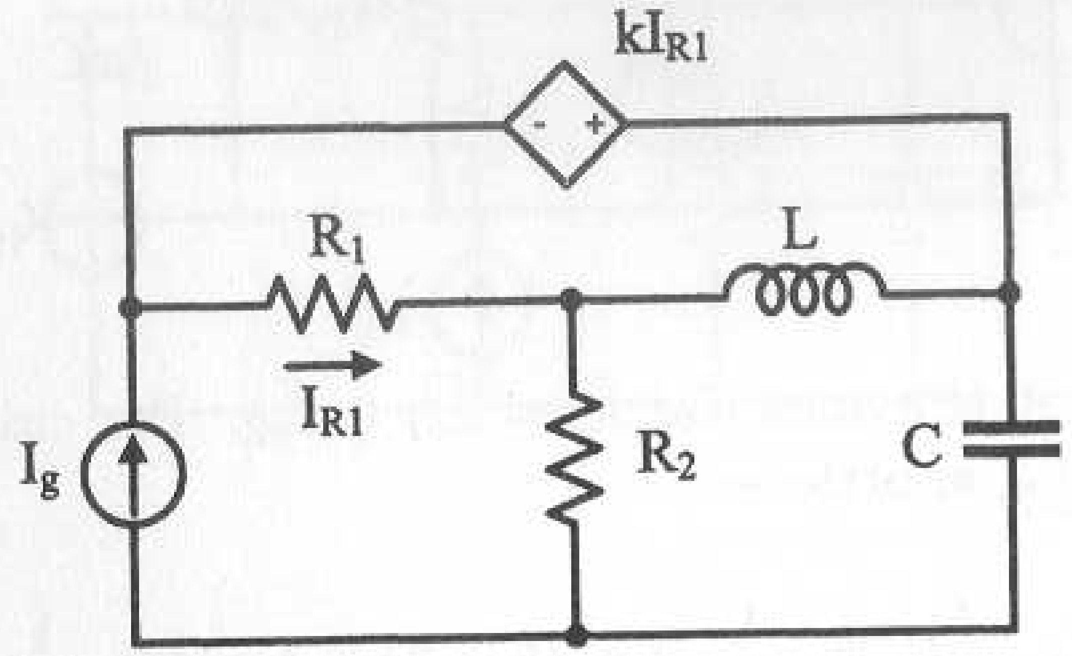
$$\vec{V}_{th} = \vec{I}_T \cdot \left( R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C} \right) = (5 + 2j + 1 + 4j)\frac{1}{1+j} = 6.$$

Il circuito equivalente sarà quindi il seguente:



# Esercizio 3.4

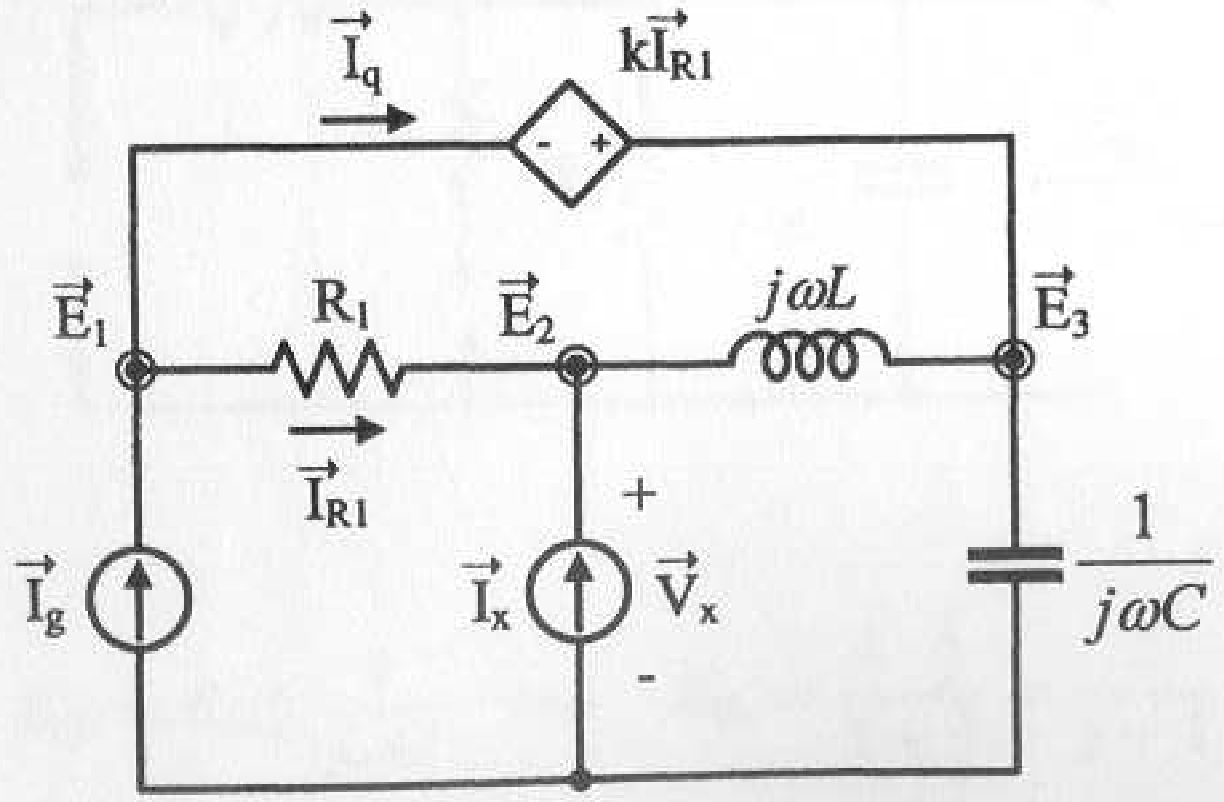
Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare il valore massimo della potenza attiva che può essere dissipata sul resistore $R_2$. Calcolare inoltre il valore di $R_2$ affinché si verifichi tale situazione.




$$I_g(t) = \sin(2t)\,[A]\ ;\ R_1 = 1\,[\Omega]\ ;\ L = \frac{1}{2}\,[H]\ ;\ C = \frac{1}{2}\,[F]\ ;\ k = 2\,[V/A]\,.$$

## Svolgimento

Si applica il teorema di Thevenin ai capi della resistenza $R_2$ nel dominio dei fasori:




Per calcolare $\vec{V}_x$ si applicherà il metodo dei nodi, con l'aggiunta dell'incognita ausiliaria $\vec{I}_q$ sul generatore di tensione:





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L}+j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{I}_g - \vec{I}_q \\ \vec{I}_x \\ \vec{I}_q \end{bmatrix}$$

in cui $\omega = 2$, $\vec{V}_x = \vec{E}_2$ , $\vec{I}_g = -j$. Considerando il vincolo del generatore controllato di tensione si ha:

$$\vec{E}_3 - \vec{E}_1 = k\vec{I}_{R_1} = k\frac{\vec{E}_1 - \vec{E}_2}{R_1} \Rightarrow \vec{E}_3 = 3\vec{E}_1 - 2\vec{V}_x \quad (a)$$

mentre dalla terza equazione del sistema si ottiene:

$$jV_x + (-j+j)\,\vec{E}_3 = \vec{I}_q \Rightarrow \vec{I}_q = j\vec{V}_x \quad (b)$$

Sostituendo le equazioni (a) e (b) nella prima e seconda equazione del sistema, ne deriva che:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 - \vec{V}_x = -j - j\vec{V}_x \\ -\vec{E}_1 + (1-j)\,\vec{V}_x + j\left(3\vec{E}_1 - 2\vec{V}_x\right) = \vec{I}_x \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene che $\vec{E}_1 = (1-j)\,\vec{V}_x - j$, che sostituita nella seconda porta a:

$$-(1-j)\,\vec{V}_x + j + (1-j)\,\vec{V}_x + 3j\,(1-j)\,\vec{V}_x + 3j\,(-j) - 2j\vec{V}_x = \vec{I}_x\,,$$

da cui

$$(3j + 3 - 2j)\,\vec{V}_x + (j+3) = \vec{I}_x$$

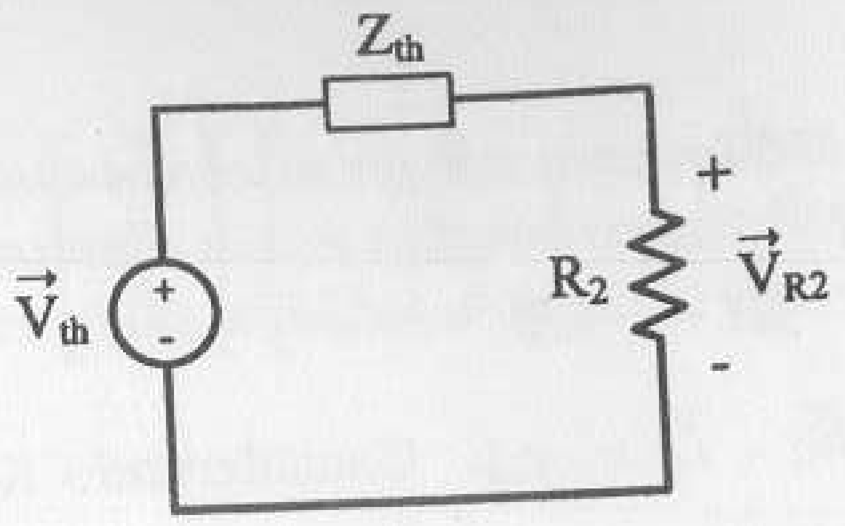
e quindi

$$\vec{V}_x = \frac{1}{3+j}\vec{I}_x - \frac{3+j}{3+j} = \frac{3-j}{10}\vec{I}_x - 1\,.$$

Dal momento che $\vec{V}_x = Z_{th}\vec{I}_x + \vec{V}_{th}$, si ha che

$$Z_{th} = \frac{3-j}{10} \qquad \text{e} \qquad \vec{V}_{th} = -1\,,$$

con riferimento al seguente circuito semplificato:




Poiché il carico $R_2$ è puramente resistivo, il massimo della potenza attiva in esso dissipata si ottiene quando $R_2 = |Z_{th}|$, ovvero

$$R_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0,316\ [\Omega]$$

La potenza massima in questo caso sarà data da:

$$P_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|\vec{V}_{R_2}\right|^2}{R_2}$$

con

$$\vec{V}_{R_2} = \vec{V}_{th} \cdot \frac{R_2}{R_2 + Z_{th}} = (-1) \cdot \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3-j}{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}+3\right) - j},$$

da cui

$$\left|\vec{V}_{R_2}\right| = 0,507$$

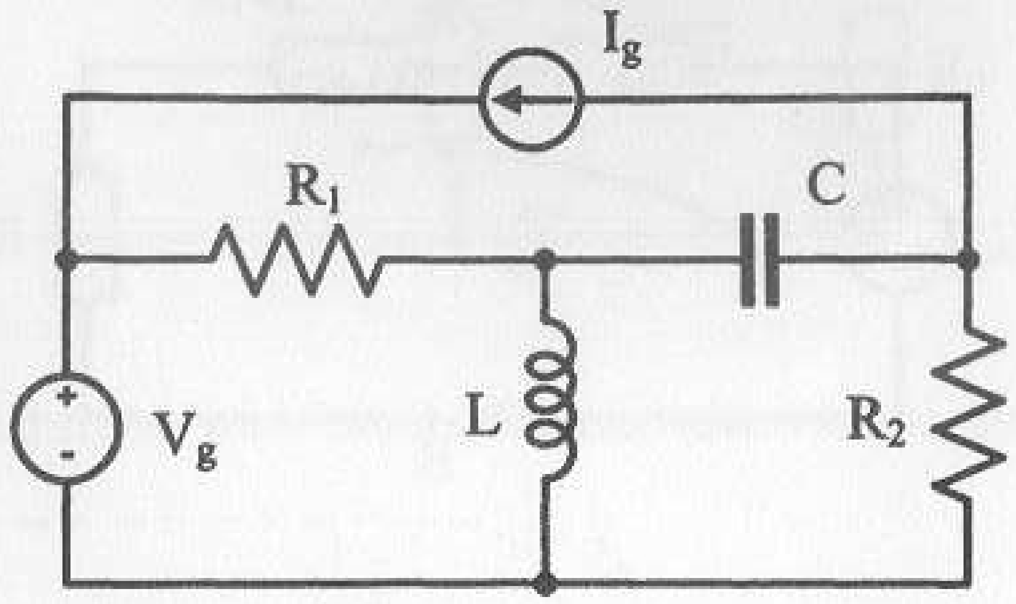
e quindi:

$$P_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,507^2}{0,316} = 0,406\ [\mathrm{W}]$$



## Esercizio ~~3.5~~ OK

Calcolare per il circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, la potenza attiva assorbita da $R_2$.

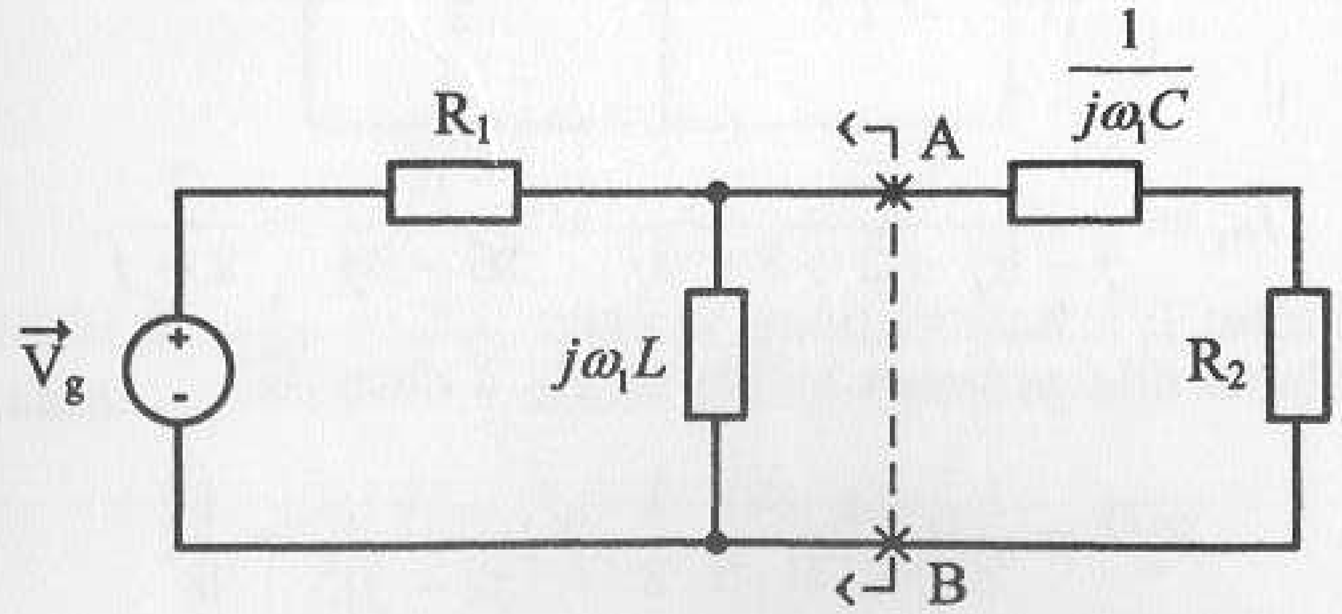



$$V_g(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{4}t\right) [V]\,; I_g(t) = 2 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) [A]\,;$$
$$R_1 = 1\,[\Omega]\,; R_2 = 2\,[\Omega]\,; L = 1\,[H]\,; C = 2\,[F]\,.$$

### Svolgimento

Essendo presenti due pulsazioni diverse, la potenza attiva su $R_2$ è data dalla somma dei contributi dovuti alle pulsazioni agenti ciascuna singolarmente.

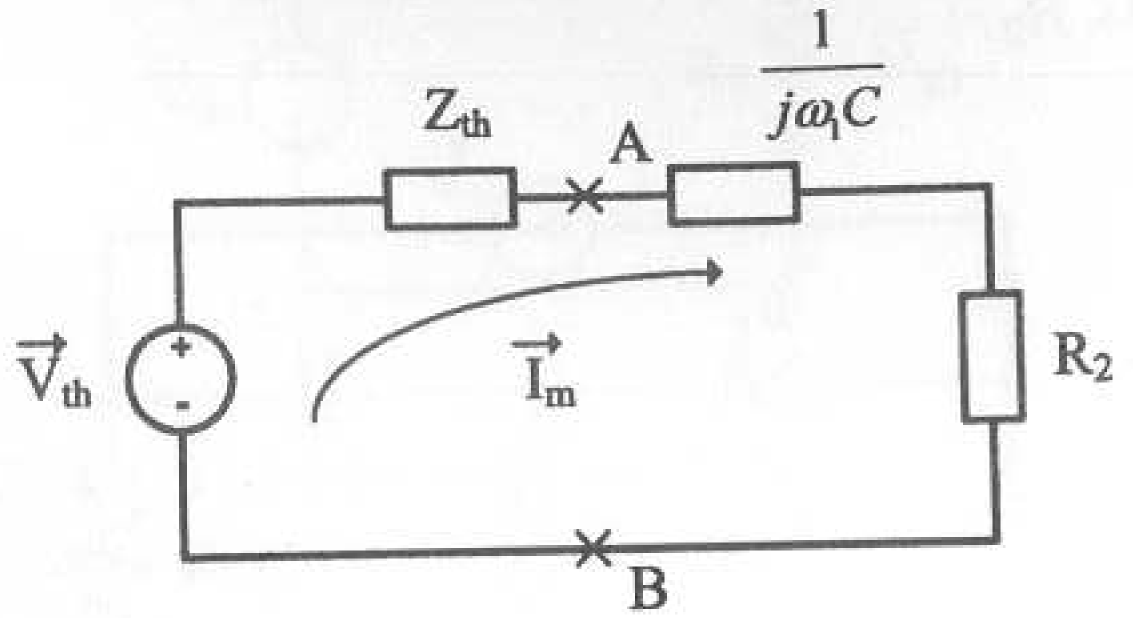
$\omega_1 = \frac{1}{4}$) Si disattiva il generatore $I_g$, che diventa un circuito aperto. In questo caso il circuito nel dominio dei fasori è il seguente:




in cui il fasore di $\vec{V}_g$ si ottiene trasformando $V_g(t)$:

$$V_g(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{4}t\right) = 5 \cos\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{V}_g = 5e^{-j\frac{\pi}{2}} = -5j.$$

Si applica il teorema di Thevenin alla parte sinistra dei morsetti A-B indicati in figura e si ottiene il seguente circuito:




in cui:

$$\begin{cases} Z_{th} = R_1 // j\omega_1 L = \frac{1 j \frac{1}{4} 1}{1 + j\frac{1}{4}1} = \frac{j}{j+4} \\ \vec{V}_{th} = \vec{V}_g \cdot \frac{j\omega_1 L}{R_1 + j\omega_1 L} = -5j \cdot \frac{j\frac{1}{4}1}{1+j\frac{1}{4}1} = \frac{5}{4+j} \end{cases}$$

La corrente $\vec{I}_m$ si ottiene dall'equazione dell'unica maglia del circuito:

$$\left( Z_{th} + \frac{1}{j\omega_1 C} + R_2 \right) \vec{I}_m = \vec{V}_{th}$$

$$\vec{I}_m = \frac{\frac{5}{4+j}}{\frac{j}{4+j} + \frac{1}{j \cdot \frac{1}{4} \cdot 2} + 2} = \frac{5}{j + \frac{4+j}{\frac{j}{2}} + 2(4+j)}$$

$$\vec{I}_m = \frac{5}{j - 8j + 2 + 8 + 2j} = \frac{5}{10 - 5j} = \frac{1}{2-j}.$$

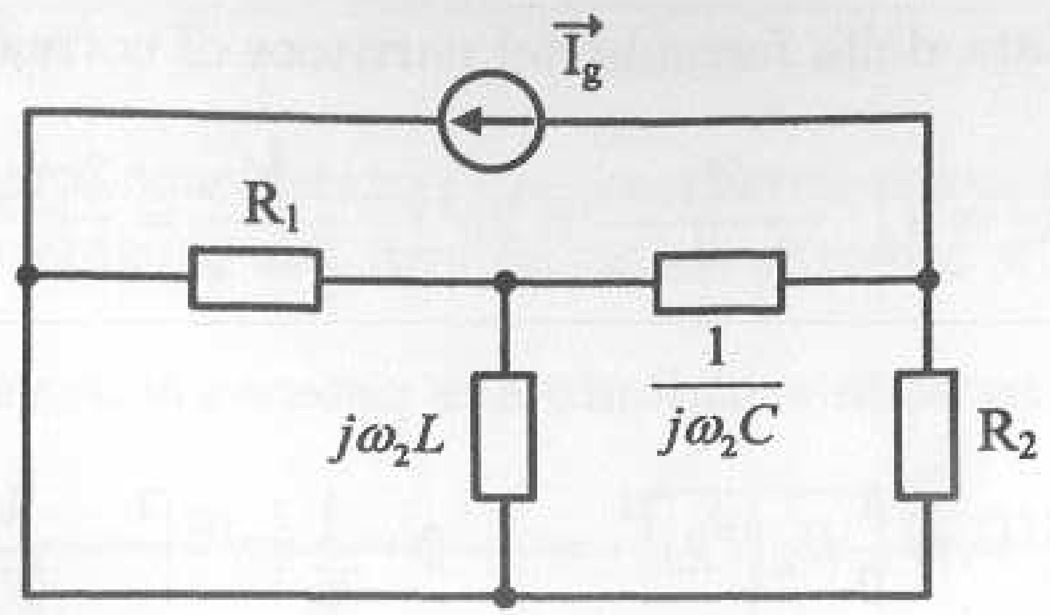
Il primo contributo alla potenza attiva su $R_2$ è dato da:

$$P_a^{(I)} = \frac{1}{2} R_2 \left| \vec{I}_m \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{|2-j|^2} = \frac{1}{5}.$$

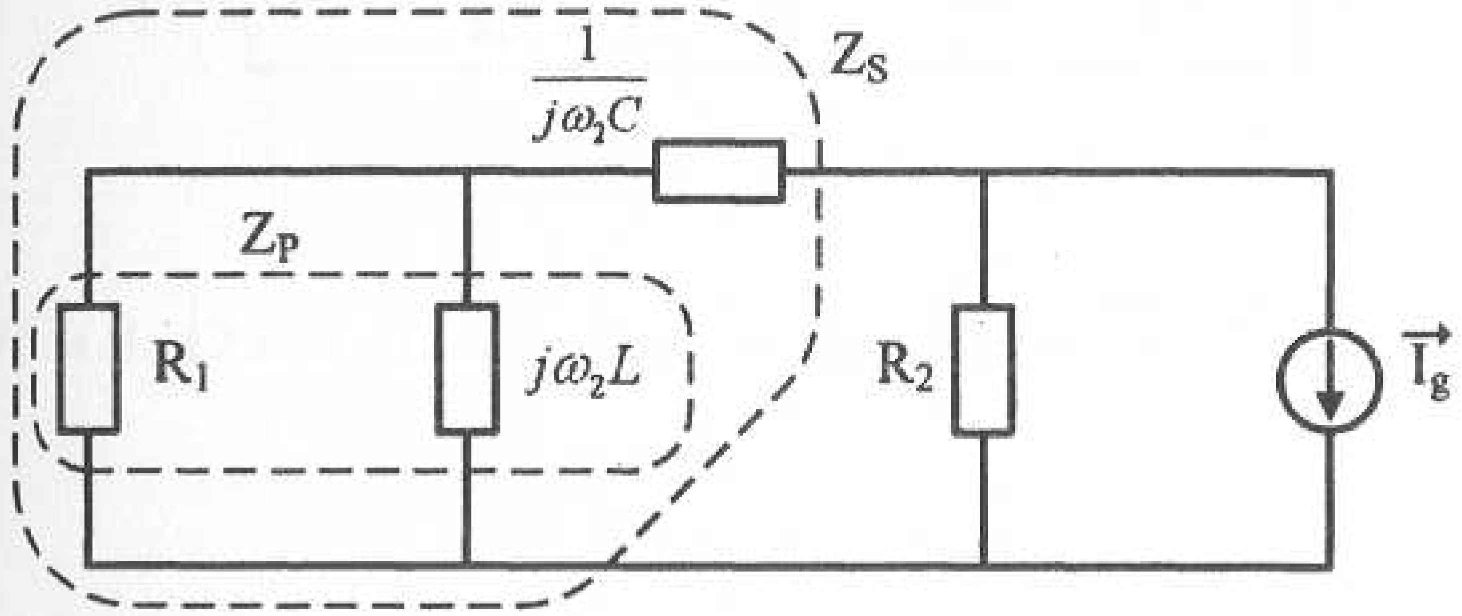
$\omega_2 = 1\Big)$ Si disattiva il generatore $V_g$ che diventa un corto-circuito. In tal modo il circuito diventa il seguente:



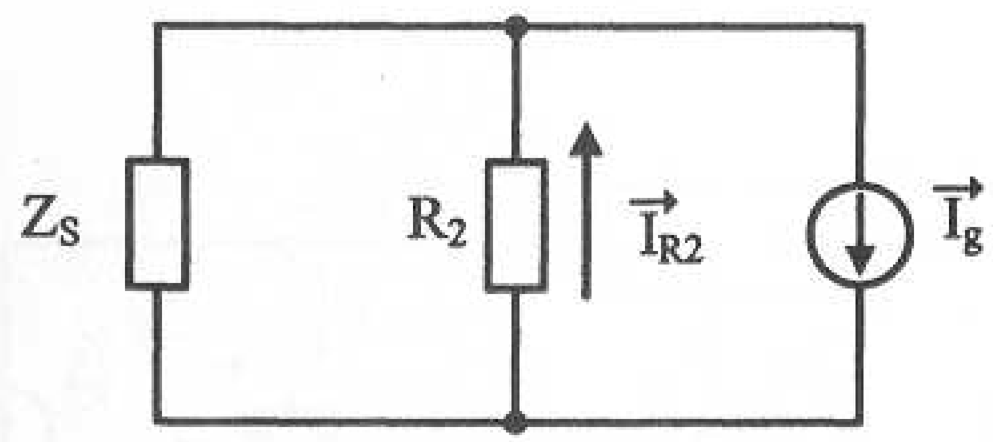





in cui $\vec{I}_g = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$. Il circuito può essere ridisegnato nel seguente modo:




ovvero:




dove $Z_S$ è la serie di $\frac{1}{j\omega_2 C}$ e $Z_P$, mentre quest'ultima è il parallelo tra $R_1$ e $j\omega_2 L$. Quindi sarà:

$$Z_S = \frac{1}{j\omega_2 C} + \frac{R_1 \cdot j\omega_2 L}{R_1 + j\omega_2 L}$$

$$Z_S = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot j \cdot 1 \cdot 1}{1 + j \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{2j} + \frac{j}{1+j}$$

$$Z_S = \frac{1 + j - 2}{2(-1+j)} = \frac{1}{2}.$$

La corrente $\vec{I}_{R2}$ è data dalla formula del partitore di corrente:

$$\vec{I}_{R2} = \vec{I}_g \cdot \frac{Z_S}{Z_S + R_2} = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{5}e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi si ottiene il secondo contributo alla potenza attiva su $R_2$:

$$P_a^{(II)} = \frac{1}{2}R_2\left|\vec{I}_{R2}\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{4}{25}\left|e^{j\frac{\pi}{4}}\right|^2 = \frac{4}{25}.$$

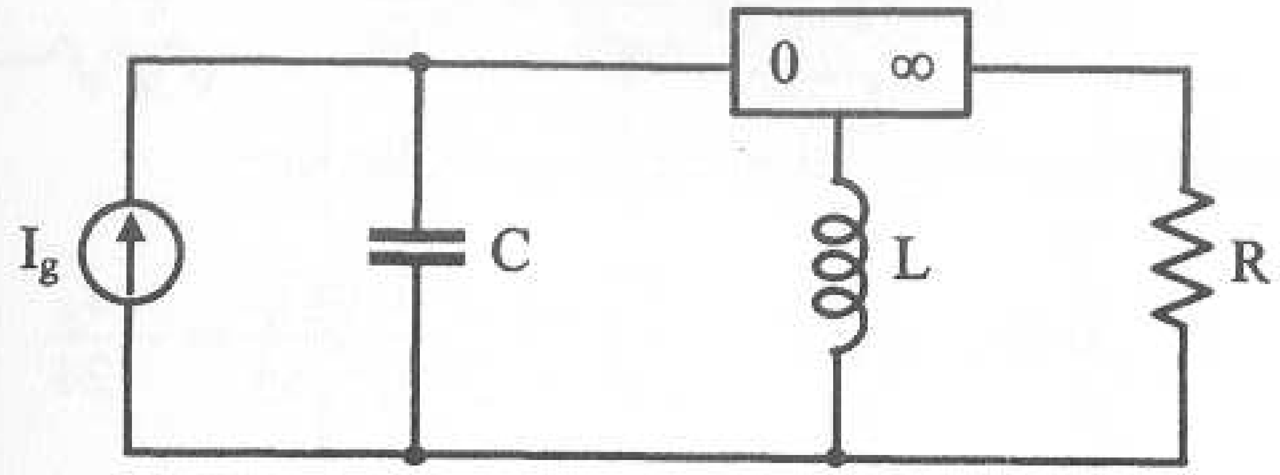
In definitiva, la potenza attiva $P_a$ su $R_2$ è data da:

$$P_a = P_a^{(I)} + P_a^{(II)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25} = 0,36\ [W]$$



## Esercizio 3.6

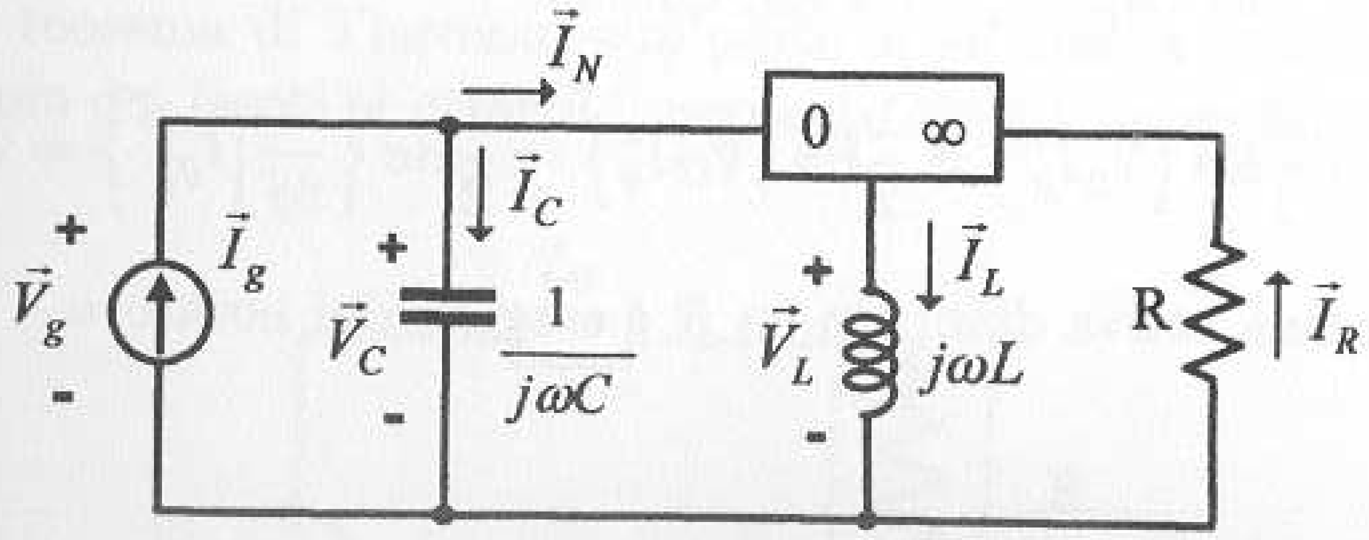
Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare la potenza attiva erogata dal generatore di corrente e quella dissipata sul resistore.




$$R = 9\,;\ C = 3\,;\ L = 2\,;\ I_g(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{7}\right)\,;\ [\Omega, F, H, A]\,.$$

### Svolgimento

Essendo il circuito in regime permanente, per la sua analisi si utilizza il metodo dei fasori:




dove per l'eccitazione $I_g(t)$ risulta:

$$I_g(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{7}\right) = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(2t - \frac{5\pi}{14}\right)$$

e quindi $\omega = 2$, $\vec{I}_g = 4e^{-j\frac{5\pi}{14}}$.

La presenza del nullatore è tale per cui

$$\vec{I}_N = 0 \Rightarrow \vec{I}_C = \vec{I}_g$$

e quindi

$$\vec{V}_C = \vec{I}_C \frac{1}{j\omega C} = \vec{I}_g \frac{1}{6j}\,.$$

Sempre per i vincoli imposti dal nullatore, risulta che

$$\vec{V}_L = \vec{V}_C \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_L = \frac{\vec{V}_L}{j\omega L} = \vec{I}_g \frac{1}{6j} \cdot \frac{1}{4j} = -\frac{\vec{I}_g}{24}\,.$$

Essendo $\vec{I}_R = \vec{I}_L$ (tale corrente scorre solo nel noratore), la potenza attiva $P_{aR}$ dissipata sul resistore è quindi pari a:

$$P_{aR} = \frac{1}{2} R |\vec{I}_R|^2 = \frac{1}{2} R |\vec{I}_L|^2 = \frac{1}{2} R \left| -\frac{\vec{I}_g}{24} \right|^2$$

ovvero

$$P_{aR} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4^2}{24^2} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad P_{aR} = 0,125 \ [W]$$

La potenza attiva $P_{aI}$ erogata dal generatore si ricava considerando che la tensione $\vec{V}_g$ ai suoi capi è pari a $\vec{V}_C$; quindi:

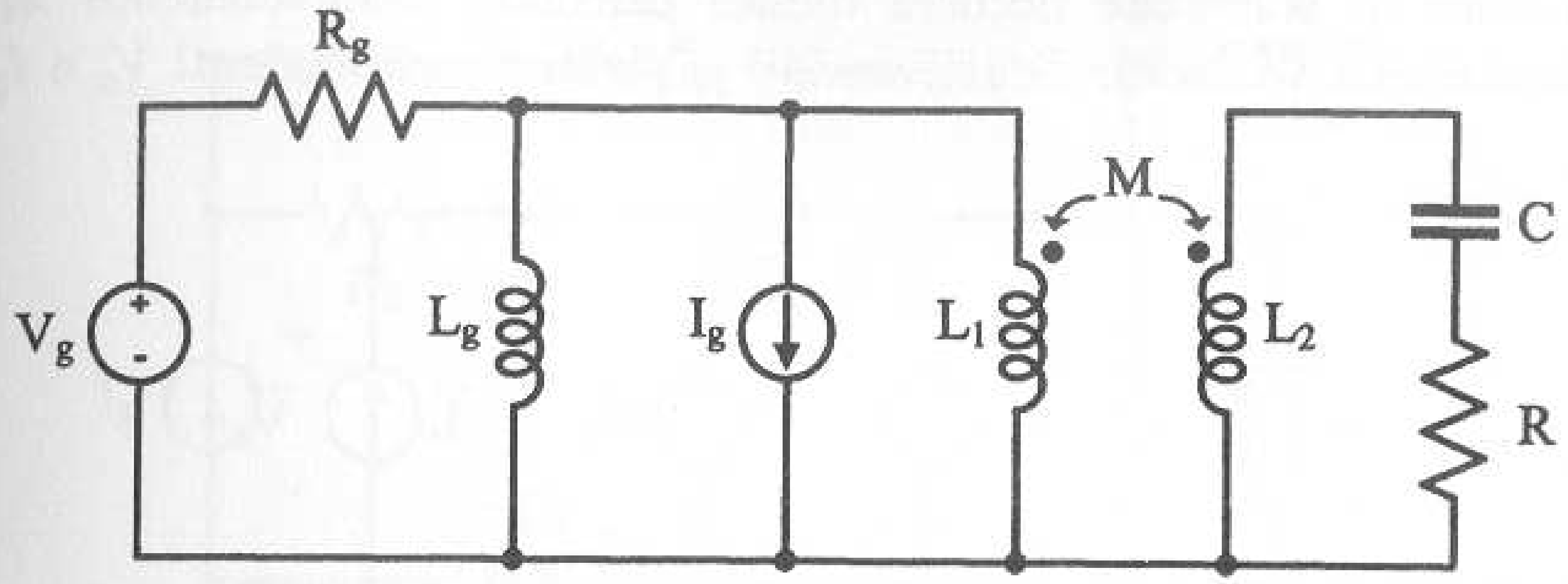
$$P_{aI} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \vec{V}_g \vec{I}_g^* \right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \vec{V}_C \vec{I}_g^* \right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{6j} \left| \vec{I}_g \right|^2 \right\} = 0 \ [W]$$

Nota: la potenza attiva dissipata su $R$ è erogata dal noratore.



## Esercizio 3.7

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, determinare i valor di $R$ e di $C$ affinché $R$ assorba la massima potenza attiva.

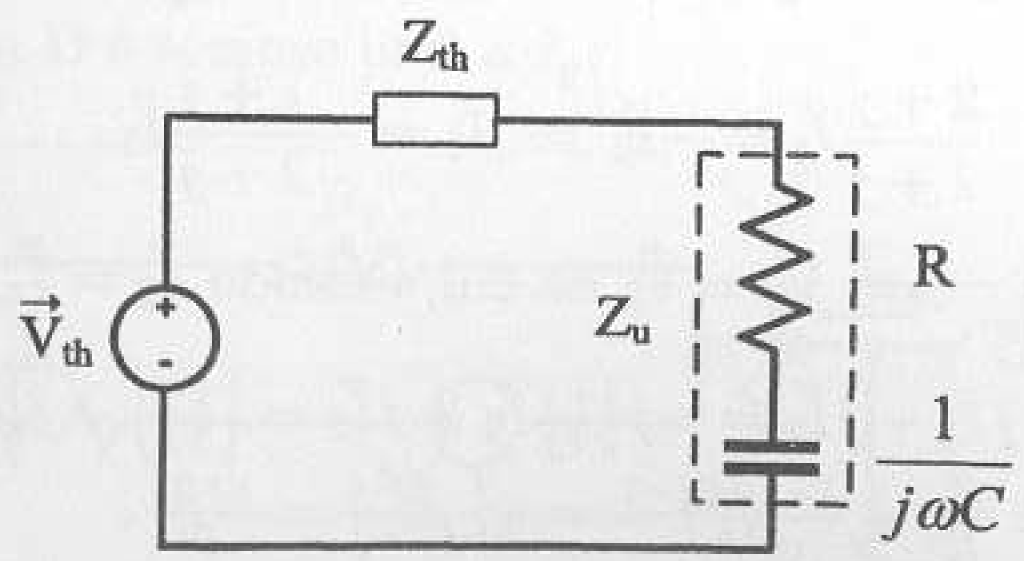



$$V_g(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \ [V] \ ; \ I_g(t) = \sqrt{5} \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \ [A] \ ; \ R_g = 1 \ [\Omega]$$

$$L_g = 1 \ [H] \ ; \ L_1 = 1 \ [H] \ ; \ L_2 = 1 \ [H] \ ; \ M = 1 \, [H]\,.$$

### Svolgimento

Applicando il teorema di Thevenin alla parte di circuito a sinistra della serie RC, nel dominio dei fasori si otterrà il seguente circuito semplificato:



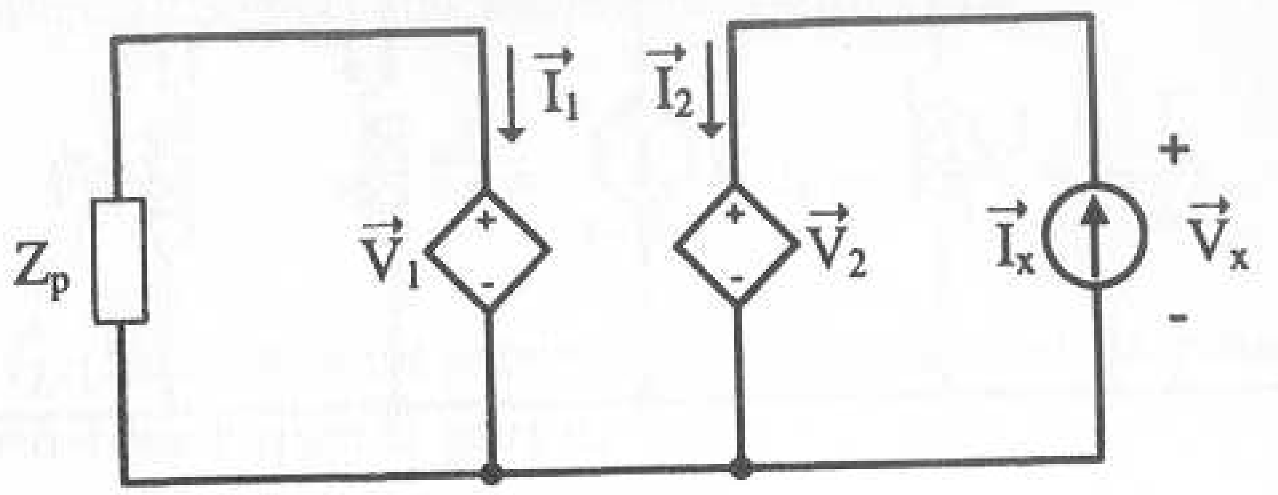

in cui la serie RC rappresenta un generico carico utilizzatore

$$Z_u = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}\,.$$

Utilizzando il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{Z_u\} = \mathrm{Re}\{Z_{th}\} \Rightarrow R = \mathrm{Re}\{Z_{th}\}\,; \\ \mathrm{Im}\{Z_u\} = -\mathrm{Im}\{Z_{th}\} \Rightarrow -\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{Im}\{Z_{th}\} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \mathrm{Im}\{Z_{th}\}}\,. \end{array}$$

Per ottenere la soluzione occorre quindi calcolare semplicemente $Z_{th}$ dal seguente circuito, ottenuto disattivando i generatori indipendenti $V_g$ e $I_g$:




in cui risulta:

$$\begin{array}{l} \omega = 1 \\ \vec{V}_1 = j\omega L_1 \vec{I}_1 + j\omega M \vec{I}_2 = j\vec{I}_1 + j\vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M \vec{I}_1 + j\omega L_2 \vec{I}_2 = j\vec{I}_1 + j\vec{I}_2 \\ Z_p = R_g \parallel j\omega L_g = \frac{j\omega L_g R_g}{j\omega L_g + R_g} = \frac{j}{1+j} \end{array}$$

Dalla maglia di $\vec{I}_1$ si ricava $\vec{V}_1 = -Z_p\vec{I}_1$, da cui:

$$j\vec{I}_1 + j\vec{I}_2 = -\frac{j}{1+j}\vec{I}_1 \Rightarrow \vec{I}_1\left(j + \frac{j}{1+j}\right) = -j\vec{I}_2$$

$$\frac{2+j}{1+j}\vec{I}_1 = -\vec{I}_2 \Rightarrow \vec{I}_1 = -\frac{1+j}{2+j}\vec{I}_2\,.$$

Dalla maglia di $\vec{I}_2$ si ricava $\vec{V}_x = \vec{V}_2$ da cui, essendo $\vec{I}_2 = \vec{I}_x$:

$$\begin{array}{l} \vec{V}_x = j\vec{I}_1 + j\vec{I}_2 = -j\frac{1+j}{2+j}\vec{I}_2 + j\vec{I}_2 = \left[\frac{1-j}{2+j} + j\right]\vec{I}_x\,; \\ Z_{th} = \frac{\vec{V}_x}{\vec{I}_x} = \frac{1-j+2j-1}{2+j} = \frac{j}{2+j}\frac{2-j}{2-j} = \frac{1+2j}{5}\,. \end{array}$$

Da cui la soluzione finale:

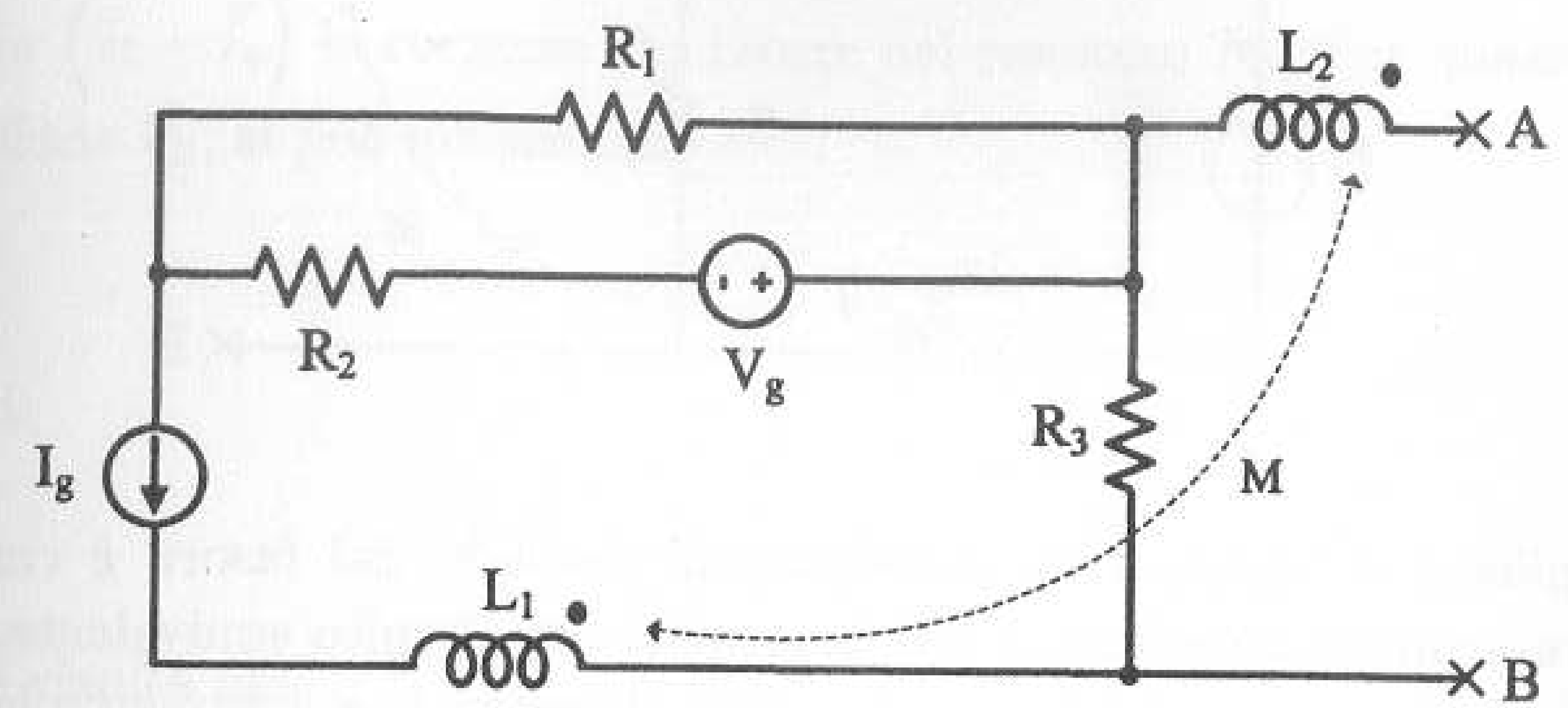
$$\begin{array}{l} R = \frac{1}{5} = 0,2\ [\Omega] \\ C = \frac{1}{1\cdot\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5\ [F] \end{array}$$





# Esercizio 3.8

Applicare il teorema di Thevenin alla coppia di morsetti A-B del circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale.

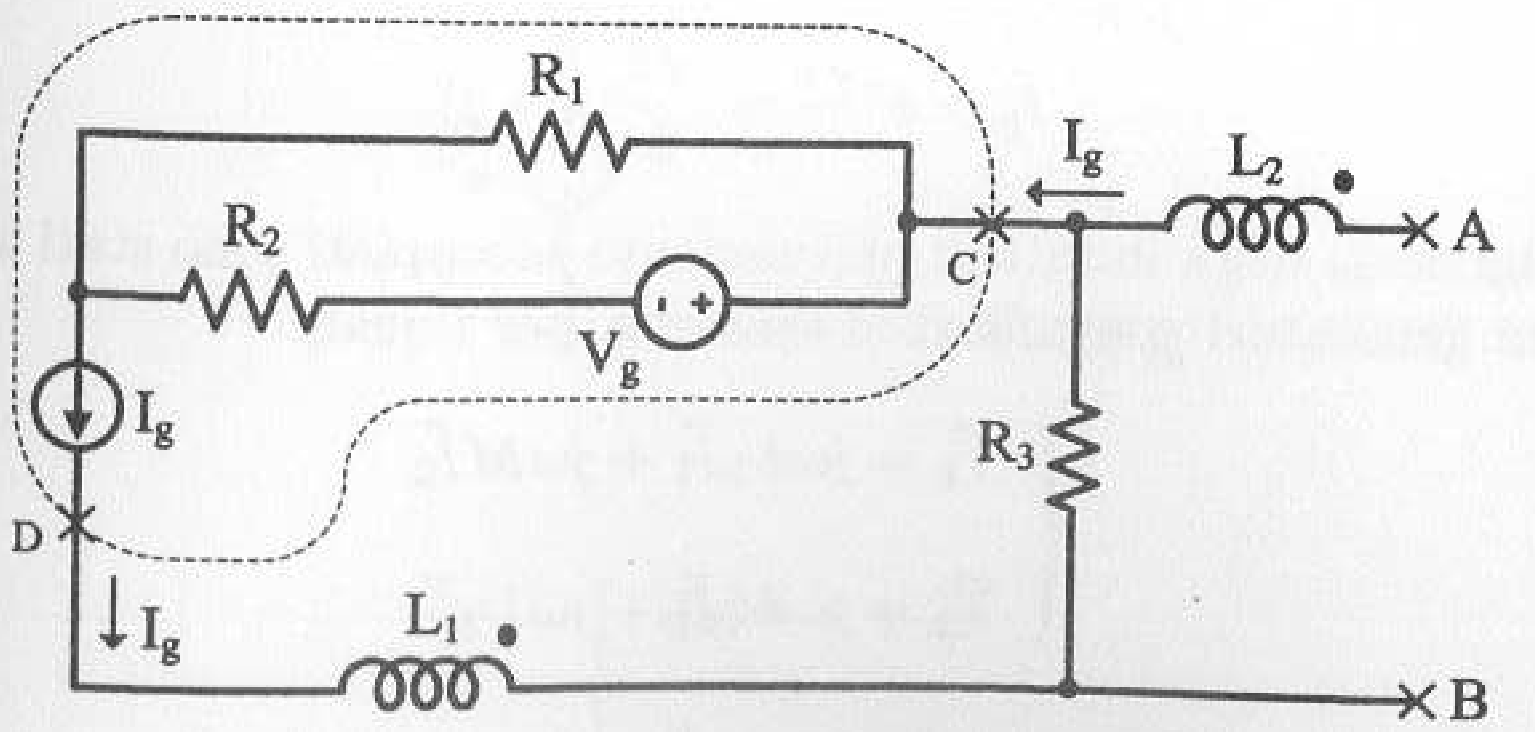



$$V_g(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\ ;\ I_g(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\ ;\ R_1 = 1;\ R_2 = 5;$$

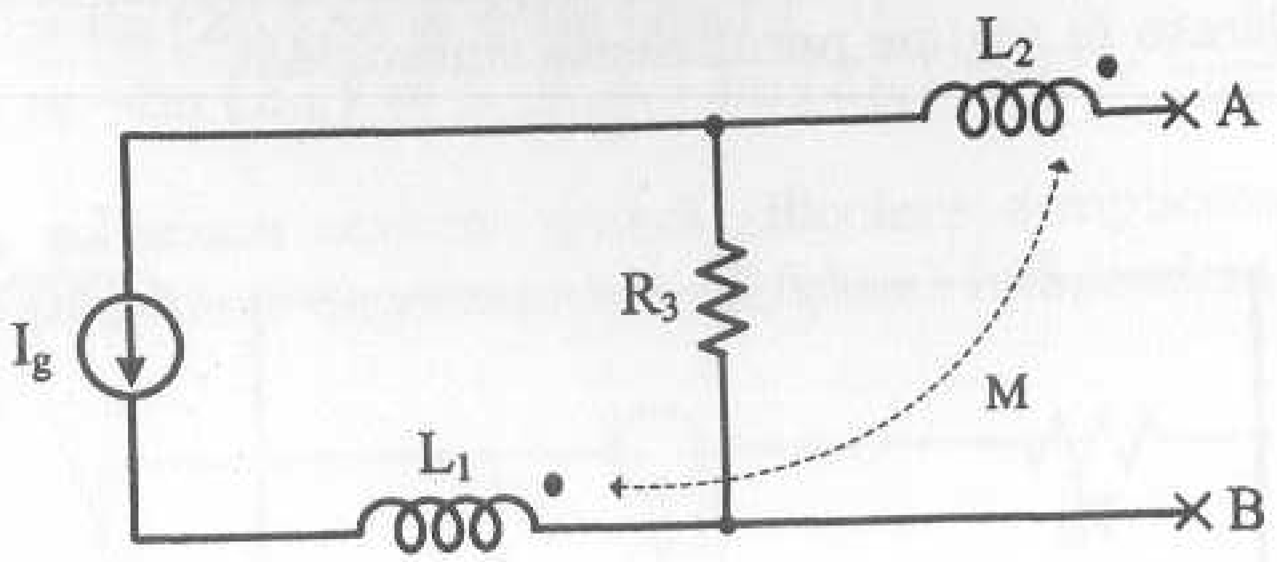
$$R_3 = 1\,;\ L_1 = 3\,;\ L_2 = 1\,;\ M = \frac{1}{2}\,;\ [V, A, \Omega, H]\,.$$

## Svolgimento

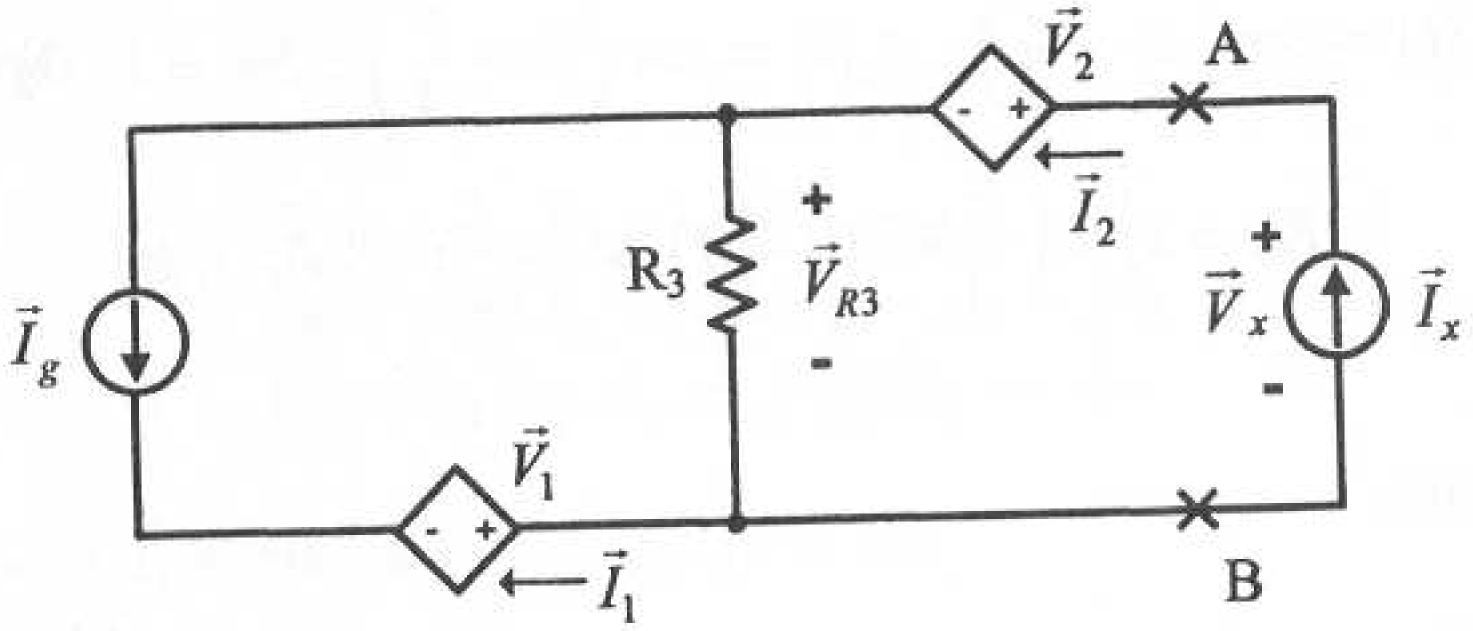
Analizzando il taglio evidenziato dalla curva tratteggiata, ovvero la parte di circuito accessibile dalla porta C-D, ci si rende conto che la corrente entrante in C ed uscente da D è sempre pari a $I_g$:



Applicando il teorema di sostituzione alla porta C-D, il circuito è ridisegnabile nel seguente modo:




Per applicare il teorema di Thevenin nel dominio dei fasori, è conveniente calcolare in modo congiunto i due parametri del circuito equivalente. Per fare ciò utilizziamo un generatore (di corrente) di prova $\vec{I}_x$ e calcoliamo la tensione ai suoi capi $\vec{V}_x$:




dove, essendo $I_g(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$, si ha $\omega = 2$ ed inoltre

$$\vec{I}_g = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)\,.$$

Gli avvolgimenti degli induttori mutuamente accoppiati sono stati sostituiti da opportuni generatori controllati di tensione, per i quali:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = j\omega L_1\vec{I}_1 + j\omega M\vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M\vec{I}_1 + j\omega L_2\vec{I}_2 \end{cases}$$





Si ha quindi:

$$\vec{V}_x = \vec{V}_{R_3} + \vec{V}_2\,,$$

in cui

$$\vec{V}_{R_3} = R_3(\vec{I}_2 - \vec{I}_g)\,,$$

essendo $\left(\vec{I}_2 - \vec{I}_g\right)$ la corrente che scorre nel resistore $R_3$. Per quanto riguarda la tensione $\vec{V}_2$, si può notare che

$$\vec{I}_1 = -\vec{I}_g \qquad \text{e} \qquad \vec{I}_2 = \vec{I}_x\,,$$

per cui:

$$\vec{V}_2 = -j\omega M\vec{I}_g + j\omega L_2\vec{I}_x\,.$$

Quindi risulta che

$$\vec{V}_x = R_3(\vec{I}_x - \vec{I}_g) - j\omega M\vec{I}_g + j\omega L_2\vec{I}_x$$

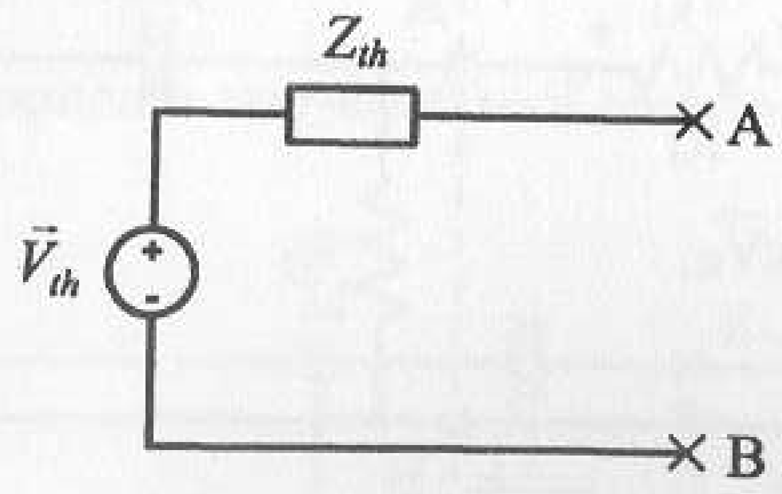
e, sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$\vec{V}_x = (1 + 2j)\vec{I}_x - (1 + j)\vec{I}_g$$

$$\vec{V}_x = (1 + 2j)\vec{I}_x - (1 + j)\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$$

$$\vec{V}_x = (1 + 2j)\vec{I}_x - \sqrt{2}\,.$$

Il circuito equivalente di Thevenin è quindi il seguente:

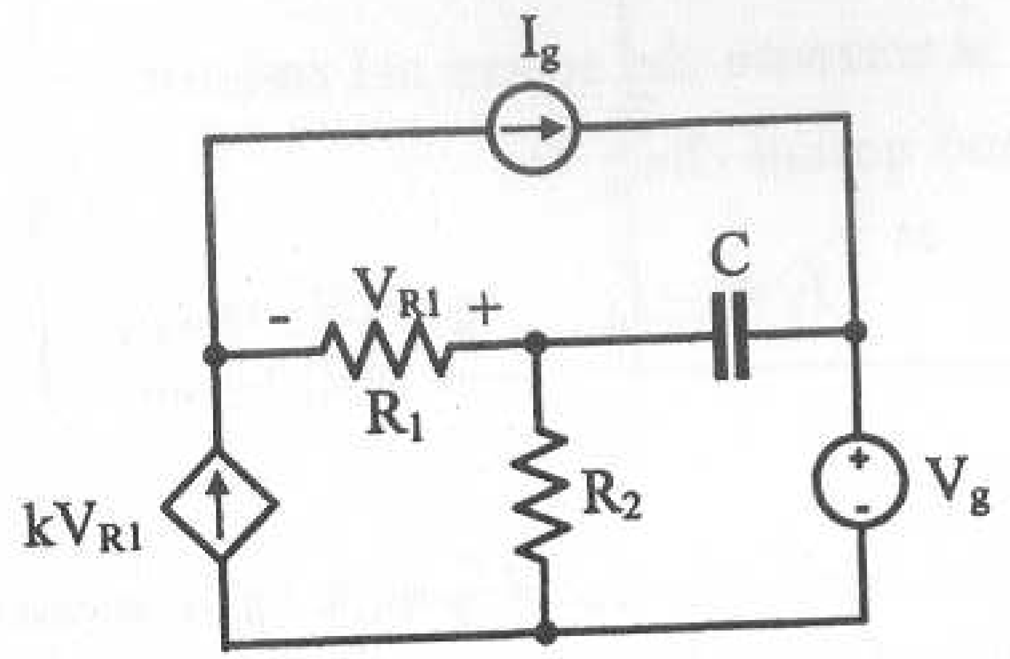



dove:

$$\begin{cases} Z_{th} = 1 + 2j \\ \vec{V}_{th} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

## Esercizio 3.9

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.

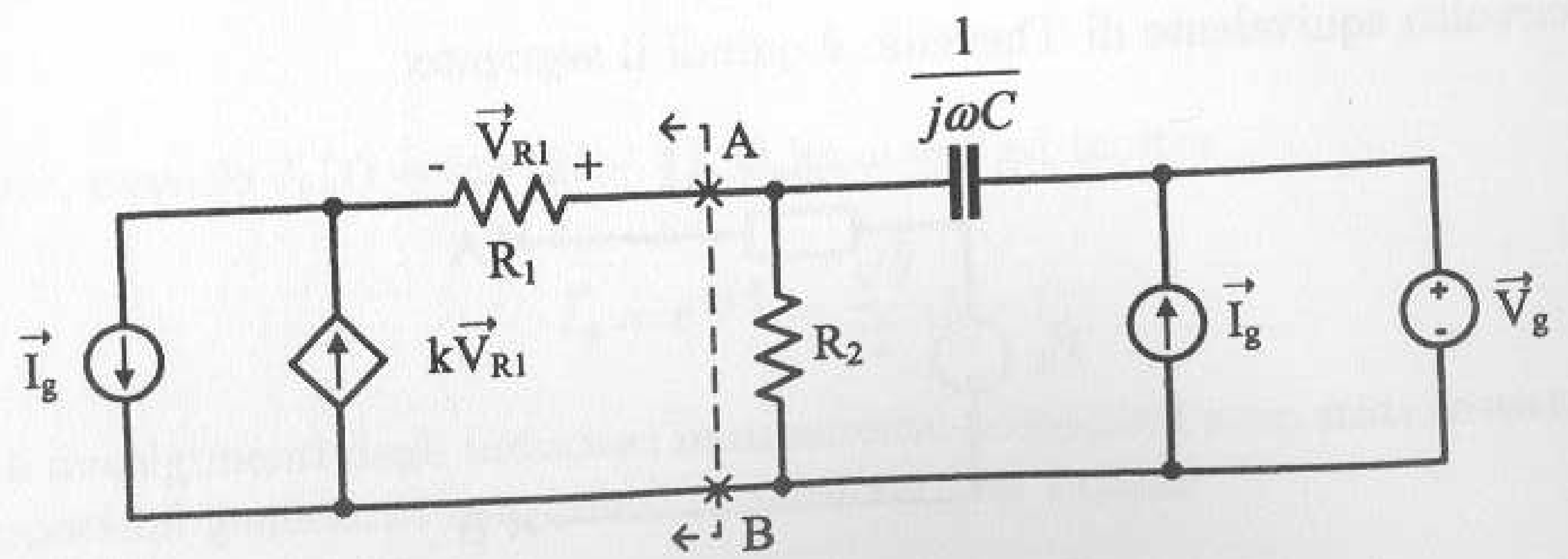



$$I_g(t) = \cos(3t)\,[A]\,;\ V_g(t) = \sin(3t)\,[V]\,;\ k = \frac{1}{2}\,[A/V]\,;$$

$$C = \frac{1}{3}\,[F]\,; R_1 = 2\,[\Omega]\,;\ R_2 = 1\,[\Omega].$$

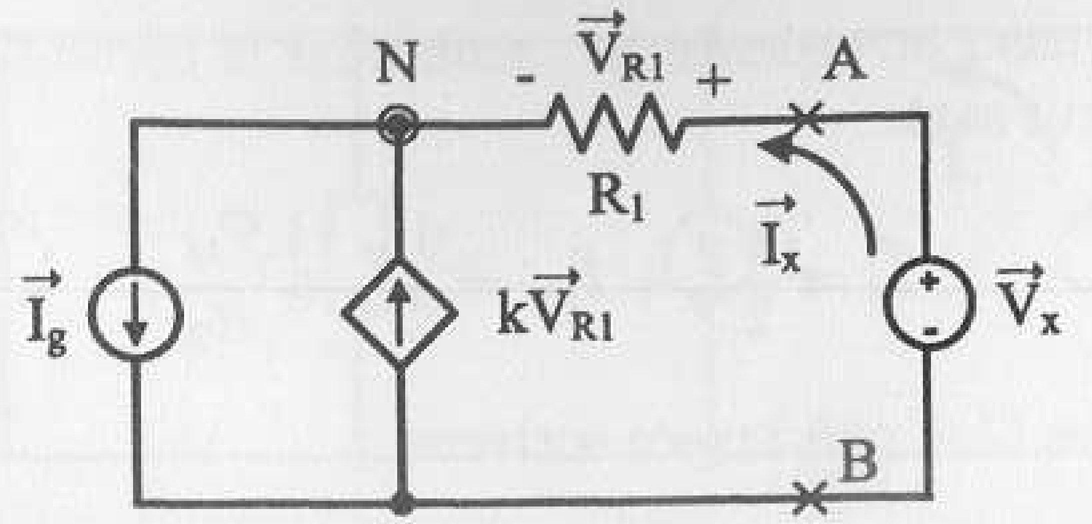
### Svolgimento

Si effettua l'analisi nel dominio dei fasori, ridisegnando il circuito dopo aver "sdoppiato" il generatore $I_g$:




Si può così applicare il teorema di Norton alla parte sinistra dei morsetti A-B:





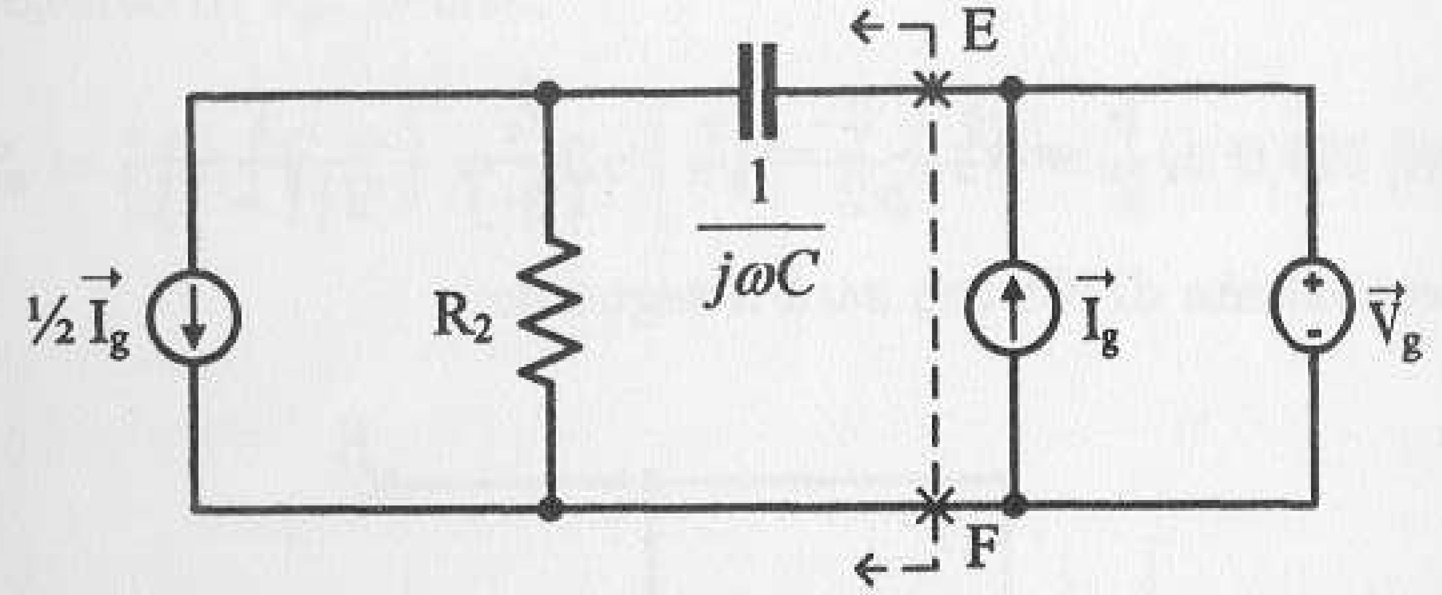

Effettuando il bilancio delle correnti entranti e uscenti dal nodo N, si ha per la corrente $\vec{I}_x$ :

$$\vec{I}_x = \vec{I}_g - k\vec{V}_{R_1}\,.$$

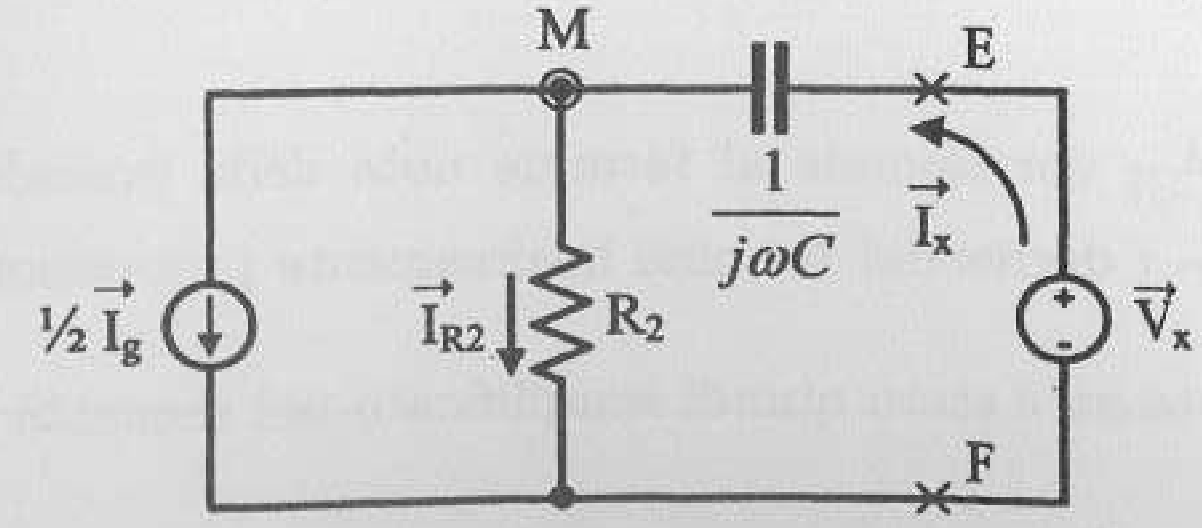
Ma essendo $\vec{V}_{R_1} = R_1\vec{I}_x$, si ottiene:

$$\vec{I}_x = \vec{I}_g - k\left(R_1\vec{I}_x\right) \Rightarrow (1 + kR_1)\,\vec{I}_x = \vec{I}_g \Rightarrow \vec{I}_x = \frac{1}{2}\vec{I}_g.$$

Per cui la parte di circuito analizzata si comporta come un generatore di corrente ideale. Si può così ridisegnare il circuito come segue:




A questo punto si può applicare nuovamente il teorema di Norton alla parte a sinistra dei morsetti E-F:



Analogamente al caso precedente, si analizzano le correnti entranti e uscenti dal nodo M, per cui sarà:

$$\vec{I}_x = \frac{1}{2}\vec{I}_g + \vec{I}_{R_2} = \frac{1}{2}\vec{I}_g + \frac{V_M}{R_2}\,.$$

Per il condensatore $C$ si può invece scrivere:

$$\vec{I}_x \frac{1}{j\omega C} = \vec{V}_x - \vec{V}_M \Rightarrow \vec{V}_M = \vec{V}_x - \vec{I}_x \frac{1}{j\omega C}\,.$$

Dalle ultime due equazioni si ricava quindi la seguente espressione per $\vec{I}_x$:

$$\vec{I}_x = \frac{1}{2}\vec{I}_g + \frac{1}{R_2}\left(\vec{V}_x - \vec{I}_x \frac{1}{j\omega C}\right)\,.$$

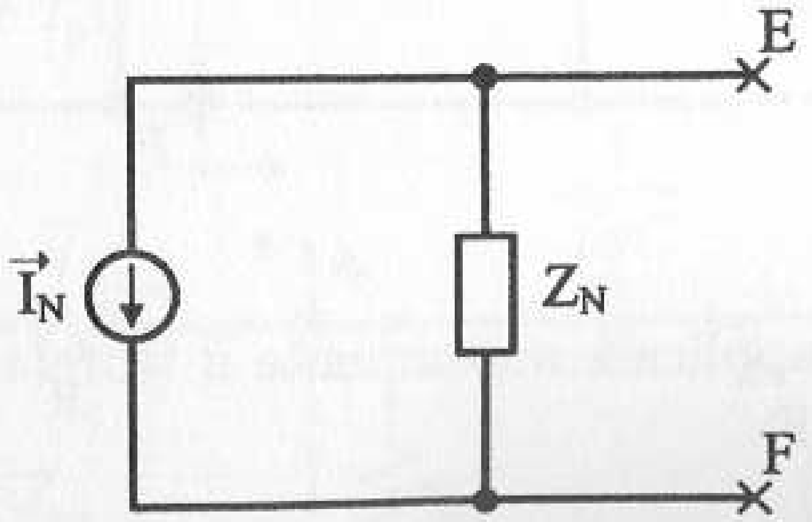
Poiché risulta $\omega = 3$ e $\vec{I}_g = 1$, si ha

$$\vec{I}_x = \frac{1}{2}\vec{I}_g + \vec{V}_x - \vec{I}_x \frac{1}{j\cdot \cancel{3}\cdot \frac{1}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2} + \vec{V}_x + j\vec{I}_x$$

e quindi

$$(1-j)\,\vec{I}_x = \vec{V}_x + \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{I}_x = \frac{\vec{V}_x}{1-j} + \frac{1}{2\,(1-j)}\,.$$

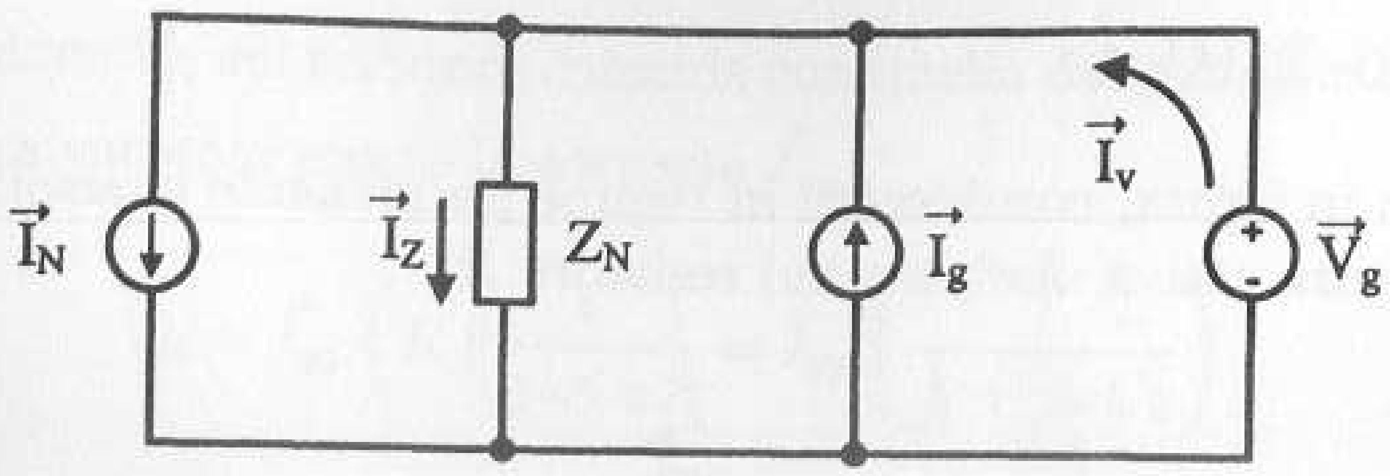
Il circuito equivalente di Norton sarà il seguente:




in cui $\vec{I}_N = \frac{1}{2(1-j)}$ corrisponde al termine noto della precedente equazione, mentre $Z_N = 1 - j$ deriva dal termine inversamente proporzionale a $\vec{V}_x$.

Il circuito di partenza è stato quindi semplificato nel seguente modo:






Dall'unica equazione di nodo del circuito si ha

$$\vec{I}_v = \vec{I}_N - \vec{I}_g + \vec{I}_Z = \frac{1}{2\,(1-j)} - 1 + \frac{1}{1-j}\vec{V}_g\,,$$

con $\vec{V}_g = -j$ poiché $V_g(t) = \sin(3t) = \cos(3t - \frac{\pi}{2})$. Quindi sarà:

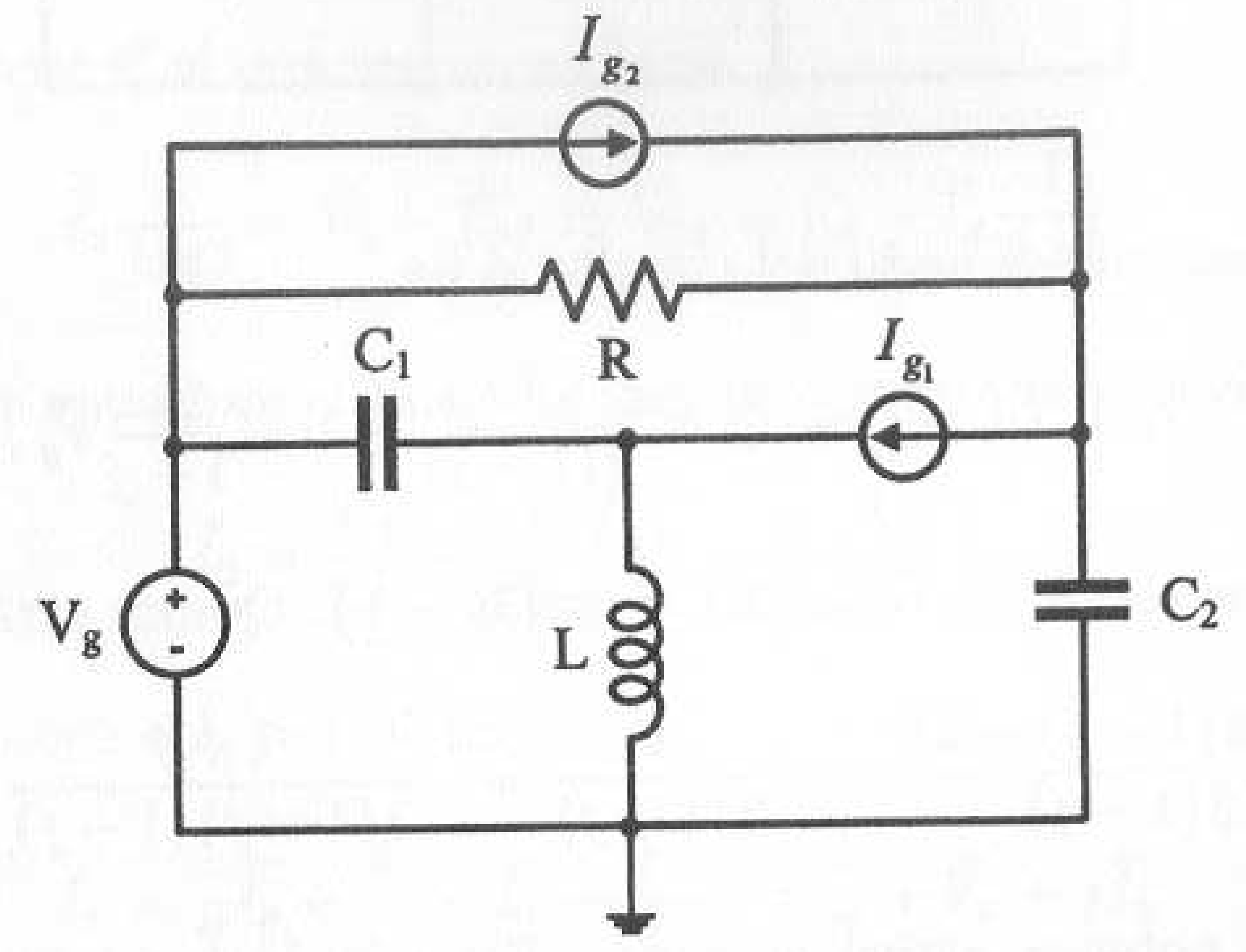
$$\vec{I}_v = \frac{1 - 2\,(1-j) - 2j}{2\,(1-j)} = -\frac{1}{2\,(1-j)} = -\frac{1+j}{2\,(1-j)\,(1+j)} = -\frac{1+j}{4}\,.$$

Si richiede la potenza attiva erogata. Essendo la corrente $\vec{I}_v$ uscente dal morsetto positivo di $\vec{V}_g$, risulta:

$$P_a = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{V}_g \vec{I}_v^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-j\cdot\frac{-1+j}{4}\right\} = \frac{1}{8} = 0,125\ [W]$$

# Esercizio 3.10

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, determinare la potenza attiva dissipata sul resistore $R$.



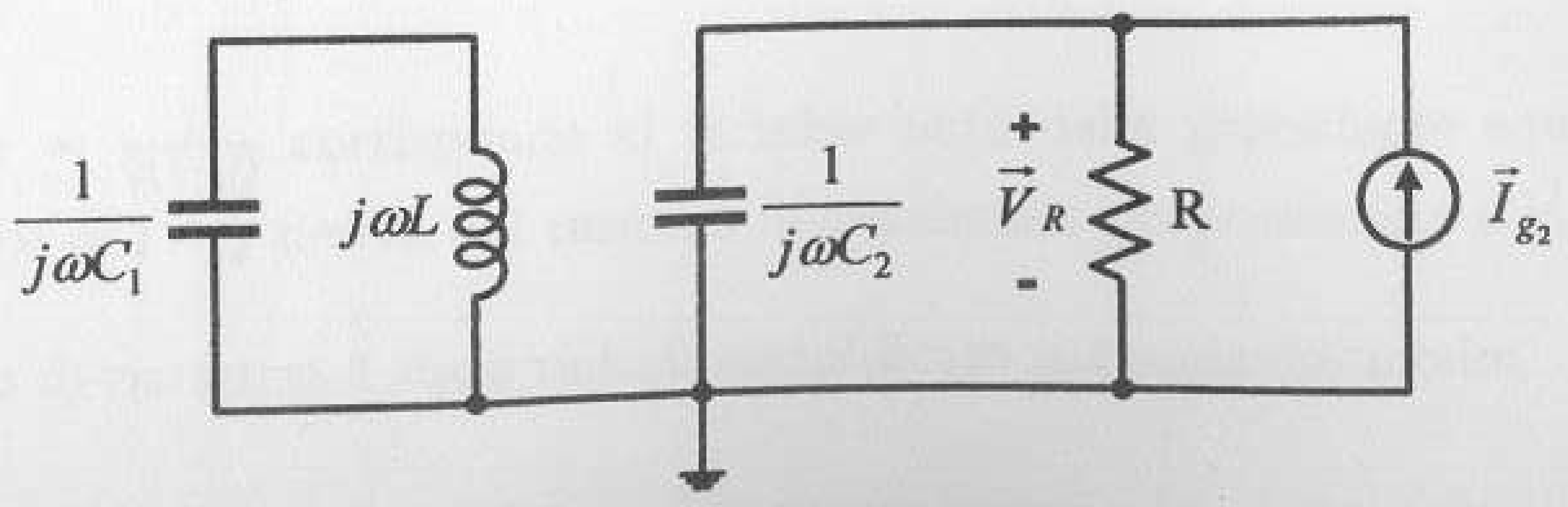

$$V_g(t) = 2\cos(3t)\,;\; I_{g_1}(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\,;\; I_{g_2}(t) = 3\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)\,;$$

$$R = 3\,;\; L = 1\,;\; C_1 = 2\,;\; C_2 = 1\,;\; [V, A, \Omega, H, F]\,.$$

## Svolgimento

Poiché i generatori sono a pulsazione differente, ciascuno deve essere considerato separatamente dagli altri.

$\left.\omega = 1\right)$ Si disattivano $V_g$ e $I_{g_1}$. Ridisegnando il circuito nel dominio dei fasori:






in cui la tensione $\vec{V}_R$ sul resistore coincide con quella del parallelo tra $R$ e $\frac{1}{j\omega C_2}$, dove complessivamente scorre la corrente $\vec{I}_{g_2}$:

$$\vec{V}_R = \vec{I}_{g_2}\left(R \parallel \frac{1}{j\omega C_2}\right) = \vec{I}_{g_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C_2}\right).$$

Poiché si può scrivere

$$I_{g_2}(t) = 3\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) = 3\cos\left(t + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

il fasore $\vec{I}_{g_2}$ sarà:

$$\vec{I}_{g_2} = 3e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\,.$$

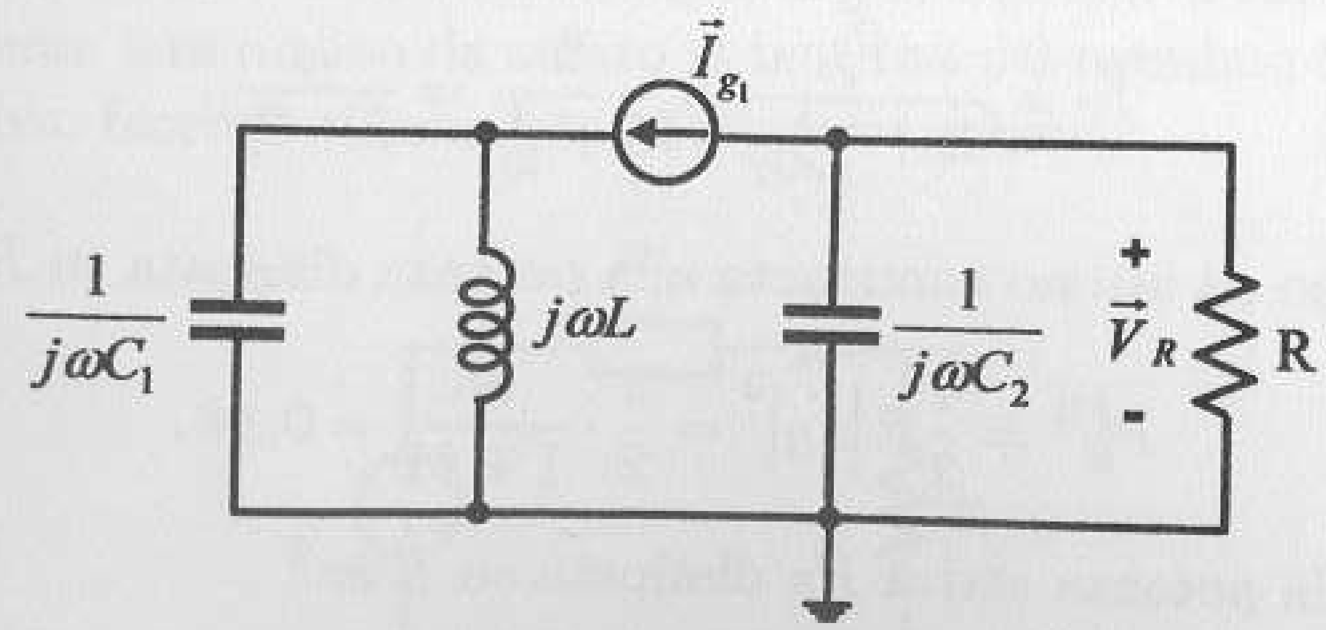
Dunque risulta

$$\vec{V}_R = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\frac{1}{\frac{1}{3} + j} = 9\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1+j)}{1+3j}$$

ed il primo contributo alla potenza assorbita da $R$ è quindi:

$$P_R^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{V}_R|^2}{R} = \frac{1}{6}\cdot 81\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{(1+1)}{(1+9)} = 1,35\,.$$

$\left.\omega = 2\right)$ Si disattivano $V_g$ e $I_{g_2}$. Il circuito ridisegnato nel dominio dei fasori è il seguente:




In modo analogo al caso precedente risulta:

$$\vec{V}_R = -\vec{I}_{g_1}\left(R \parallel \frac{1}{j\omega C_2}\right),$$

dove

$$\vec{I}_{g_1} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)\,.$$

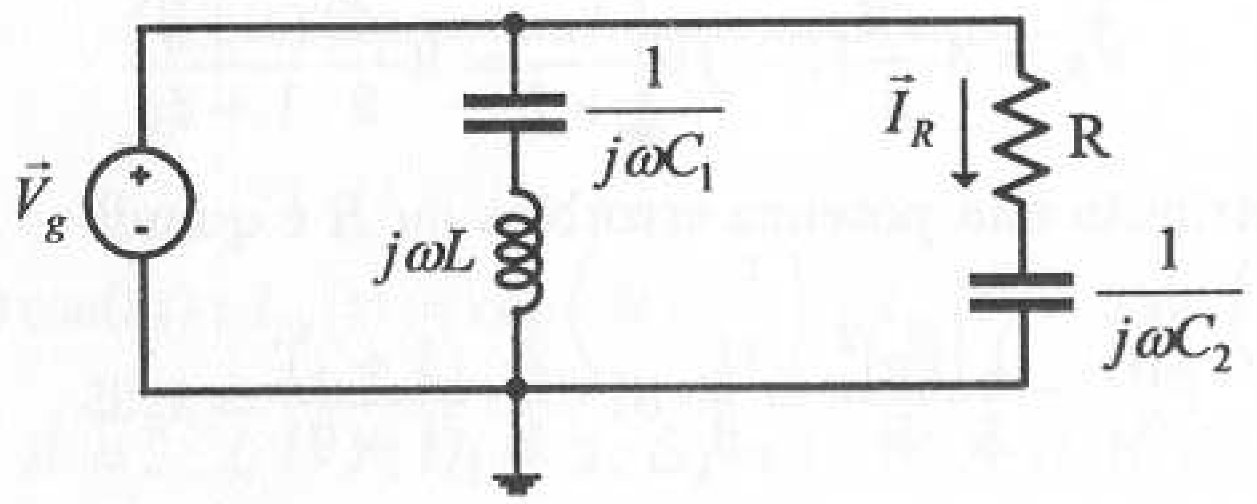
Sarà quindi

$$\vec{V}_R = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)\frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C_2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{(1-j)}{1+6j}$$

ed il contributo alla potenza è pari a:

$$P_R^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{V}_R|^2}{R} = \frac{1}{6}\cdot 9\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{(1+1)}{(1+36)} = 0,04\,.$$

$\omega = 3\big)$ Si disattivano $I_{g_1}$ e $I_{g_2}$. Ridisegnando il circuito nel dominio dei fasori si ottiene:




in cui $\vec{V}_g = 2$ ed $\vec{I}_R$ si ottiene considerando che la tensione sulla serie di $R$ e $\frac{1}{j\omega C_2}$ è pari a $\vec{V}_g$:

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{V}_g}{R+\frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{2}{3+\frac{1}{3j}} = \frac{6j}{1+9j}\,.$$

Dunque il terzo ed ultimo contributo alla potenza dissipata su $R$ è pari a

$$P_R^{(3)} = \frac{1}{2}R\left|\vec{I}_R\right|^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{36}{1+81} = 0,66\,.$$

In definitiva, la potenza attiva $P_R$ dissipata su $R$ è:

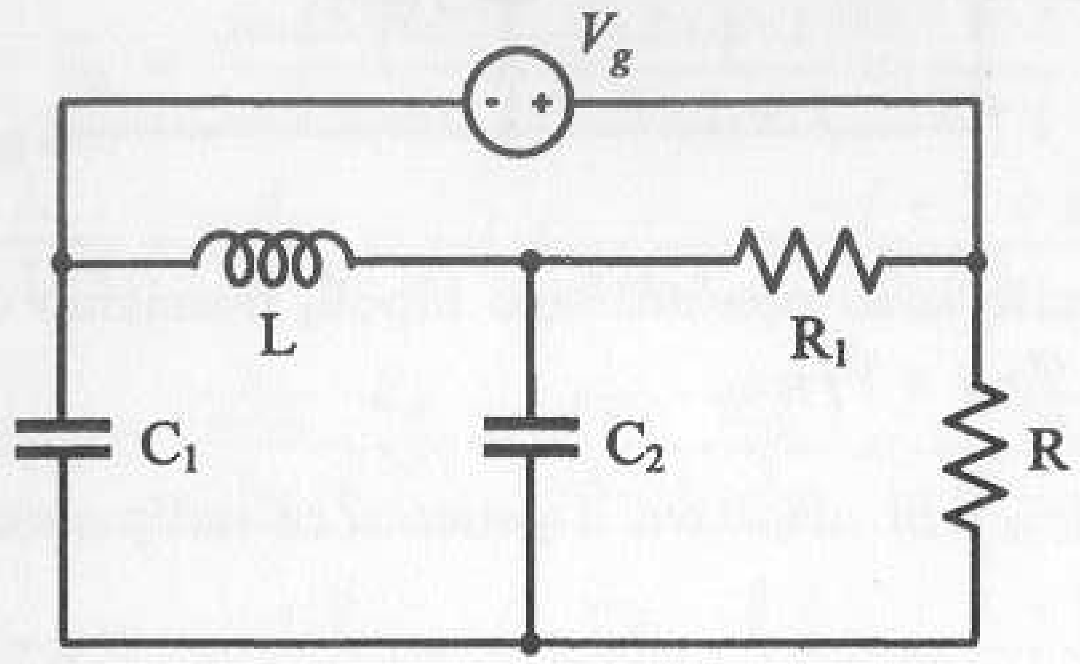
$$P_R = P_R^{(1)} + P_R^{(2)} + P_R^{(3)} = 1,35 + 0,04 + 0,66 = 2,05\ [W]$$





## Esercizio 3.11

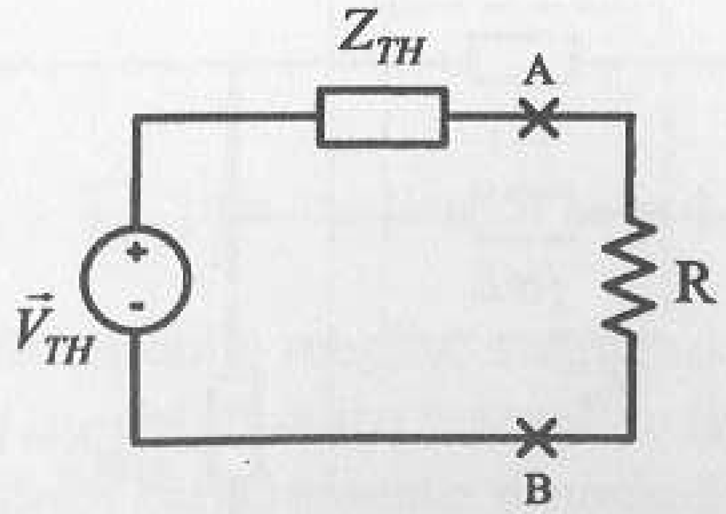
Calcolare per il circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, la potenza attiva assorbita dal resistore $R$. Valutare, fornendo giustificazione, se il valore ricavato corrisponde alla massima potenza attiva che tale resistore può assorbire al variare della sua resistenza $R$.



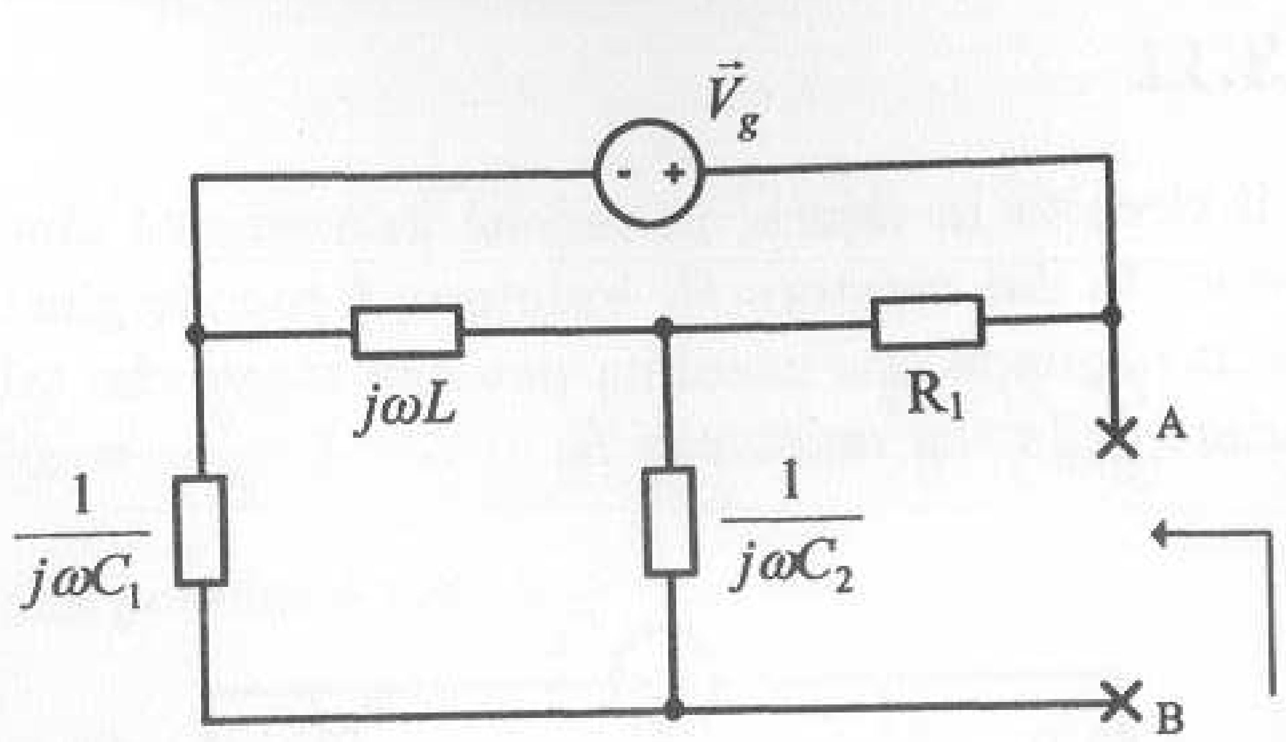

$$V_g(t) = \cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\ [V];\ R_1 = R = 1\,[\Omega];\ C_1 = C_2 = 1\,[F];\ L = 1\,[H].$$

### Svolgimento

Per il calcolo della potenza attiva assorbita dal resistore $R$ sarebbe sufficiente calcolare la tensione ai suoi capi o la corrente che scorre in esso. Tuttavia, poiché è richiesta la valutazione della massima potenza attiva che $R$ può assorbire, è conveniente fare ricorso da subito al teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, facendo riferimento al seguente schema:

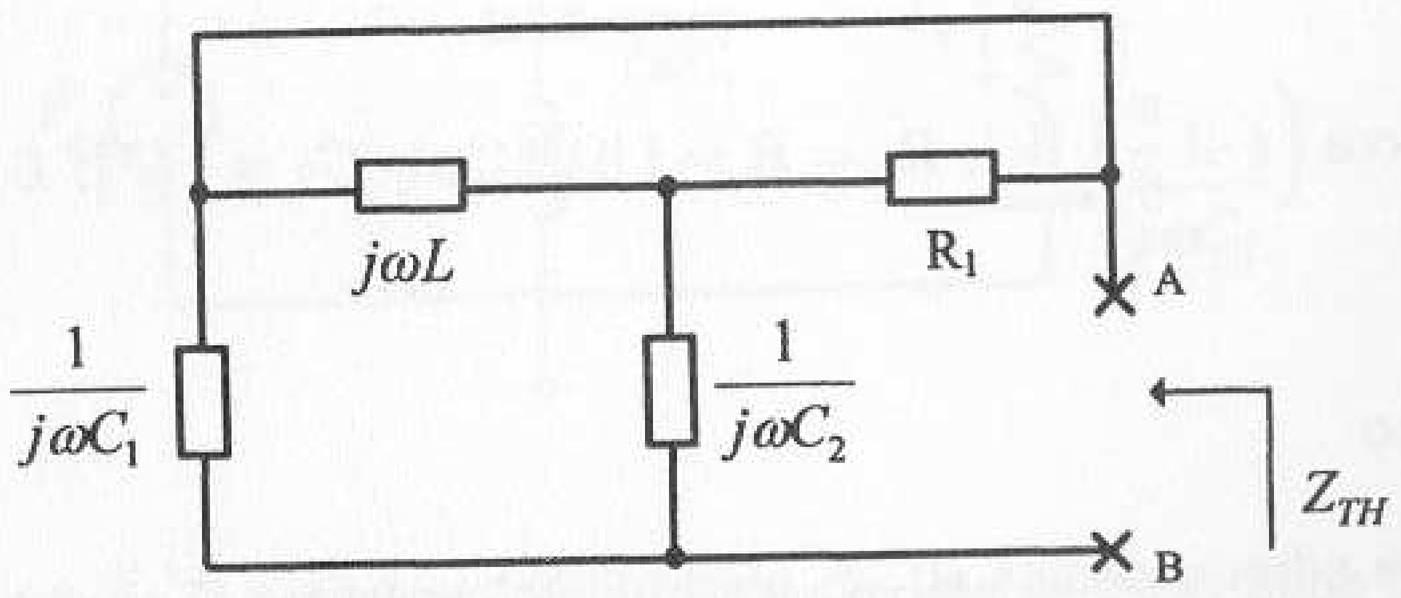



in cui $Z_{TH}$ e $\vec{V}_{TH}$ si ricavano dall'applicazione del teorema di Thevenin nel dominio dei fasori, con $\omega = 1$, al circuito che sta ai capi di $R$, cioè:

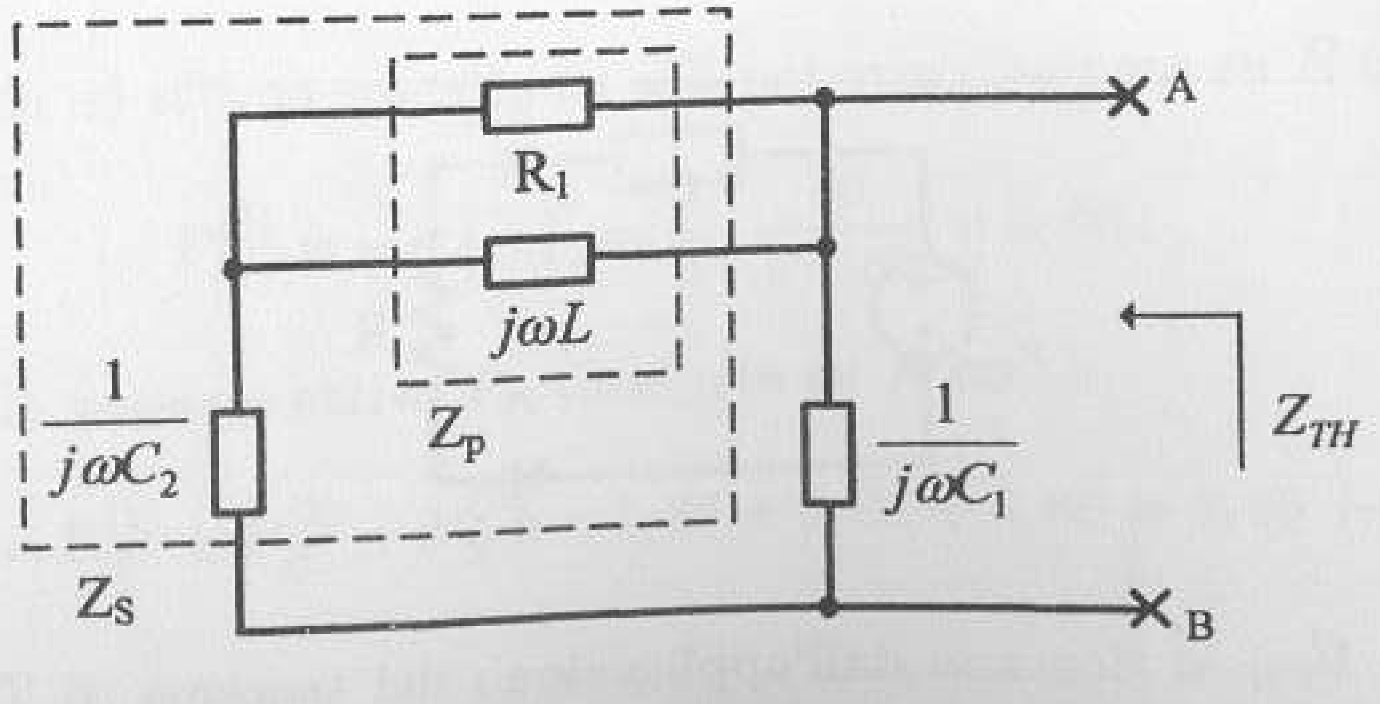



Poiché in tale circuito sono presenti solo bipoli, possiamo calcolare separatamente i parametri $Z_{TH}$ e $\vec{V}_{TH}$.

- Calcolo di $Z_{TH}$) Si disattiva il generatore indipendente $V_g$; il circuito diventa:




Avendo disattivato un generatore di tensione è stato introdotto un cortocircuito e conviene quindi ridisegnare il circuito:






L'impedenza $Z_{TH}$ risulta il parallelo tra $\frac{1}{j\omega C_1}$ ed un'impedenza $Z_s$, costituita dalla serie tra $\frac{1}{j\omega C_2}$ e $Z_p$. Quest'ultima impedenza è il parallelo tra $R_1$ e $j\omega L$. Quindi:

$$Z_{TH} = \frac{1}{j\omega C_1} \parallel Z_s, \quad \text{con} \quad Z_s = \frac{1}{j\omega C_2} + Z_p \quad \text{e} \quad Z_p = R_1 \parallel j\omega L,$$

ovvero:

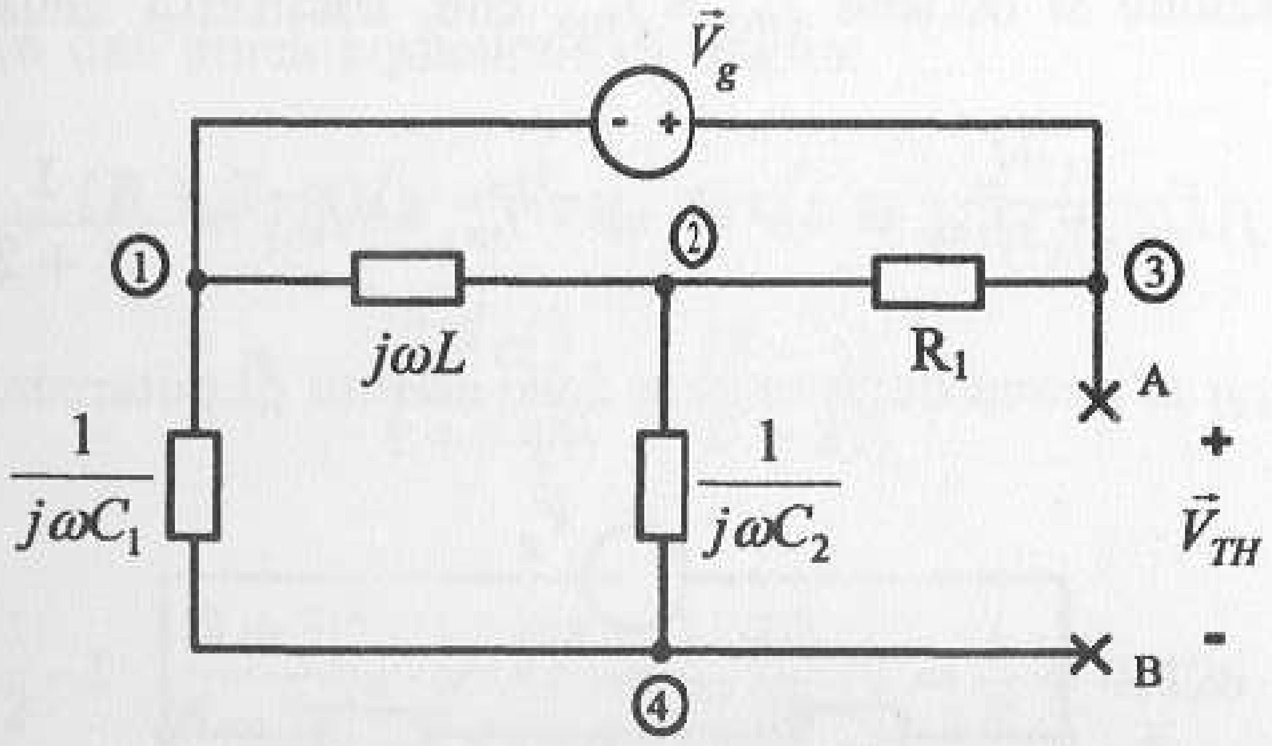
$$Z_p = \frac{j\omega L \cdot R_1}{j\omega L + R_1} = \frac{j \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{j \cdot 1 \cdot 1 + 1} = \frac{j}{1+j};$$

$$Z_s = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} + \frac{j}{1+j} = -j + \frac{j}{1+j} = \frac{-j+1+j}{1+j} = \frac{1}{1+j};$$

$$Z_{TH} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot Z_s}{\frac{1}{j\omega C_1} + Z_s} = \frac{\frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1+j}}{\frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} + \frac{1}{1+j}} = \frac{-\frac{j}{1+j}}{-j + \frac{1}{1+j}}$$

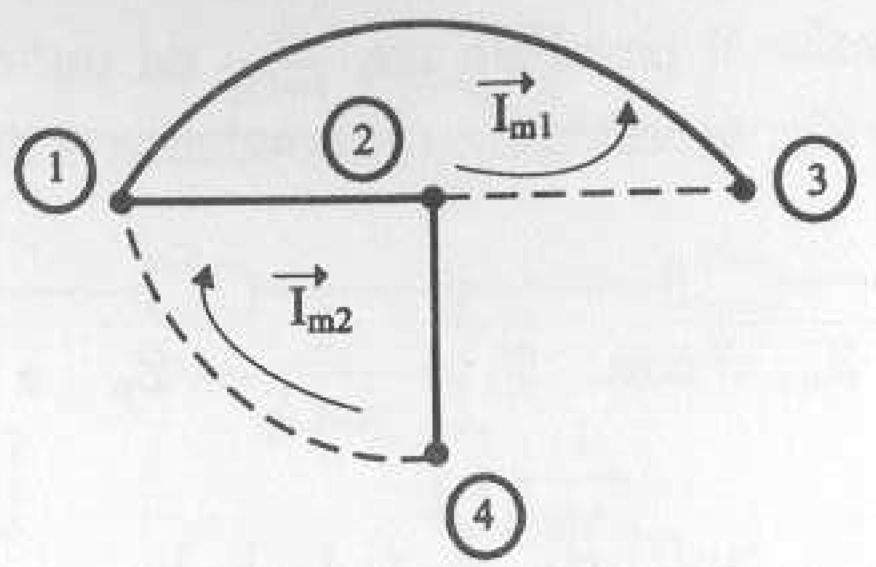
$$Z_{TH} = \frac{-j}{-j+1+1} = \frac{-j}{2-j} \cdot \frac{2+j}{2+j} = \frac{1-2j}{5}.$$

- Calcolo di $\vec{V}_{TH}$) Si deve calcolare la tensione a vuoto nel seguente circuito:




dove $V_g(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$, per cui risulta $\omega = 1$ e $\vec{V}_g = e^{j\frac{\pi}{6}}$.

Conviene utilizzare il metodo delle maglie, scegliendo l'albero di seguito riportato. Relativamente al grafo del circuito è peraltro interessante notare che non esiste alcun ramo che collega direttamente il nodo 3 con il nodo 4, ai capi dei quali bisogna calcolare $\vec{V}_{TH}$:




Con tale scelta il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{bmatrix} (R_1+j\omega L) & j\omega L \\ j\omega L & \left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m_1} \\ \vec{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{V}_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

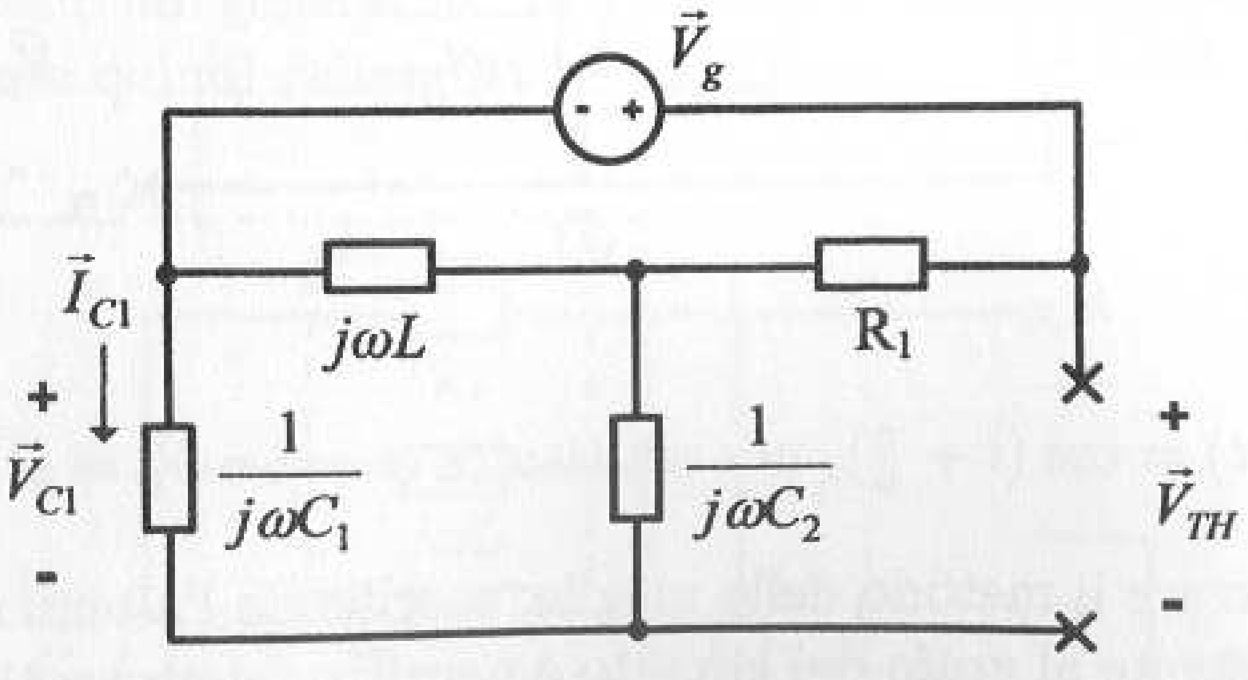
e, sostituendo i valori numerici dei componenti,

$$\begin{cases} (1+j)\vec{I}_{m_1}+j\vec{I}_{m_2}=-e^{j\frac{\pi}{6}} \\ j\vec{I}_{m_1}+(j-j-j)\vec{I}_{m_2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+j)\vec{I}_{m_1}+j\vec{I}_{m_2}=-e^{j\frac{\pi}{6}} \\ j\vec{I}_{m_1}-j\vec{I}_{m_2}=0 \end{cases}$$

Dalla $2^a$ equazione si ottiene $\vec{I}_{m_1}=\vec{I}_{m_2}$ che, sostituita nella $1^a$ equazione, fornisce:

$$(1+j)\vec{I}_{m_1}+j\vec{I}_{m_1}=-e^{j\frac{\pi}{6}} \quad\Rightarrow\quad \vec{I}_{m_1}=\vec{I}_{m_2}=-\frac{1}{1+2j}e^{j\frac{\pi}{6}}\,.$$

La tensione $\vec{V}_{TH}$ si ricava dalla somma delle cadute di potenziale su $\vec{V}_g$ e $\frac{1}{j\omega C_1}$:




$$\vec{V}_{TH}=\vec{V}_g+\vec{V}_{C_1}=\vec{V}_g+\frac{1}{j\omega C_1}\vec{I}_{C_1}\,,$$

in cui, dall'albero scelto, risulta evidentemente $\vec{I}_{C_1}=-\vec{I}_{m_2}$. Quindi:

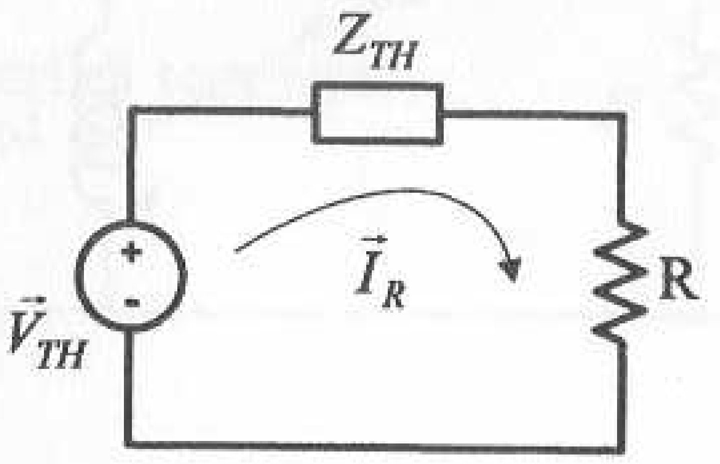




$$\vec{V}_{TH}=e^{j\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{j}\left(\frac{1}{1+2j}e^{j\frac{\pi}{6}}\right)=e^{j\frac{\pi}{6}}\left(1-\frac{j}{1+2j}\right)=\frac{1+j}{1+2j}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\vec{V}_{TH}=e^{j\frac{\pi}{6}}\frac{(1+j)}{(1+2j)}\cdot\frac{(1-2j)}{(1-2j)}=e^{j\frac{\pi}{6}}\frac{(1-2j+j+2)}{5}=\frac{3-j}{5}e^{j\frac{\pi}{6}}\,.$$

A questo punto la potenza attiva $P_a$ assorbita dal resistore $R$ si ricava dal circuito equivalente i cui valori dei componenti sono stati appena trovati:




per cui è

$$P_a=\frac{1}{2}R|\vec{I}_R|^2\,,$$

dove $\vec{I}_R$ si ricava dall'unica equazione di maglia:

$$(R+Z_{TH})\vec{I}_R=\vec{V}_{TH} \quad\Rightarrow\quad \vec{I}_R=\frac{\vec{V}_{TH}}{R+Z_{TH}}$$

$$\vec{I}_R=\frac{\frac{3-j}{5}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1+\frac{1-2j}{5}}=\frac{(3-j)}{(6-2j)}e^{j\frac{\pi}{6}}\,.$$

Dunque:

$$P_a=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{|3-j|^2}{|6-2j|^2}\cdot\left|e^{j\frac{\pi}{6}}\right|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{40}\cdot 1=\frac{1}{8}=0,125 \quad [W]$$

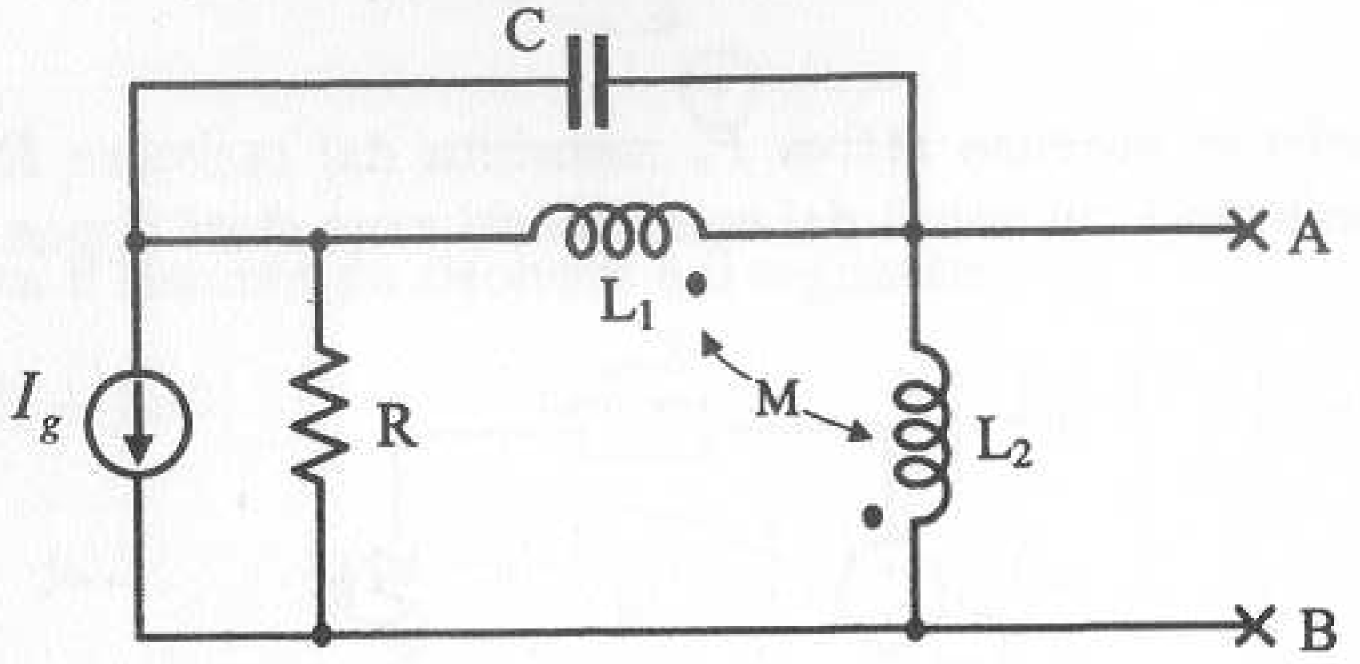
Il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva indica che, quando il carico è vincolato ad essere puramente resistivo, come è il caso in esame per il resistore $R$, la massima potenza attiva è assorbita quando $R=|Z_{TH}|$. Nel nostro caso dovrebbe essere:

$$R=\frac{|1-2j|}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}=0,447 \quad [\Omega]$$

Tale valore risulta evidentemente differente da quello assegnato ($R=1\ \Omega$), quindi la potenza attiva effettivamente assorbita (pari a $0,125\ W$) non è la massima possibile.

## Esercizio 3.12

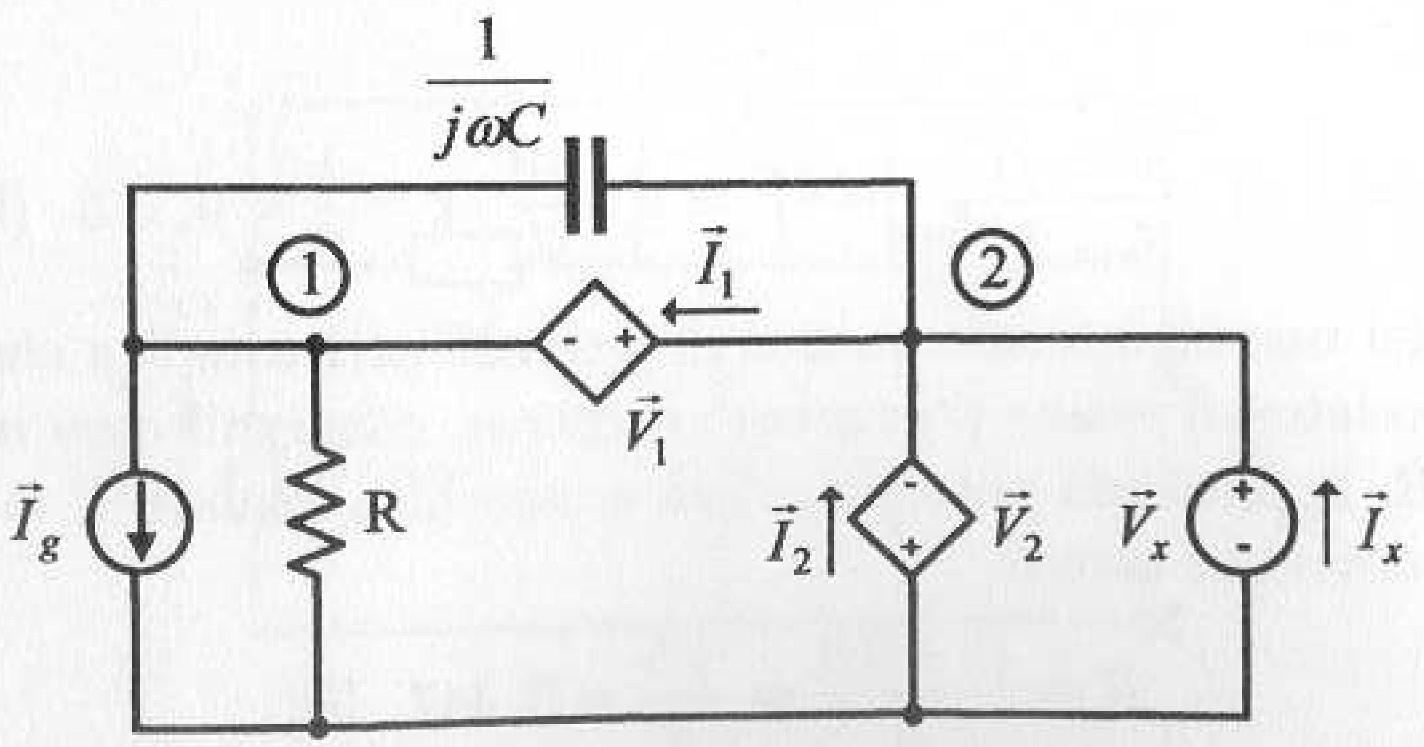
Applicare il teorema di Norton alla coppia di morsetti A-B del circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale.




$$I_g(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\ ;\ R = 1\,;\ C = \frac{1}{2}\,;\ L_1 = 1\,;\ L_2 = 1\,;\ M = 1\,;\ [A, \Omega, F, H].$$

### Svolgimento

Si effettua l'analisi nel dominio dei fasori, applicando il generatore di tensione $\vec{V}_x$ per calcolare in modo congiunto entrambi i parametri del circuito equivalente di Norton:




Gli induttori mutuamente accoppiati sono stati sostituiti dai due generatori controllati di tensione, le cui caratteristiche saranno esplicitate nel seguito. Si





applica il metodo dei nodi per calcolare $\vec{I}_x$, che figura come incognita ausiliaria per il generatore di tensione $\vec{V}_x$, così come le incognite $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ per i generatori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 - \vec{I}_g \\ -\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_x \end{bmatrix}$$

con $\omega = 2$, $\vec{I}_g = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$ ed i vincoli di seguito riportati:

- Vincoli dei generatori di tensione:
  - -) $\vec{E}_2 = \vec{V}_x$;
  - -) $\vec{V}_1 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$;
  - -) $\vec{V}_2 = -\vec{E}_2$.
- Vincoli dei generatori controllati (induttori mutuamente accoppiati):
  - -) $\vec{V}_1 = j\omega L_1\vec{I}_1 + j\omega M\vec{I}_2$;
  - -) $\vec{V}_2 = j\omega M\vec{I}_1 + j\omega L_2\vec{I}_2$.

Combinando tra loro le equazioni di vincolo, in aggiunta alle due equazioni del sistema, otteniamo 4 equazioni nelle 4 incognite $\vec{E}_1$, $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_x$. Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} (1+j)\vec{E}_1 - j\vec{V}_x = \vec{I}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & (a) \\ -j\vec{E}_1 + j\vec{V}_x = -\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_x & (b) \\ \vec{V}_x - \vec{E}_1 = 2j\vec{I}_1 + 2j\vec{I}_2 & (c) \\ -\vec{V}_x = 2j\vec{I}_1 + 2j\vec{I}_2 & (d) \end{cases}$$

Dalle equazioni $(c)$ e $(d)$, confrontando i secondi membri che sono uguali, si ottiene:

$$\vec{V}_x - \vec{E}_1 = -\vec{V}_x \ \Rightarrow \vec{E}_1 = 2\vec{V}_x\,.$$

Sostituendo $\vec{E}_1$ nella $(a)$:

$$(1+j)2\vec{V}_x - j\vec{V}_x = \vec{I}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \ \Rightarrow \vec{I}_1 = (2+j)\vec{V}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\,.$$

Sostituendo $\vec{E}_1$ ed $\vec{I}_1$ nella (c):

$$\vec{V}_x - 2\vec{V}_x = 2j(2+j)\vec{V}_x + 2j\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) + 2j\vec{I}_2$$

$$-\vec{V}_x = (4j-2)\vec{V}_x - \sqrt{2}(1-j) + 2j\vec{I}_2$$

$$(1-4j)\vec{V}_x + \sqrt{2}(1-j) = 2j\vec{I}_2$$

$$\vec{I}_2 = \frac{1-4j}{2j}\vec{V}_x + \sqrt{2}\frac{(1-j)}{2j}$$

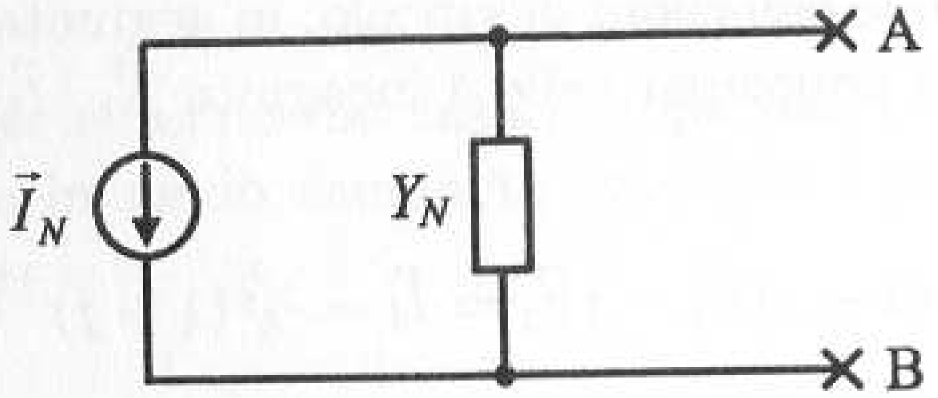
$$\vec{I}_2 = -\frac{(4+j)}{2}\vec{V}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\,.$$

Sostituendo $\vec{E}_1, \vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ nella (b) si ottiene:

$$-j2\vec{V}_x + j\vec{V}_x = -(2+j)\vec{V}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) - \frac{(4+j)}{2}\vec{V}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) + \vec{I}_x$$

$$\vec{I}_x = \sqrt{2}(1+j) + \left(-j+2+j+2+\frac{j}{2}\right)\vec{V}_x = \sqrt{2}(1+j) + \frac{(8+j)}{2}\vec{V}_x\,.$$

Il circuito equivalente di Norton è quindi il seguente:




i cui parametri si ricavano dalla precedente espressione di $\vec{I}_x$:

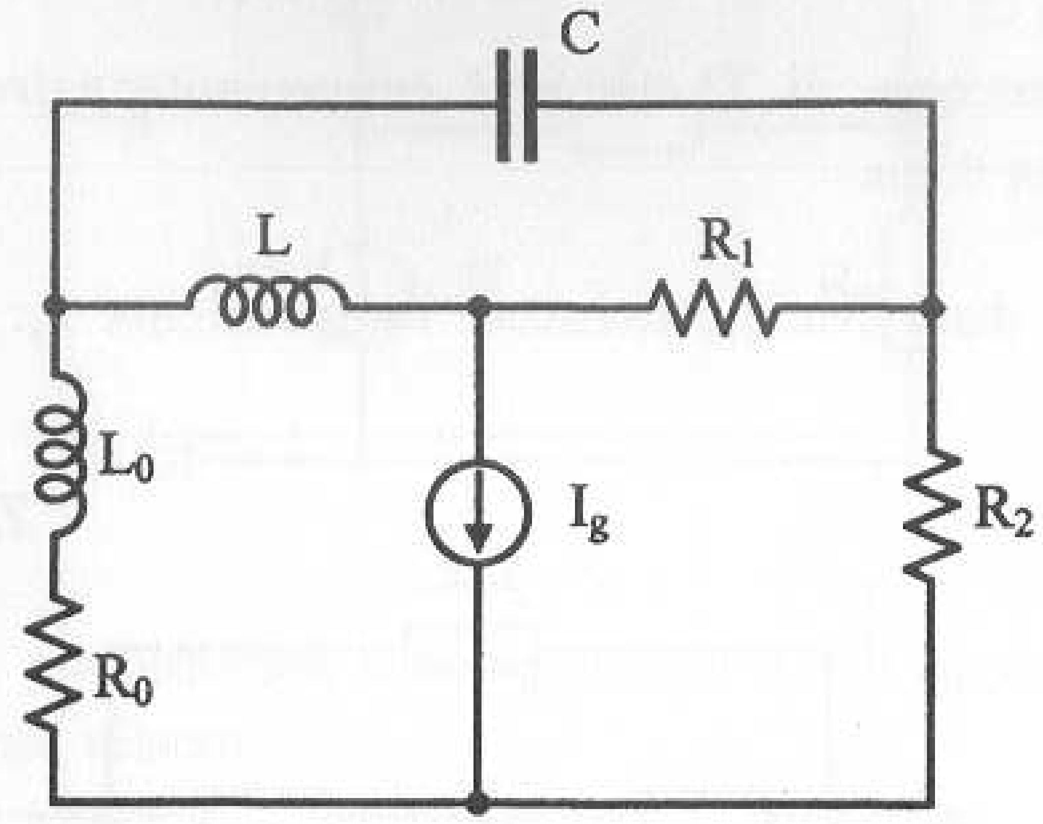
$$\begin{cases} \vec{I}_N = \sqrt{2}(1+j) \\ Y_N = \frac{8+j}{2} \text{ (ammettenza)} \end{cases}$$





## Esercizio 3.13

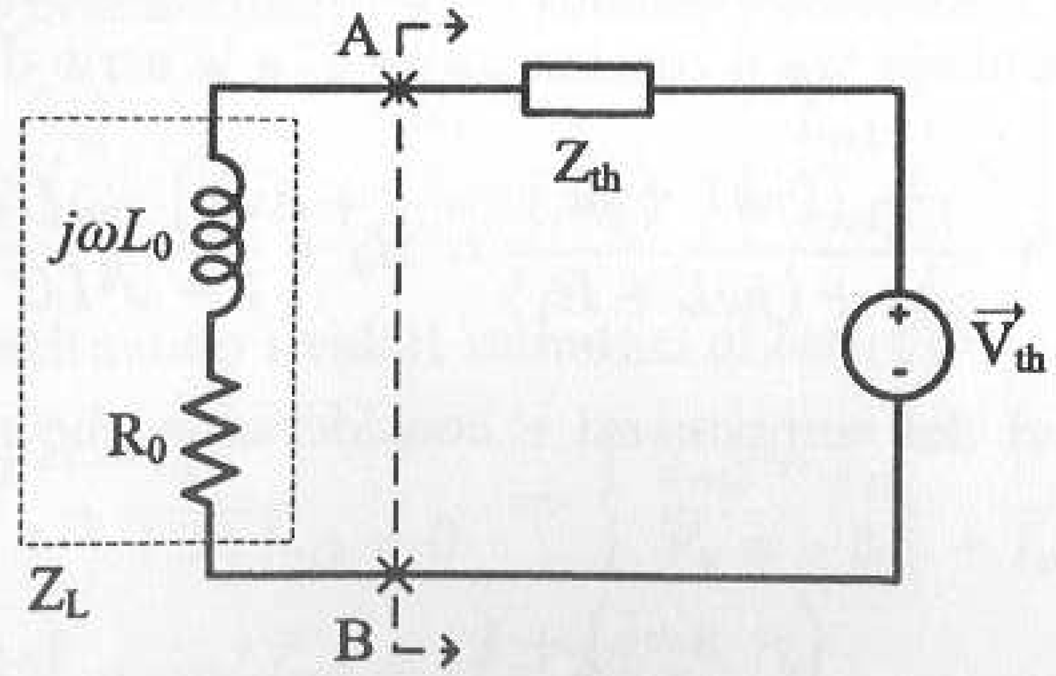
Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare i valori di $R_0$ ed $L_0$ affinché $R_0$ assorba la massima potenza attiva. Determinare inoltre il valore di tale potenza massima.




$$I_g(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)[A]\ ;\ R_1 = 1\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 2\,[\Omega]\ ;\ C = \frac{1}{3}\,[F]\ ;\ L = \frac{1}{3}\,[H]\,.$$

**Svolgimento**

Si applica innanzitutto il teorema di Thevenin alla parte di circuito ai capi della serie composta da $R_0$ ed $L_0$:




Per il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva si dovrà porre $Z_L = Z^*_{th}$ e quindi, dato che $Z_L = R_0 + j\omega L_0$, sarà:

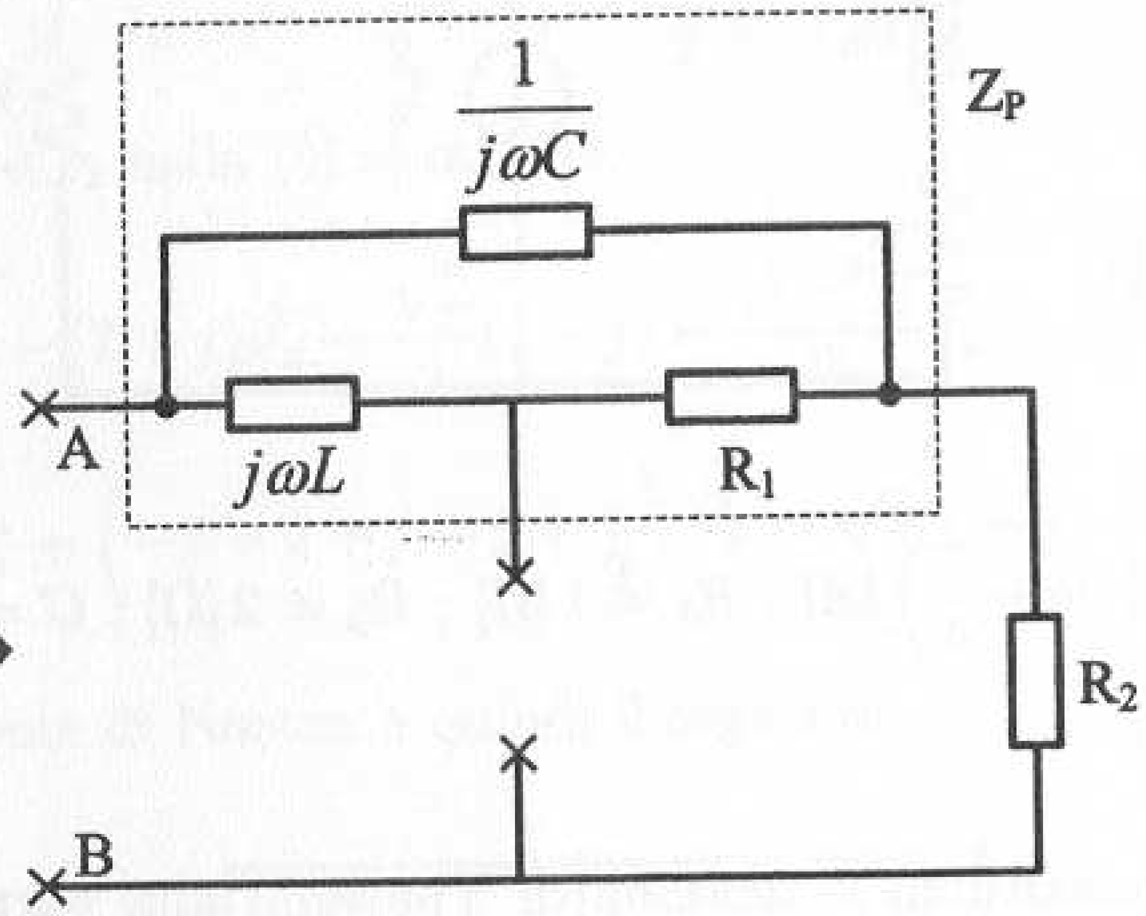
$$\begin{cases} R_0 = \mathrm{Re}\{Z_{th}\} \\ \omega L_0 = -\mathrm{Im}\{Z_{th}\} \Rightarrow L_0 = -\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\{Z_{th}\} \end{cases}$$

La massima potenza trasferita in questa situazione è pari alla potenza disponibile del generatore:

$$P_{MAX} = \frac{\left|\vec{V}_{th}\right|^2}{8 \cdot \mathrm{Re}\{Z_{th}\}}$$

Nell'applicare il teorema di Thevenin è conveniente agire in modo separato per il calcolo di $Z_{th}$ e $\vec{V}_{th}$.

Calcolo di $Z_{th}$) Si disattiva il generatore indipendente $I_g$:




L'impedenza $Z_{th}$ è pari alla serie della resistenza $R_2$ con un'impedenza $Z_p$ che, a sua volta, è il parallelo tra il condensatore $C$ e la serie di $L$ ed $R_1$:

$$Z_{th} = R_2 + \frac{\frac{1}{j\omega C}\cdot(j\omega L + R_1)}{\frac{1}{j\omega C} + (j\omega L + R_1)} = R_2 + \frac{j\omega L + R_1}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}\,.$$

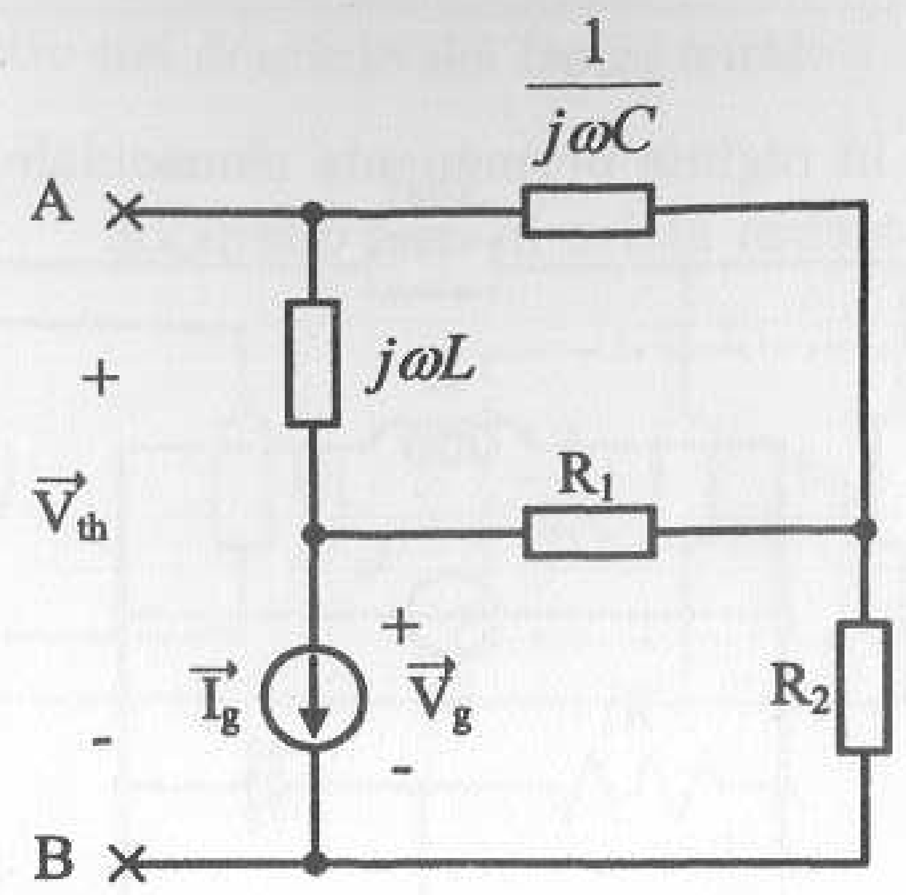
Sostituendo i valori dei componenti e considerando che nel caso in esame è $\omega = 3$, si ottiene:

$$Z_{th} = 2 + \frac{\left(j\cdot\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\right)+1}{1-\left(\cancel{9}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\right)+\left(j\cdot\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot 1\right)} = 2 + \frac{1+j}{j} = 3 - j\,.$$

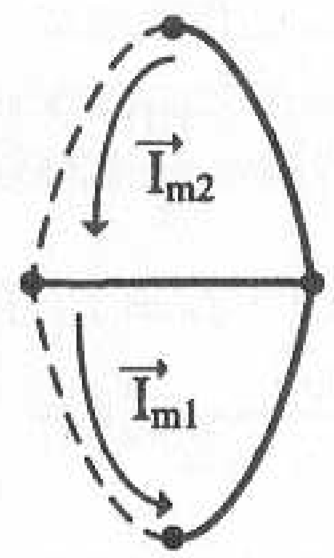
Calcolo di $\vec{V}_{th}$) Per determinare la tensione a vuoto si può ridisegnare il circuito come segue:








in cui $\vec{I}_g = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$ e, ovviamente, è sempre $\omega = 3$. Si applica il metodo delle maglie con il seguente albero:




Aggiungendo l'incognita ausiliaria $\vec{V}_g$, il sistema risolvente è dunque il seguente:

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2) & -R_1 \\ -R_1 & \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R_1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m1} \\ \vec{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{V}_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

in cui $\vec{I}_{m1} = \vec{I}_g$. Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{cases} 3\vec{I}_g - \vec{I}_{m2} = -\vec{V}_g \\ -\vec{I}_g + \left(j + \frac{1}{j} + 1\right)\vec{I}_{m2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{I}_{m2} = \vec{I}_g \\ \vec{V}_g = -3\vec{I}_g + \vec{I}_{m2} = -2\vec{I}_g \end{cases}$$

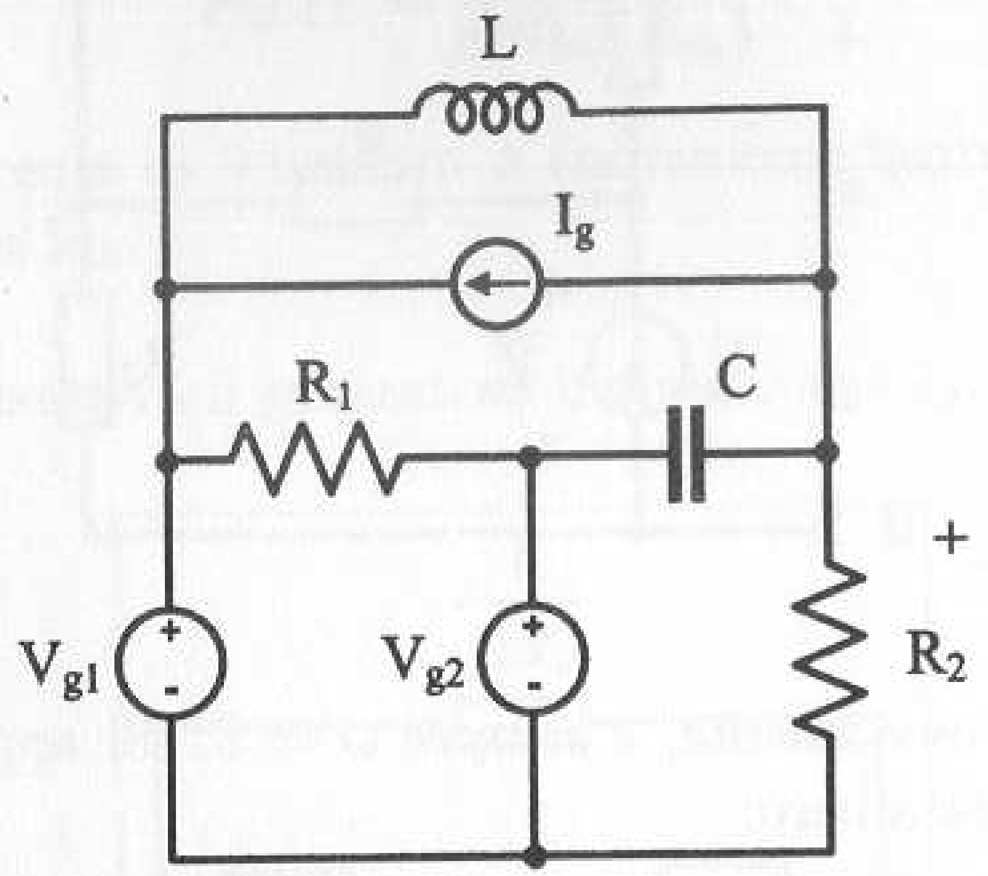
da cui deriva $\vec{V}_{th} = \vec{V}_g + j\omega L\vec{I}_{m2} = (j-2)\,\vec{I}_g$.

Dai valori trovati per $Z_{th}$ e $\vec{V}_{th}$ si può quindi concludere che:

$$R_0 = 3\ [\Omega]$$
$$L_0 = -\frac{(-1)}{3} = 0,333\ [H]$$
$$P_{MAX} = \frac{|j-2|^2\cdot\left|\vec{I}_g\right|^2}{8\cdot 3} = 0,833\ [W]$$

## Esercizio 3.14

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare la tensione sul resistore $R_2$ e la potenza attiva in esso dissipata.



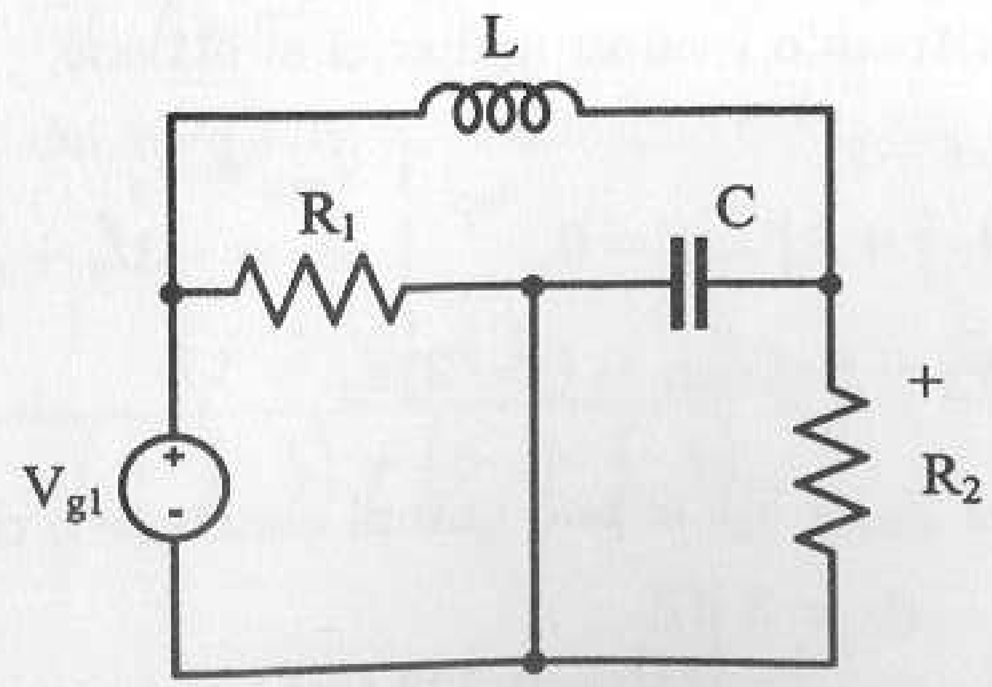

$$V_{g1}(t) = 3\cos(t)\,[V]\ ;\ V_{g2}(t) = \frac{13}{4}\cos(2t)\,[V]\ ;\ I_g(t) = \sin(t)\,[A]\ ;$$

$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]\ ;\ L = 1\,[H]\ ;\ C = 1\,[F]\ .$$

### Svolgimento

Si analizza il circuito nel dominio dei fasori. Per il calcolo della tensione su $R_2$ si applica il principio i sovrapposizione degli effetti, considerando ciascun generatore attivo separatamente.

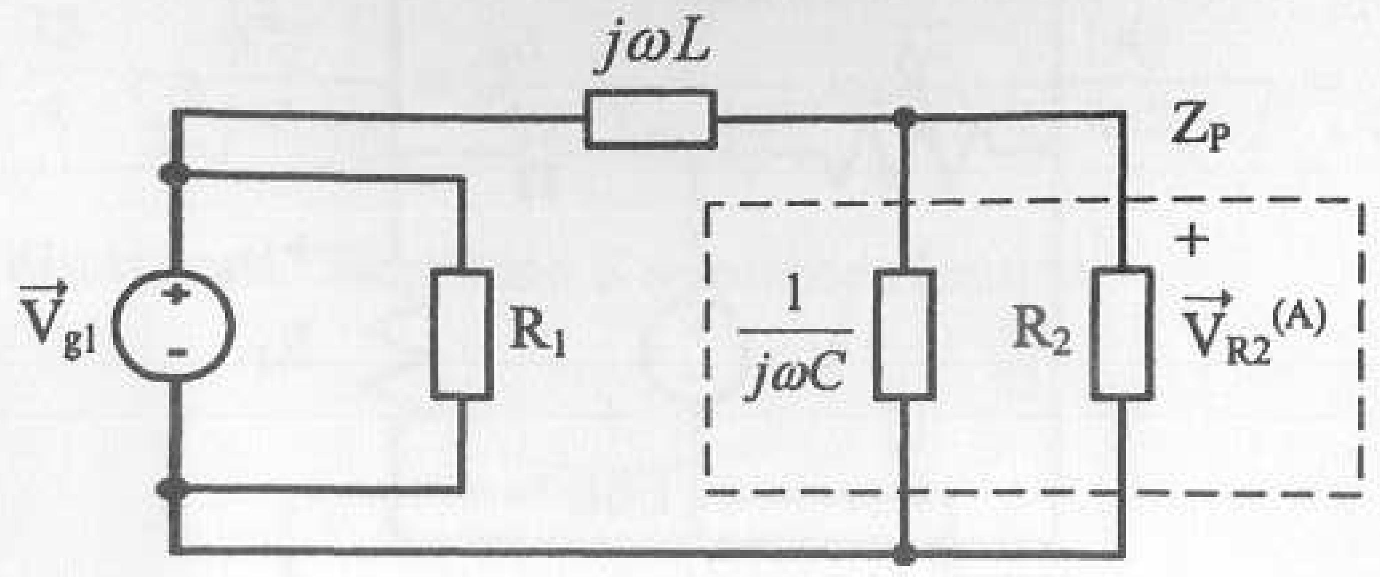
A) $V_{g2}$ e $I_g$ disattivati. Il circuito diventa il seguente:








Ridisegnando il circuito nel dominio dei fasori sarà:




con

$$V_{g1}(t) = 3\cos(t) \Rightarrow \omega = 1\ ,\ \vec{V}_{g1} = 3\,.$$

In questo circuito si può notare che il resistore $R_1$ risulta in parallelo con il generatore ideale di tensione $\vec{V}_{g1}$. Per il teorema di sostituzione è noto che, in tale situazione, il resistore $R_1$ non influisce sul comportamento del circuito e può essere tralasciato. La tensione sul resistore $R_2$ è pari alla tensione sul parallelo $Z_P$ tra $\frac{1}{j\omega C}$ ed $R_2$. Quest'ultima si può quindi ricavare con la formula del partitore di tensione:

$$\vec{V}_{R2}^{(A)} = \vec{V}_{g1}\frac{Z_P}{Z_P + j\omega L}\,,$$

con

$$\frac{1}{Z_P} = j\omega C + \frac{1}{R_2}\,.$$

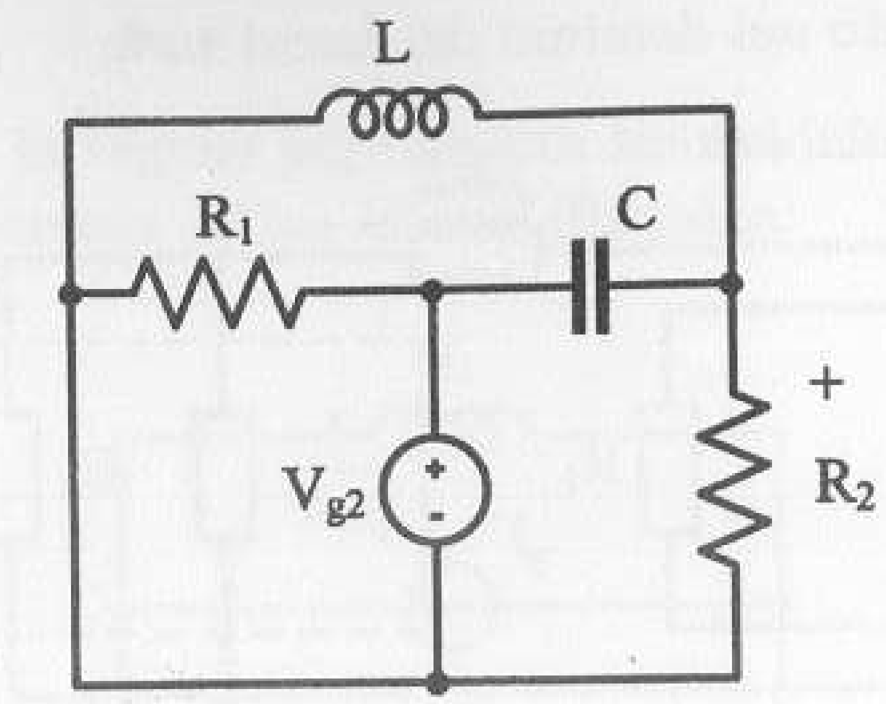
Nel caso in esame ($\omega = 1$) sarà:

$$\frac{1}{Z_P} = j + 1 \Rightarrow Z_P = \frac{1}{j+1}$$

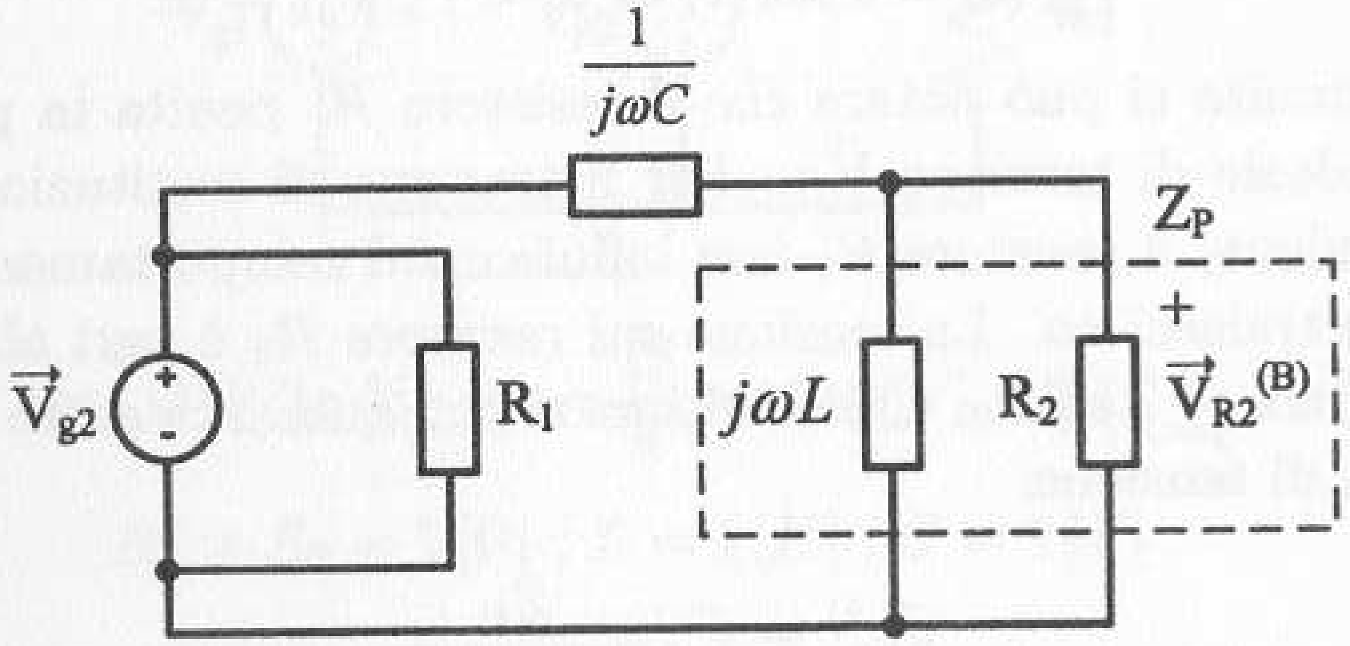
e quindi:

$$\vec{V}_{R2}^{(A)} = 3\frac{\frac{1}{j+1}}{\frac{1}{j+1} + j} = \frac{3}{1 - 1 + j} = -3j\,.$$

B) $V_{g1}$ e $I_g$ disattivati. Si ottiene il seguente circuito:




Ridisegnando nel dominio dei fasori si ha:




con

$$V_{g2}(t) = \frac{13}{4}\cos(2t) \Rightarrow \omega = 2\,,\ \vec{V}_{g2} = \frac{13}{4}\,.$$

Anche in questo caso vale il ragionamento fatto nel caso A): il resistore $R_1$ non influisce sul comportamento del circuito e la tensione su $R_2$ si calcola con la formula del partitore di tensione tra $\frac{1}{j\omega C}$ e $Z_P$, essendo ora $Z_P$ il parallelo tra $R_2$ e $j\omega L$:

$$\vec{V}_{R2}^{(B)} = \vec{V}_{g2}\frac{Z_P}{Z_P + \frac{1}{j\omega C}}\,,$$

con

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2}\,.$$

In questo caso ($\omega = 2$) si otterrà:

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{j\cdot 2} + 1 = 1 - \frac{j}{2} \Rightarrow Z_P = \frac{2}{2-j}\,,$$

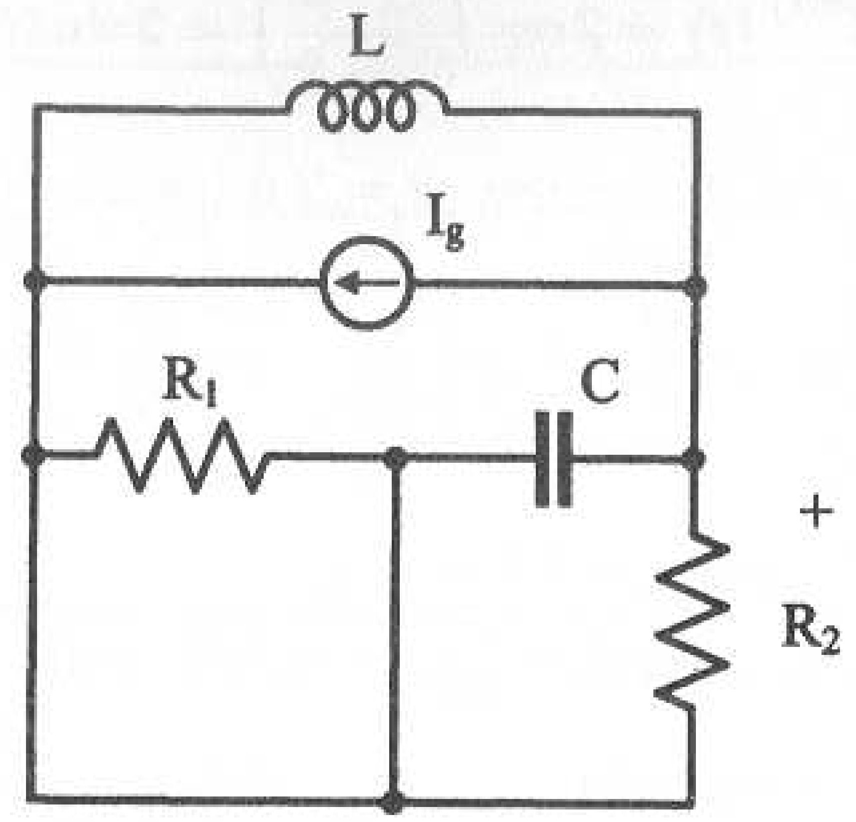




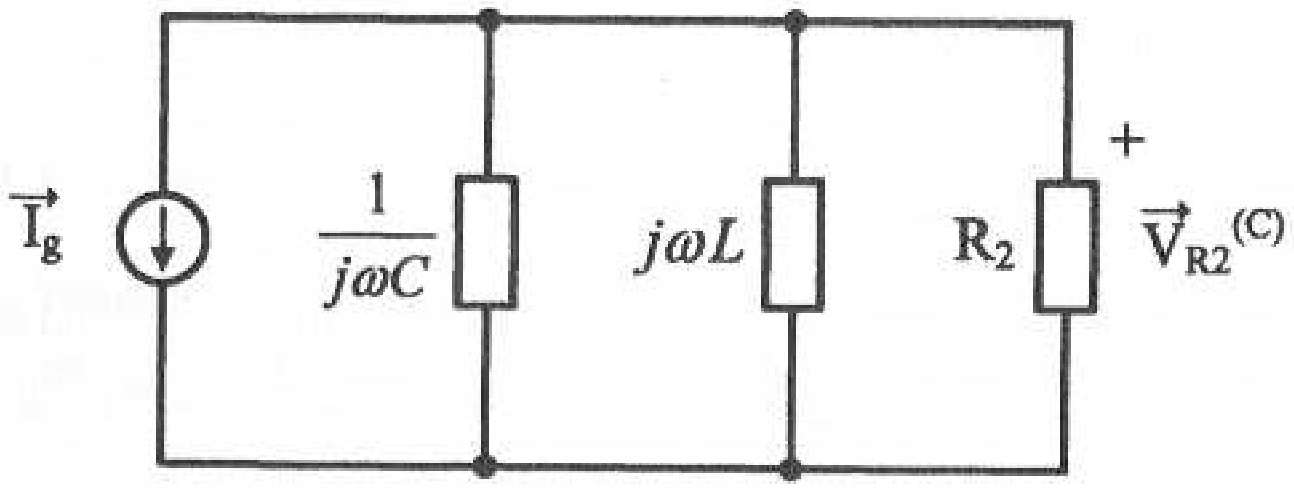
che fornisce

$$\vec{V}_{R2}^{(B)} = \frac{13}{4}\cdot\frac{\frac{2}{2-j}}{\frac{2}{2-j}+\frac{1}{j\cdot 2}} = \frac{13}{4}\cdot\frac{2}{2+\frac{2-j}{2j}} = \frac{13}{4}\cdot\frac{4j}{4j+2-j} = \frac{13j}{3j+2}\,.$$

C) $V_{g1}$ e $V_{g2}$ disattivati. Si ottiene il seguente circuito:




che nel dominio dei fasori diventa:




con

$$I_g(t) = \sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega = 1\,,\ \vec{I}_g = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\,.$$

Il resistore $R_1$ non è stato inserito nel circuito, in quanto compreso tra due corto-circuiti (quelli dei generatori disattivati). La tensione sul resistore $R_2$ si ottiene in questo caso dall'unica equazione di nodo:

$$\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R_2}\right)\vec{V}_{R2}^{(C)} = -\vec{I}_g$$

$$\left(\frac{1}{j} + j + 1\right)\vec{V}_{R2}^{(C)} = j \Rightarrow \vec{V}_{R2}^{(C)} = j\cdot\frac{j}{j-1+1} = j\,.$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il fasore della tensione su $R_2$ alla pulsazione $\omega = 1$ è dato da:

$$\vec{V}_{R2}^{(\omega=1)} = \vec{V}_{R2}^{(A)} + \vec{V}_{R2}^{(C)} = -3j + j = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} .$$

Pertanto il contributo nel tempo per $\omega = 1$ è dato da:

$$V_{R2}^{(\omega=1)}(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin(t) .$$

Il fasore della tensione alla pulsazione $\omega = 2$ è invece dato da:

$$\vec{V}_{R2}^{(\omega=2)} = \vec{V}_{R2}^{(B)} = \frac{13j}{3j+2} = \frac{13j}{2+3j}\cdot\frac{2-3j}{2-3j} = 3 + 2j = Ae^{j\varphi},$$

dove:

$$\begin{cases} A = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 0,588 \text{ [rad]} \end{cases}$$

Il contributo nel tempo è dato da

$$V_{R2}^{(\omega=2)}(t) = \sqrt{13}\cos(2t + 0,588) .$$

In definitiva si ottiene quindi:

$$V_{R2}(t) = V_{R2}^{(\omega=1)}(t) + V_{R2}^{(\omega=2)}(t) = 2\sin(t) + \sqrt{13}\cos(2t + 0,588) \; [V]$$

Poiché sono presenti due pulsazioni differenti, la potenza attiva $P_a$ dissipata su $R_2$ è data dalla somma delle potenze attive relative alle singole pulsazioni:

$$P_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{V}_{R2}^{(\omega=1)}\right|^2}{R_2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{V}_{R2}^{(\omega=2)}\right|^2}{R_2},$$

quindi sarà

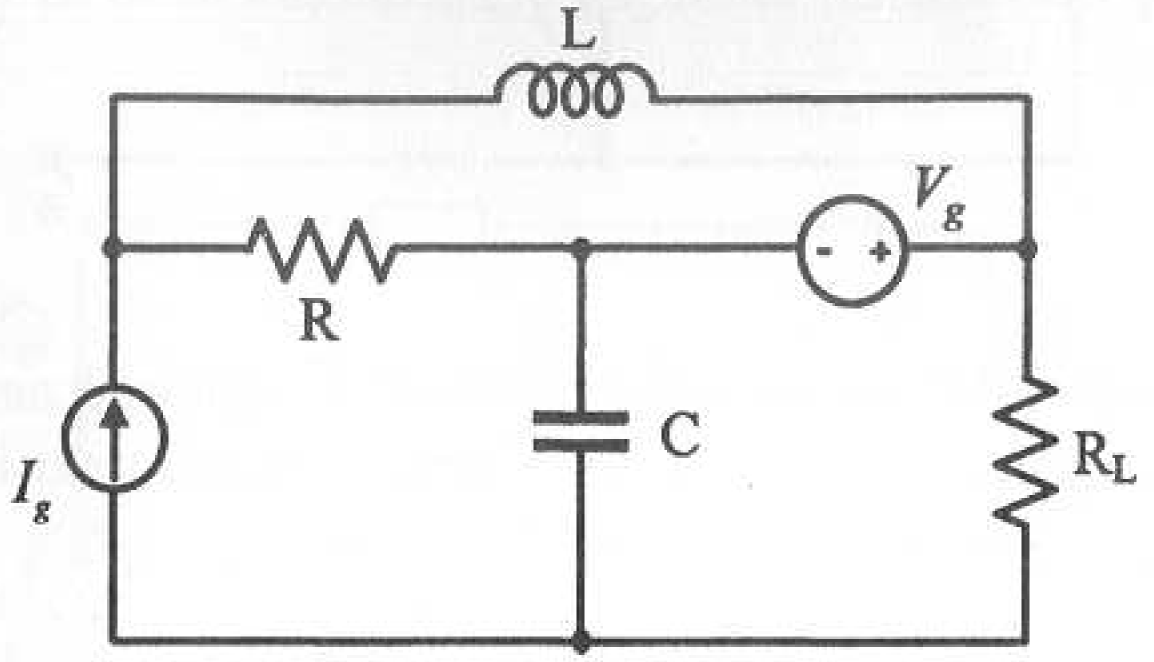
$$P_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{|-2j|^2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{|3+2j|^2}{1} = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot(9+4) = \frac{17}{2} = 8,5 \; [W]$$





# Esercizio 3.15

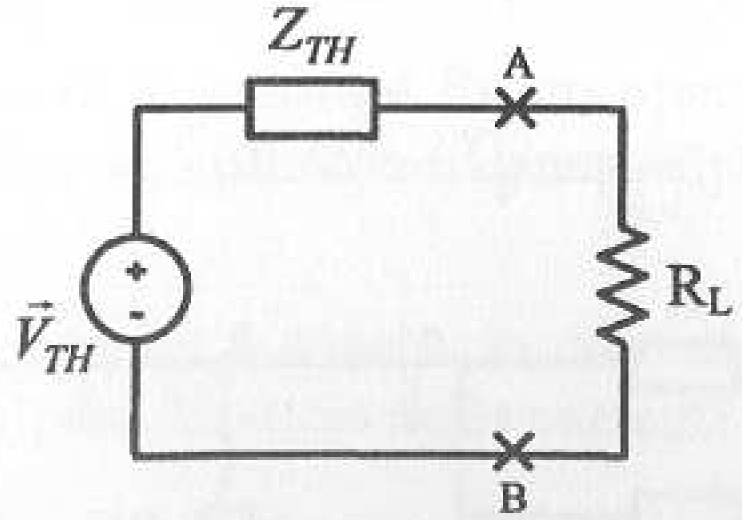
Calcolare per il circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, il valore della resistenza $R_L$ affinché essa assorba la massima potenza attiva. Calcolare inoltre il valore di tale potenza massima.



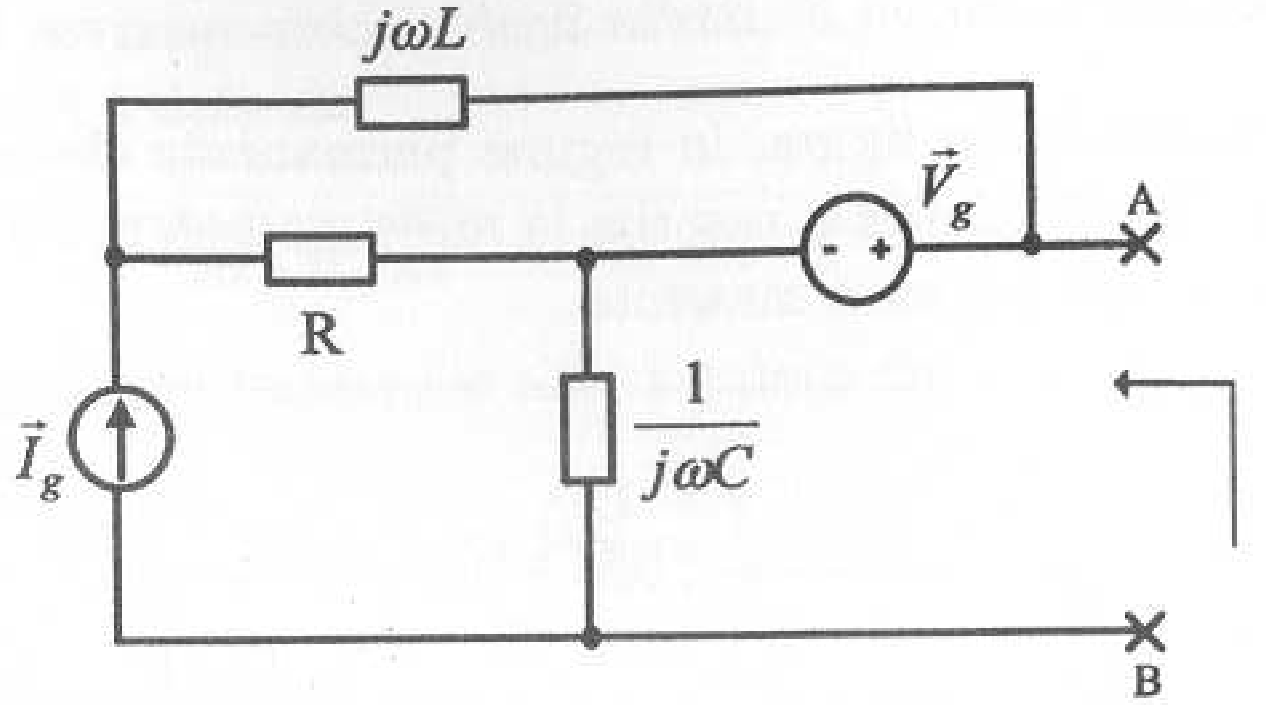

$$V_g(t) = 2\sin(2t)\,[V];\; I_g(t) = 2\sin(2t)\,[A];\; R = 1\,[\Omega];\; L = \frac{1}{2}\,[H];\; C = \frac{1}{2}\,[F].$$

### Svolgimento

Per risolvere il quesito richiesto si deve applicare il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva. La configurazione cui è necessario pervenire è la seguente:

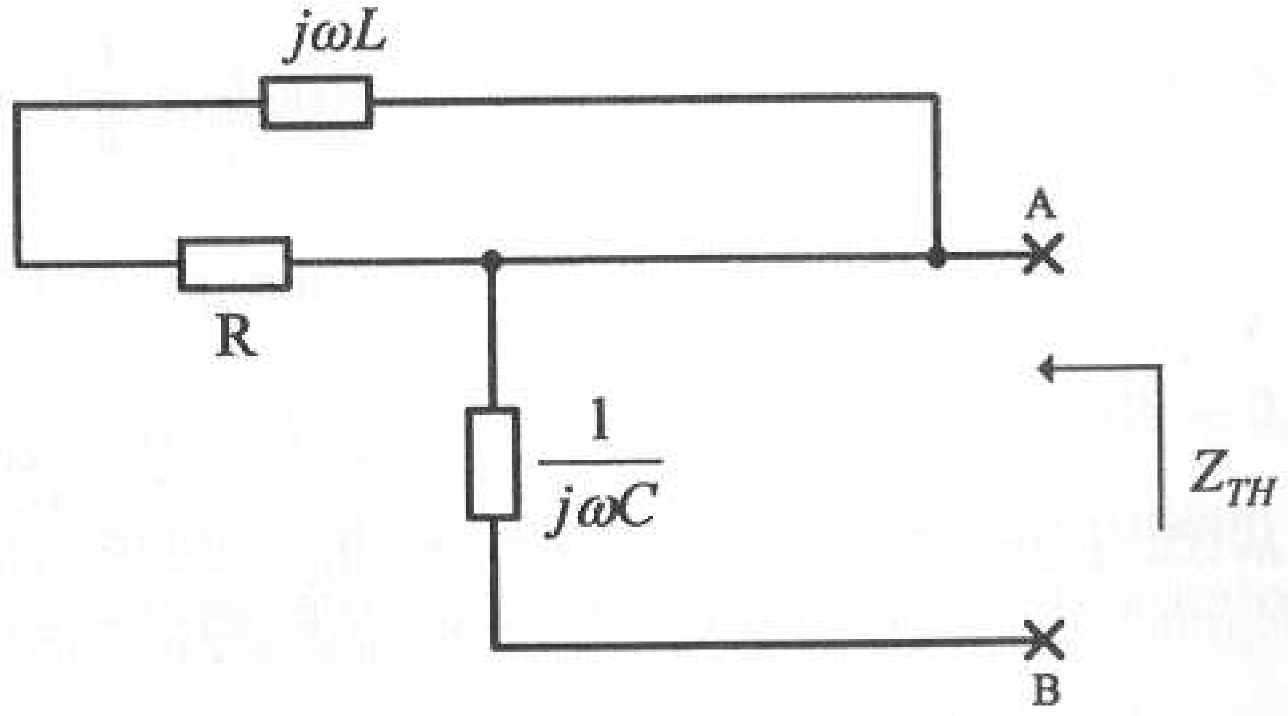



in cui $\vec{V}_{TH}$ e $Z_{TH}$ si ricavano dall'applicazione del teorema di Thevenin nel dominio dei fasori (con $\omega = 2$) alla parte di circuito che pilota il carico $R_L$, ovvero:

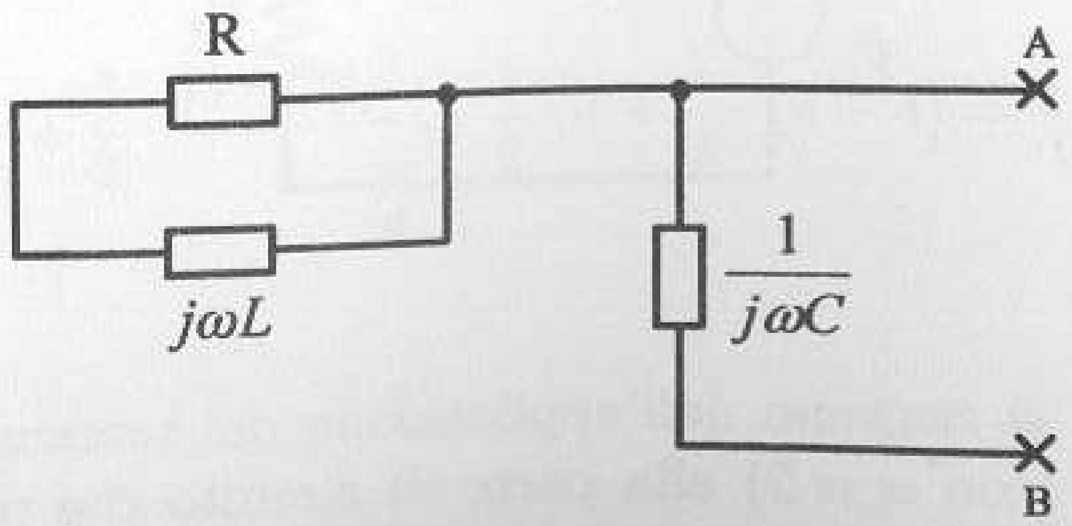



Essendo richiesto anche il valore della potenza massima, è necessario calcolare sia $Z_{TH}$ che $\vec{V}_{TH}$. Dato che nel circuito sono presenti solo bipoli, è possibile calcolare questi due parametri in modo disgiunto.

Calcolo di $Z_{TH}\big)$ Si disattivano i generatori, entrambi indipendenti:




Avendo disattivato un generatore di tensione, e avendo quindi introdotto un corto-circuito, conviene ridisegnare il circuito:

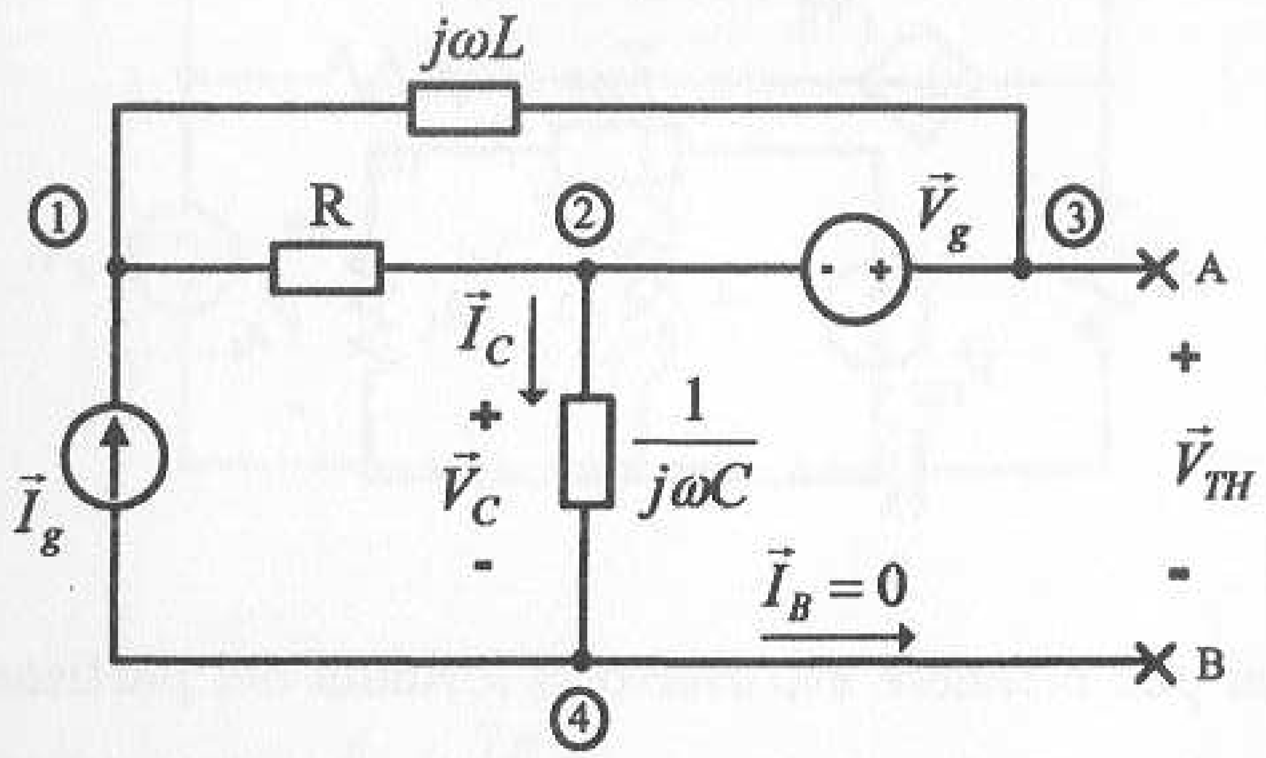





Le impedenze $R$ e $j\omega L$ evidentemente non influiscono su $Z_{TH}$, in quanto non sono né in serie né in parallelo col condensatore $\frac{1}{j\omega C}$. Ne deriva che

$$Z_{TH} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = -j\,.$$

Calcolo di $\vec{V}_{TH}\big)$ Si deve analizzare il seguente circuito:




dove risulta:

$$V_g(t) = 2\sin(2t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \vec{V}_g = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = -2j\,;$$

$$I_g(t) = 2\sin(2t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \vec{I}_g = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = -2j\,.$$

Dall'analisi di questo circuito si nota subito che $\vec{V}_{TH}$ è data dalla somma delle tensioni sul generatore $\vec{V}_g$ e sul condensatore $\vec{V}_C$, ovvero:

$$\vec{V}_{TH} = \vec{V}_g + \vec{V}_C = \vec{V}_g + \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_C\,.$$

Poiché al morsetto B il circuito è aperto, la corrente $\vec{I}_B$ che scorre verso tale morsetto è nulla. Per cui, dal bilancio delle correnti al nodo 4 risulta:

$$\vec{I}_C - \vec{I}_B - \vec{I}_g = 0 \;\Rightarrow\; \vec{I}_C = \vec{I}_g\,.$$

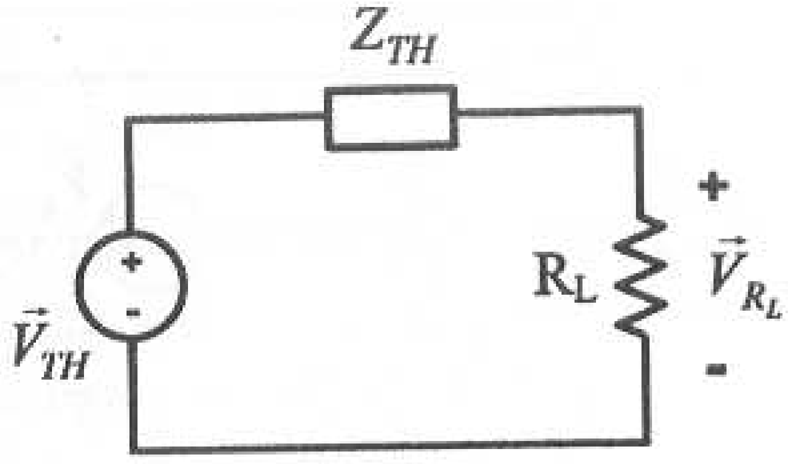
In definitiva, la tensione $\vec{V}_{TH}$ è pari a:

$$\vec{V}_{TH} = -2j + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot (-2j) = -2j - j(-2j) = -2(1+j)\,.$$

Tornando all'applicazione del teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, si deve notare che il carico da determinare è vincolato ad essere puramente resistivo. Ne deriva che:

$$R_L = |Z_{TH}| = |-j| = 1 \quad [\Omega]$$

In tale situazione di adattamento la potenza attiva massima si ricava calcolando la tensione sul resistore:




Quest'ultima si può ottenere attraverso la formula del partitore di tensione:

$$\vec{V}_{R_L} = \vec{V}_{TH}\frac{R_L}{R_L + Z_{TH}} = -2(1+j)\frac{1}{1-j},$$

da cui la potenza attiva massima è quindi:

$$P_{MAX} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{V}_{R_L}|^2}{R_L} = \frac{1}{2\cdot 1}\left|-2\frac{(1+j)}{(1-j)}\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{2}{2} = 2 \quad [W]$$

Si noti che, quando il carico è puramente resistivo, la potenza massima trasferibile sul carico è <u>inferiore</u> alla potenza disponibile del generatore. Infatti, in questo caso, la potenza disponibile è pari a:

$$P_d = \frac{|\vec{V}_{TH}|^2}{8\mathrm{Re}\{Z_{TH}\}} = \infty$$

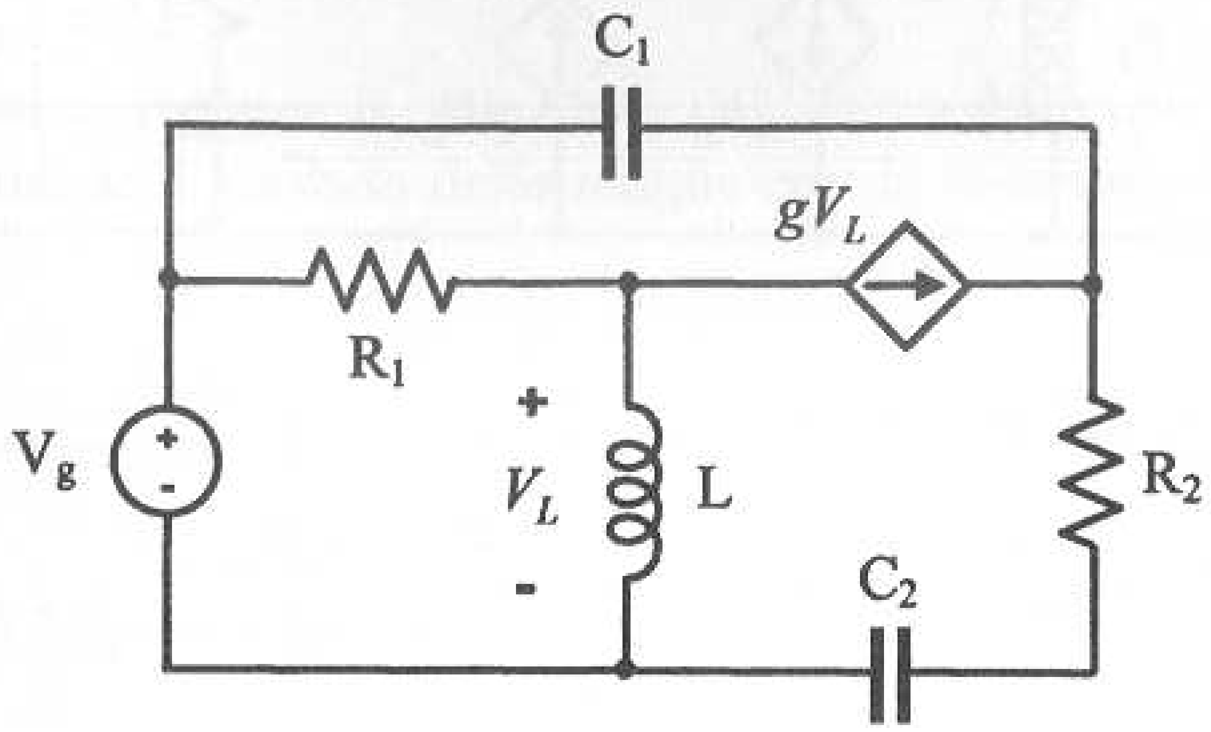
Il valore infinito della potenza disponibile è dovuto al fatto che l'impedenza del generatore ($Z_{TH}$) è puramente reattiva, ossia $\mathrm{Re}\{Z_{TH}\} = 0$.





## Esercizio 3.16

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare il valore della potenza attiva dissipata sul resistore $R_2$.

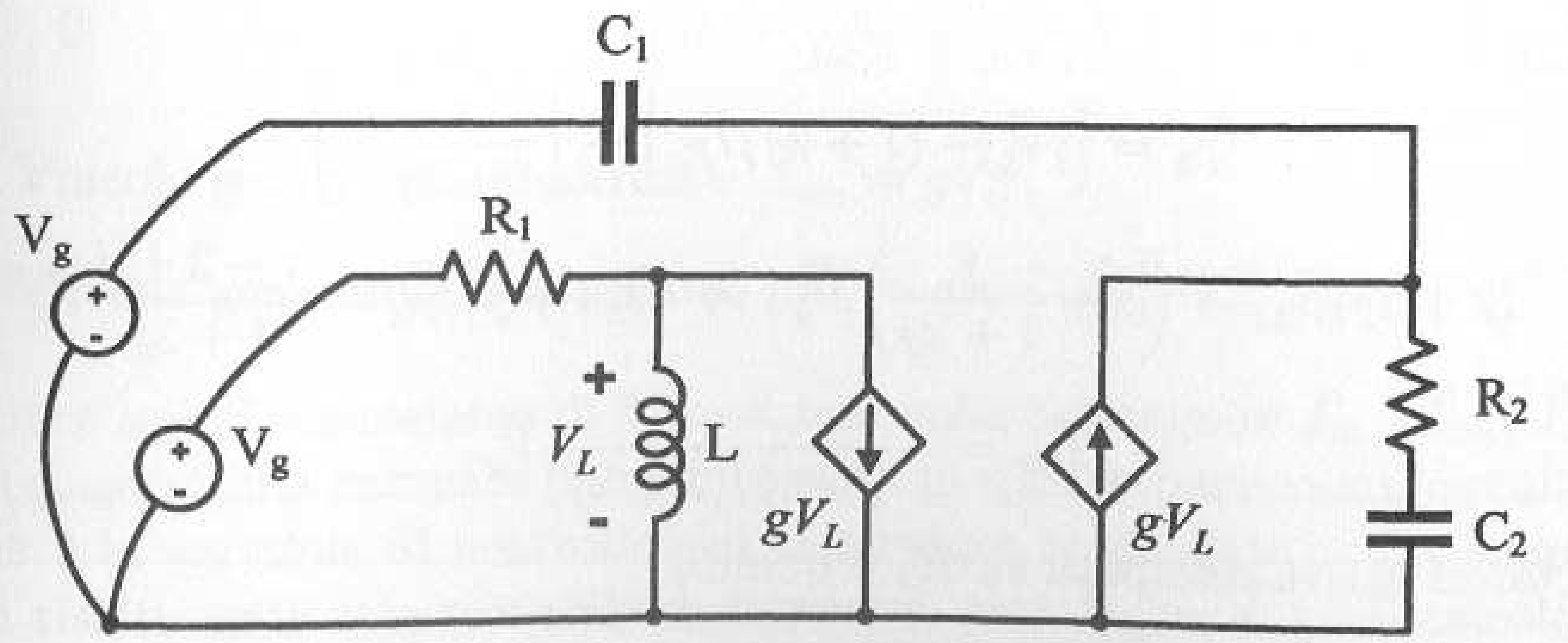



$$V_g(t) = 3\sin\left(t + \frac{7\pi}{17}\right)\,;\ g = 1\,;\ L = 1\,;\ R_1 = 1\,;$$

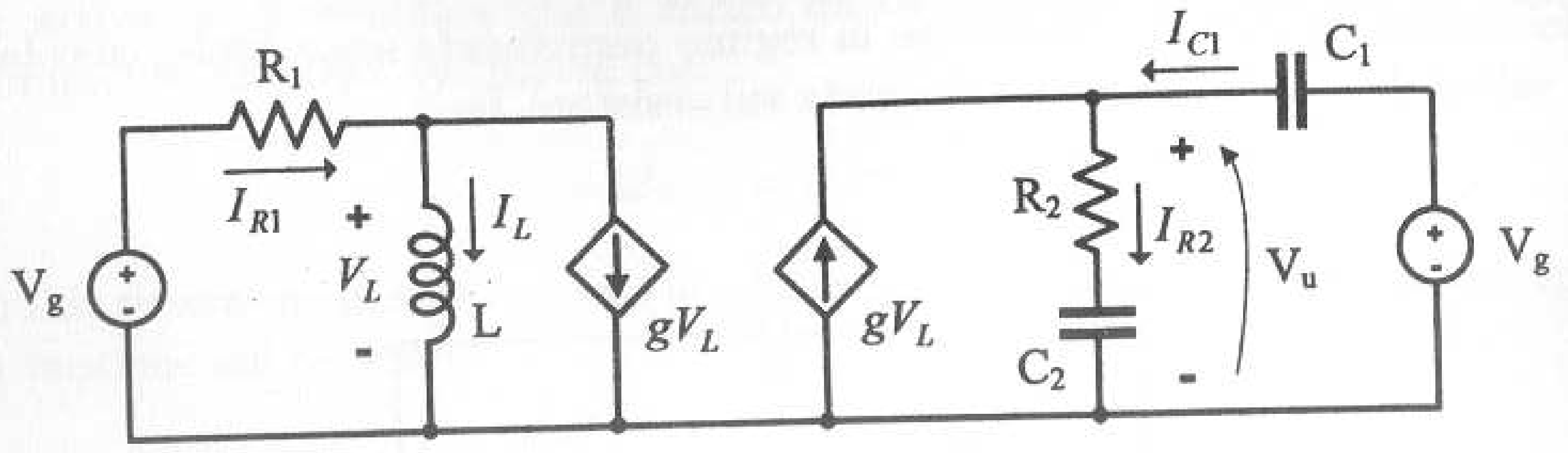
$$R_2 = 2\,;\ C_1 = 1\,;\ C_2 = 1\,;\ [V, \Omega^{-1}, H, \Omega, F]\,.$$

### Svolgimento

Sdoppiando il generatore di tensione e quello di corrente, il circuito può essere ridisegnato nel seguente modo:



e quindi:




Nel dominio dei fasori si ottiene:

$$\vec{V}_L = j\omega L \vec{I}_L = j\omega L(\vec{I}_{R_1} - g\vec{V}_L)\,,$$

dove

$$\vec{I}_{R_1} = \frac{\vec{V}_g - \vec{V}_L}{R_1}\,;$$

quindi, essendo $\omega = 1$, si ha:

$$\vec{V}_L = j(\vec{V}_g - \vec{V}_L - \vec{V}_L) \;\Rightarrow\; \vec{V}_L = \frac{j}{1+2j}\vec{V}_g\,.$$

Osservando ora la parte destra del circuito, risulta che

$$\vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{C_1} + g\vec{V}_L\,, \qquad \vec{I}_{C_1} = j\omega C_1(\vec{V}_g - \vec{V}_u)\,, \qquad \vec{V}_u = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\vec{I}_{R_2}\,.$$

Ne deriva quindi che

$$\vec{V}_u = (2-j)\vec{I}_{R_2} \;\Rightarrow\; \vec{I}_{C_1} = j\vec{V}_g - j(2-j)\vec{I}_{R_2}$$

e quindi

$$\vec{I}_{R_2} = \left[j\vec{V}_g - (1+2j)\vec{I}_{R_2}\right] + \left[\frac{j}{1+2j}\vec{V}_g\right]$$

$$(2+2j)\vec{I}_{R_2} = \left(j + \frac{j}{1+2j}\right)\vec{V}_g \;\Rightarrow\; 2(1+j)\vec{I}_{R_2} = \frac{j-2+j}{1+2j}\vec{V}_g$$

$$\vec{I}_{R_2} = -\frac{1-j}{(1+j)(1+2j)}\vec{V}_g\,.$$

La potenza attiva dissipata su $R_2$ è quindi:

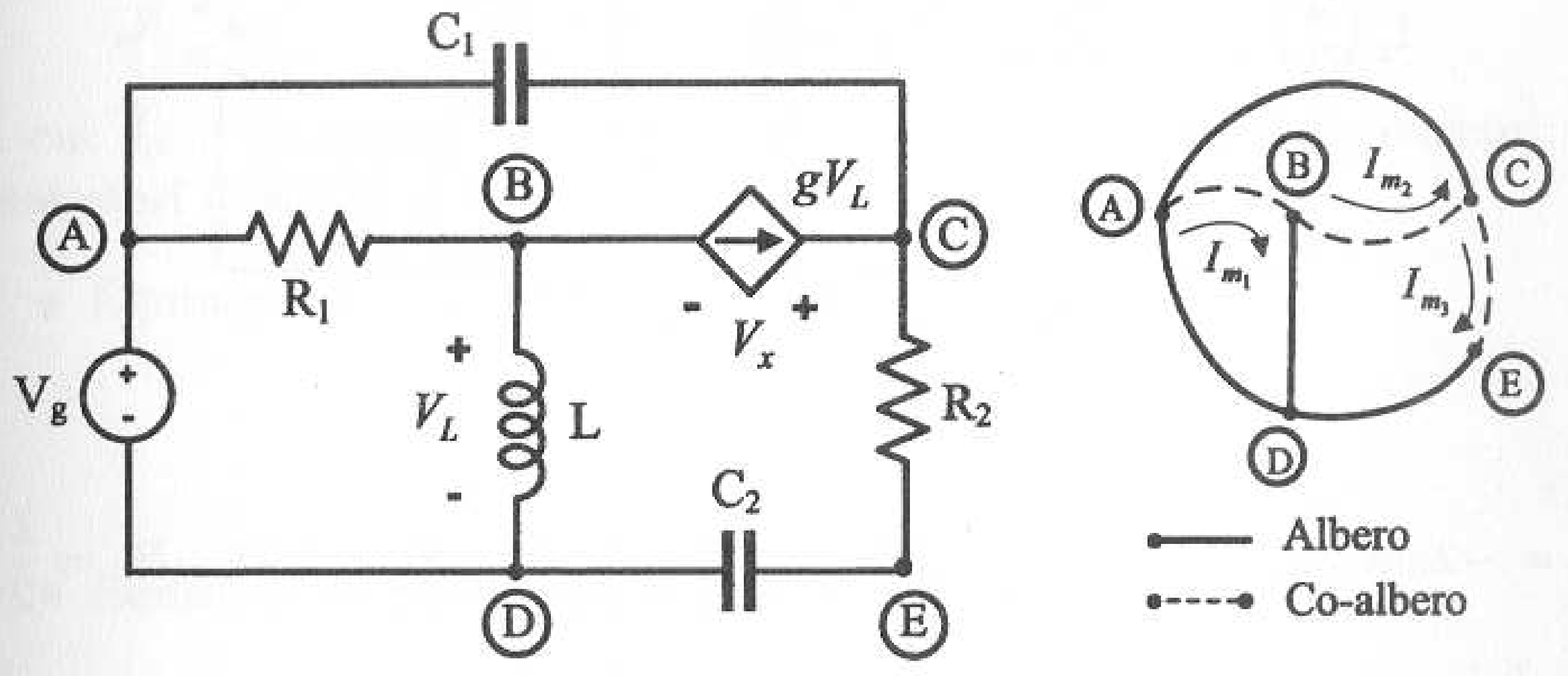
$$P_a = \frac{1}{2}R_2|\vec{I}_{R_2}|^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{|1-j|^2}{|1+j|^2|1+2j|^2}|\vec{V}_g|^2\,.$$



Poiché $V_g(t) = 3\sin\left(t + \frac{7\pi}{17}\right)$, allora $|\vec{V}_g| = 3$ e dunque:

$$P_a = \frac{2}{2\cdot 5}\cdot 9 = \frac{9}{5} = 1,8 \;\;[W]$$

Un metodo alternativo per la soluzione dell'intero esercizio consiste nell'applicare direttamente il metodo delle maglie con la seguente scelta di albero e co-albero:




Nel dominio dei fasori si ottiene il seguente sistema risolvente:

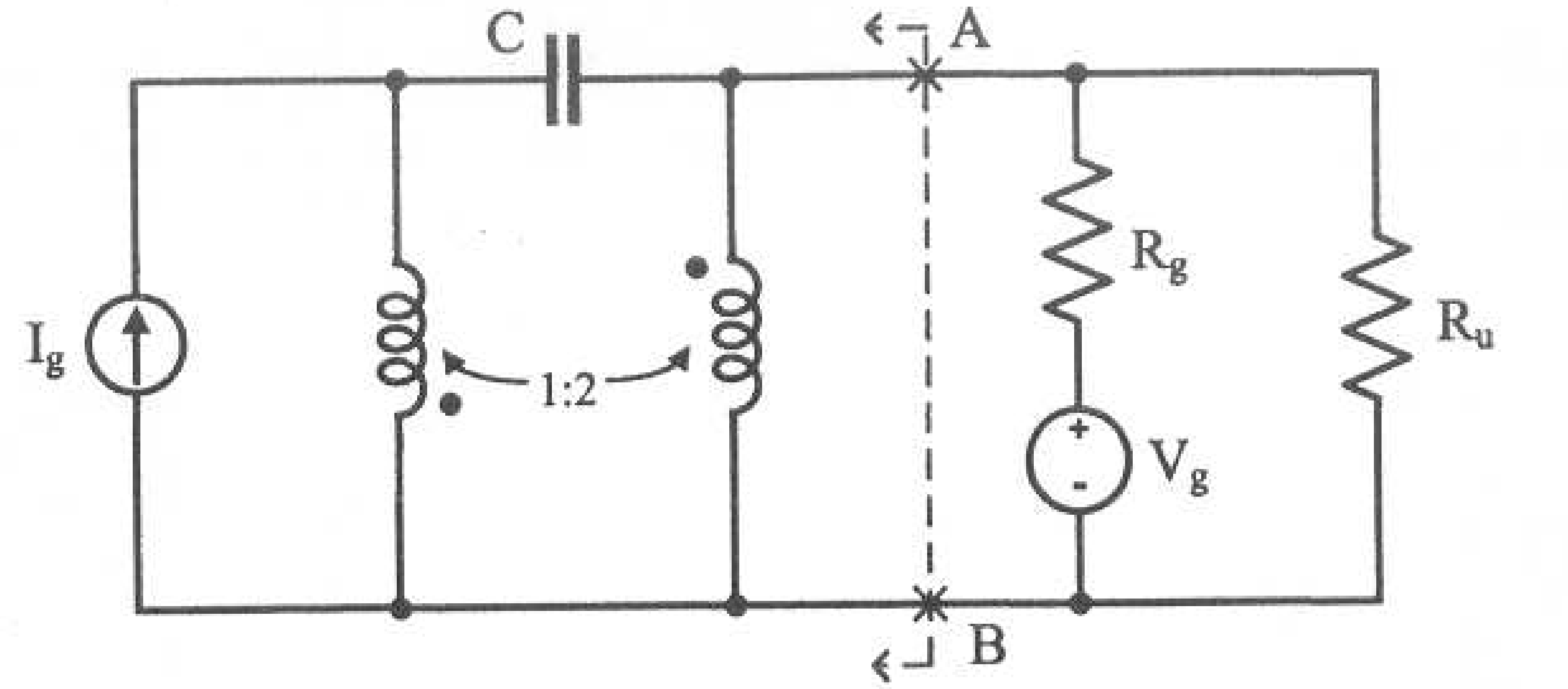
$$\begin{bmatrix} (R_1 + j\omega L) & -j\omega L & 0 \\ -j\omega L & \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L\right) & -\frac{1}{j\omega C_1} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega C_1} & \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m_1} \\ \vec{I}_{m_2} \\ \vec{I}_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_g \\ \vec{V}_x - \vec{V}_g \\ \vec{V}_g \end{bmatrix}$$

- Vincolo generatore di corrente: $\vec{I}_{m_2} = g\vec{V}_L\,$;
- Vincolo generatore controllato: $g\vec{V}_L = gj\omega L(\vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m2})\,$.

Si ottiene quindi un sistema di 5 equazioni nelle 5 incognite $\vec{I}_{m_1}$, $\vec{I}_{m_2}$, $\vec{I}_{m_3}$, $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_L$ (quest'ultima compare come incognita in questo particolare circuito solo perché è la variabile di controllo del generatore controllato). Il sistema può essere risolto nella <u>sola</u> variabile di interesse, cioè $\vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{m_3}$. Il calcolo della potenza attiva prosegue poi come nel caso precedente.

## Esercizio 3.17

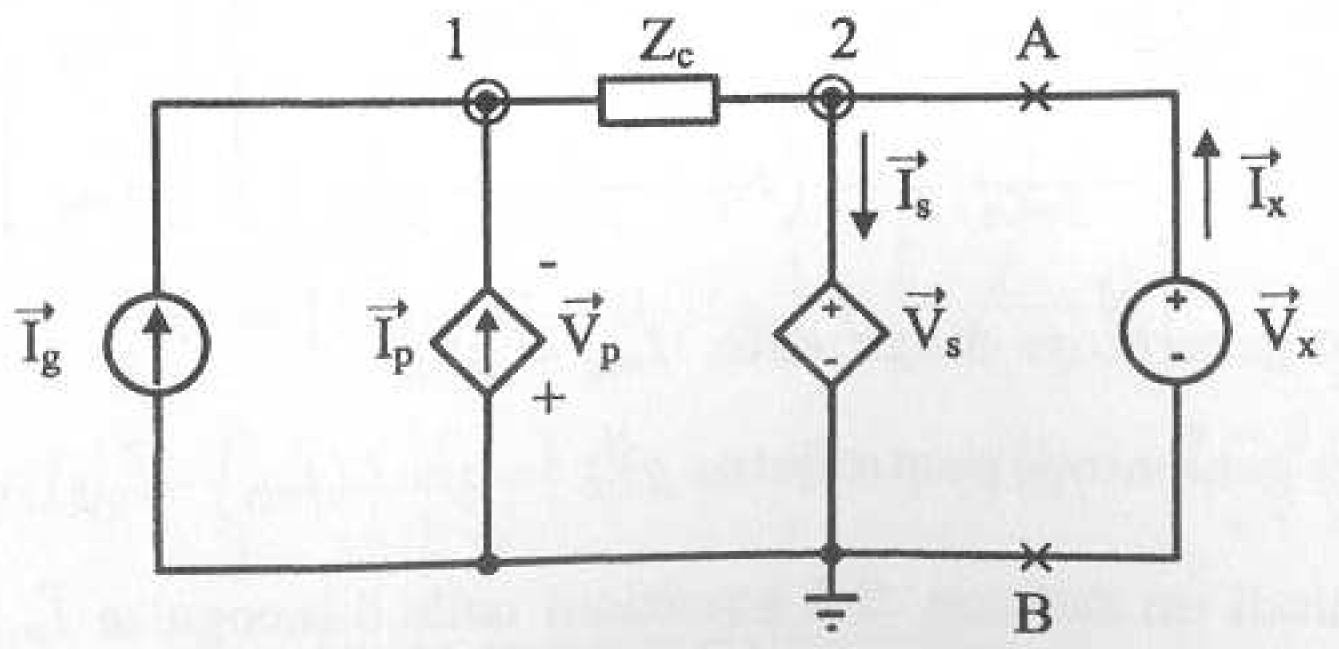
Nel circuito in figura, supposto in regime permanente sunusoidale, applicare il teorema di Norton alla parte di circuito a sinistra della coppia di morsetti A-B. Successivamente, calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore $R_u$.




$$V_g = -2\sin(3t)\ [V]\ ;\ I_g = \cos(3t)\ [A]\ ;\ C = \frac{1}{3}\ [F]\ ;\ R_g = 4\ [\Omega]\ ;\ R_u = \frac{1}{2}\ [\Omega].$$

**Svolgimento:**

Occorre applicare il teorema di Norton nel dominio dei fasori. Dal momento che è presente un trasformatore ideale, si usa un generatore di prova $\vec{V}_x$ per il calcolo congiunto di entrambi i parametri del circuito equivalente di Norton:




in cui $\omega = 3$ ed inoltre:

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\cdot \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}} = -j \Rightarrow Y_c = \frac{1}{Z_c} = j\,;$$



$$I_g(t) = \cos(3t) \Rightarrow \vec{I}_g = 1\,.$$

I vincoli imposti dal trasformatore ideale determinano invece:

$$\begin{cases} \vec{V}_s = 2\vec{V}_p \\ \vec{I}_s = -\frac{1}{2}\vec{I}_p \end{cases}$$

Si applica il metodo dei nodi per calcolare $\vec{I}_x$:

$$\begin{cases} Y_c\vec{E}_1 - Y_c\vec{E}_2 = \vec{I}_g + \vec{I}_p \\ -Y_c\vec{E}_1 + Y_c\vec{E}_2 = \vec{I}_x - \vec{I}_s \end{cases}$$

in cui $\vec{I}_x$ e $\vec{I}_s$ sono le incognite ausiliarie aggiunte, rispettivamente, per i generatori di tensione $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_s$.

- Equazioni di vincolo dei generatori di tensione:

$$-)\ \vec{V}_s = \vec{E}_2$$
$$-)\ \vec{V}_x = \vec{E}_2$$

- Equazioni di vincolo del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \vec{V}_s = 2\vec{V}_p = -2\vec{E}_1 \\ \vec{I}_p = -2\vec{I}_s \end{cases}$$

Dalla terza e quinta equazione si ottiene:

$$\vec{V}_s = \vec{E}_2 = 2\vec{V}_p = -2\vec{E}_1$$

che, utilizzando la quarta equazione, porta a:

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{2}\vec{E}_2 = -\frac{1}{2}\vec{V}_x\,.$$

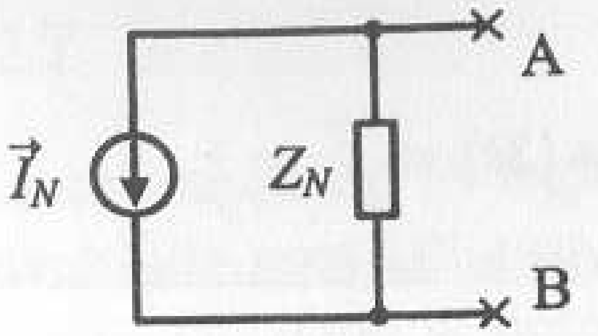
Sostituendo $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ed $\vec{I}_p$ (sesta equazione) nelle prime due equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} j\left(-\frac{1}{2}\vec{V}_x - \vec{V}_x\right) = 1 - 2\vec{I}_s \\ j\left(\frac{1}{2}\vec{V}_x + \vec{V}_x\right) = \vec{I}_x - \vec{I}_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}j\vec{V}_x = 1 - 2\vec{I}_s \\ \frac{3}{2}j\vec{V}_x = \vec{I}_x - \vec{I}_s \end{cases}$$

Dividendo per due la prima equazione e sottraendola alla seconda si ottiene:

$$\left(\frac{3}{2}j + \frac{3}{4}j\right)\vec{V}_x = \vec{I}_x - \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{I}_x = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}j\vec{V}_x$$

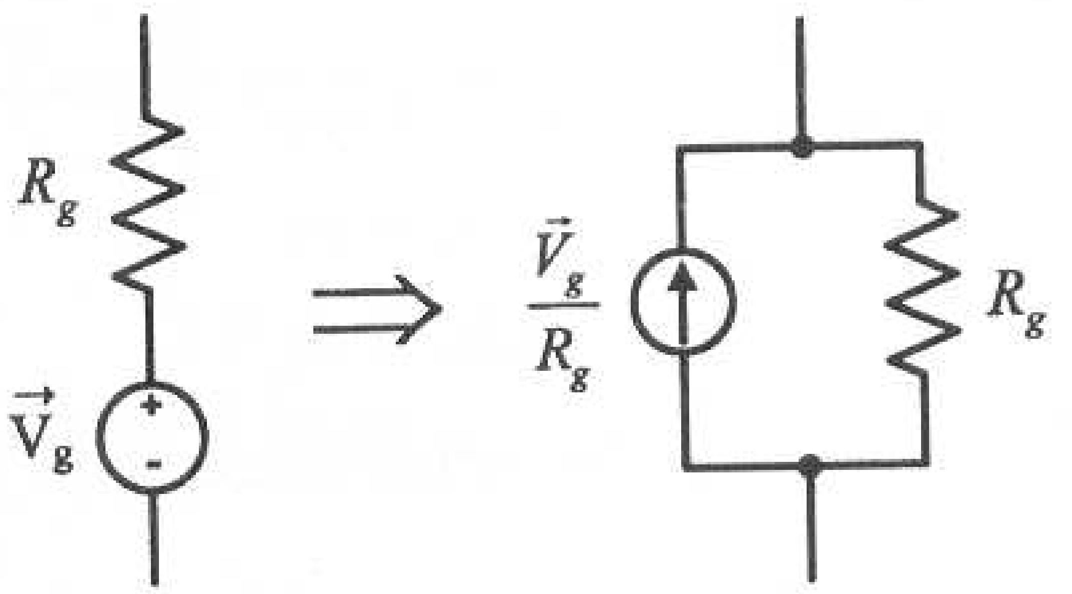
e in definitiva si ha quindi:




dove: $\begin{cases} \vec{I}_N = \dfrac{1}{2} \\ Z_N = -\dfrac{4}{9} j \end{cases}$

Ossia, il termine noto (pari a $\frac{1}{2}$) dell'ultima relazione corrisponde alla corrente $\vec{I}_N$ del circuito equivalente di Norton, mentre il termine proporzionale a $\vec{V}_x$ (pari a $\frac{9}{4}j$) corrisponde all'ammettenza $\left(\frac{1}{Z_N}\right)$.

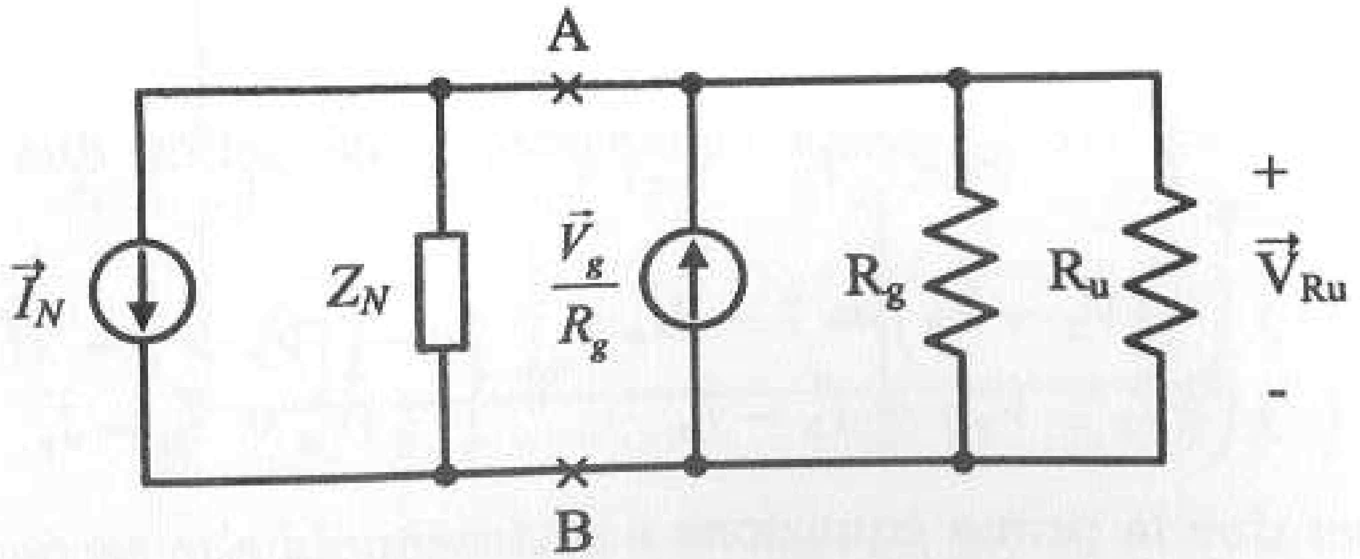
Per il calcolo della potenza attiva su $R_u$ si utilizza il modello di Norton appena calcolato e si effettua la trasformazione del generatore reale di tensione:




in cui

$$V_g(t) = -2\sin(3t) = -2\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{V}_g = -2e^{-j\frac{\pi}{2}} = -2(-j) = 2j\,.$$

Si ottiene così il circuito seguente:






Scrivendo l'unica equazione di nodo si ha

$$\left(\frac{1}{Z_N} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_u}\right)\vec{V}_{Ru} = -\vec{I}_N + \frac{\vec{V}_g}{R_g}\,,$$

da cui:

$$\left(\frac{9}{4}j + \frac{1}{4} + 2\right)\vec{V}_{Ru} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{4}j$$

$$\frac{9}{4}(1+j)\,\vec{V}_{Ru} = -\frac{1}{2}(1-j)$$

$$\vec{V}_{Ru} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{(1-j)}{(1+j)}\,.$$

La potenza attiva $P_{Ru}$, assorbita da $R_u$, sarà quindi pari a:

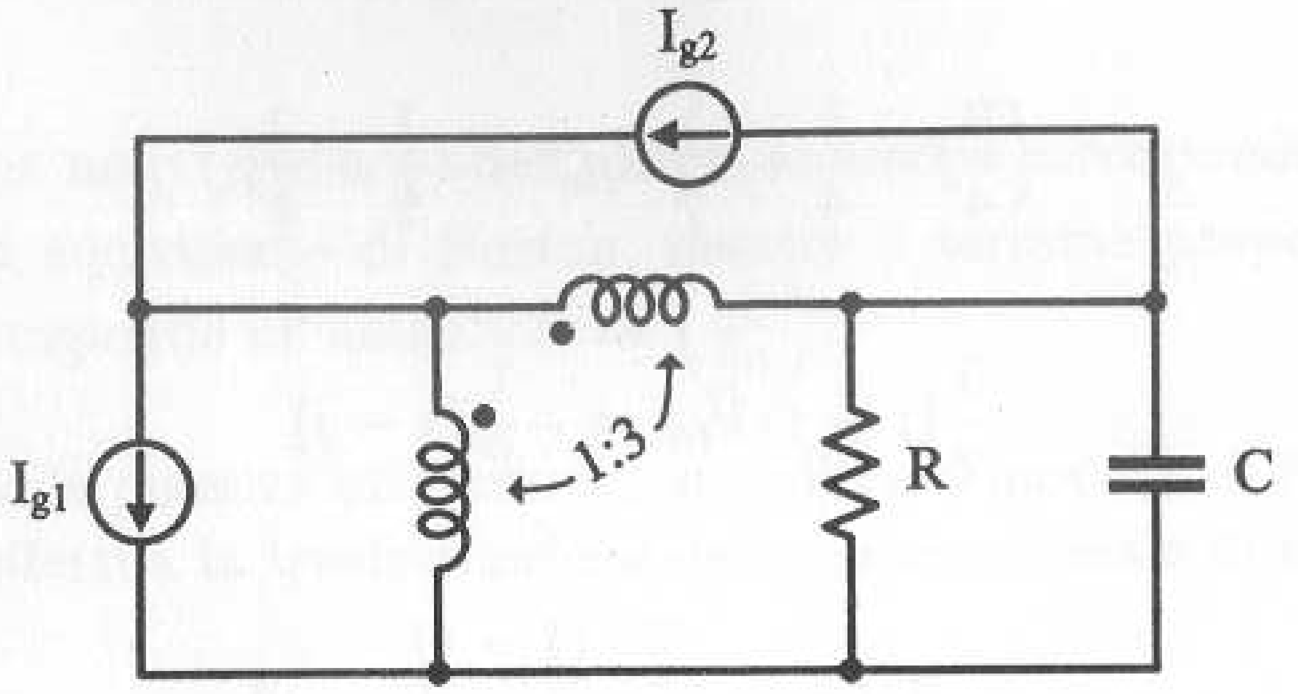
$$P_{Ru} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{V}_{Ru}\right|^2}{R_u} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\left[\frac{4}{81}\cdot\frac{|1-j|^2}{|1+j|^2}\right] = \frac{4}{81}$$

ovvero, in conclusione,

$$P_{Ru} = \frac{4}{81} = 49,4\ [mW]$$

## Esercizio 3.18

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, determinare la potenza attiva dissipata sul resistore $R$.

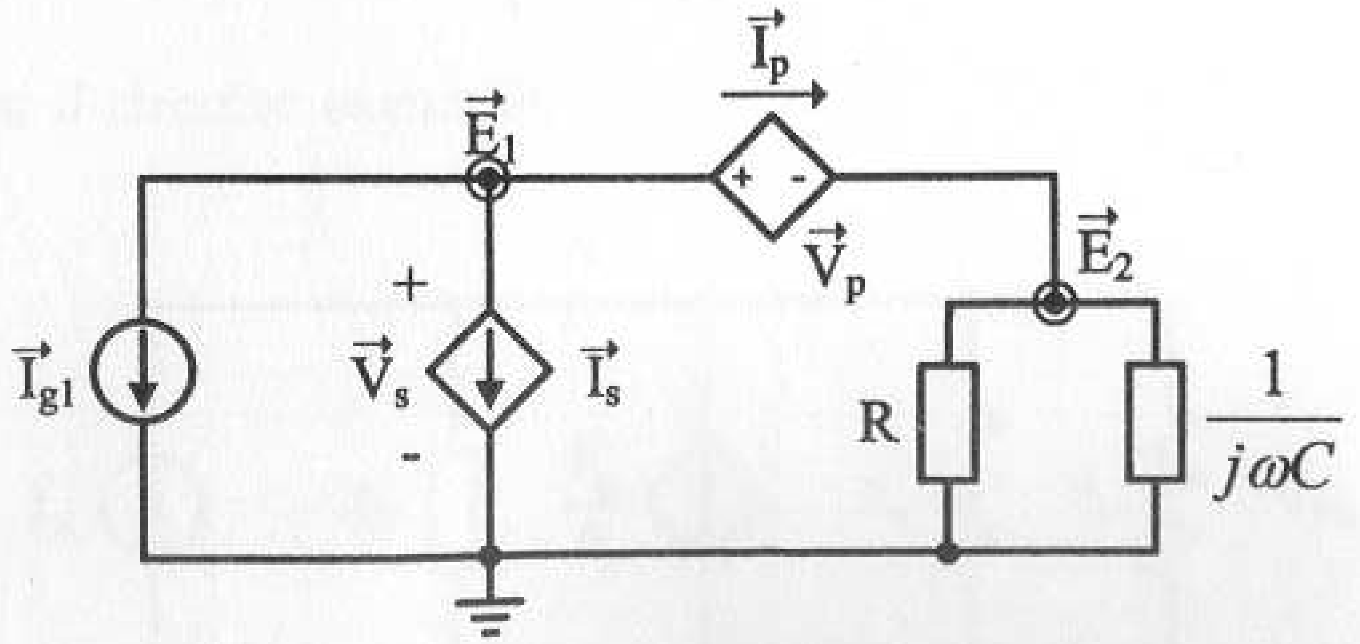



$$I_{g1}(t) = 5\cos(t)\,[A]\ ;\ I_{g2}(t) = \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)[A]\ ;\ R = \frac{1}{2}\,[\Omega]\ ;\ C = 1\,[F]\,.$$

### Svolgimento

Si utilizza il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi le due pulsazioni verranno analizzate separatamente.

$\omega = 1$) Si disattiva il generatore $I_{g2}$ ed il circuito diventa il seguente:




dove $\vec{I}_{g1} = 5$. Risolvendo il circuito con il metodo dei nodi, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{I}_p - \vec{I}_s - \vec{I}_{g1} \\ \vec{I}_p \end{bmatrix}$$





Per le condizioni imposte dal trasformatore ideale sarà:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = 3\vec{V}_s \Rightarrow \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 3\vec{E}_1 \\ \vec{I}_s = -3\vec{I}_p \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si ha $-\vec{I}_{g1} - \vec{I}_p - \vec{I}_s = 0$ e quindi

$$-\vec{I}_{g1} - \vec{I}_p + 3\vec{I}_p = 0 \Rightarrow \vec{I}_p = \frac{1}{2}\vec{I}_{g1}\,.$$

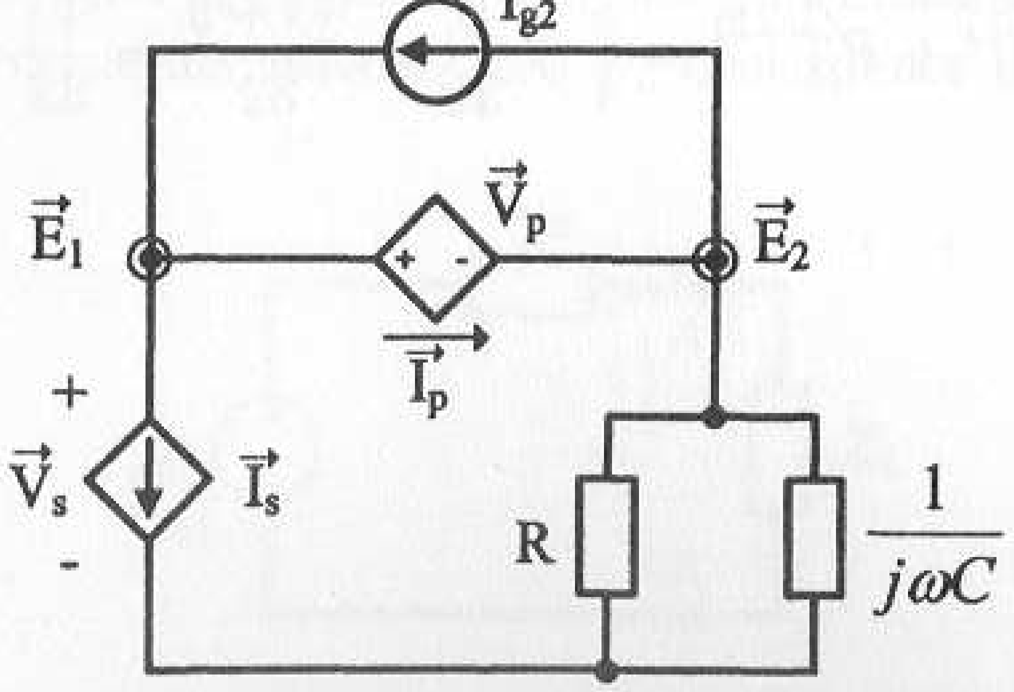
Dalla seconda equazione si può quindi ottenere il valore di $\vec{E}_2$:

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\vec{E}_2 = \vec{I}_p = \frac{1}{2}\vec{I}_{g1} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot \frac{1}{2 + j\cdot 1\cdot 1} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2+j}\,.$$

Il contributo di potenza per $\omega = 1$ è quindi:

$$P_R^{(\omega=1)} = \frac{\left|\vec{E}_2\right|^2}{2R} = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{|2+j|^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{4+1} = \frac{5}{4}\,.$$

$\omega = 2$) In questo caso si disattiva il generatore $I_{g1}$. Dal momento che $I_{g2}(t) = \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$, si ha $\vec{I}_{g2} = e^{j\frac{\pi}{4}}$ e il circuito diventa il seguente:




Analogamente al caso precedente, si risolve il circuito con il metodo dei nodi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{I}_p - \vec{I}_s + \vec{I}_{g2} \\ \vec{I}_p - \vec{I}_{g2} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione imposta dal trasformatore ideale, sarà:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = 3\vec{V}_s \Rightarrow \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 3\vec{E}_1 \\ \vec{I}_s = -3\vec{I}_p \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $-\vec{I}_p - \vec{I}_s + \vec{I}_{g2} = 0$ e quindi $-\vec{I}_p + 3\vec{I}_p + \vec{I}_{g2} = 0$, che equivale a scrivere

$$\vec{I}_p = -\frac{1}{2}\vec{I}_{g2}\,.$$

Dalla seconda equazione si ottiene quindi

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\vec{E}_2 = \vec{I}_p - \vec{I}_{g2} = -\frac{3}{2}\vec{I}_{g2}\,,$$

da cui deriva:

$$\vec{E}_2 = -\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2 + j\cdot 2\cdot 1} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{(1+j)}\,.$$

In questo caso, il contributo della potenza attiva sarà:

$$P_R^{(\omega=2)} = \frac{\left|\vec{E}_2\right|^2}{2R} = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{9}{32}\,.$$

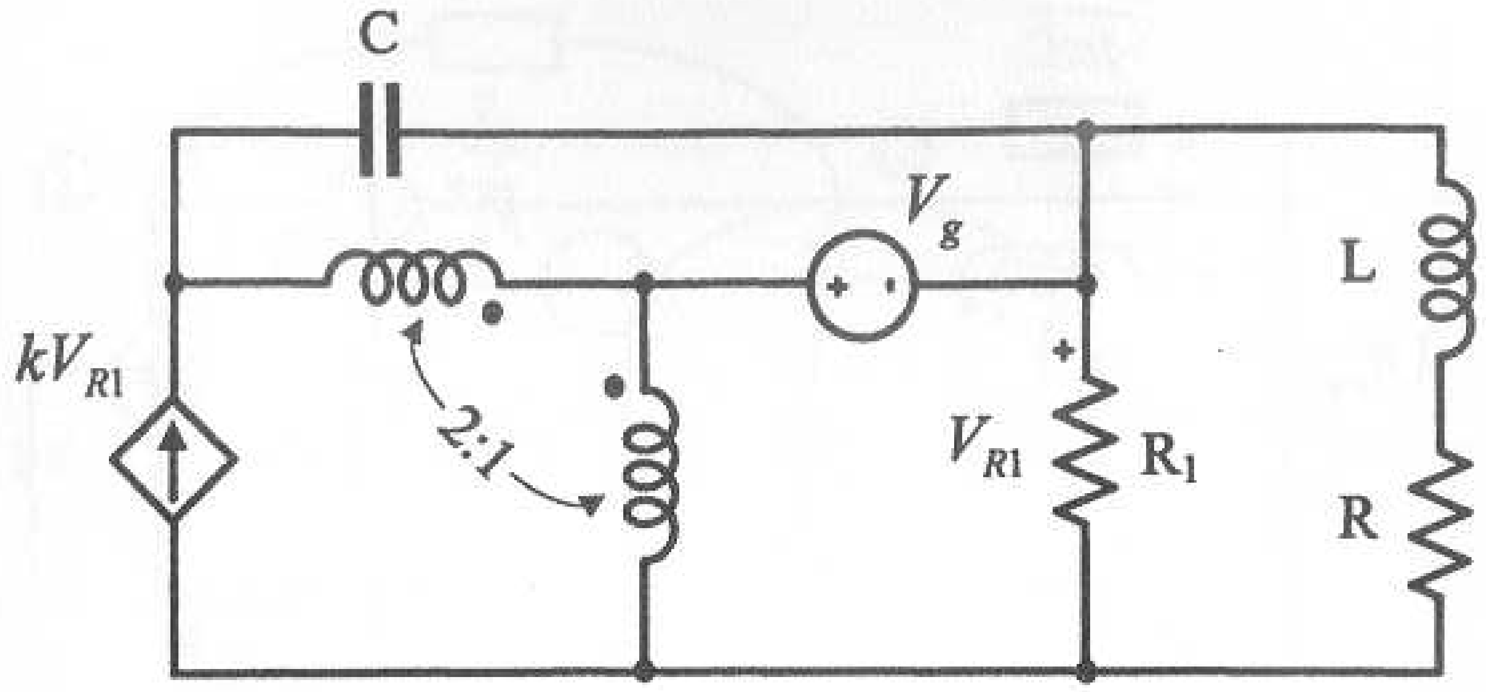
In totale, la potenza attiva dissipata su $R$ è

$$P_R = P_R^{(\omega=1)} + P_R^{(\omega=2)} = \frac{5}{4} + \frac{9}{32} = \frac{40+9}{32} = \frac{49}{32} = 1,531\,[W]$$



## Esercizio 3.19

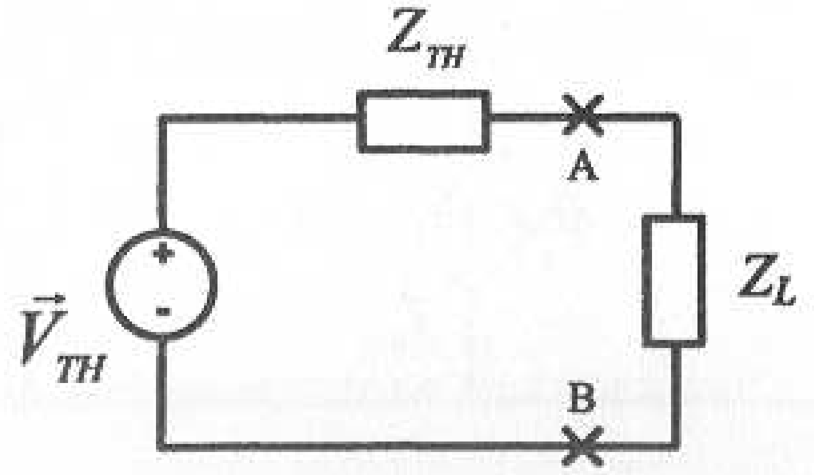
Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare i valori di $L$ ed $R$ affinché $R$ assorba la massima potenza attiva.




$$V_g(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right)[V]\ ;\ R_1 = 1\,[\Omega]\ ;\ C = 1\,[F]\ ;\ k = 1\,[A/V]\,.$$

### Svolgimento

In tale situazione è necessario applicare il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva nel dominio dei fasori. Poiché dobbiamo determinare i valori sia di $L$ che di $R$, bisogna applicare il teorema considerando l'impedenza serie costituita da $L$ e $R$ come un unico bipolo $Z_L$ costituente il carico da adattare:



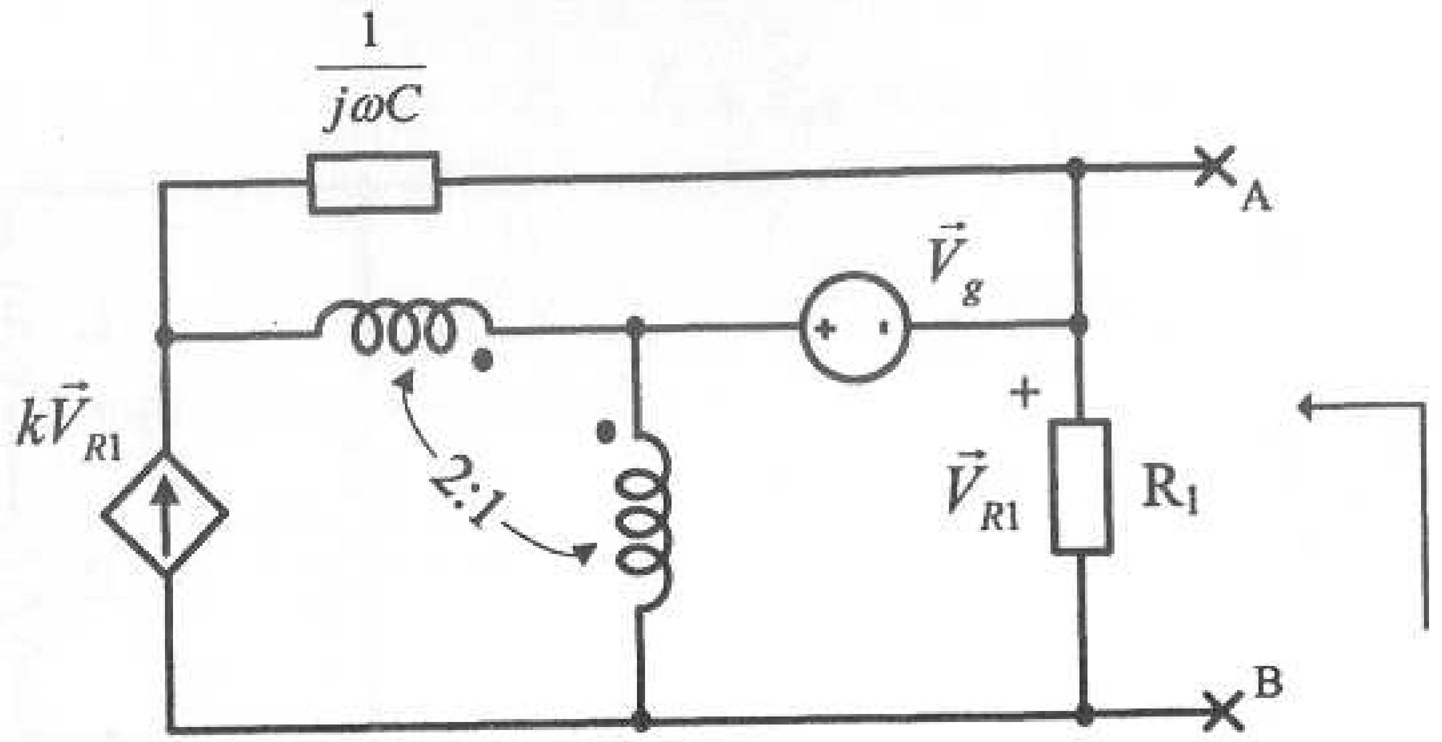

dove $Z_L = R + j\omega L$. Applicando il teorema si ottiene:

$$Z_L = Z_{TH}^* \Rightarrow R + j\omega L = \mathrm{Re}\{Z_{TH}\} - j\mathrm{Im}\{Z_{TH}\}\ ,$$

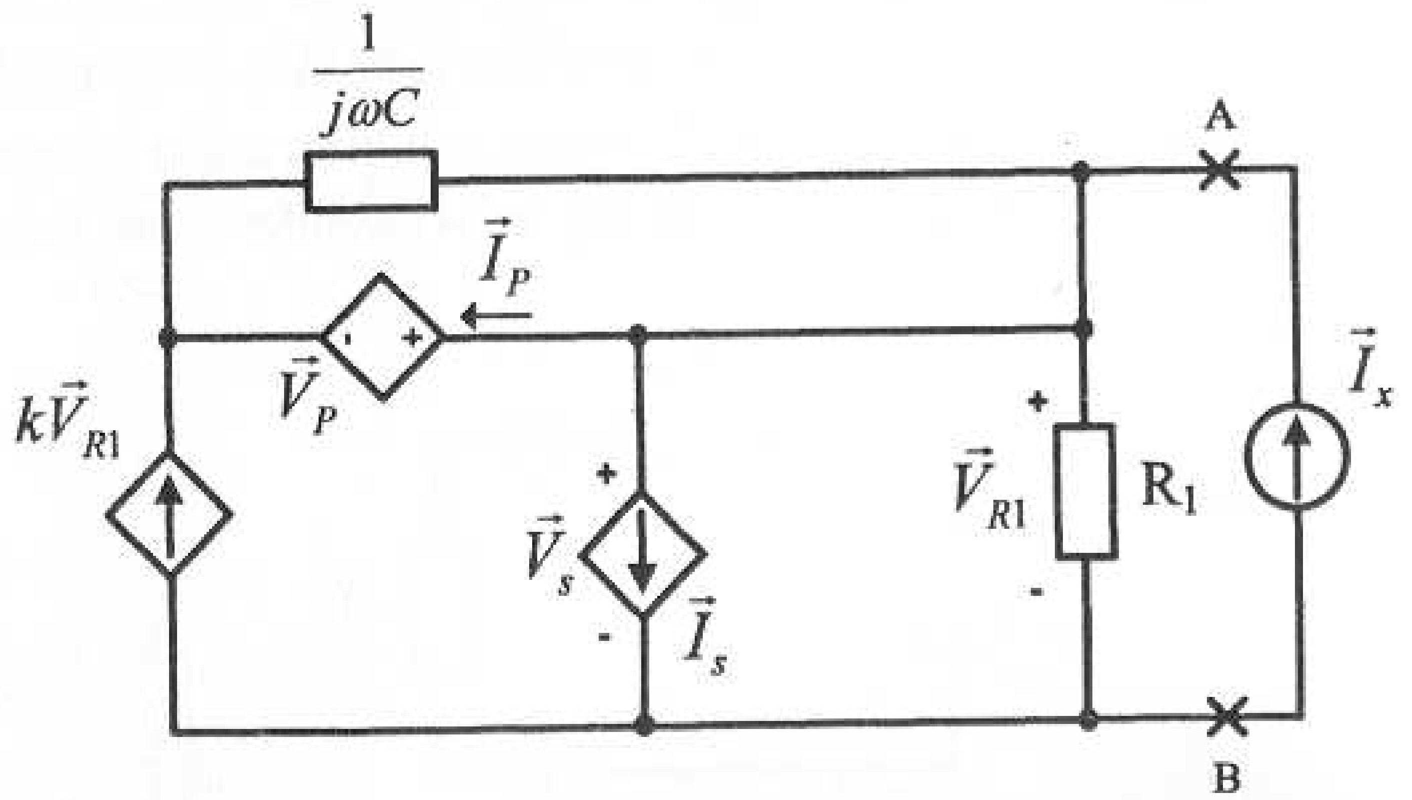
quindi avremo:

$$R = \mathrm{Re}\{Z_{TH}\}\,,\ L = -\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\{Z_{TH}\}\,,\ \text{con}\ \omega = \frac{1}{2}\,.$$

Il valore di $Z_{TH}$ si ottiene dall'applicazione del teorema di Thevenin, nel dominio dei fasori, a sinistra dei morsetti A-B del circuito di partenza, ovvero a sinistra della serie di $R$ ed $L$:




Poiché in tale circuito non sono presenti solo bipoli, ma anche un generatore controllato ed un trasformatore ideale, il valore di $Z_{TH}$ si ottiene utilizzando un generatore di prova (di corrente) $\vec{I}_x$, una volta disattivati i generatori indipendenti (cioè $\vec{V}_g$):

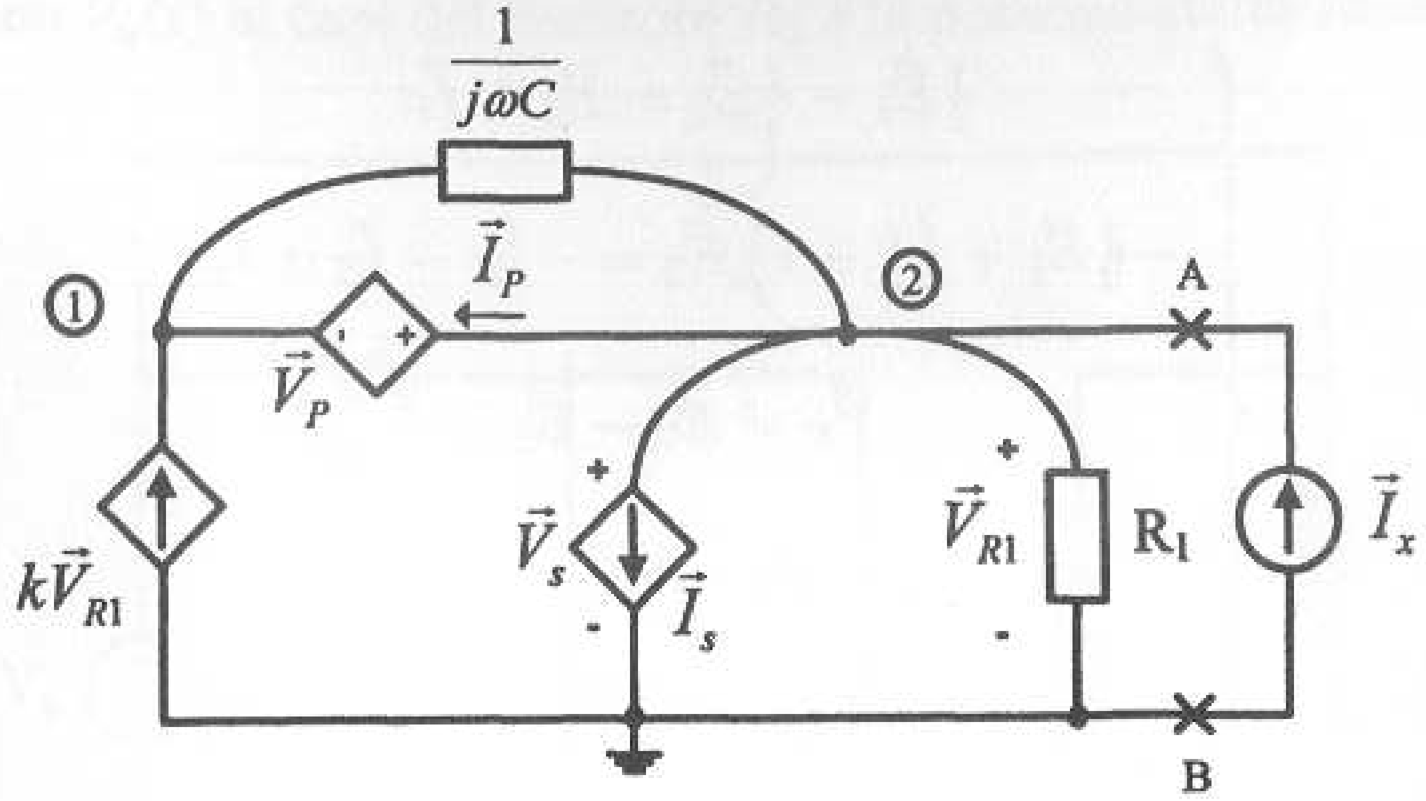



In questo caso abbiamo sostituito gli avvolgimenti del trasformatore ideale con un generatore di tensione controllato in tensione ed uno di corrente controllato in corrente:

$$\begin{cases} \vec{V}_P = 2\vec{V}_S \\ \vec{I}_S = -2\vec{I}_P \end{cases}$$



Poiché abbiamo disattivato un generatore di tensione, introducendo un cortocircuito, è conveniente ridisegnare il circuito:




Il circuito è pertanto composto da due nodi più quello di riferimento. Analizzando col metodo nodi:

$$\begin{bmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\vec{V}_{R_1} + \vec{I}_P \\ -\vec{I}_P - \vec{I}_S + \vec{I}_x \end{bmatrix}$$

in cui $\vec{I}_P$ è l'incognita ausiliaria aggiunta in corrispondenza del generatore di tensione $\vec{V}_P$.

- Equazioni di vincolo del generatore controllato:

$$k\vec{V}_{R_1} = k\vec{E}_2 \,.$$

- Equazioni di vincolo del generatore di tensione:

$$\vec{V}_P = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \,.$$

- Equazioni di vincolo del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \vec{V}_P = 2\vec{V}_S = 2\vec{E}_2 \\ \vec{I}_S = -2\vec{I}_P \end{cases}$$

Si noti, in questo caso, come $\vec{V}_S$ non sia un'incognita e vada quindi espressa in funzione di $\vec{E}_2$, mentre $\vec{I}_P$ è una incognita (aggiuntiva) del sistema risolvente. Sostituendo l'equazione di vincolo del generatore controllato otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{j}{2}\vec{E}_1 - \frac{j}{2}\vec{E}_2 = \vec{E}_2 + \vec{I}_P \\ -\frac{j}{2}\vec{E}_1 + \left(\frac{j}{2}+1\right)\vec{E}_2 = -\vec{I}_P - \vec{I}_S + \vec{I}_x \\ \vec{V}_P = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \\ \vec{V}_P = 2\vec{E}_2 \\ \vec{I}_S = -2\vec{I}_P \end{cases}$$

Per il calcolo di $Z_{TH}$ dobbiamo determinare la tensione ai capi dei morsetti A-B, ovvero $\vec{E}_2$. Confrontando la $3^a$ e la $4^a$ equazione si ha:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = 2\vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \, ;$$

sostituendo il valore di $\vec{E}_1$ nella $1^a$ equazione ed il valore di $\vec{I}_S$ (ottenuto dalla $5^a$ equazione) nella $2^a$ si ottiene:

$$\begin{cases} -j\vec{E}_2 = \vec{E}_2 + \vec{I}_P \\ (1+j)\,\vec{E}_2 = \vec{I}_P + \vec{I}_x \end{cases}$$

Sottraendo la $1^a$ equazione alla $2^a$ si ha:

$$(1+2j)\,\vec{E}_2 = -\vec{E}_2 + \vec{I}_x \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{2\,(1+j)}\vec{I}_x$$

e quindi

$$Z_{TH} = \frac{\vec{E}_2}{\vec{I}_x} = \frac{1}{2\,(1+j)} = \frac{1}{2\,(1+j)} \cdot \frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{(1-j)}{4} \, .$$

Dunque i valori di $R$ e $L$ saranno i seguenti:

$$R = \mathrm{Re}\{Z_{TH}\} = \frac{1}{4} = 0,25 \; [\Omega]$$

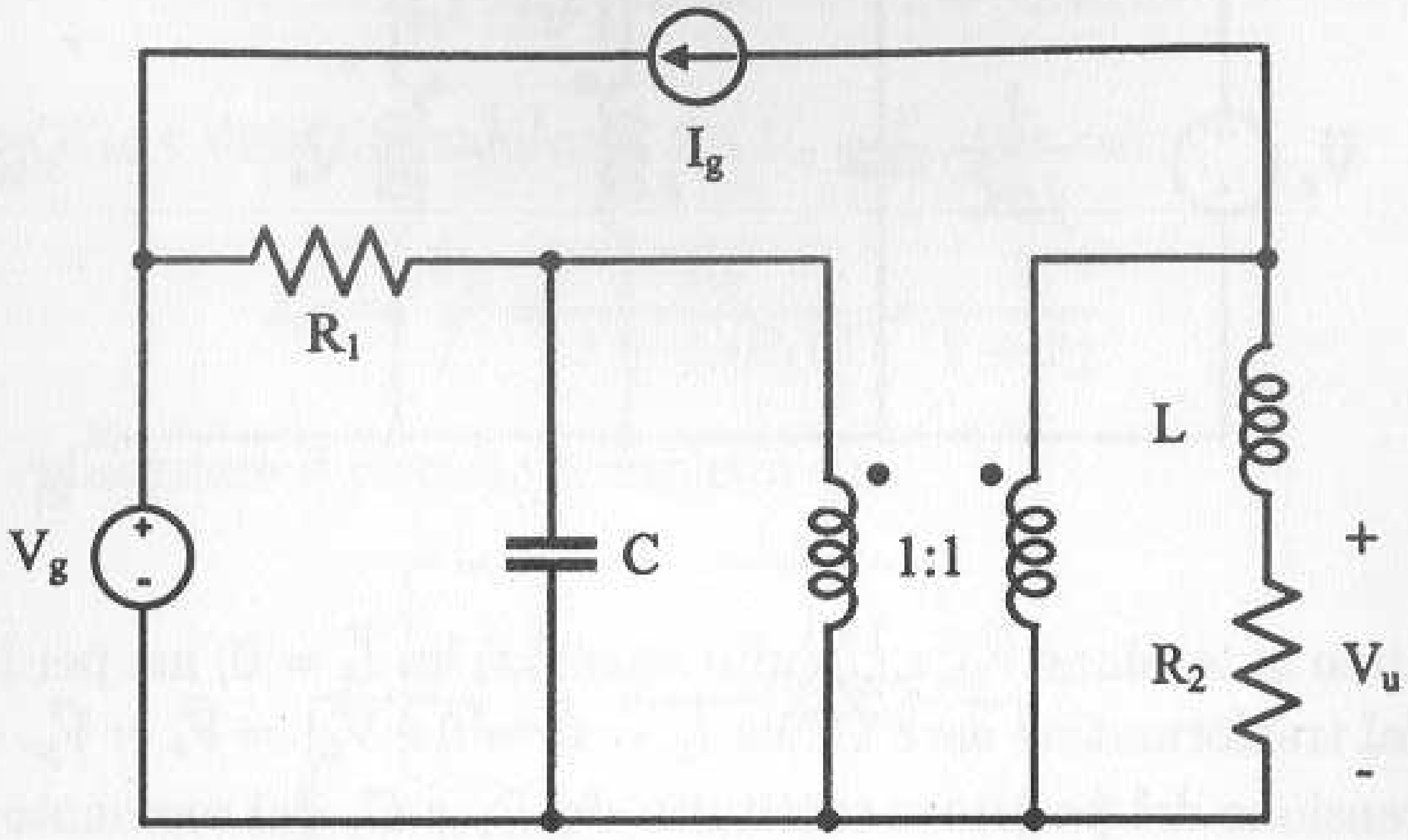
$$L = -\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\{Z_{TH}\} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = 0,5 \; [H] \, .$$





## Esercizio 3.20

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare l'andamento della tensione $V_u(t)$ ai capi del resistore $R_2$ e la potenza attiva in esso dissipata.



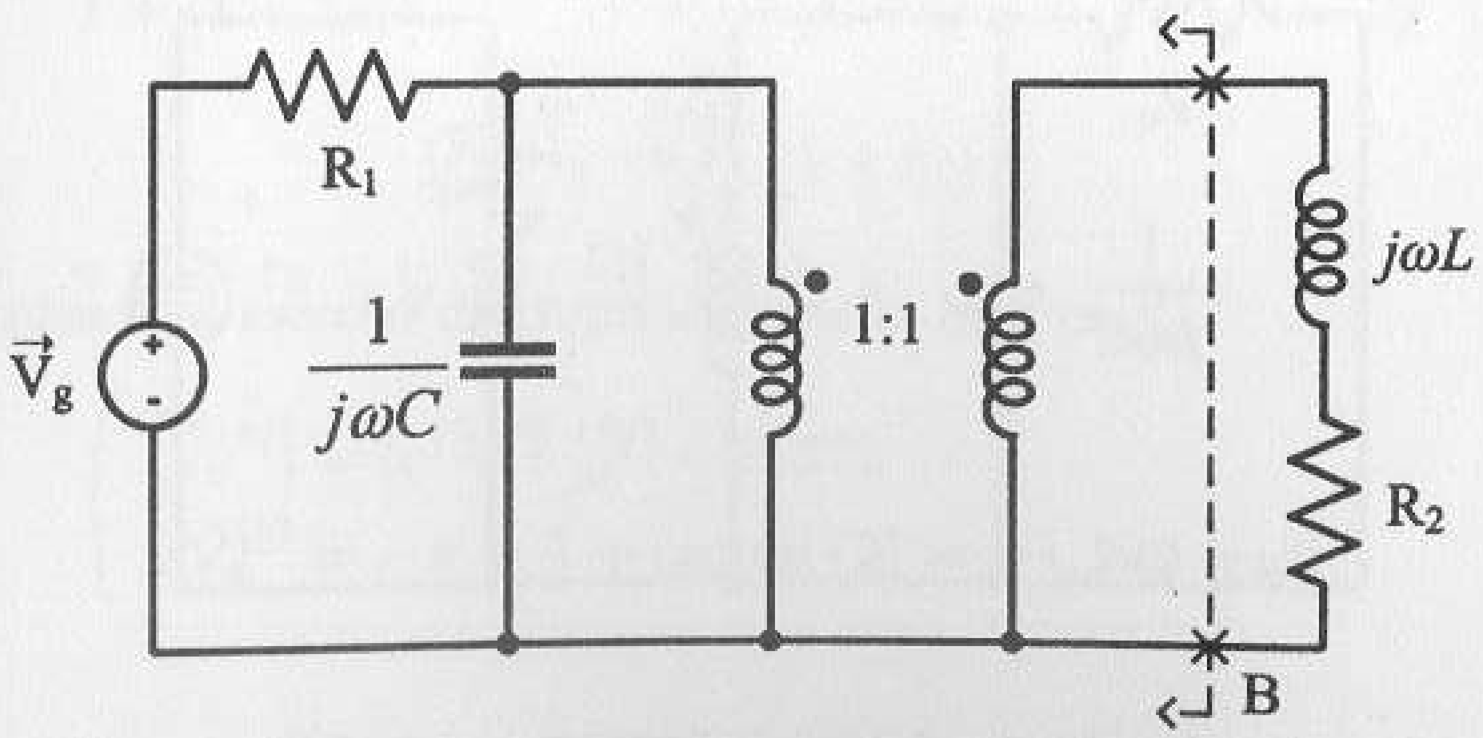

$$V_g(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \; [V] \; ; \; I_g(t) = \sin(t) \; [A] \; ;$$

$$R_1 = 1 \; [\Omega] \; ; \; R_2 = 1 \; [\Omega] \; ; \; C = 1 \, [F] \; ; \; L = 1 \; [H] \, .$$

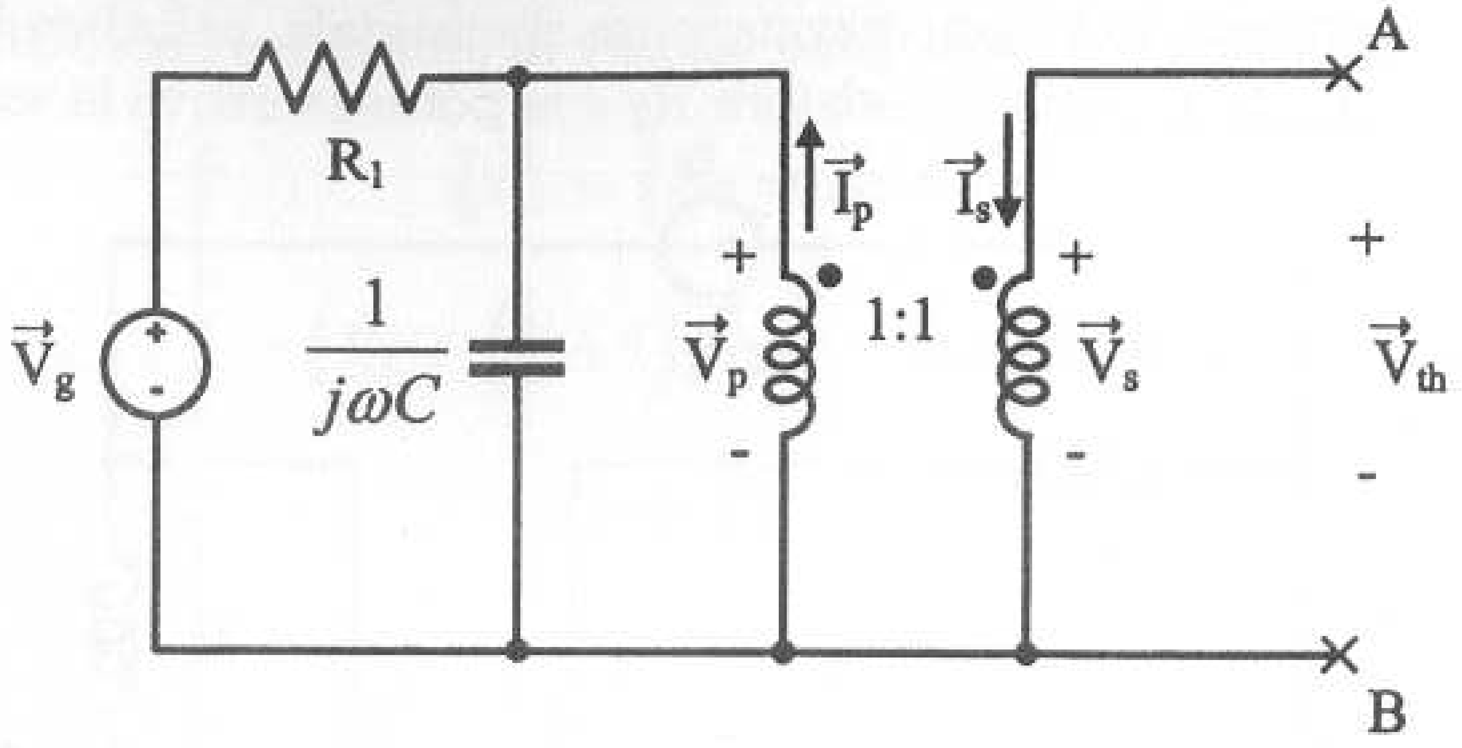
### Svolgimento

Dal momento che i generatori hanno frequenza differente si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

$\omega = 2$) Si divattiva il generatore di corrente $I_g$, che diventerà così un circuito aperto. Si analizza il circuito con il metodo dei fasori.



Si può applicare il teorema di Thevenin alla parte sinistra dei morsetti A-B:



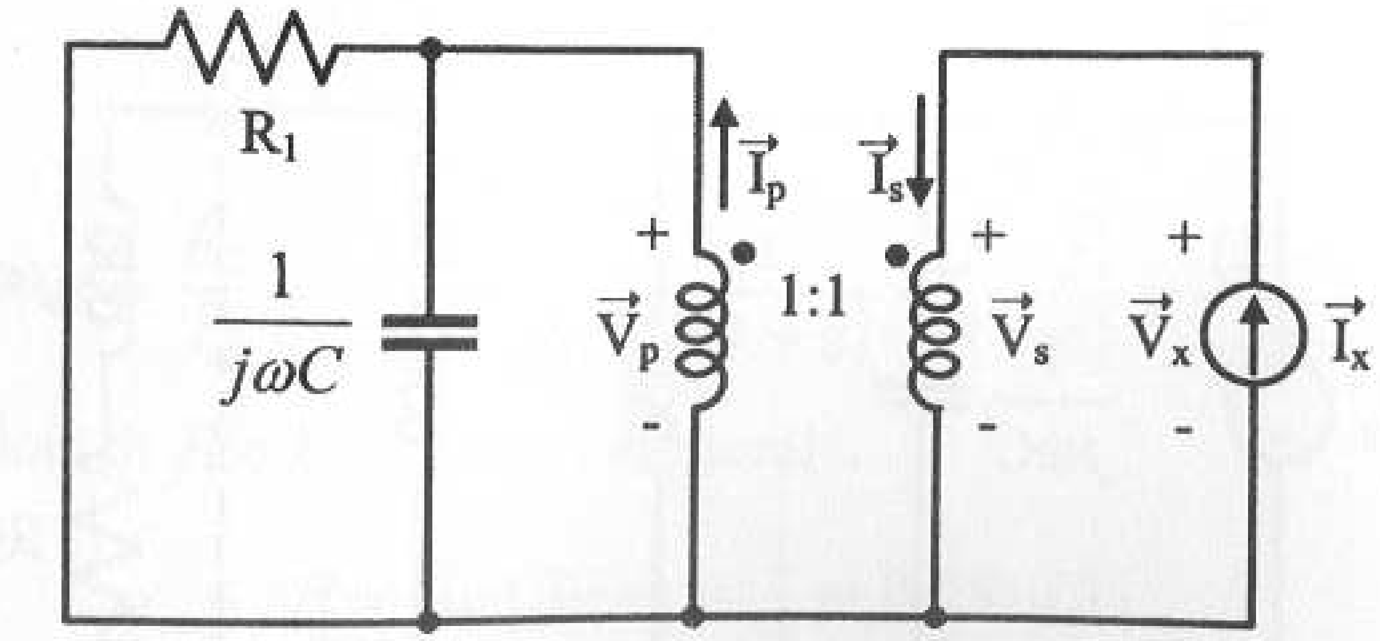

Considerando la tensione $\vec{V}_{th}$ a circuito aperto si ha $\vec{I}_s = 0$, ma per le condizioni imposte dal trasformatore sarà anche $\vec{I}_p = \vec{I}_s = 0$ e $\vec{V}_{th} = \vec{V}_s = \vec{V}_p$. Inoltre $\vec{V}_p$ è pari alla tensione del partitore costituito da $R_1$ e $C$, dal momento che $\vec{I}_p = 0$. Quindi si ha che:

$$\vec{V}_{th} = \vec{V}_p = \vec{V}_g \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \vec{V}_g \frac{1}{1 + j\omega R_1 C}.$$

Essendo $\omega = 2$ e $\vec{V}_g = e^{j\frac{\pi}{4}}$, si ottiene:

$$\vec{V}_{th} = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2j}.$$

Per calcolare il valore di $Z_{th}$ si usa un generatore di corrente di prova $\vec{I}_x$, dopo aver disattivato il generatore $\vec{V}_g$:




Come detto in precedenza, per le condizioni imposte dal trasformatore si ha che $\vec{I}_x = \vec{I}_s = \vec{I}_p$ (non compare il segno meno perchè $\vec{I}_p$ è uscente dal morsetto di





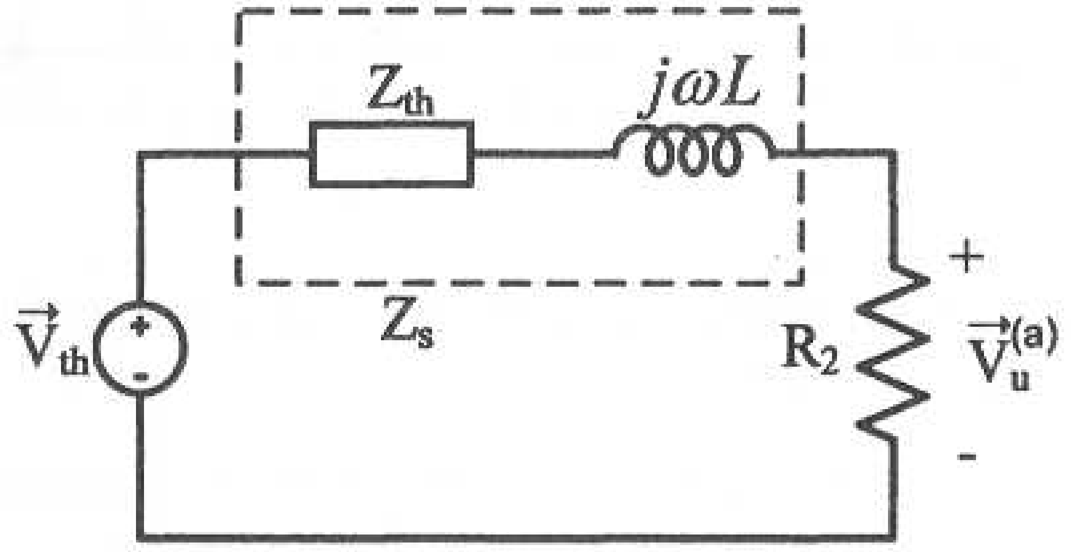
riferimento) e $\vec{V}_x = \vec{V}_s = \vec{V}_p$. Ma $\vec{V}_p$ è pari alla tensione sul parallelo costituito da $R_1$ e $\frac{1}{j\omega C}$, in cui scorre la corrente $\vec{I}_p$; quindi:

$$\vec{V}_x = \vec{V}_p = \vec{I}_p \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1}} = \vec{I}_x \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}.$$

L'impedenza $Z_{th}$ è data dal rapporto tra $\vec{V}_x$ e $\vec{I}_x$, per cui:

$$Z_{th} = \frac{\vec{V}_x}{\vec{I}_x} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{1}{1+2j}.$$

Si può così ridisegnare il circuito completo:




Per calcolare la tensione $\vec{V}_u^{(a)}$ basta considerare il partitore tra l'impedenza $Z_s$ e la resistenza $R_2$:

$$\vec{V}_u^{(a)} = \vec{V}_{th} \frac{R_2}{R_2 + Z_s} = \vec{V}_{th} \frac{R_2}{R_2 + j\omega L + Z_{th}} = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2j} \cdot \frac{1}{1 + 2j + \frac{1}{1+2j}}$$

$$\vec{V}_u^{(a)} = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + (1+2j)^2} = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + 1 - 4 + 4j} = -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2} \cdot \frac{1}{1-2j} \cdot \frac{1+2j}{1+2j}$$

$$\vec{V}_u^{(a)} = -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{10}(1+2j).$$

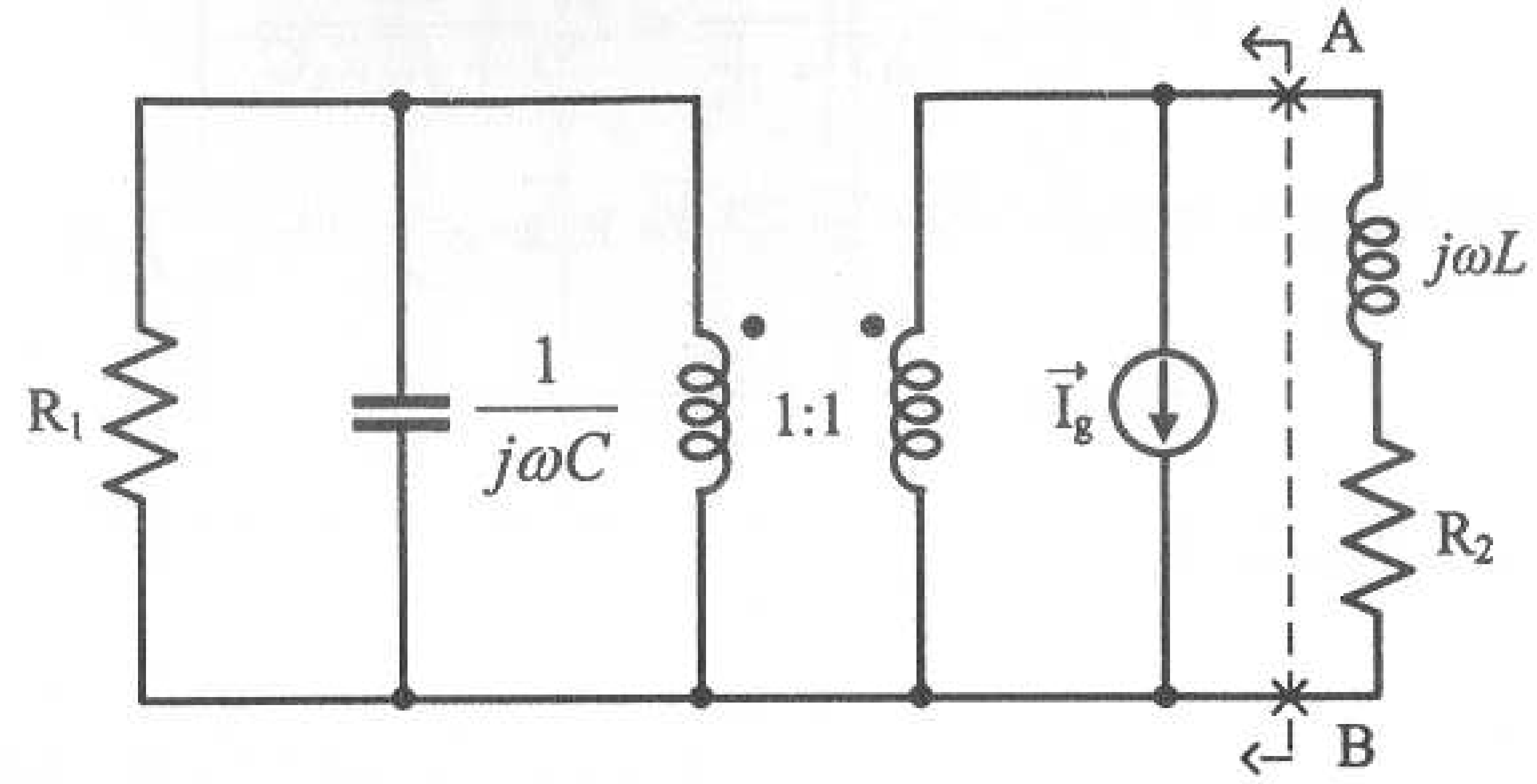
Si procede quindi al calcolo del modulo e della fase di $\vec{V}_u^{(a)}$:

$$\begin{cases} \left|\vec{V}_u^{(a)}\right| = \left|e^{j\frac{\pi}{4}}\right| \frac{|1+2j|}{10} = 0,223 \\ \angle \vec{V}_u^{(a)} = -\pi + \frac{\pi}{4} + \arctan(2) = -1,249 \text{ [rad]} \end{cases}$$

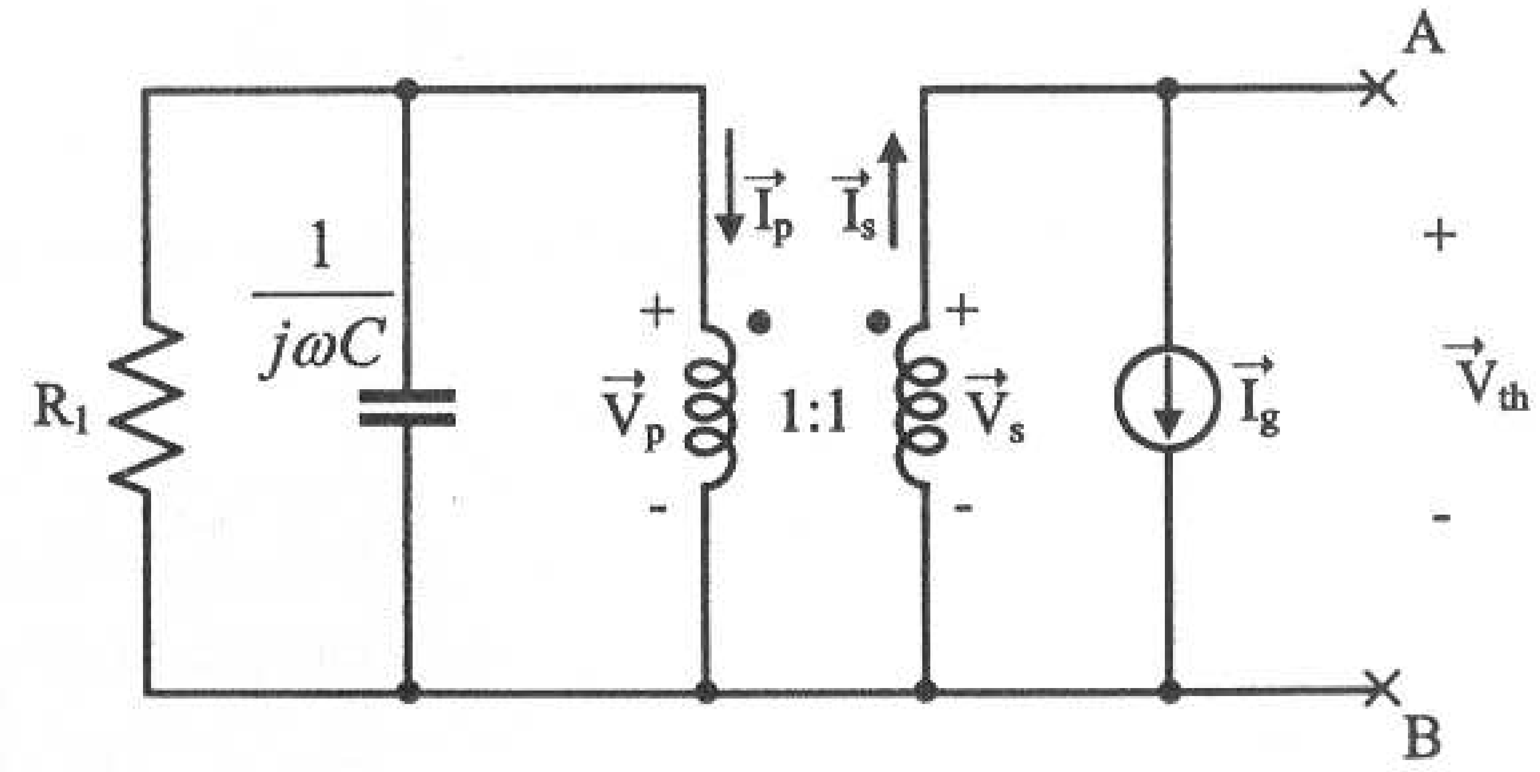
e quindi:

$$\vec{V}_u^{(a)}(t) = 0,223 \cos(2t - 1,249).$$

$\omega = 1$) Disattivando $V_g$, il nodo su cui convergono $R_1$ ed $I_g$ va a massa, per cui il circuito, nel dominio dei fasori, può essere ridisegnato come mostrato in figura:




Si può così applicare il teorema di Thevenin alla parte sinistra dei morsetti A-B:




Sempre per le condizioni imposte dal trasformatore, si avrà $\vec{I}_g = \vec{I}_s = \vec{I}_p$ e $\vec{V}_{th} = \vec{V}_s = \vec{V}_p$. Ma $\vec{V}_p$ è pari alla tensione sul parallelo costituito da $R_1$ e $C$, in cui scorre la corrente $\vec{I}_p$:

$$\vec{V}_{th} = \vec{V}_p = -\vec{I}_p \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1}} = -\vec{I}_g \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C},$$

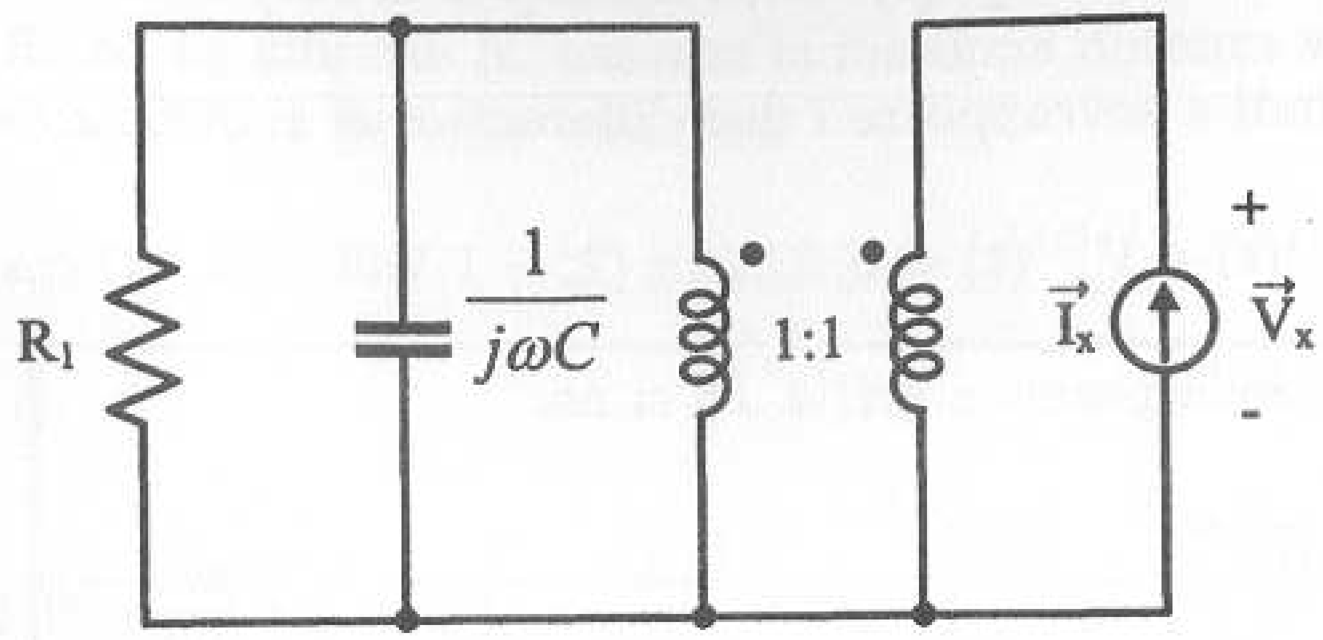
con $\omega = 1$ e $\vec{I}_g = -j$, perchè $I_g(t) = \sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi:

$$\vec{V}_{th} = \frac{j}{1+j}.$$





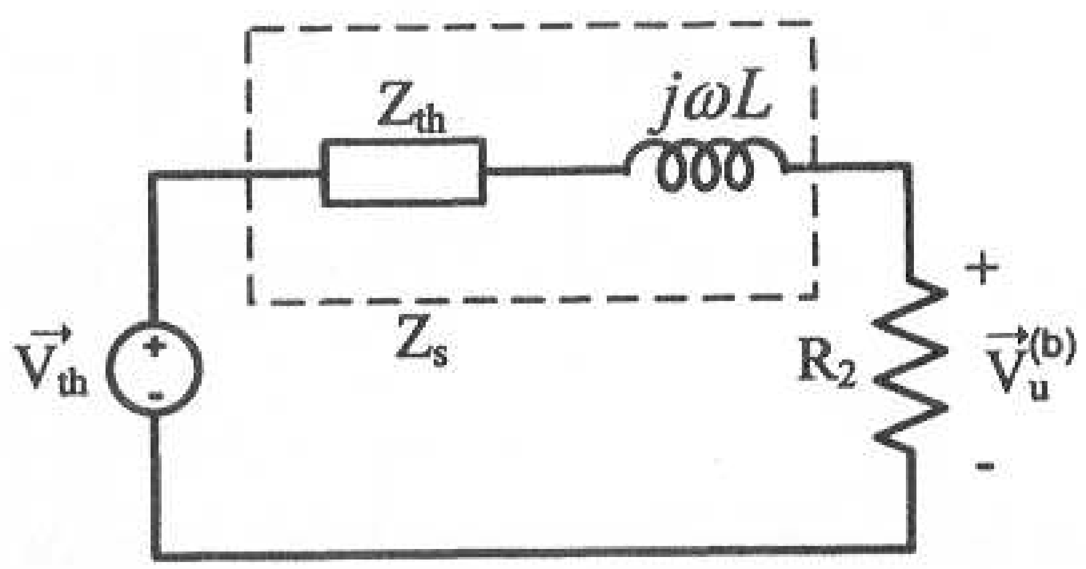
Analogamente al caso precedente, per il calcolo di $Z_{th}$ si utilizza un generatore di prova $\vec{I}_x$ e si disattiva il generatore $\vec{I}_g$:




Valgono gli stessi calcoli del caso precedente, ovviamente con un diverso valore di $\omega$:

$$Z_{th} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{1}{1+j}.$$

Si può quindi ridisegnare il circuito e procedere come nel caso precedente:




$$\vec{V}_u^{(b)} = \vec{V}_{th} \frac{R_2}{R_2 + Z_s} = \vec{V}_{th} \frac{R_2}{R_2 + j\omega L + Z_{th}} = \frac{j}{1+j} \cdot \frac{1}{1 + j + \frac{1}{1+j}}$$

$$\vec{V}_u^{(b)} = \frac{j}{(1+j)^2 + 1} = \frac{j}{1+2j} = \frac{j}{1+2j} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{j+2}{5}.$$

Si calcolano, infine, modulo e fase di $\vec{V}_u^{(b)}$:

$$\begin{cases} \left|\vec{V}_u^{(b)}\right| = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447 \\ \angle \vec{V}_u^{(b)} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0,463 \text{ [rad]} \end{cases}$$

da cui deriva il contributo nel tempo

$$V_u^{(b)}(t) = 0,447\cos(t + 0,463)\ .$$

Andando quindi a sovrapporre i due differenti casi si ottiene:

$$V_u(t) = V_u^{(a)}(t) + V_u^{(b)}(t) = 0,223\cos(2t - 1,249) + 0,447\cos(t + 0,463)\ .$$

Per il calcolo della potenza attiva $P_a$ si ha:

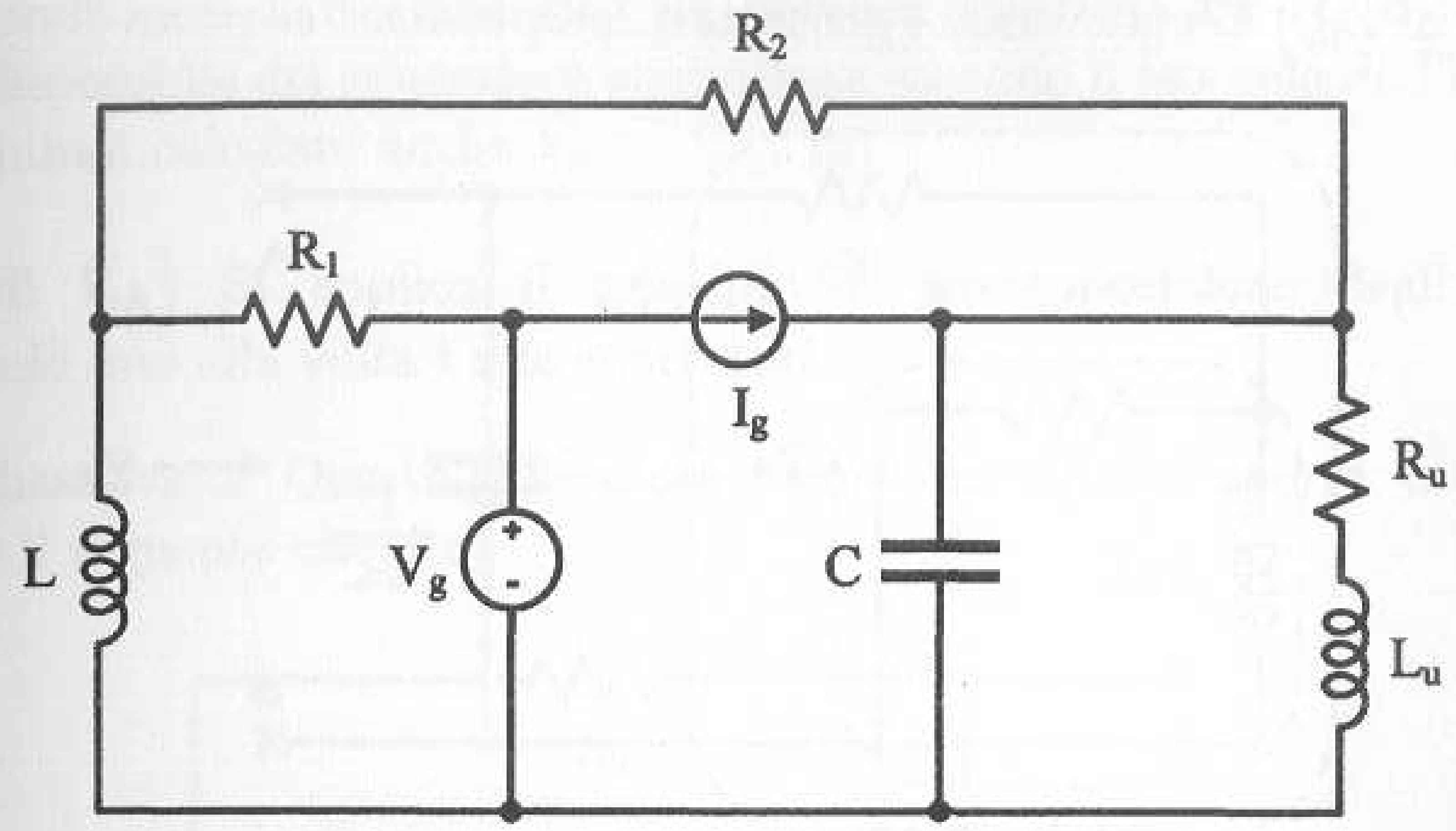
$$P_a = \frac{\left|\vec{V}_u^{(a)}\right|^2}{2R_2} + \frac{\left|\vec{V}_u^{(b)}\right|^2}{2R_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{100} + \frac{5}{25}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{100} = 0,125\ [W]$$





## Esercizio 3.21

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare il valore di $R_u$ ed $L_u$ affinché $R_u$ assorba la massima potenza attiva. Calcolare, inoltre, il valore di tale potenza massima.

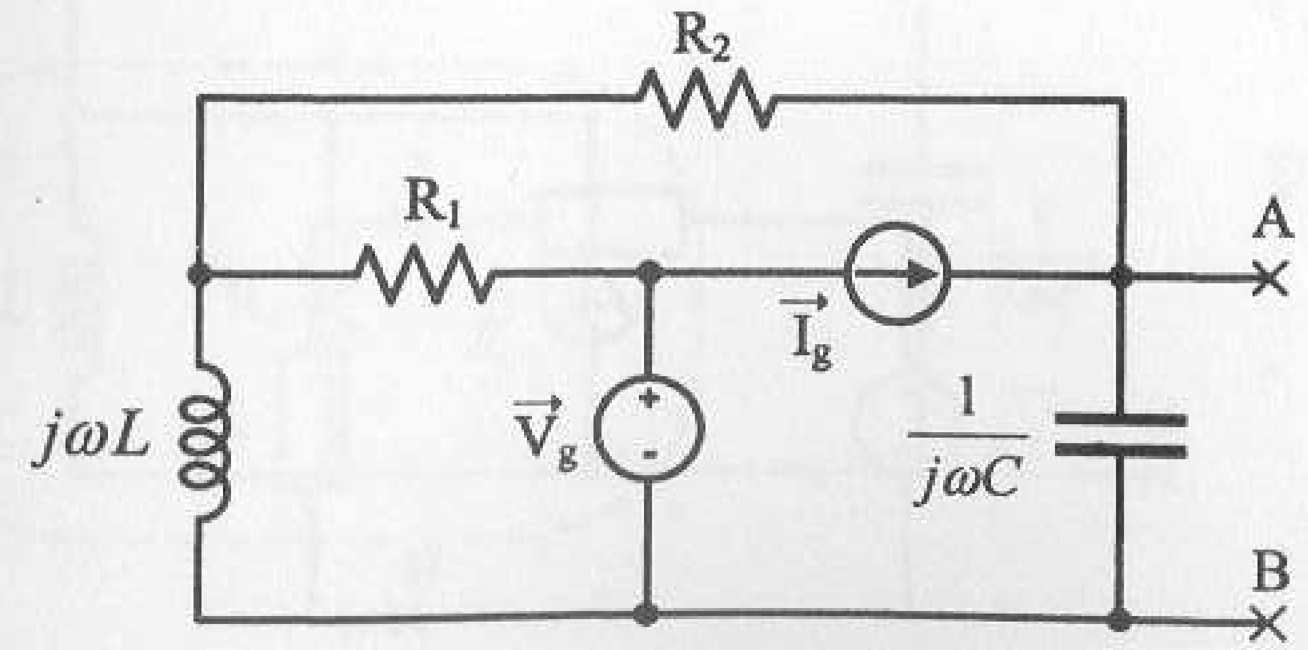



$$C = 1\ [F]\ ;\ L = \frac{1}{2}\ [H]\ ;\ R_1 = 1\ [\Omega]\ ;\ R_2 = 1\ [\Omega]\ ;$$

$$V_g(t) = 2\cos(t)\ [V]\ ;\ I_g(t)\ \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\ [A]\ .$$

### Svolgimento

Per il calcolo di $R_u$ ed $L_u$ si deve usare il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva. Innanzitutto si applica il teorema di Thevenin, nel dominio dei fasori, al circuito che risulta ai capi di $R_u$ ed $L_u$:

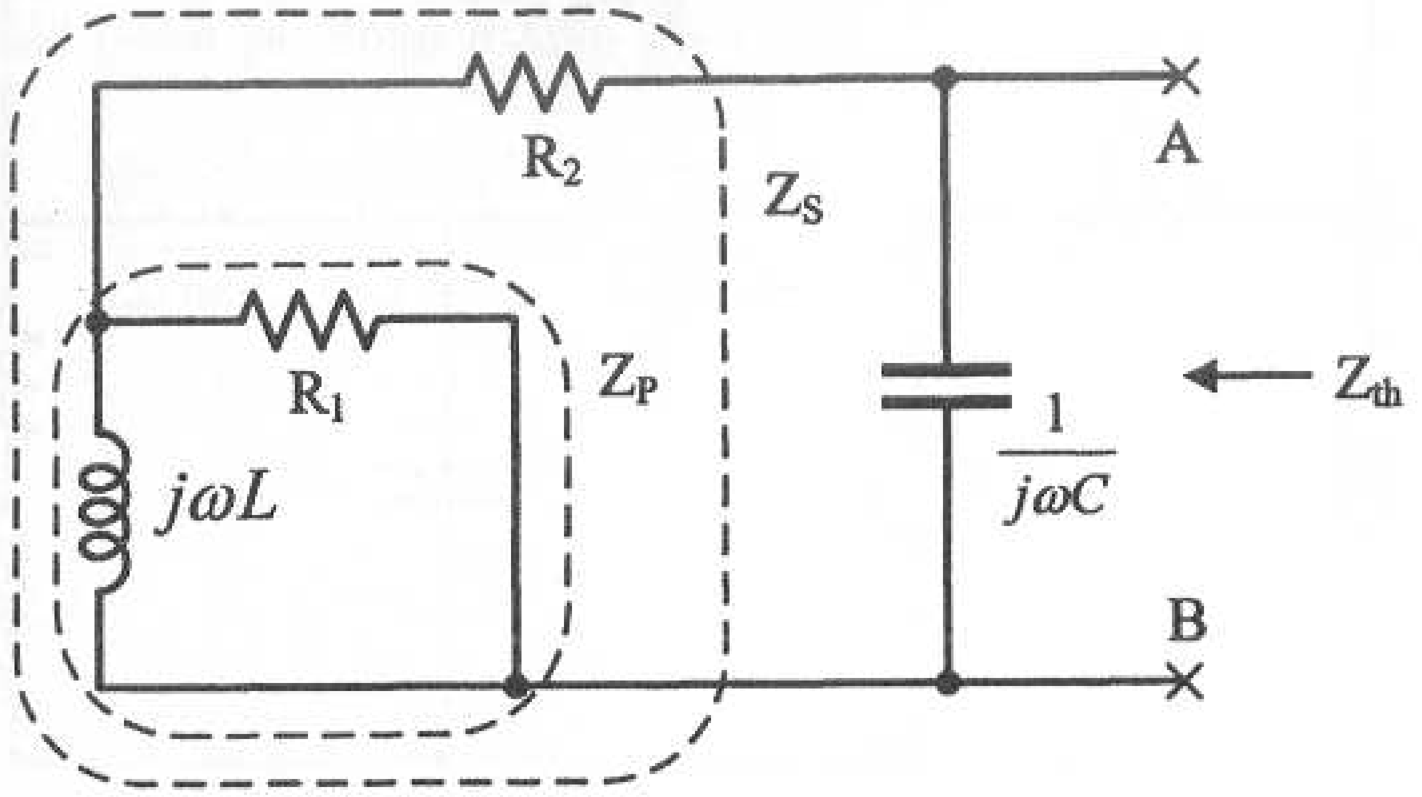


dove risulta

$$\omega = 1\,;\; \vec{V}_g = 2\,;\; \vec{I}_g = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\,.$$

Essendo questo circuito composto da soli bipoli, si possono calcolare disgiuntamente i parametri $Z_{th}$ e $\vec{V}_{th}$ del circuito equivalente di Thevenin.

Calcolo di $Z_{th}\big)$ Disattivando i generatori indipendenti si avrà:

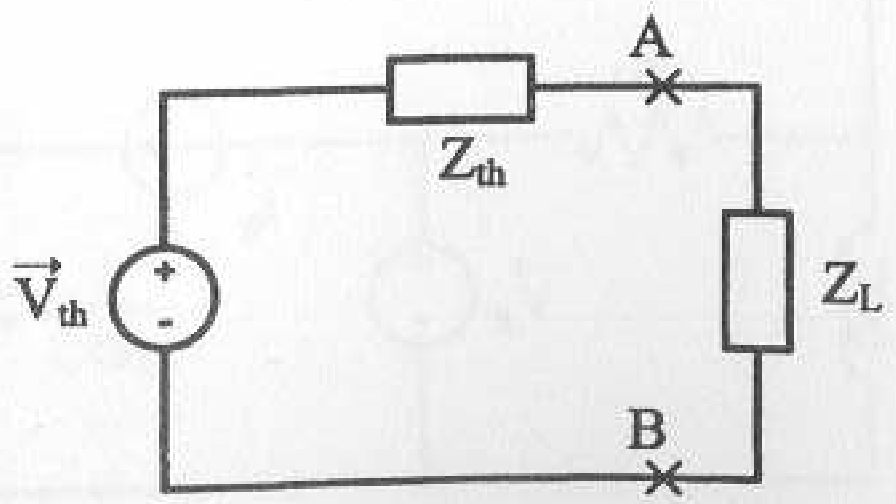



L'impedenza $Z_{th}$ è il parallelo tra $\frac{1}{j\omega C}$ e l'impedenza $Z_S$, che a sua volta risulta essere la serie di $R_2$ e l'impedenza $Z_P$ parallelo tra $R_1$ e $j\omega L$. Si ottiene così:

$$Z_{th} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{Z_S}} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_2 + Z_P}} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_2 + \frac{j\omega L R_1}{j\omega L + R_1}}} = \frac{1}{j + \frac{1}{1 + \frac{\frac{j}{2}}{\frac{j}{2}+1}}}$$

$$Z_{th} = \frac{1}{j + \frac{\frac{j}{2}+1}{\frac{j}{2}+1+\frac{j}{2}}} = \frac{1+j}{j-1+\frac{j}{2}+1} = \frac{1+j}{\frac{3}{2}j} = \frac{2}{3}(1-j)\,.$$

La configurazione cui si perviene dopo l'applicazione del teorema di Thevenin è la seguente:







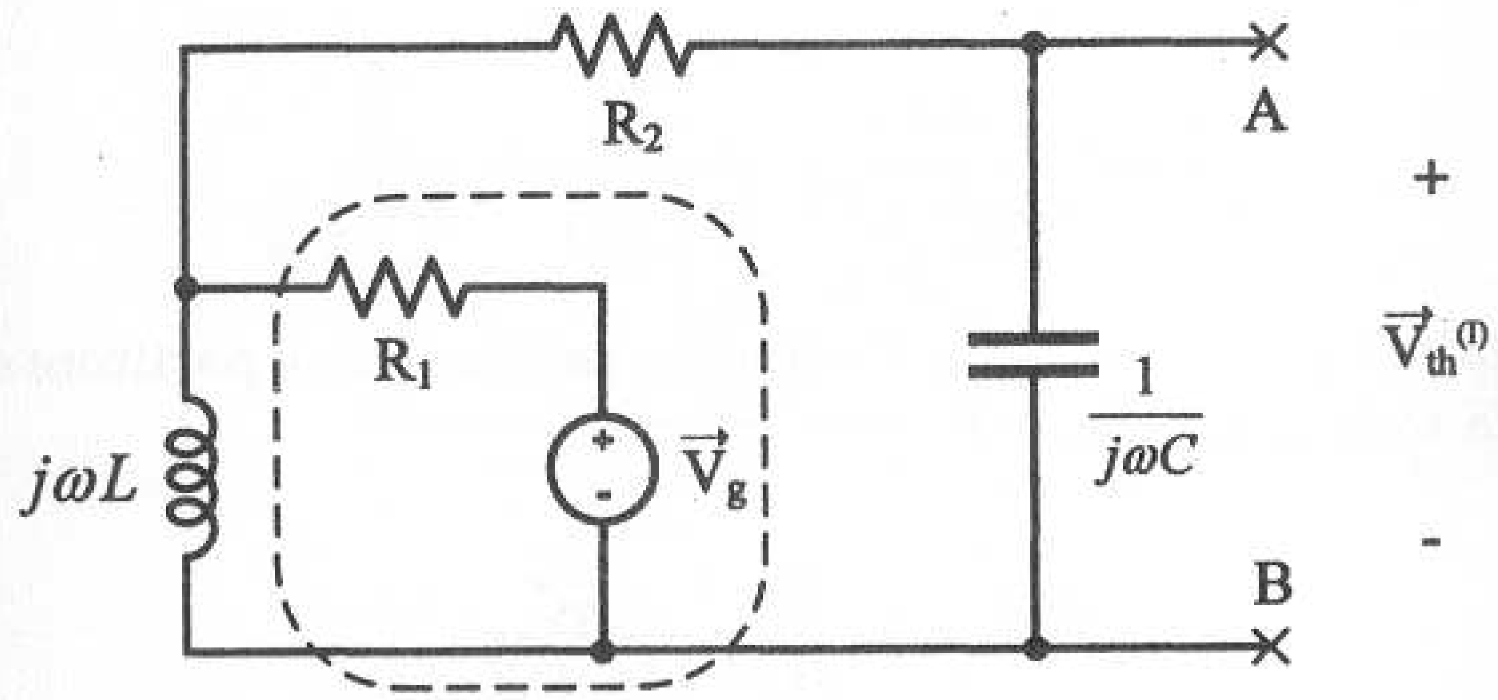

in cui $R_u$ ed $L_u$ costituiscono l'impedenza serie $Z_L = R_u + j\omega L_u$ da adattare. Per il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva deve essere $Z_L = Z_{th}^* = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}j$ e quindi:

$$R_u = \frac{2}{3} = 0{,}66\ [\Omega]\ ;\ L_u = \frac{2}{3\omega} = \frac{2}{3} = 0{,}66\ [H]$$

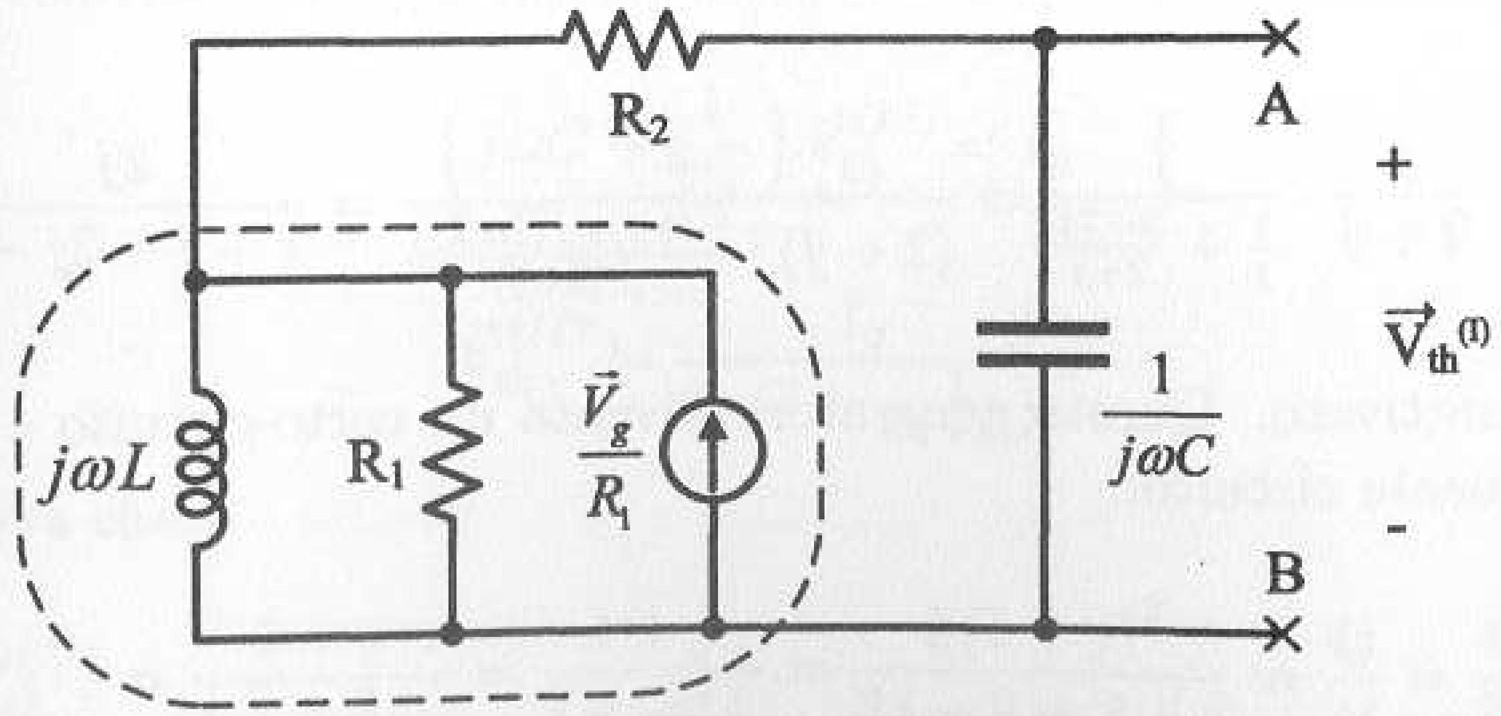
In tale condizione di adattamento, la potenza assorbita da $R_u$ è pari alla potenza disponibile del generatore equivalente secondo il teorema di Thevenin. Occorre quindi calcolare anche $\vec{V}_{th}$.

Calcolo di $\vec{V}_{th}\big)$ Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti, disattivando uno alla volta i due generatori.

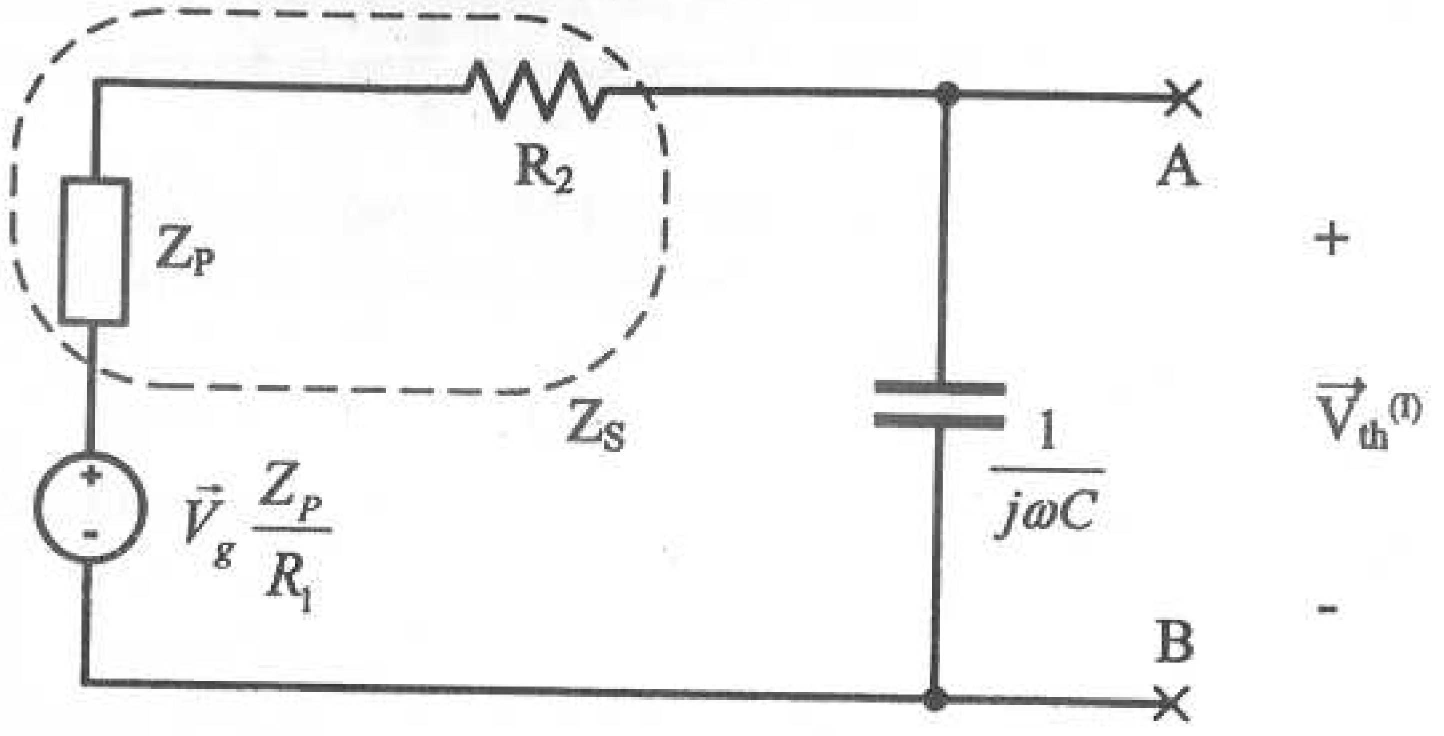
- $\vec{I}_g$ disattivato. Questo generatore diventa un circuito aperto, ottenendo così il seguente circuito:




Trasformando il generatore di tensione, evidenziato in figura, nell'equivalente generatore reale di corrente, si ha:



Se si considera ora l'impedenza parallelo $Z_P$ tra $R_1$ e $j\omega L$, si può trasformare il generatore reale di corrente (evidenziato nella precedente figura) in un equivalente generatore reale di tensione. Si ottiene quindi:




dove

$$Z_P = \frac{j\omega L R_1}{j\omega L + R_1} = \frac{\frac{j}{2}}{1+\frac{j}{2}} = \frac{j}{2+j}\,.$$

Dunque il primo contributo a $\vec{V}_{th}$ si ottiene considerando il partitore di tensione tra $\frac{1}{j\omega C}$ e la serie $Z_S$ di $R_2$ e $Z_P$:

$$\vec{V}_{th}^{(I)} = \vec{V}_g \frac{Z_P}{R_1} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + Z_S}\,,$$

in cui

$$Z_S = R_2 + Z_P = 1 + \frac{j}{2+j} = \frac{2+2j}{2+j}\,.$$

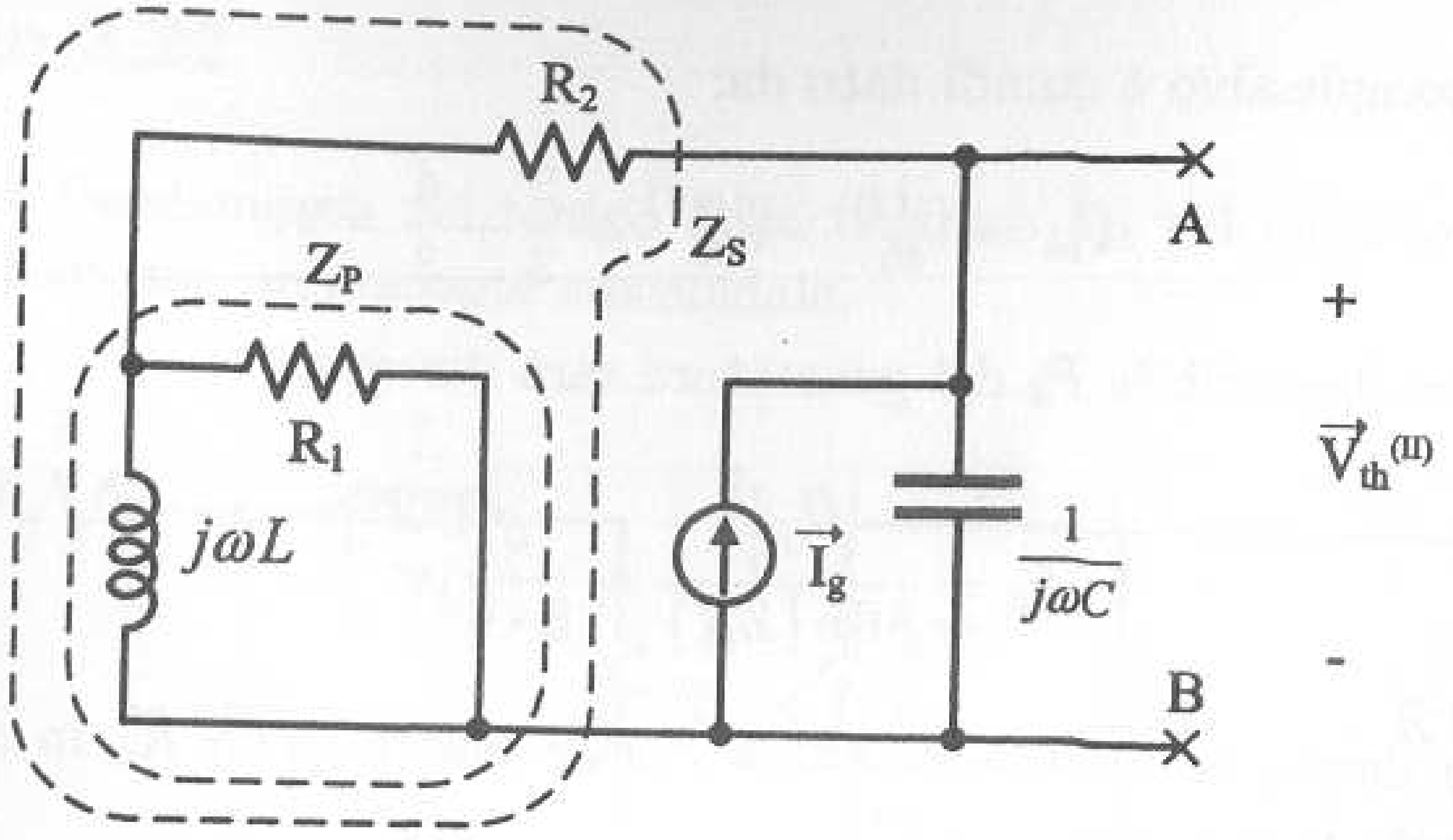
Quindi:

$$\vec{V}_{th}^{(I)} = 2 \cdot \frac{j}{2+j} \cdot \frac{\frac{1}{j}}{\frac{1}{j} + \frac{2+2j}{2+j}} = \frac{2}{(2+j)\cdot\frac{(2+j)+j(2+2j)}{j\cdot(2+j)}} = \frac{2j}{2+j+2j-2} = \frac{2}{3}\,.$$

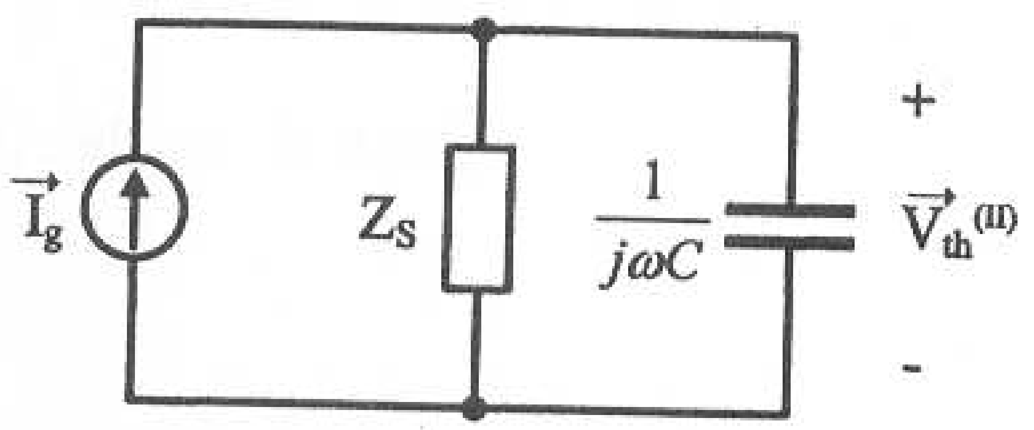
- $\vec{V}_g$ disattivato. Questo generatore diventa un corto-circuito e si ottiene il seguente circuito:








Questo circuito può essere ridisegnato anche nel seguente modo, avendo considerato il parallelo $Z_P$ tra $R_1$ e $j\omega L$ e la serie $Z_S$ tra $R_2$ e $Z_P$:




in cui:

$$\begin{cases} Z_S = R_2 + Z_P \\ Z_P = \frac{j\omega L R_1}{j\omega L + R_1} = \frac{\frac{j}{2}}{1+\frac{j}{2}} = \frac{j}{2+j} \end{cases}$$

Il secondo contributo a $\vec{V}_{th}$ si ottiene dunque tramite l'unica equazione di nodo:

$$\left(j\omega C + \frac{1}{Z_S}\right)\vec{V}_{th}^{(II)} = \vec{I}_g$$

$$\vec{V}_{th}^{(II)} = \frac{\vec{I}_g}{j\omega C + \frac{1}{R_2+Z_P}}$$

da cui deriva che:

$$\vec{V}_{th}^{(II)} = \frac{1+j}{j+\frac{1}{1+\frac{j}{2+j}}} = \frac{1+j}{j+\frac{2+j}{2+2j}} = \frac{2\,(1+j)^2}{2j-2+2+j} = \frac{4j}{3j} = \frac{4}{3}\,.$$

Il fasore complessivo è quindi dato da:

$$\vec{V}_{th} = \vec{V}_{th}^{(I)} + \vec{V}_{th}^{(II)} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2\,.$$

La potenza disponibile $P_d$ del generatore sarà dunque:

$$P_d = \frac{\left|\vec{V}_{th}\right|^2}{8\mathrm{Re}\left\{Z_{th}\right\}} = \frac{4}{8\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\,.$$

Come già detto, la potenza massima $P_{MAX}$ assorbita da $R_u$ in condizioni di adattamento è pari proprio a $P_d$:

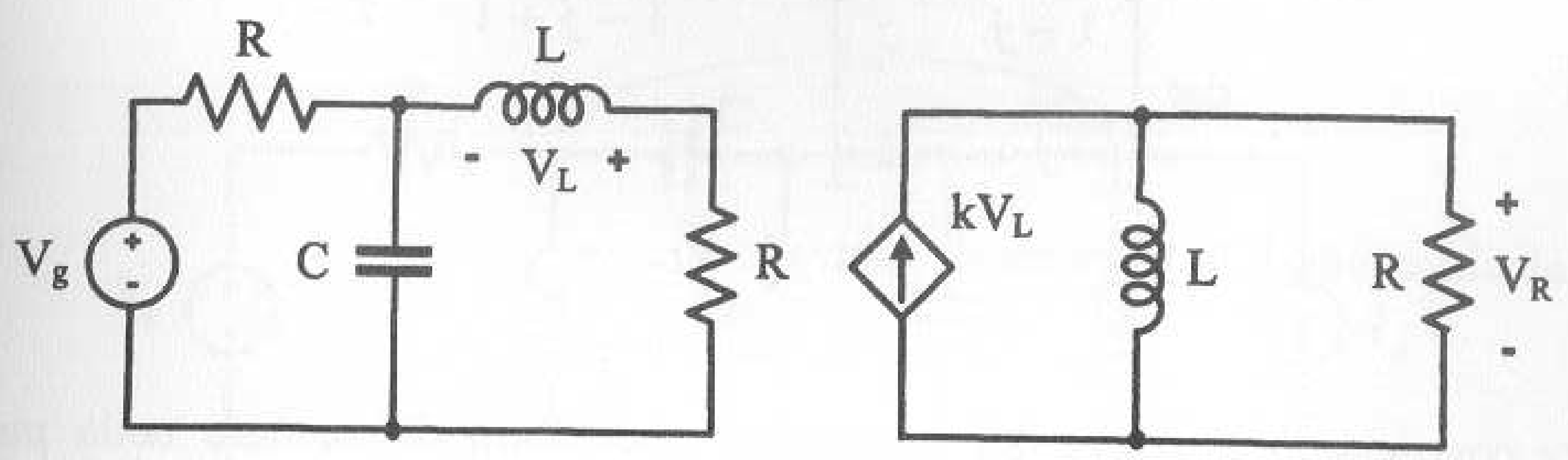
$$P_{MAX} = \frac{3}{4} = 0,75\ [W]$$





## Esercizio 3.22

Determinare l'andamento nel tempo della tensione $V_R$ nel circuito in figura, sottoposto a regime permanente sinusoidale.

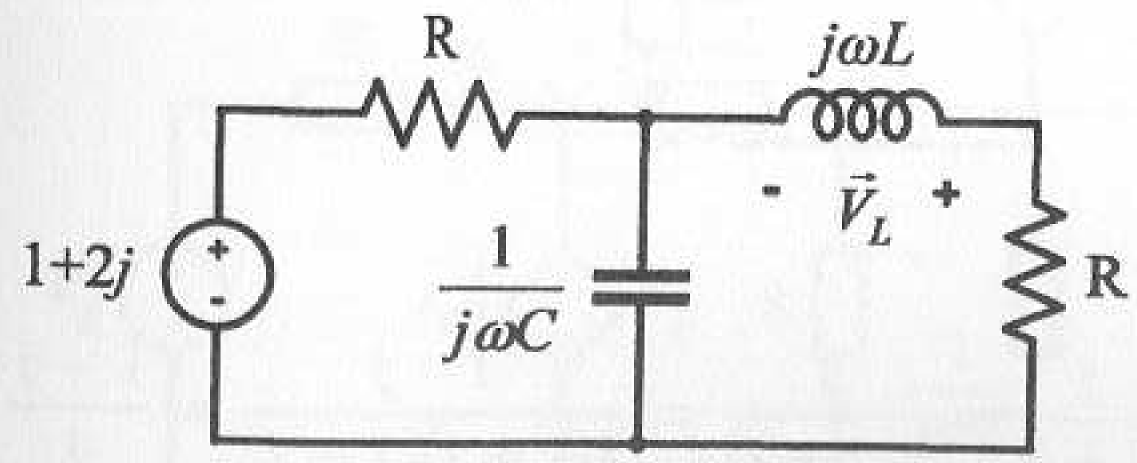


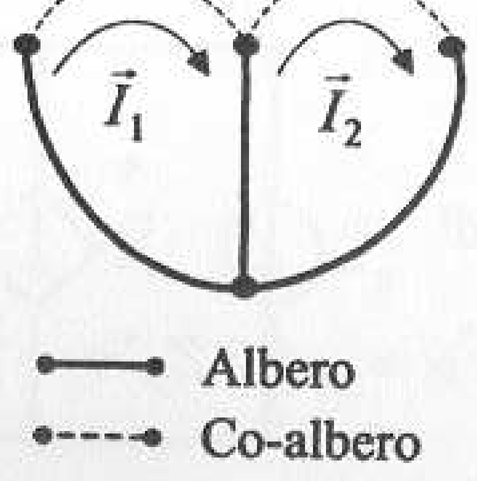

$$C = 1\,;\ R = 1\,;\ L = 1\,;\ \omega = 1\,;\ \vec{V}_g = 1 + 2j\,;\ k = 0,5\,;$$

$$[F, \Omega, H, \mathrm{rad/sec}, V, A/V]\,.$$

### Svolgimento

Determiniamo la tensione (fasore) $\vec{V}_L$ nella parte di circuito a sinistra utilizzando il metodo delle maglie:




Utilizzando i valori numerici dei componenti possiamo derivare il sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{j} & -\frac{1}{j} \\ -\frac{1}{j} & \frac{1}{j}+j+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j \\ 0 \end{bmatrix}$$

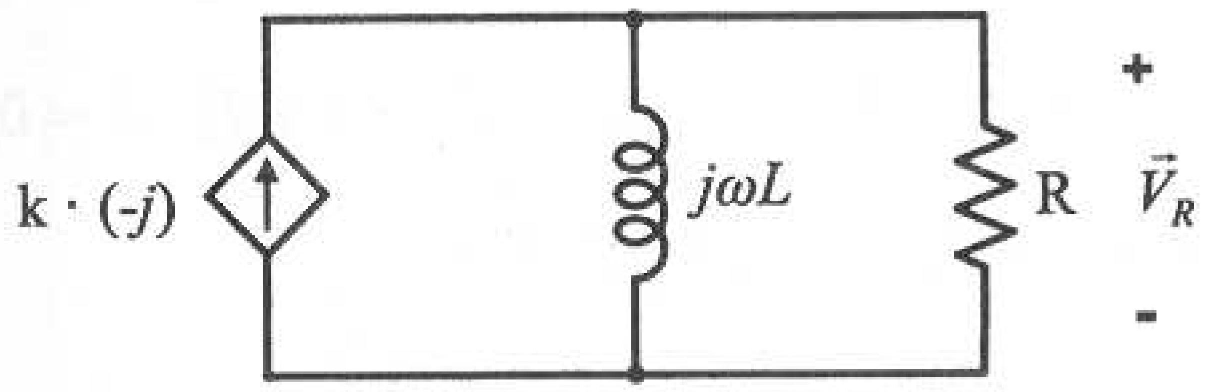
Dal precedente sistema è possibile ricavare il fasore $\vec{I}_2$:

$$\vec{I}_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1-j & 1+2j \\ j & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-j(1+2j)}{1-j+1} = \frac{2-j}{2-j} = 1$$

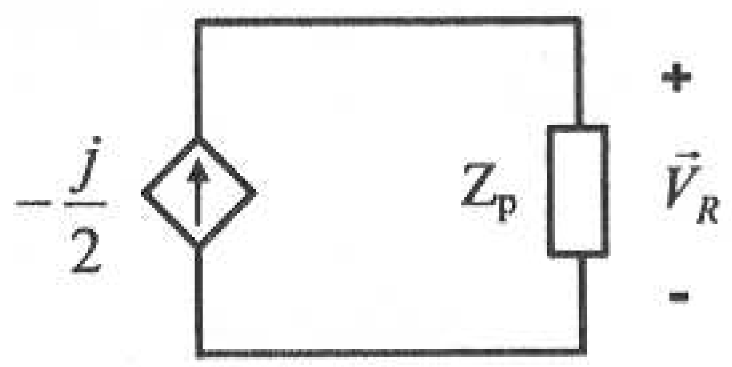
e calcolare quindi la tensione di controllo $\vec{V}_L$:

$$\vec{V}_L = -\vec{I}_2 \cdot j\omega L = -j\,.$$

Ora conosciamo il valore del generatore controllato di corrente nella parte destra del circuito:




Sostituendo $j\omega L$ e $R$ con il parallelo equivalente $Z_p = \frac{j\omega L \cdot R}{j\omega L + R} = \frac{j}{j+1}$, si ottiene:




e quindi

$$\vec{V}_R = -\frac{j}{2} \cdot Z_p = -\frac{j}{2} \cdot \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2(j+1)} = \frac{1-j}{2(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{4}\,.$$

Poiché risulta

$$|\vec{V}_R| = \frac{1}{4}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,, \qquad \angle\vec{V}_R = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}\,,$$

l'andamento nel tempo sarà dato da:

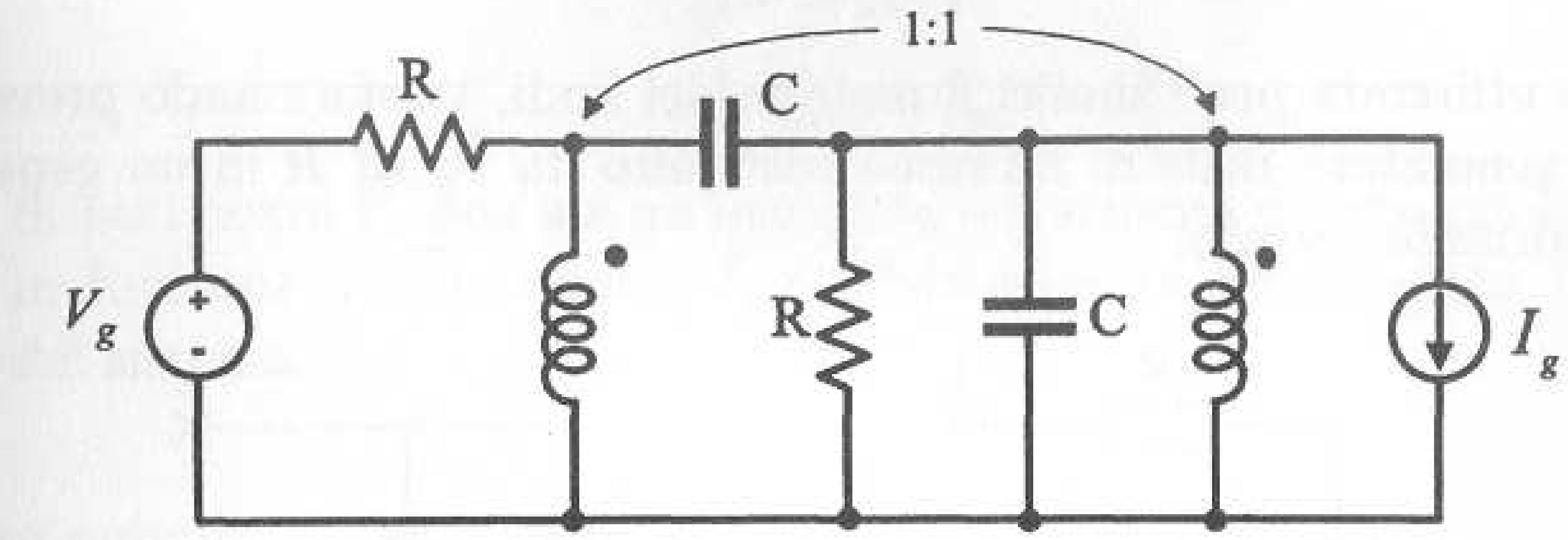
$$V_R(t) = |\vec{V}_R| \cos\left(\omega t + \angle\vec{V}_R\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\ [V]$$





## Esercizio 3.23

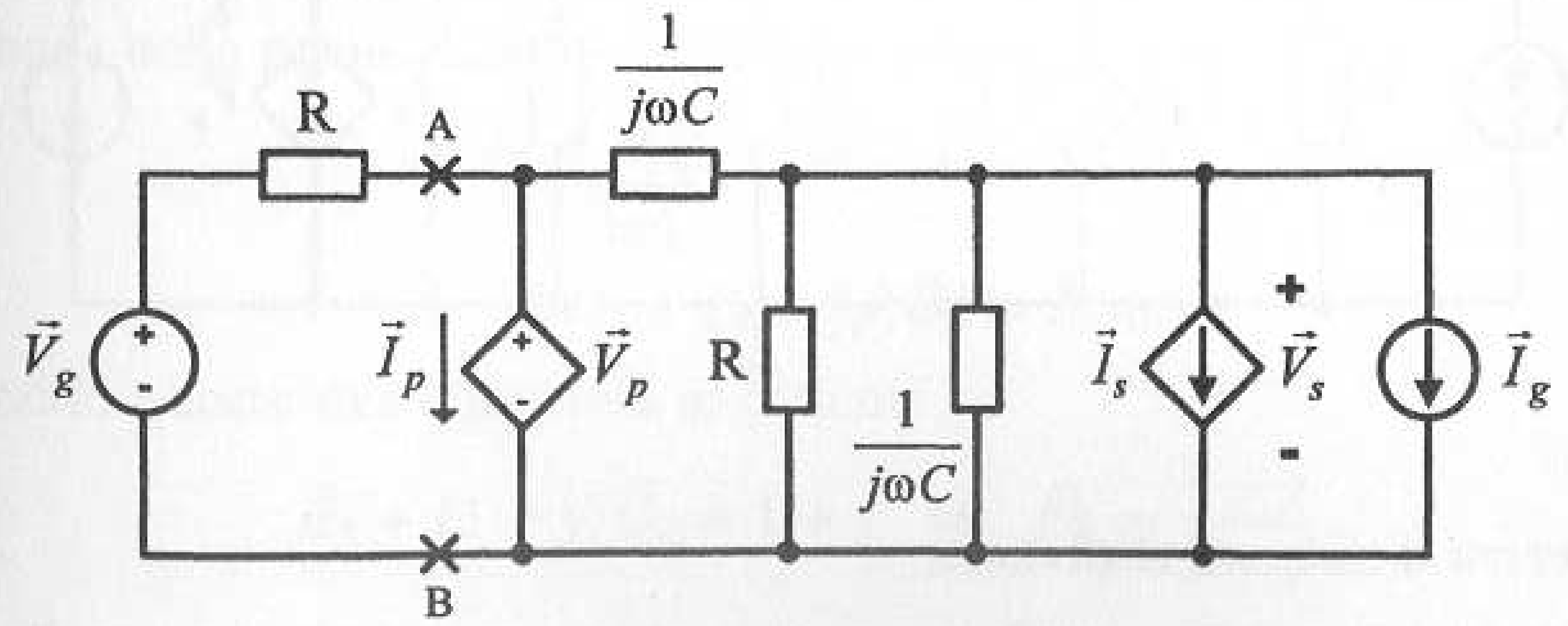
Nel circuito in figura, a regime permanente sinusoidale, determinare la potenza attiva erogata dal generatore di corrente.




$$I_g(t) = \sin(t)\,[A];\ V_g(t) = \cos(t)\,[V];\ R = 1\,[\Omega];\ C = 1\,[F]\,.$$

### Svolgimento

Si deve analizzare il circuito nel dominio dei fasori. Essendo i generatori alla stessa pulsazione, è necessario calcolare il fasore della tensione complessiva ai capi del generatore di corrente. Si ha quindi:



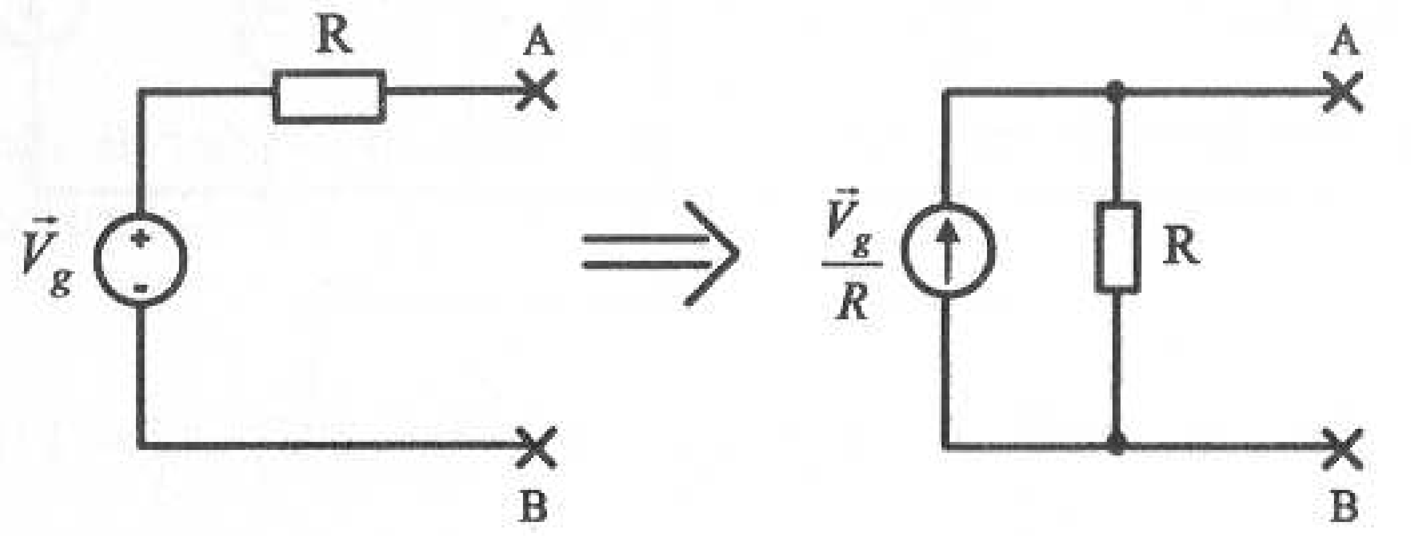

dove $\omega = 1$ ed inoltre:

$$I_g(t) = \sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{I}_g = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\,;$$
$$V_g(t) = \cos(t) \Rightarrow \vec{V}_g = 1\,.$$

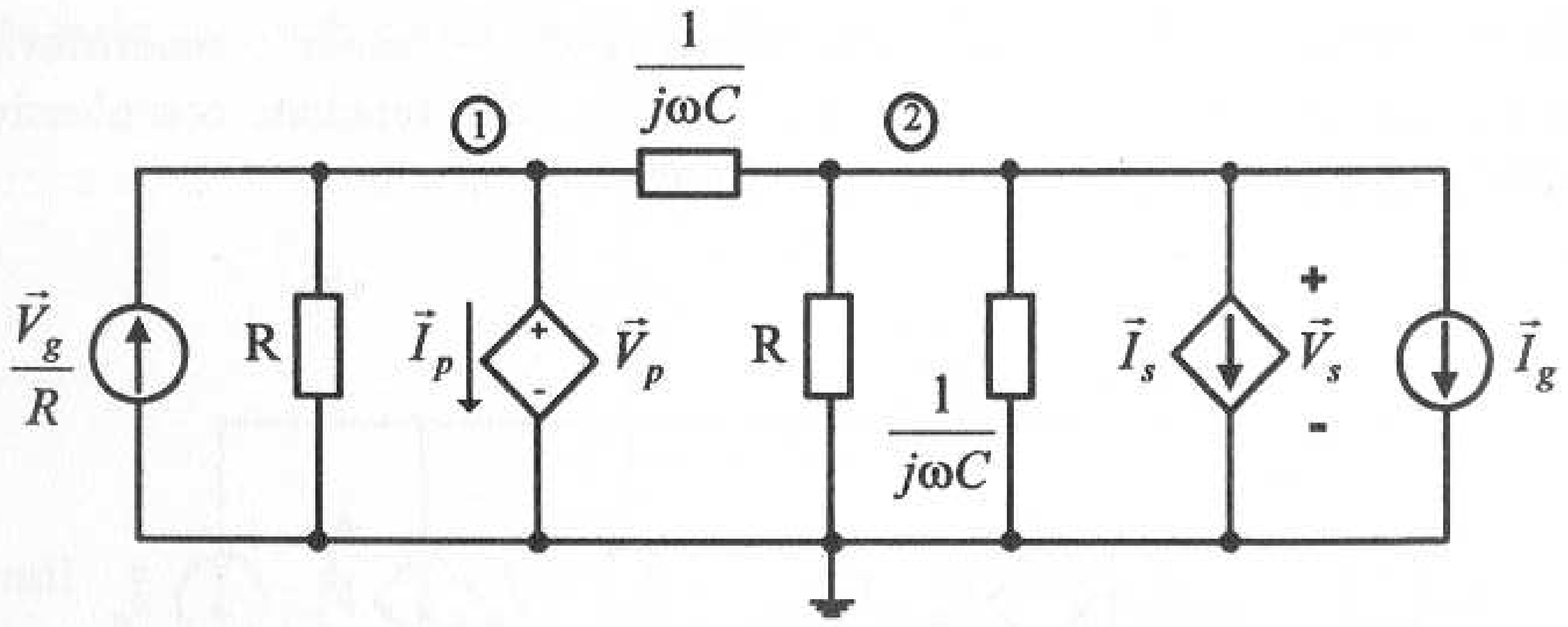
Sono stati inoltre sostituiti gli avvolgimenti del trasformatore ideale con un generatore controllato di tensione ed un generatore controllato di corrente, essendo:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$

Conviene utilizzare per l'analisi il metodo dei nodi, trasformando preventivamente il generatore reale di tensione costituito da $\vec{V}_g$ ed $R$ in un generatore reale di corrente, ovvero:




Quindi si ottiene il seguente circuito da analizzare:




da cui deriva il sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) & -j\omega C \\ -j\omega C & \left(j\omega C + \frac{1}{R} + j\omega C\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vec{V}_g}{R} - \vec{I}_p \\ -\vec{I}_s - \vec{I}_g \end{bmatrix}$$

in cui $\vec{I}_p$ figura come incognita ausiliaria, aggiunta per il generatore di tensione $\vec{V}_p$.





- Equazione di vincolo del generatore di tensione:

$$\vec{V}_p = \vec{E}_1 \, .$$

- Equazione di vincolo del trasformatote ideale:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s = \vec{E}_2 \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$

Si noti come $\vec{V}_s$ non sia un'incognita del sistema e vada quindi espressa in funzione di $\vec{E}_2$, mentre $\vec{I}_p$ è effettivamente un'incognita (ausiliaria) del sistema.

Risulta quindi:

$$\begin{cases} (1+j)\vec{E}_1 - j\vec{E}_2 = \vec{V}_g - \vec{I}_p \\ -j\vec{E}_1 + (1+2j)\vec{E}_2 = -\vec{I}_s - \vec{I}_g \\ \vec{V}_p = \vec{E}_1 \\ \vec{V}_p = \vec{E}_2 \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$

Dalla $3^a$ e $4^a$ equazione risulta $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$. Dovendo calcolare la tensione sul generatore di corrente $\vec{I}_g$, cioè $\vec{E}_2$, si sostituiscono $\vec{E}_1$ ed $\vec{I}_s$ (ottenuta dalla $5^a$ equazione) nelle prime due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} (1+j)\vec{E}_2 - j\vec{E}_2 = 1 - \vec{I}_p \\ -j\vec{E}_2 + (1+2j)\vec{E}_2 = \vec{I}_p + j \end{cases}$$

Sommando queste due equazioni si ottiene:

$$\vec{E}_2 + (1+j)\vec{E}_2 = 1 + j \;\Rightarrow\; \vec{E}_2 = \frac{1+j}{2+j} \, .$$

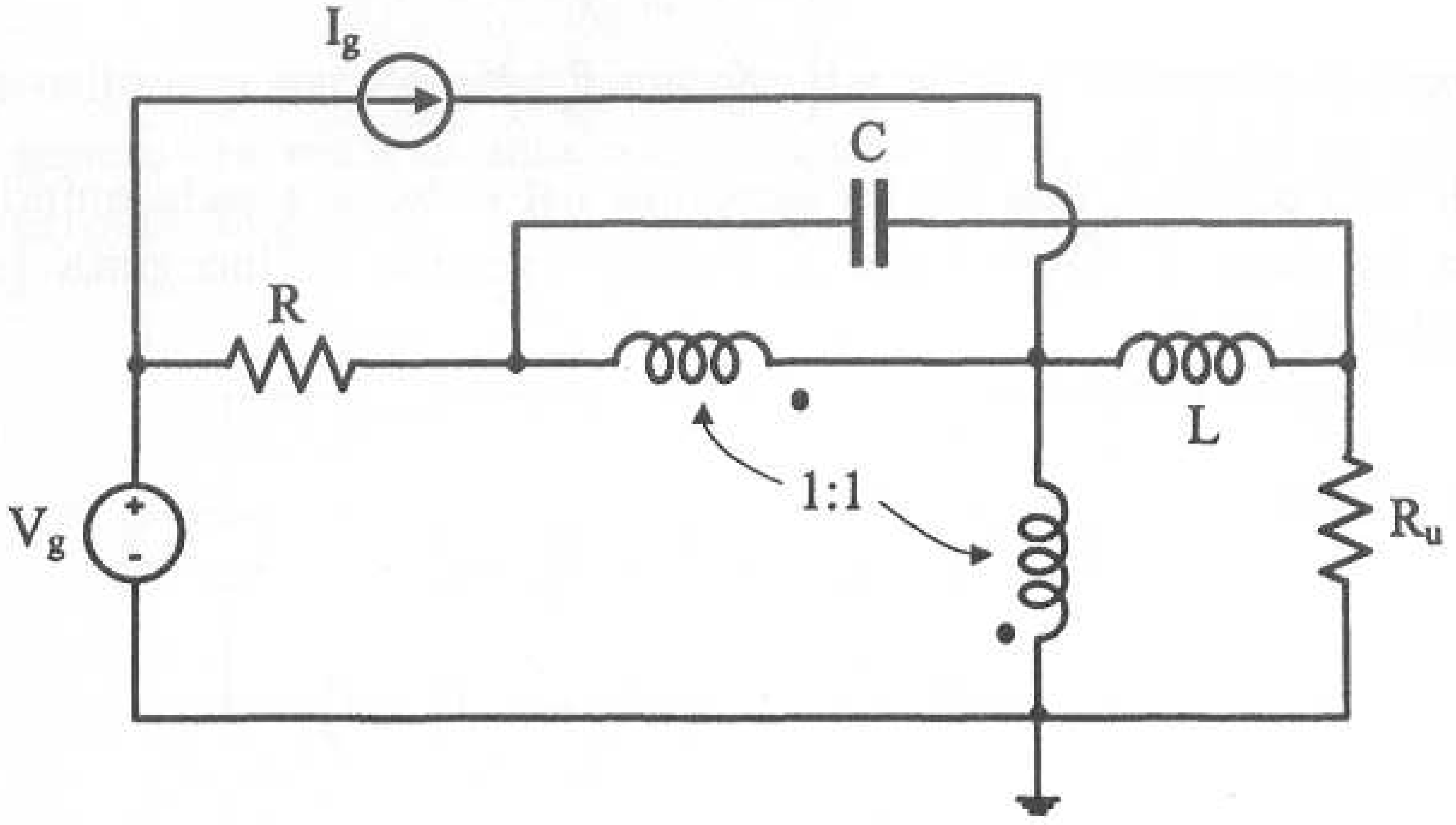
Poiché $\vec{I}_g$ è entrante dal morsetto positivo di $\vec{E}_2$, la potenza attiva erogata $P_a$ vale:

$$P_a = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}_2\vec{I}_g^*\} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{(1+j)}{2+j}\cdot j\right\} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{-1+j}{2+j}\cdot\frac{(2-j)}{(2-j)}\right\}$$

$$P_a = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{-2+j+2j+1}{5}\right\} = \frac{1}{10} = 0,1 \;\; [W]$$

## Esercizio 3.24

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare il valore del resistore $R_u$ affinché esso assorba la massima potenza attiva.




$$V_g(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{13}\right)\ ;\ I_g(t) = 2\cos\left(3t + \frac{7\pi}{24}\right)\ ;$$

$$R = 1\,;\, C = \frac{1}{3}\,;\, L = \frac{1}{3}\,;\, [V, A, \Omega, F, H]\,.$$

### Svolgimento

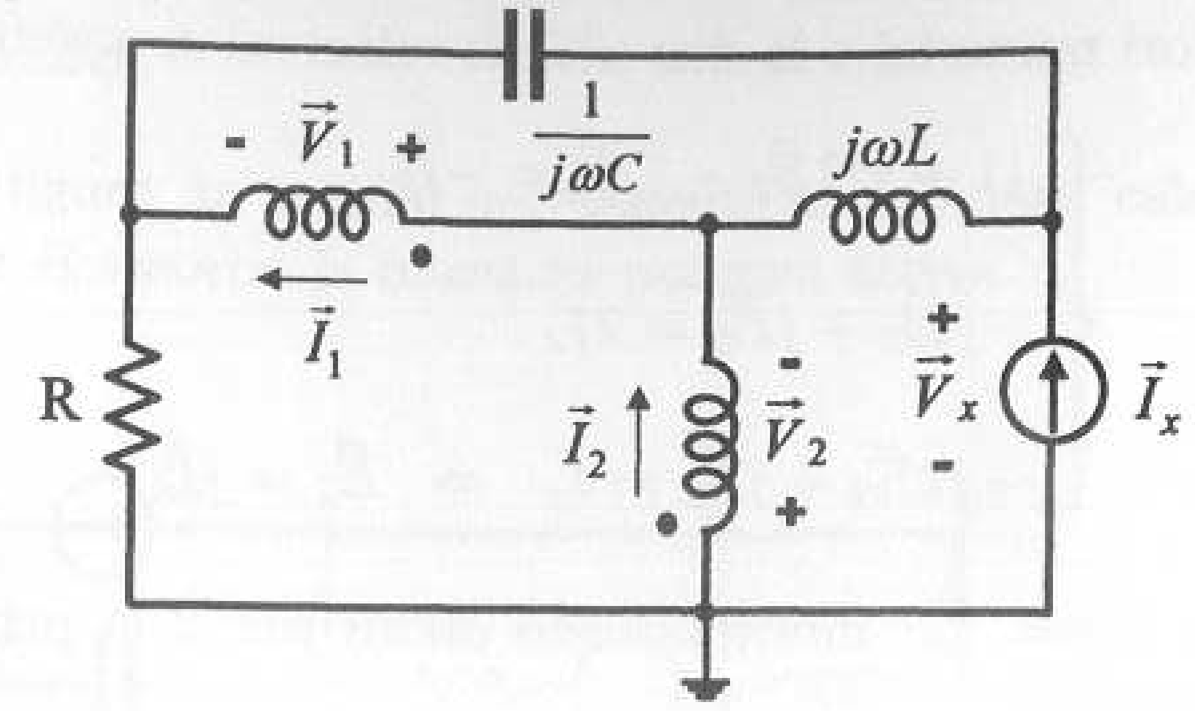
E' innanzitutto necessario applicare il teorema di Thevenin, nel dominio dei fasori, al circuito risultante ai capi di $R_u$. In questo modo si ottiene l'impedenza equivalente $Z_{th}$ di tale circuito e quindi, per il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, si pone:

$$R_u = |Z_{th}|\,.$$

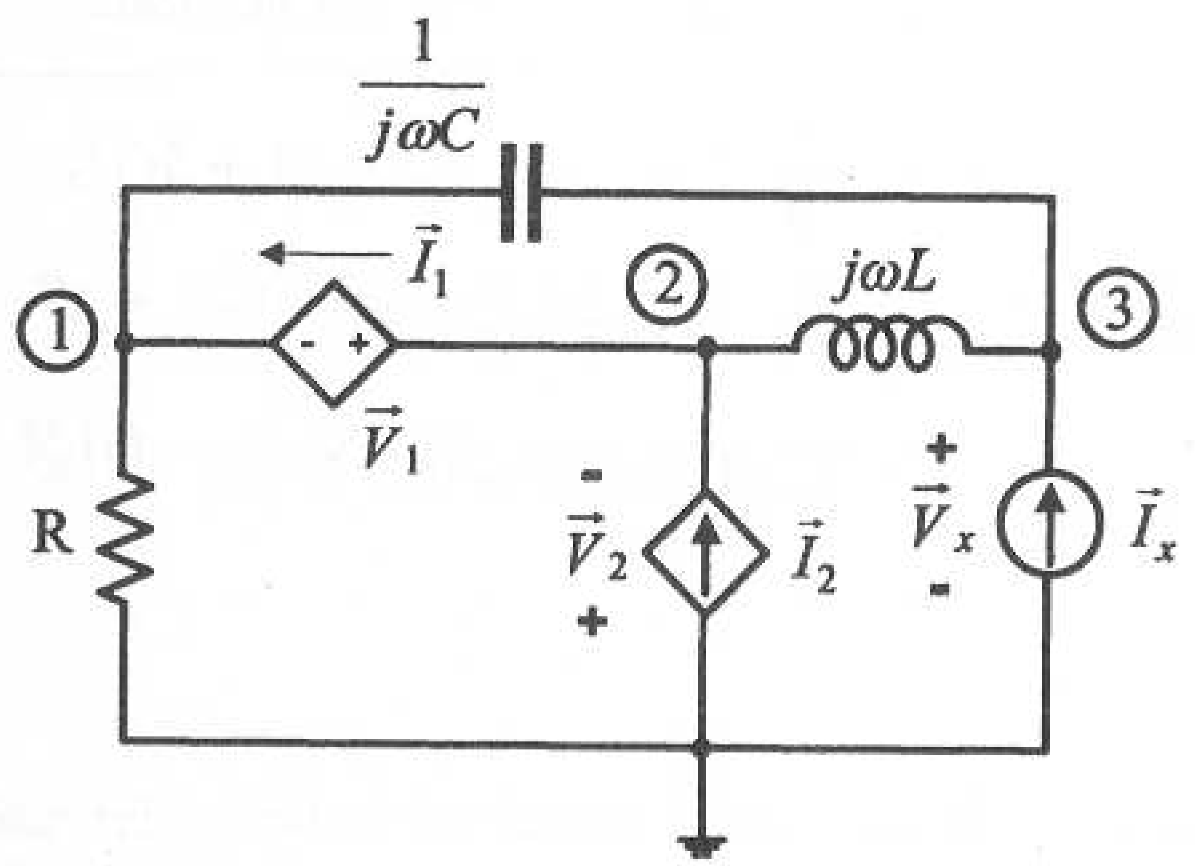
Per il calcolo di $Z_{th}$ si disattiva il generatore indipendente ($V_g$) e si utilizza un generatore di prova $\vec{I}_x$, in quanto nel circuito in questione è presente una rete 2-porte (cioè il trasformatore ideale):








Bisogna calcolare $\vec{V}_x$; si applica in tal senso il metodo dei nodi:




in cui sono stati sostituiti gli avvolgimenti del trasformatore ideale con un generatore di tensione controllato in tensione ed un generatore di corrente controllato in corrente. Il sistema risolvente è quindi il seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) & 0 & -j\omega C \\ 0 & \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -j\omega C & -\frac{1}{j\omega L} & \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 - \vec{I}_1 \\ \vec{I}_x \end{bmatrix}$$

in cui i vincoli del trasformatore impongono:

$$\begin{cases} \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \ \Rightarrow\ -\vec{E}_2 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \ \Rightarrow\ \vec{E}_1 = 2\vec{E}_2 \\ \vec{I}_2 = -\vec{I}_1 \ \Rightarrow\ \vec{I}_1 = -\vec{I}_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici e le due ultime relazioni si ottiene:

$$\begin{cases} (1+j)2\vec{E}_2 - j\vec{E}_3 = -\vec{I}_2 \\ -j\vec{E}_2 + j\vec{E}_3 = 2\vec{I}_2 \\ -j2\vec{E}_2 + j\vec{E}_2 = \vec{I}_x \ \Rightarrow \ \vec{E}_2 = j\vec{I}_x \end{cases}$$

Si deve calcolare $\vec{E}_3 = \vec{V}_x$; moltiplicando allora per 2 la prima equazione e sommando alla seconda:

$$(4+4j-j)\vec{E}_2 + (j-2j)\vec{E}_3 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{E}_3 = \frac{4+3j}{j}\vec{E}_2 .$$

Sostituendo in quest'ultima la terza equazione del sistema:

$$\vec{E}_3 = \vec{V}_x = \frac{4+3j}{j} j\vec{I}_x \ \Rightarrow \ \vec{V}_x = (4+3j)\vec{I}_x .$$

Si conclude quindi che $Z_{th} = 4+3j$ e dunque:

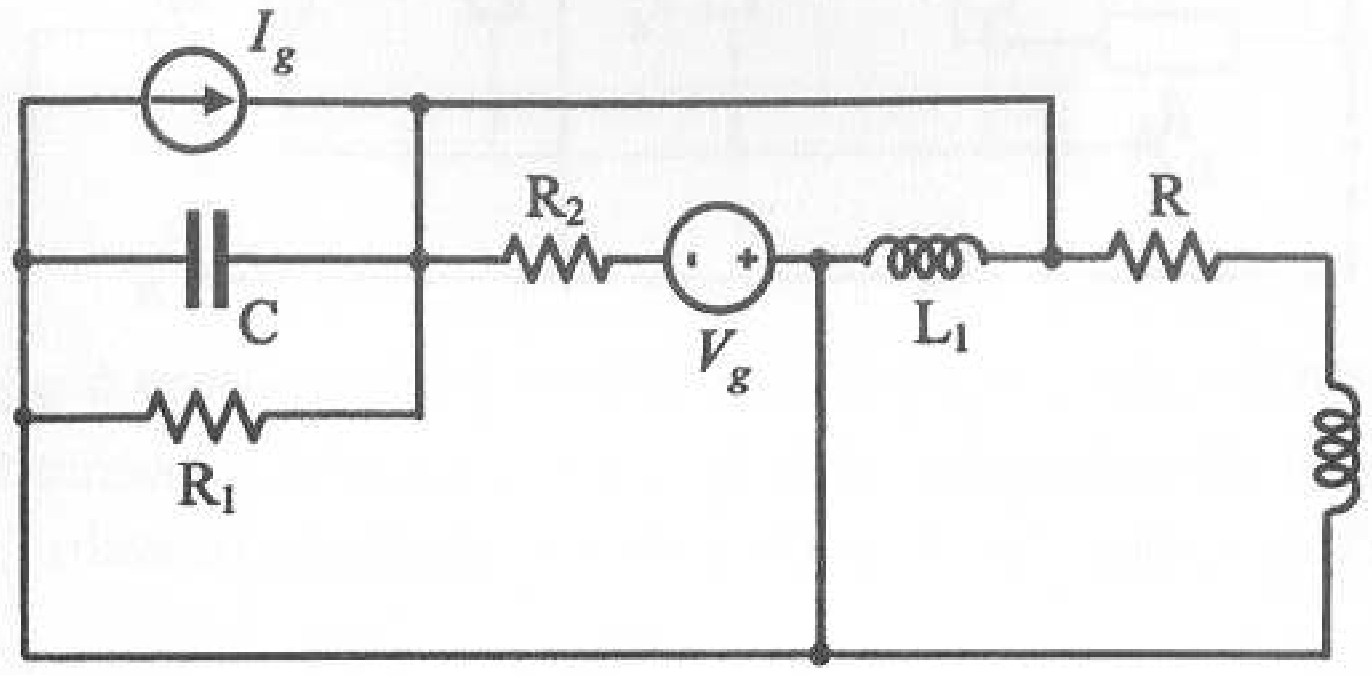
$$R_u = |Z_{th}| = \sqrt{16+9} = 5 \ [\Omega]$$





## Esercizio 3.25

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare il valore di $R$ ed $L$ affinché $R$ assorba la massima potenza attiva.

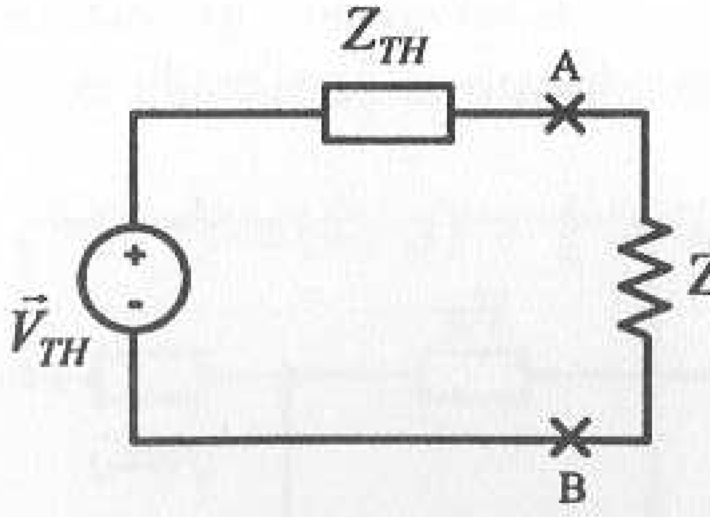



$$R_1 = 1\,[\Omega];\ R_2 = 2\,[\Omega];\ C = 1\,[F];\ L_1 = 2\,[H];$$

$$V_g(t) = \cos(t)\,[V];\ I_g(t) = \cos(t)\,[A].$$

### Svolgimento

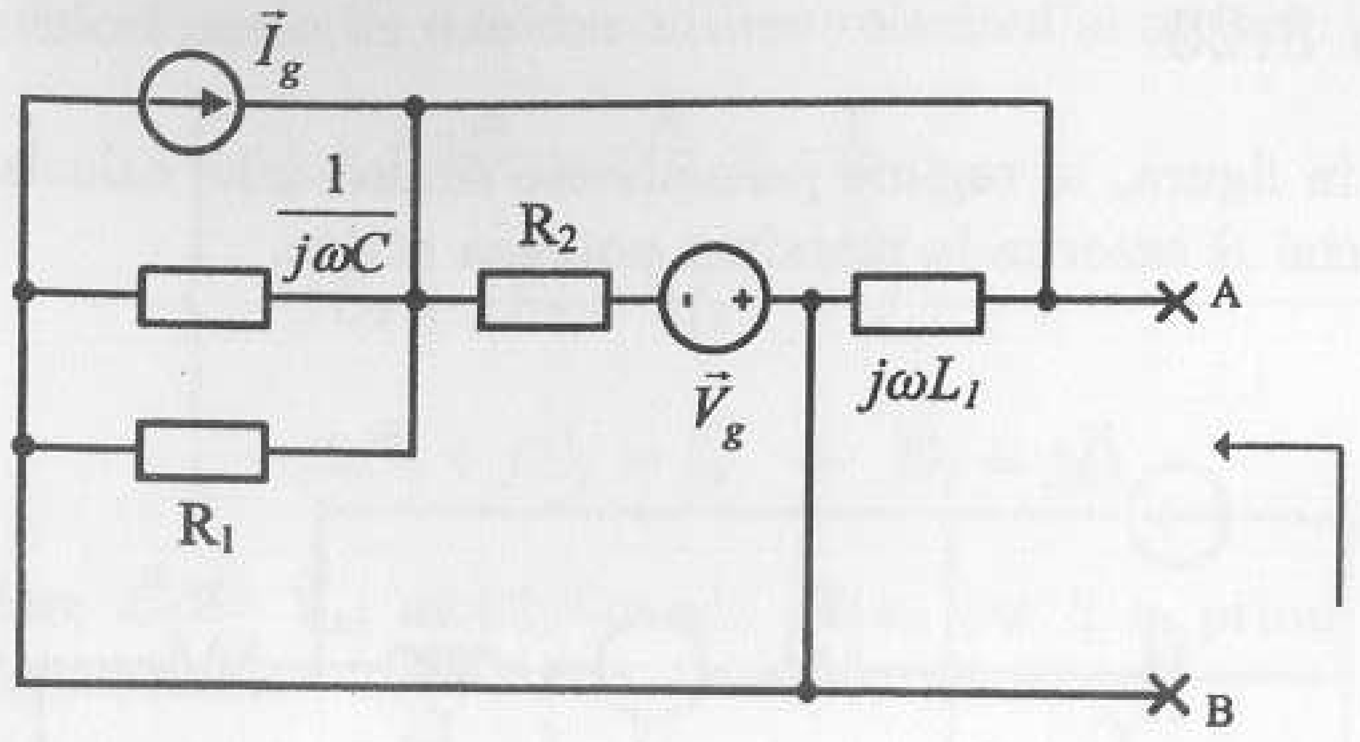
Per risolvere l'esercizio si deve utilizzare il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva nel dominio dei fasori. Dovendo determinare sia $R$ che $L$, il carico da adattare secondo il teorema è costituito dalla serie $Z_L$ di questi due componenti:




In questo caso risulta $\omega = 1$ e

$$Z_L = R + j\omega L ,$$

mentre $\vec{V}_{TH}$ e $Z_{TH}$ sono ricavati dall'applicazione del teorema di Thevenin alla parte di circuito connessa al carico costituito da $R$ ed $L$:




La condizione di adattamento indicata dal teorema del massimo trasferimento di potenza attiva indica che tale situazione è raggiunta quando

$$Z_L = Z^*_{TH}$$

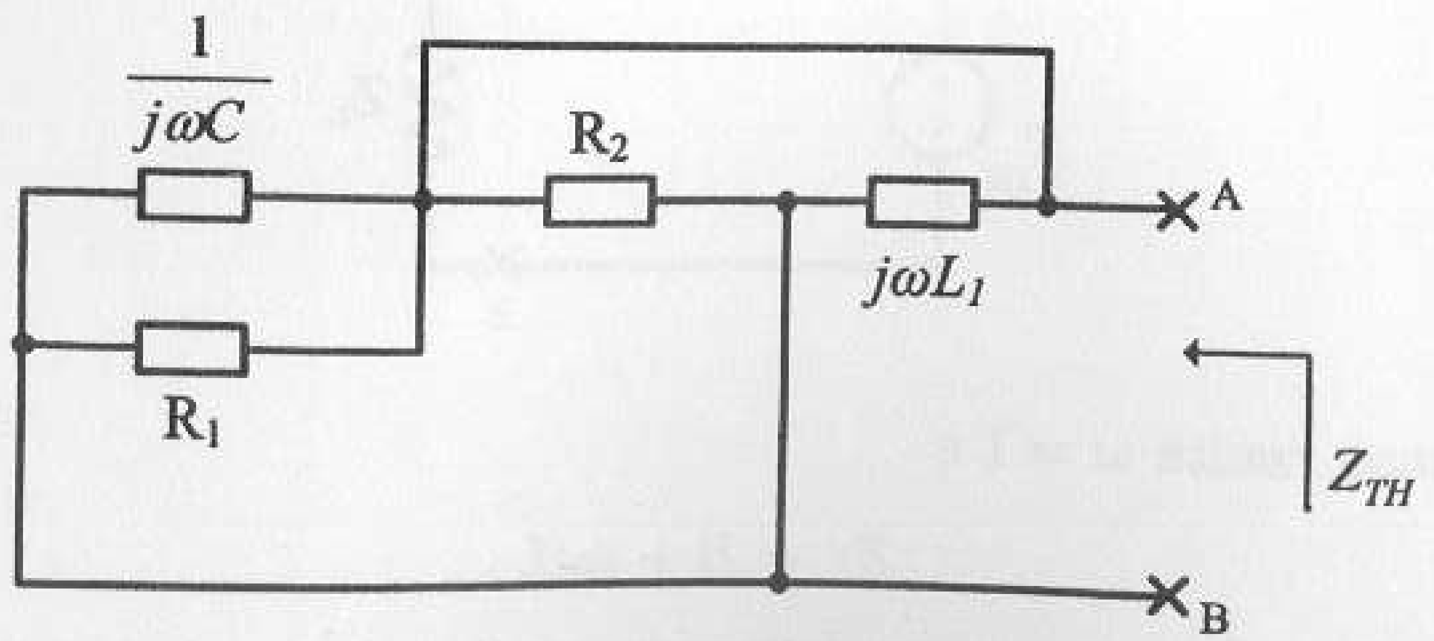
e quindi

$$R + j\omega L = \text{Re}\{Z_{TH}\} - j\text{Im}\{Z_{TH}\}\,,$$

da cui:

$$\begin{cases} R = \text{Re}\{Z_{TH}\} \\ L = -\frac{1}{\omega}\text{Im}\{Z_{TH}\} \end{cases}$$

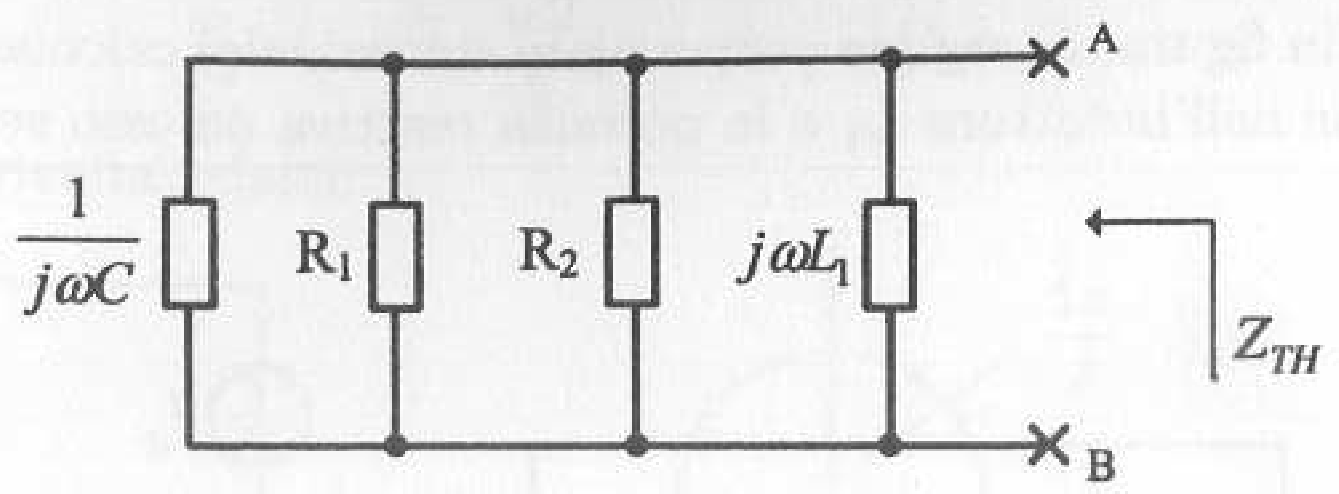
Si noti che, pur variando anche $L$ oltre ad $R$, la massima potenza attiva assorbita dal carico $Z_L$ è comunque tutta dissipata sul resistore $R$, come richiesto dal quesito. L'induttore $L$, infatti, non assorbe potenza attiva. Inoltre, non essendo richiesto il valore di tale potenza, è necessario il solo calcolo di $Z_{TH}$. Poiché nel circuito dove si deve applicare il teorema di Thevenin sono presenti solo bipoli, si può calcolare $Z_{TH}$ disattivando i generatori (entrambi indipendenti) e valutando l'impedenza risultante ai capi della coppia di morsetti A-B:








E' opportuno ridisegnare il circuito, ottenendo il seguente schema:




Quindi $Z_{TH}$ è costituita dal parallelo delle quattro impedenze presenti:

$$Z_{TH} = j\omega L_1 \parallel R_2 \parallel R_1 \parallel \frac{1}{j\omega C}\,,$$

da cui

$$\frac{1}{Z_{TH}} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + j\omega C$$

$$\frac{1}{Z_{TH}} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + (j \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3+j}{2}$$

e dunque

$$Z_{TH} = \frac{2}{3+j} \cdot \frac{(3-j)}{(3-j)} = \frac{3-j}{5}\,.$$

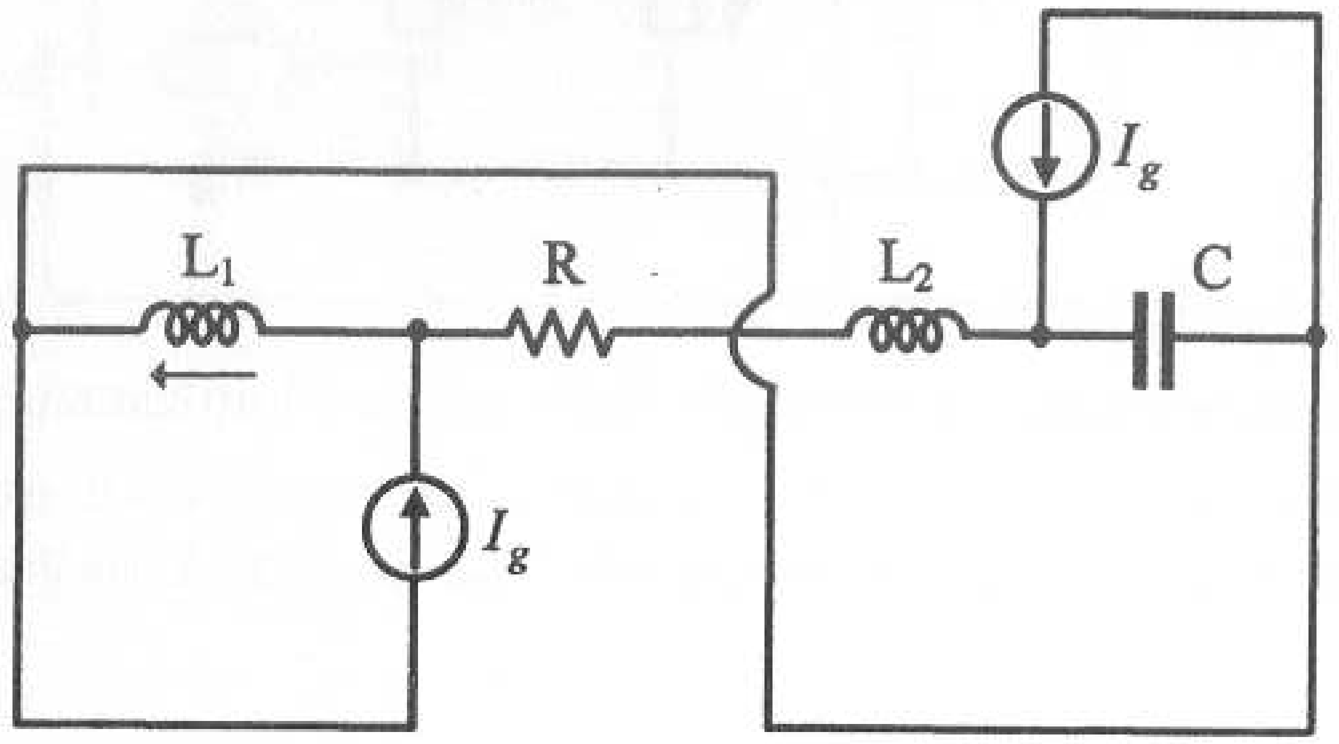
Allora, per quanto prima ricavato, risulta:

$$R = \text{Re}\{Z_{TH}\} = \tfrac{3}{5} = 0,6\ [\Omega]$$

$$L = -\tfrac{1}{\omega}\text{Im}\{Z_{TH}\} = \tfrac{1}{5} = 0,2\ [H]$$

## Esercizio 3.26

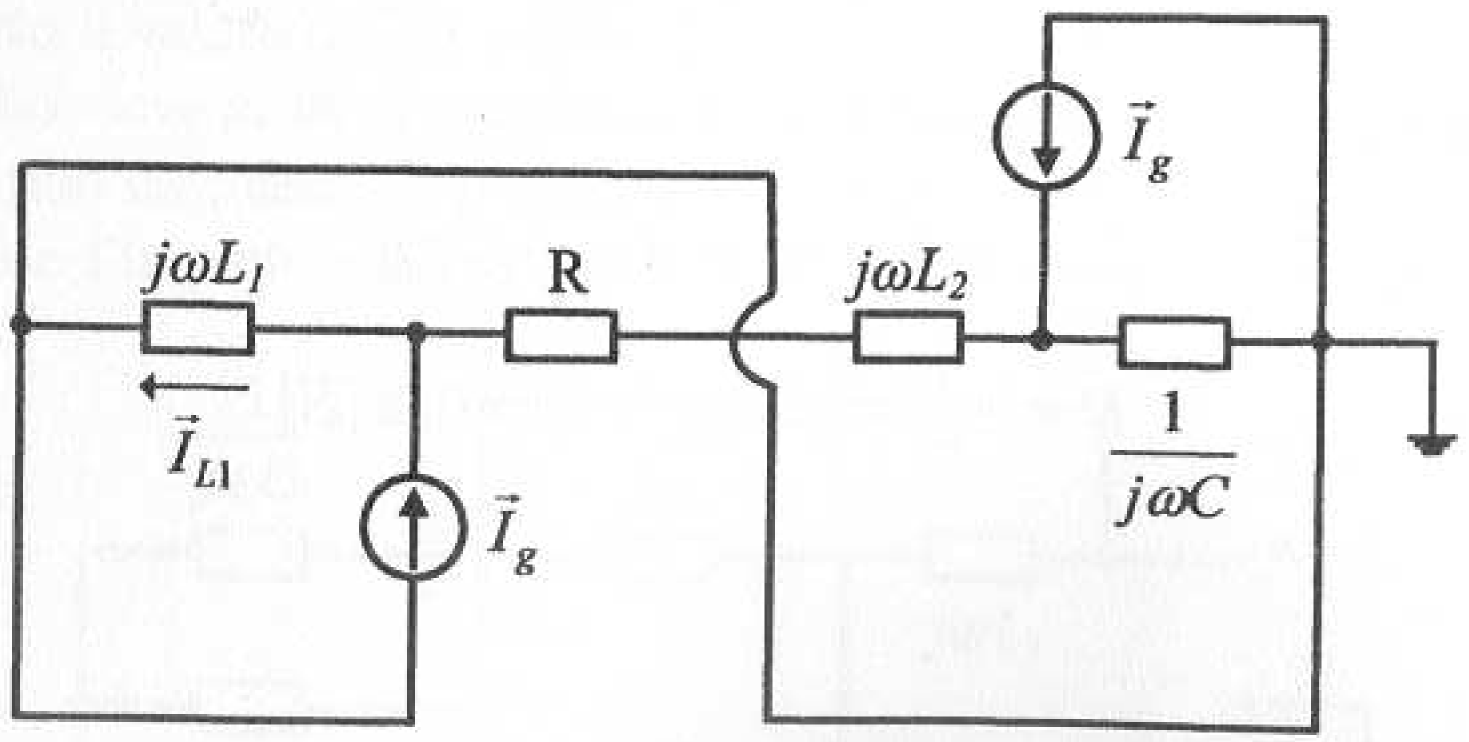
Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare l'andamento della corrente nell'induttore $L_1$ e la potenza reattiva da esso scambiata.




$$I_g(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{5\pi}{4}\right)\ [A];\ L_1 = L_2 = 1\,[H];\ R = 1\,[\Omega];\ C = 1\,[F].$$

### Svolgimento

Si analizza il circuito nel dominio dei fasori:




dove è $\omega = \frac{1}{2}$ ed inoltre

$$I_g(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{5\pi}{4}\right) \ \Rightarrow\ \vec{I}_g = \sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}.$$

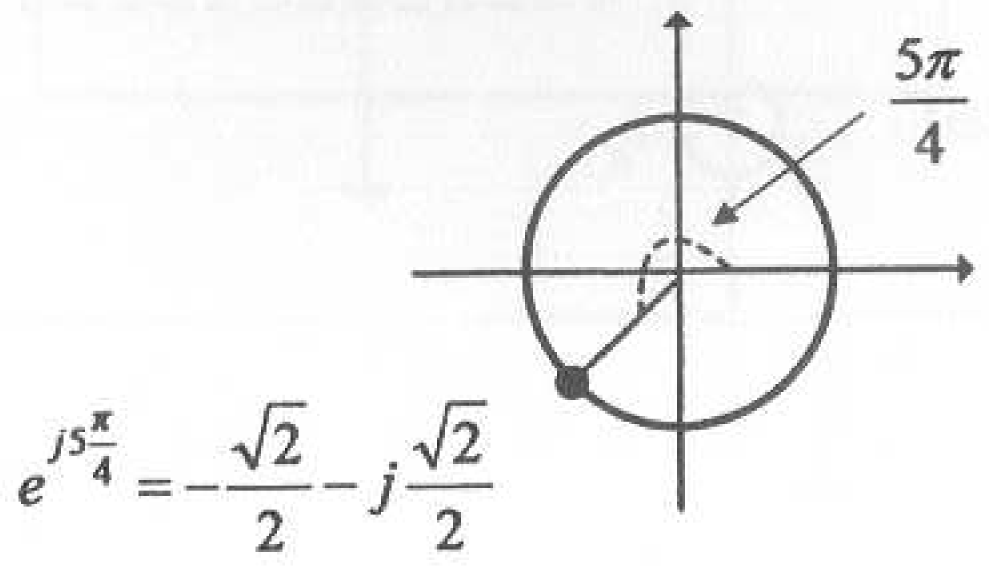




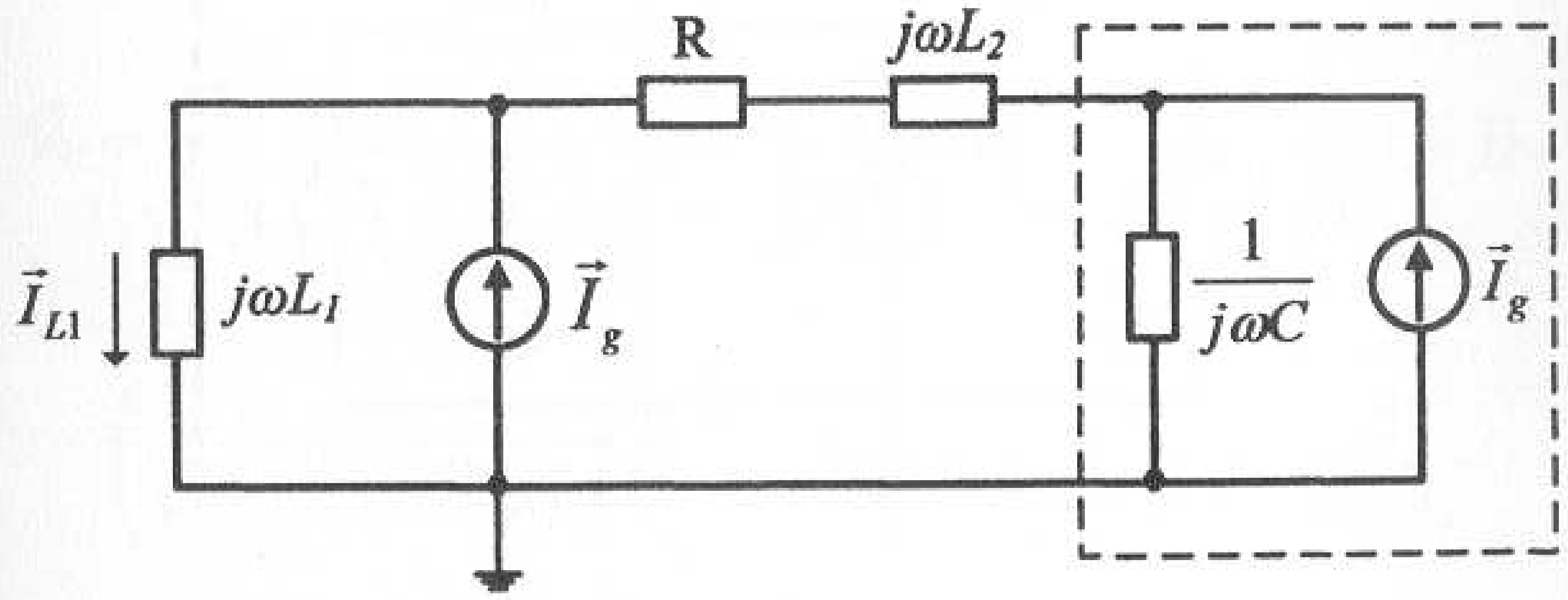
Poiché vale la relazione $e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$, si ottiene

$$\vec{I}_g = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) = -(1+j).$$

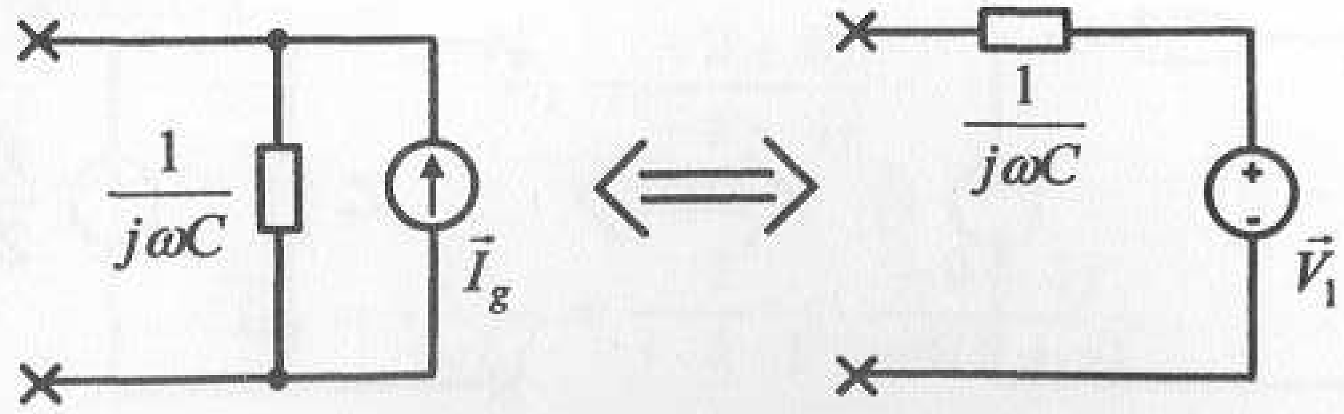
Graficamente risulta infatti:




Conviene ridisegnare il circuito, mantenendo la scelta prima evidenziata del nodo di riferimento:



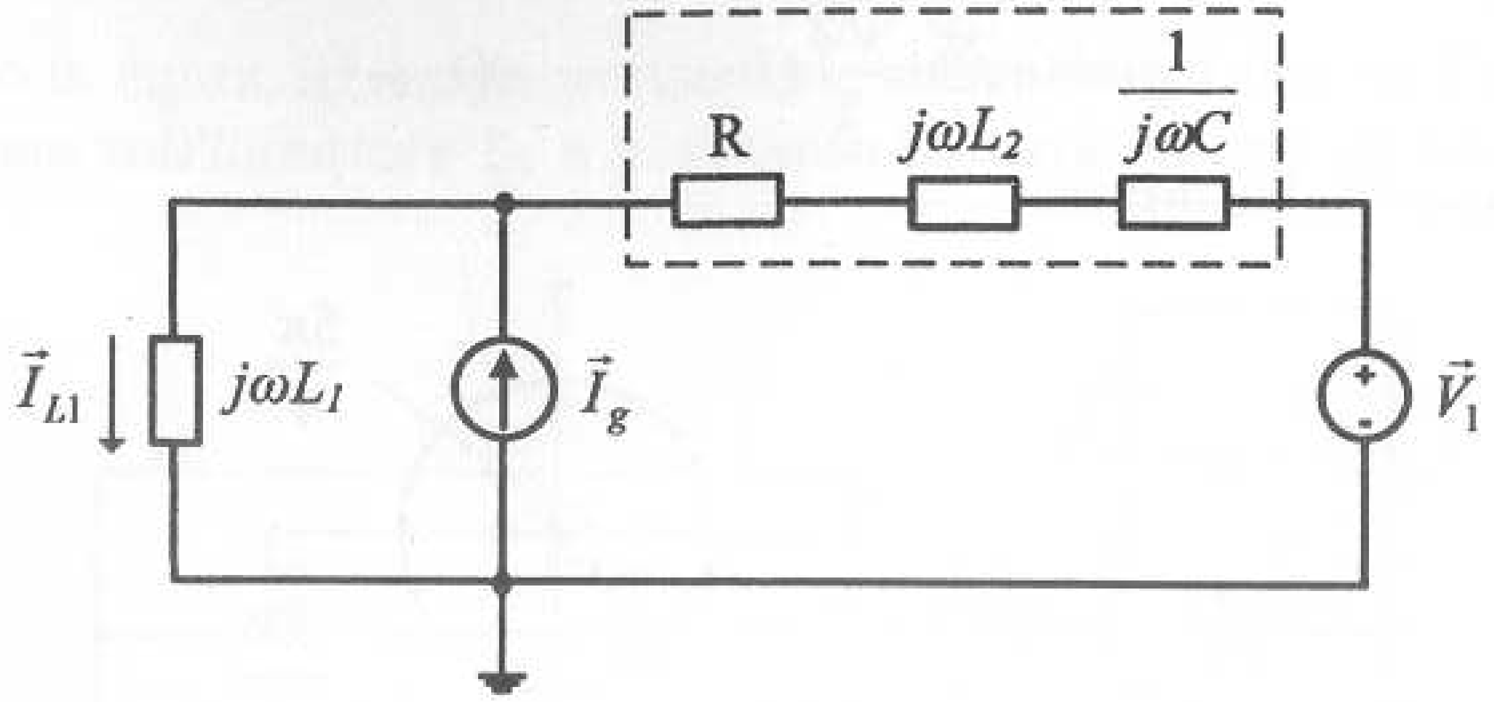

Il parallelo evidenziato dell'impedenza $\frac{1}{j\omega C}$ e del generatore di corrente $\vec{I}_g$ costituisce un generatore reale di corrente che può essere trasformato in un equivalente generatore reale di tensione:



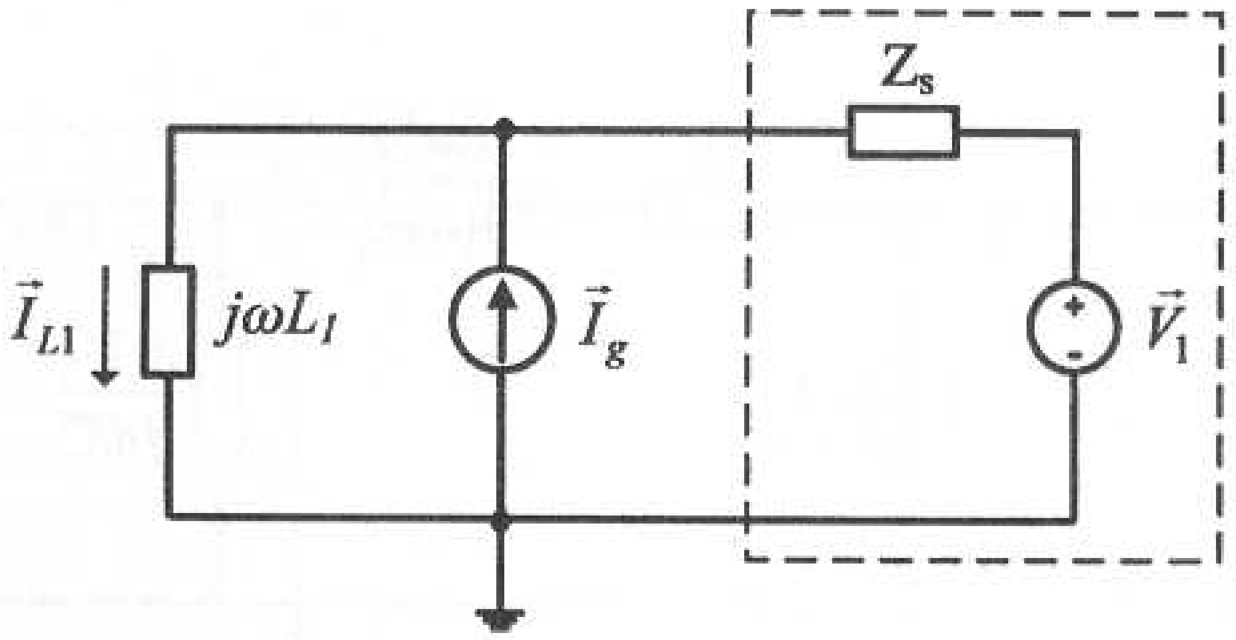

dove

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_g.$$

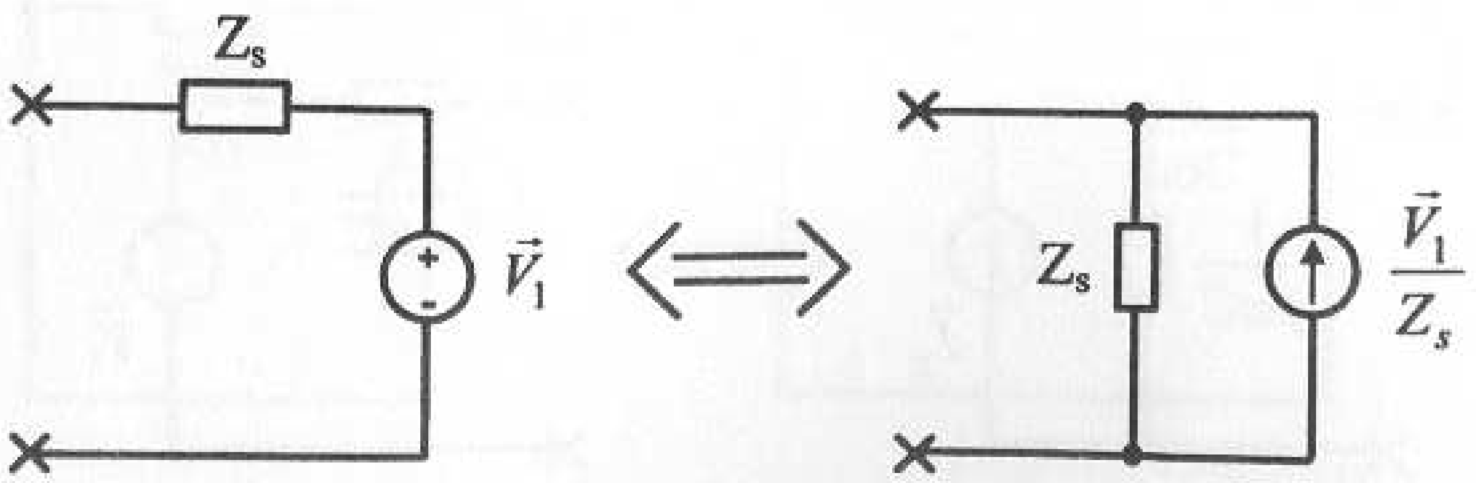
Si ottiene allora il seguente circuito:




La serie di impedenze evidenziata, costituita da $R, j\omega L_2$ e $\frac{1}{j\omega C}$, può essere raggruppata in un'unica impedenza serie $Z_s = R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}$. Dunque:



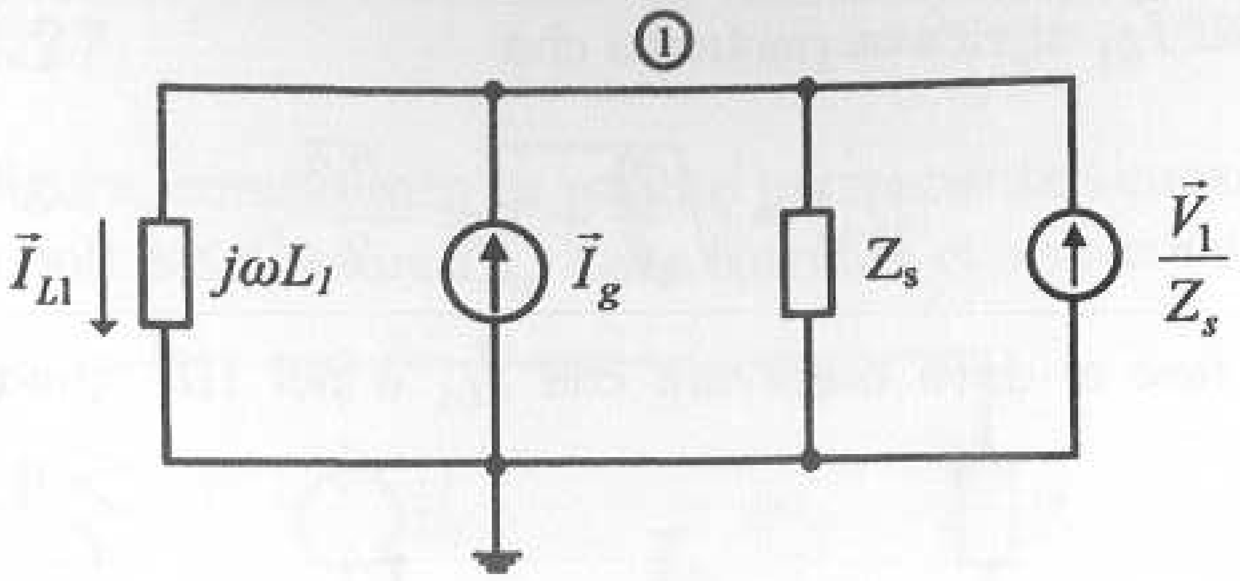

La serie evidenziata dell'impedenza $Z_s$ e del generatore $\vec{V}_1$ costituisce un generatore reale di tensione che può essere trasformato in un equivalente generatore reale di corrente:




Si ottiene quindi il seguente circuito, che può essere analizzato con un'unica equazione di nodo:








da cui risulta:

$$\left(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{Z_s}\right)\vec{E}_1 = \vec{I}_g + \frac{\vec{V}_1}{Z_s},$$

dove

$$Z_s = R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} = 1 + \left(j \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right) + \frac{1}{j \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}$$

$$Z_s = 1 + \frac{j}{2} - 2j = \frac{2-3j}{2}$$

e

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_g = \frac{1}{j \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} \cdot [-(1+j)] = 2j(1+j) = -2(1-j).$$

Quindi:

$$\left(\frac{1}{j \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} + \frac{2}{2-3j}\right)\vec{E}_1 = -(1+j) - 2(1-j) \cdot \frac{2}{2-3j}$$

$$\left(-2j + \frac{2}{2-3j}\right)\vec{E}_1 = -(1+j) - \frac{4(1-j)}{2-3j}$$

$$\frac{(-4j-6+2)}{2-3j}\vec{E}_1 = \frac{-2+3j-2j-3-4+4j}{2-3j}.$$

Si ottiene in definitiva:

$$\vec{E}_1 = \frac{-9+5j}{-4-4j}$$

e

$$\vec{I}_{L_1} = \frac{\vec{E}_1}{j\omega L_1} = \frac{1}{j \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} \cdot \frac{-9+5j}{-4(1+j)}$$

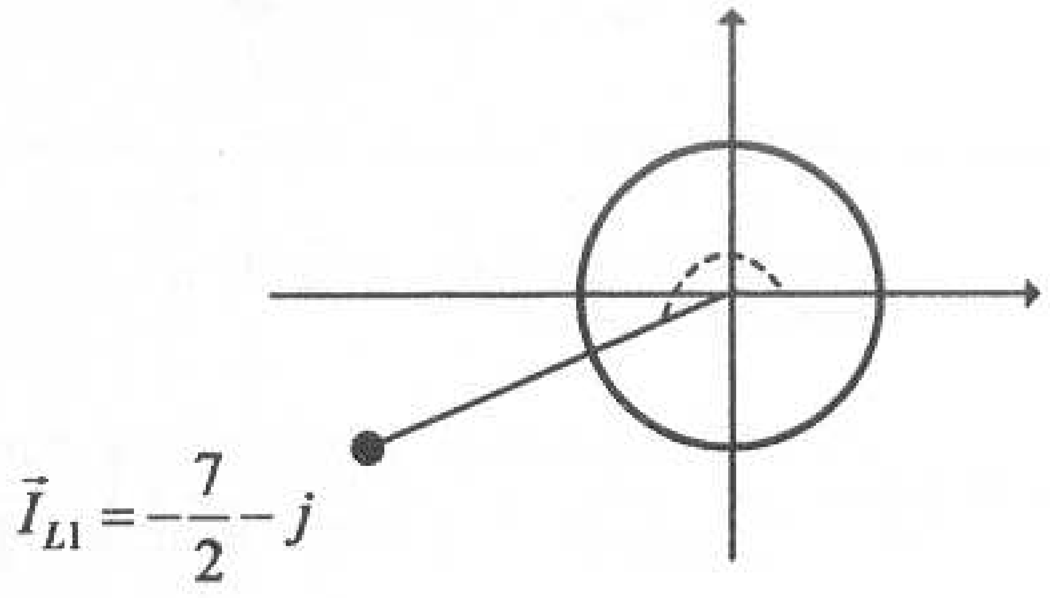
$$\vec{I}_{L_1} = \frac{-2j(-9+5j)}{-4(1+j)} \cdot \frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{-2(1+j)(-9+5j)}{-8}$$

$$\vec{I}_{L_1} = \frac{-9+5j-9j-5}{4} = -\frac{7}{2} - j.$$

Per il modulo di $\vec{I}_{L_1}$ si ricava pertanto che

$$|\vec{I}_{L_1}| = \sqrt{\frac{49}{4}+1} = \frac{\sqrt{53}}{2},$$

mentre per la fase si deve osservare che $\vec{I}_{L_1}$ è nel III° quadrante del piano complesso:




Da ciò deriva che la fase si ottiene sottraendo $\pi$ al risultato (in radianti) ottenuto dalla calcolatrice:

$$\angle\vec{I}_{L_1} = \arctan\left(\frac{-1}{-\frac{7}{2}}\right) - \pi = \arctan\left(\frac{2}{7}\right) - \pi = -2,86 \quad [\text{rad}]$$

dove $\arctan\left(\frac{2}{7}\right) = 0,27$ è il risultato ottenuto dalla calcolatrice. Dunque l'andamento nel tempo di $I_{L_1}(t)$ è dato da:

$$I_{L_1}(t) = |\vec{I}_{L_1}|\cos\left(\frac{1}{2}t + \angle\vec{I}_{L_1}\right) = \frac{\sqrt{53}}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t - 2,86\right)$$

$$I_{L_1}(t) = 3,64\cos\left(\frac{1}{2}t - 2,86\right) \quad [A]$$

La potenza reattiva $P_R$ scambiata da $L_1$ è pari a:

$$P_R = \frac{1}{2}\text{Im}\left\{\vec{V}_{L_1}\vec{I}^*_{L_1}\right\} = \frac{1}{2}\text{Im}\left\{j\omega L_1\vec{I}_{L_1}\vec{I}^*_{L_1}\right\} = \frac{1}{2}\text{Im}\left\{j\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot|\vec{I}_{L_1}|^2\right\}$$

da cui:

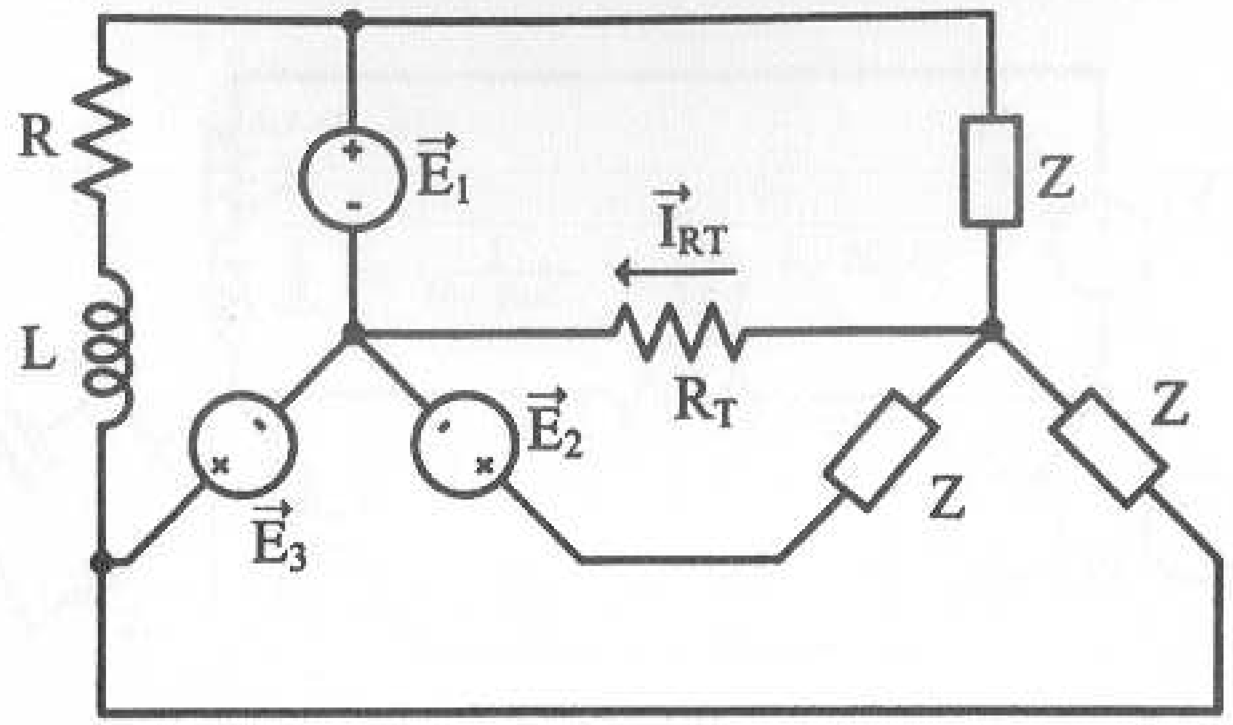
$$P_R = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2 = \frac{53}{16} = 3,31 \quad [VAR]$$





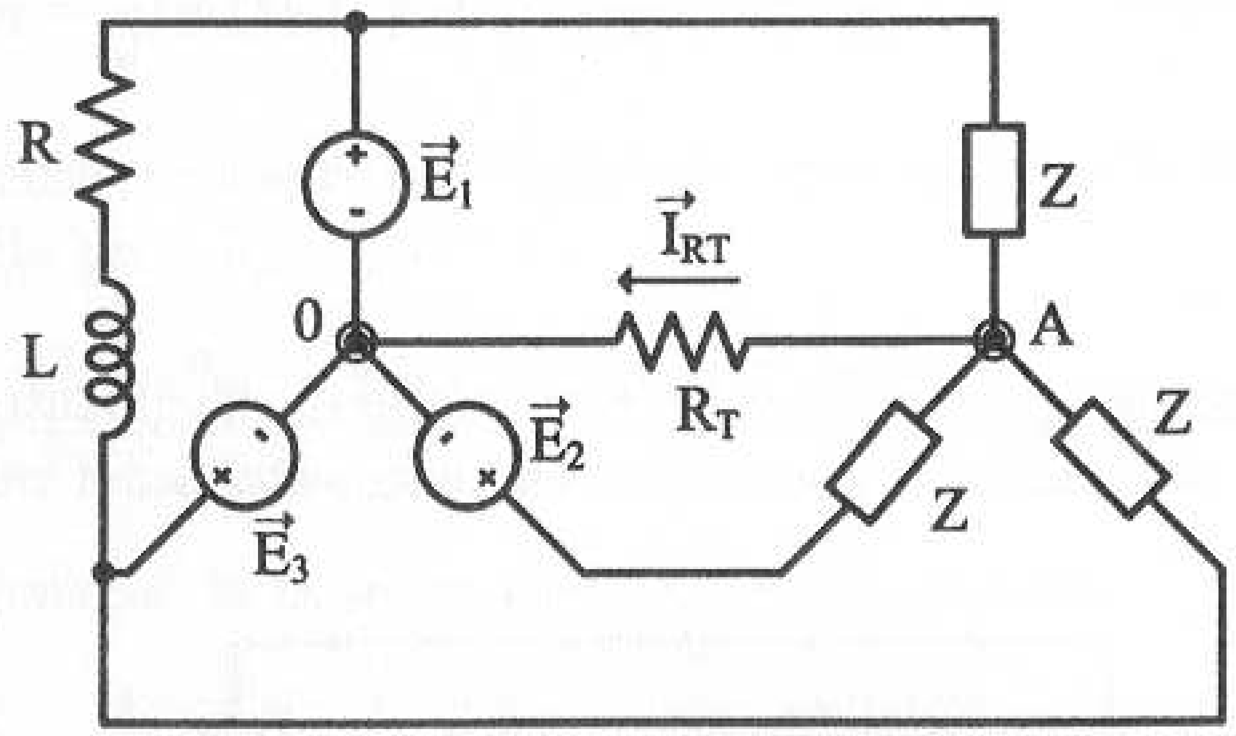
## Esercizio 3.27

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare l'espressione simbolica del fasore $\vec{I}_{R_T}$ della corrente che scorre nel resistore $R_T$.




### Svolgimento

Si tratta di un sistema trifase in cui la corrente che scorre in $R_T$ può essere calcolata a partire dalla differenza di potenziale tra il centro-stella dei generatori e il centro-stella del carico (impedenze Z):




Prendendo come riferimento il centro-stella dei generatori, la tensione $\vec{E}_A$ nel centro-stella del carico è data da

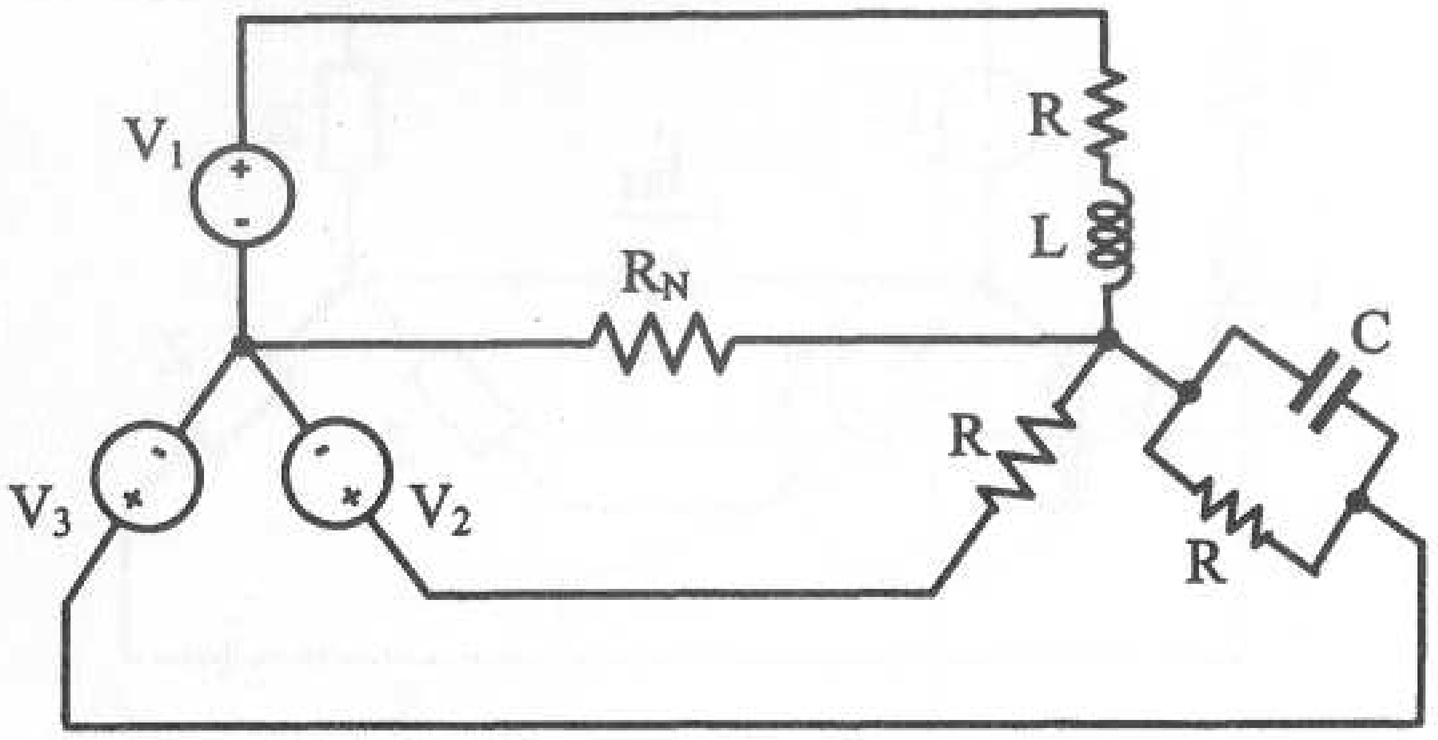
$$\left(\frac{1}{R_T}+\frac{3}{Z}\right)\vec{E}_A - \frac{1}{Z}\vec{E}_1 - \frac{1}{Z}\vec{E}_2 - \frac{1}{Z}\vec{E}_3 = 0 \Rightarrow \vec{E}_A = \frac{\frac{1}{Z}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3\right)}{\frac{1}{R_T}+\frac{3}{Z}},$$

da cui

$$\vec{I}_{R_T} = \frac{\vec{E}_A}{R_T} = \frac{1}{3R_T+Z}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3\right).$$

## Esercizio 3.28

Nel sistema trifase simmetrico in figura, calcolare la potenza reattiva scambiata dall'induttore.

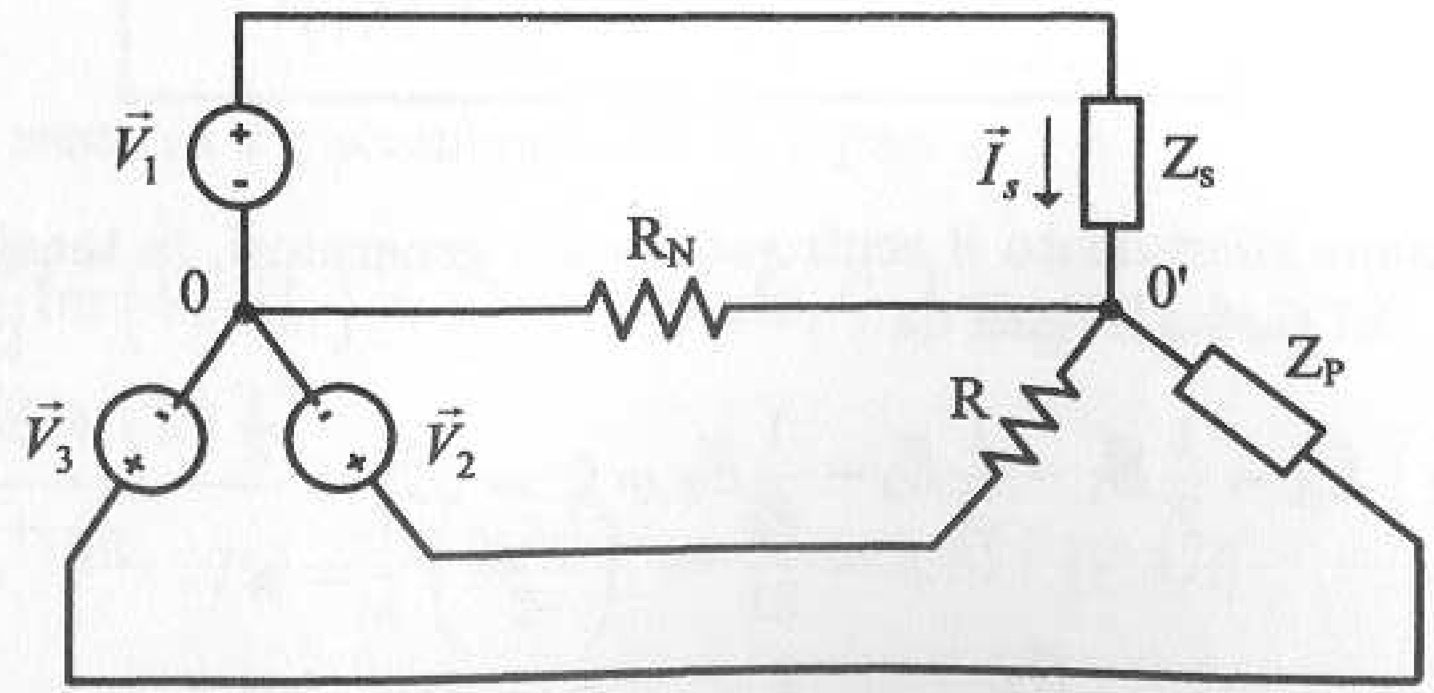



$$V_k(t) = \cos\left[3t - (k-1)\frac{2\pi}{3}\right],\ k = 1,2,3\,;\ R = 1\,;\ R_N = \frac{1}{2}\,;$$

$$L = \frac{1}{3}\,;\ C = \frac{1}{3}\,;\ [V, \Omega, H, F]\,.$$

### Svolgimento

Si analizza il sistema trifase prendendo come nodo di riferimento il centro-stella dei generatori e calcolando il potenziale del centro-stella del carico:








Equazione al centro-stella $0'$ del carico:

$$\left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_p}\right)\vec{E}_{0'} = \frac{1}{Z_s}\vec{V}_1 + \frac{1}{R}\vec{V}_2 + \frac{1}{Z_p}\vec{V}_3\,,$$

$$\text{con:}\quad \begin{cases} \omega = 3; \\ \frac{1}{Z_s} = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}; \\ \frac{1}{Z_p} = Y_p = \frac{1}{R} + j\omega C = 1 + j; \\ \vec{V}_1 = 1,\ \ \vec{V}_2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}},\ \ \vec{V}_3 = e^{-j\frac{4\pi}{3}}. \end{cases}$$

Pertanto risulta:

$$\vec{E}_{0'} = \frac{\frac{(1-j)}{2} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + (1+j)e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{2 + 1 + \frac{(1-j)}{2} + (1+j)} = -0,324 - 0,186j\,.$$

La potenza reattiva $P_R$ scambiata dall'induttore è data da:

$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\vec{V}_L\vec{I}_L^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{j\omega L\vec{I}_L\vec{I}_L^*\} = \frac{1}{2}\omega L|\vec{I}_L|^2\,,$$

dove $\vec{I}_L$ è la corrente che scorre nell'induttore, la quale è anche pari alla corrente $\vec{I}_s$ che scorre nella serie $Z_s$:

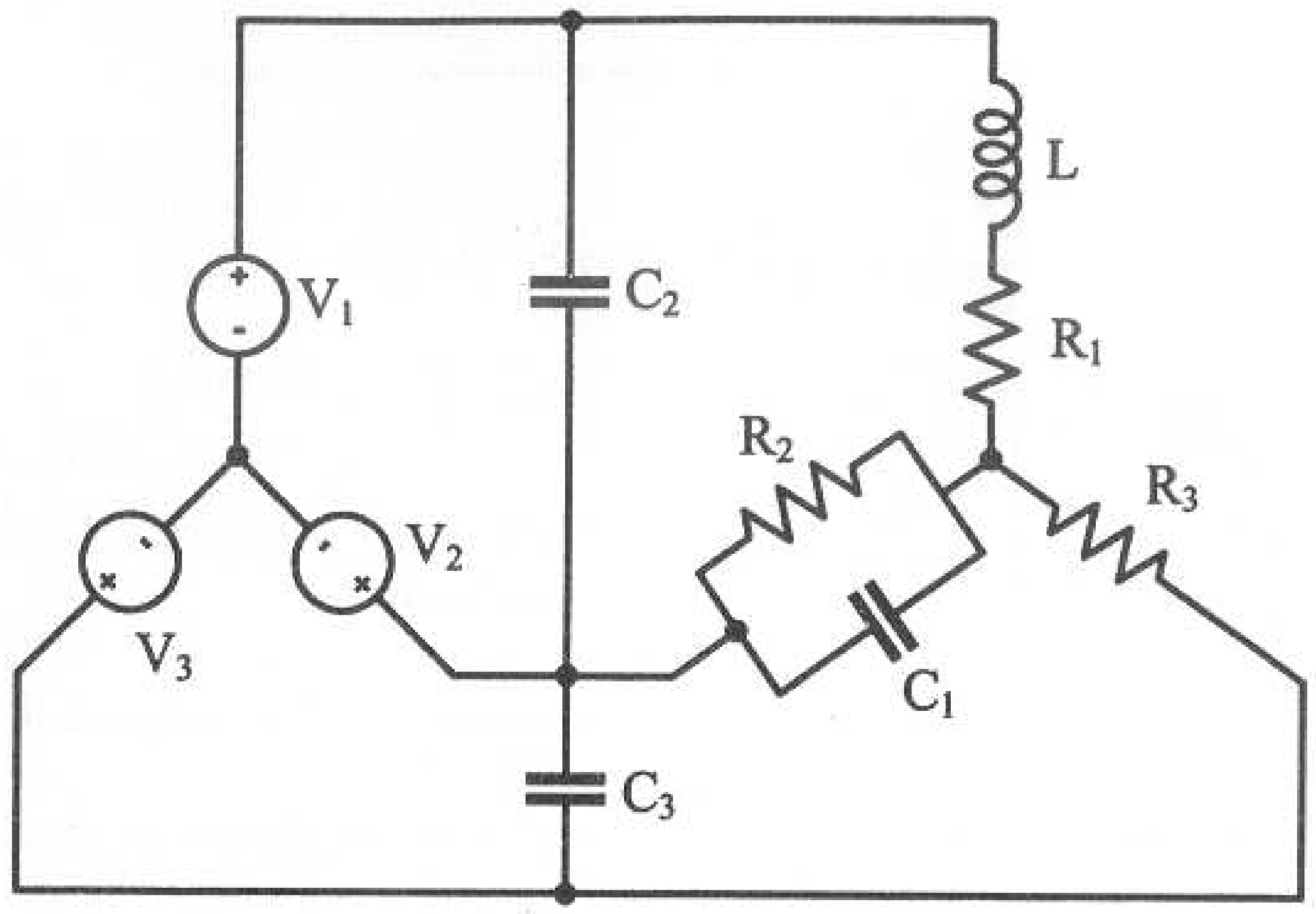
$$\vec{I}_L = \vec{I}_s = \frac{\vec{V}_1 - \vec{E}_{0'}}{Z_s} = \frac{1 - (-0,324 - 0,186j)}{1+j} = 0,755 - 0,569j\,.$$

Quindi, in conclusione, la potenza reattiva cercata è pari a:

$$P_R = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(0,755^2 + 0,569^2\right) = 0,447\ \ [\mathrm{VAR}]$$

## Esercizio 3.29

Determinare, per il sistema trifase simmetrico in figura, la potenza attiva erogata dai generatori.

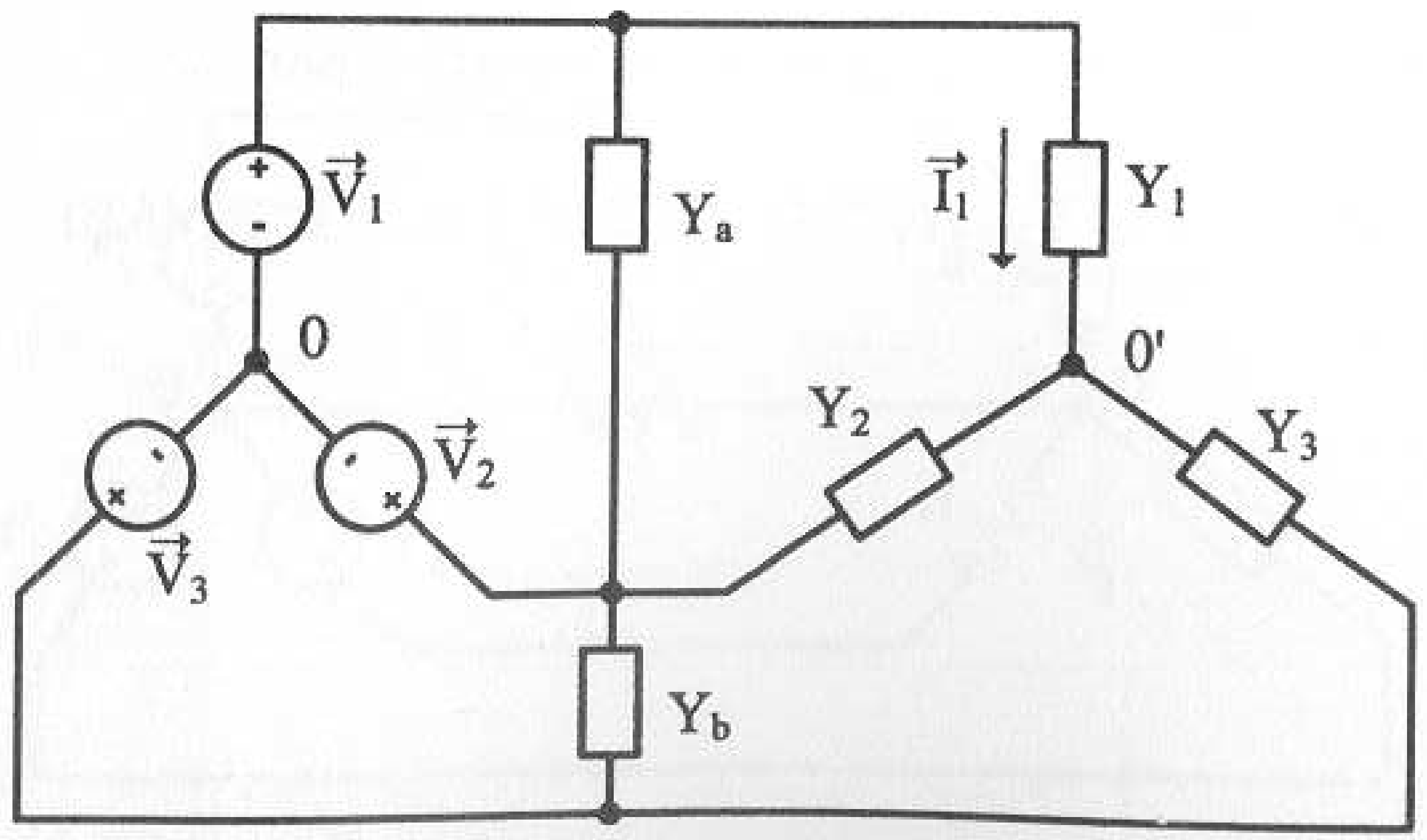



$$V_k(t) = 2\cos\left[t + (k-1)\,\frac{2\pi}{3}\right][V]\,,\; k = 1,2,3\,;\; R_1 = R_2 = R_3 = 1\,[\Omega]\,;$$

$$L = 1\,[H]\,;\; C_1 = C_2 = C_3 = 1\,[F]\,.$$

**Svolgimento**

Nel dominio dei fasori il circuito diventa:








in cui, oltre a $\omega = 1$, risulta:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = 2 \\ \vec{V}_2 = 2e^{j\frac{2\pi}{3}} = -1 + j\sqrt{3} = -1 + 1,73j \\ \vec{V}_3 = 2e^{j\frac{4\pi}{3}} = -1 - j\sqrt{3} = -1 - 1,73j \end{cases}$$

e inoltre:

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2} = 0,5\,(1-j) \\ Y_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C_1 = 1 + j \\ Y_3 = \frac{1}{R_3} = 1 \end{cases}$$

Per la conservazione della potenza complessa, la potenza attiva erogata dai generatori è pari alla potenza attiva dissipata sui resistori. Quindi:

$$P_{TOT} = \frac{1}{2}R_1\left|\vec{I}_1\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{V}_{0'} - \vec{V}_2\right|^2}{R_2} + \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{V}_{0'} - \vec{V}_3\right|^2}{R_3}\,,$$

dove è stato preso come nodo di riferimento il centro-stella dei generatori e dove $\vec{V}_{0'}$ è la tensione di centro-stella del carico. Quest'ultima si ricava da

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3)\,\vec{V}_{0'} - Y_1\vec{V}_1 - Y_2\vec{V}_2 - Y_3\vec{V}_3 = 0$$

e quindi:

$$\vec{V}_{0'} = \frac{Y_1\vec{V}_1 + Y_2\vec{V}_2 + Y_3\vec{V}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$\vec{V}_{0'} = \frac{[0,5\cdot(1-j)\cdot 2] + [(1+j)\cdot(-1+1,73j)] + [1\cdot(-1-1,73j)]}{[0,5\cdot(1-j)] + (1+j) + 1}$$

$$\vec{V}_{0'} = \frac{-2,73 - 2j}{2,5 + 0,5j} = \frac{(-2,73 - 2j)\cdot(2,5 - 0,5j)}{(2,5 + 0,5j)\cdot(2,5 - 0,5j)} = -1,20 - 0,56j\,,$$

ottenendo inoltre

$$\vec{I}_1 = \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_{0'}\right)Y_1 = (2 + 1,20 + 0,56j)\cdot 0,5\cdot(1-j) = 1,88 - 1,32j\,.$$

Si può così procedere al calcolo della potenza:

$$P_{TOT} = \frac{1}{2}\left(1,88^2 + 1,32^2\right) + \frac{1}{2}\left|-1,20 - 0,56j + 1 - 1,73j\right|^2 +$$

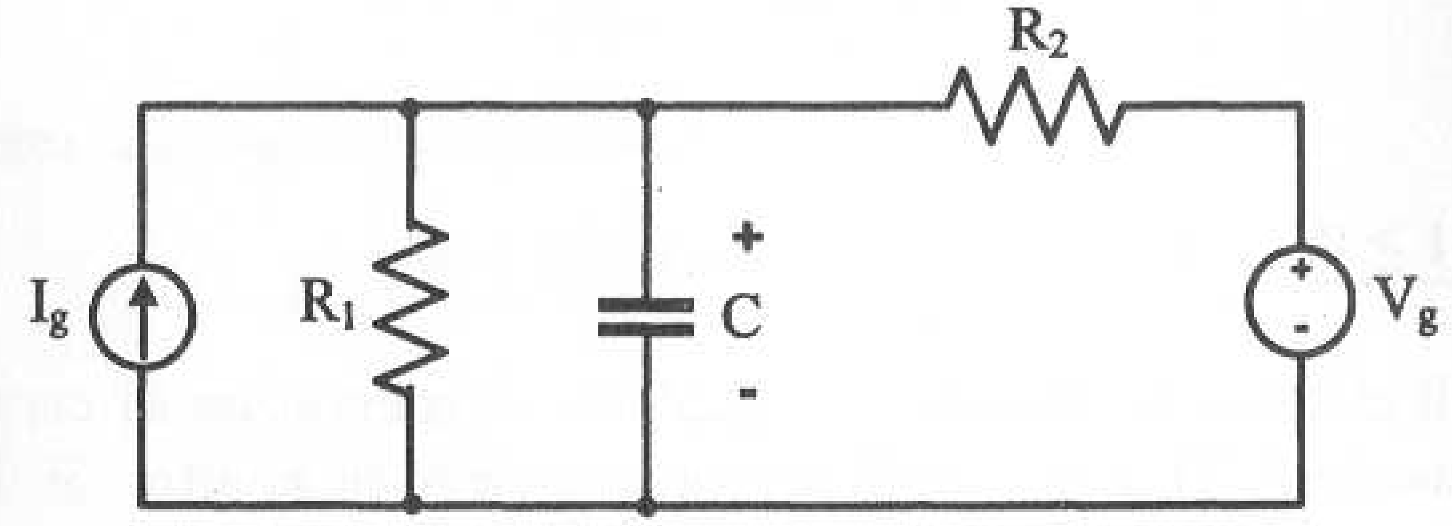
$$+\frac{1}{2}\left|-1,2 - 0,56j + 1 + 1,73j\right|^2 = 6,00\;[W]$$

# Capitolo 4

# Esercizi riepilogativi

## Esercizio ~~4.1~~ OK

Calcolare, per il circuito in figura, l'andamento della tensione ai capi del condensatore per tutto l'asse dei tempi, con il verso indicato in figura.



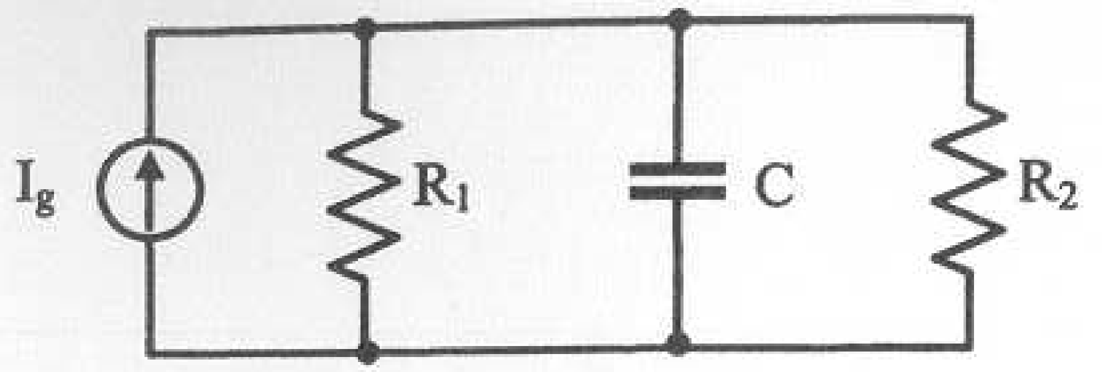

$$C = 1;\ \ R_1 = 1;\ \ R_2 = 2;\ \ V_g(t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ 1 \text{ per } t \geq 0 \end{cases};$$

$$I_g(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t < 0 \\ 0 \text{ per } t \geq 0 \end{cases}; \qquad [F, \Omega, V, A]\,.$$

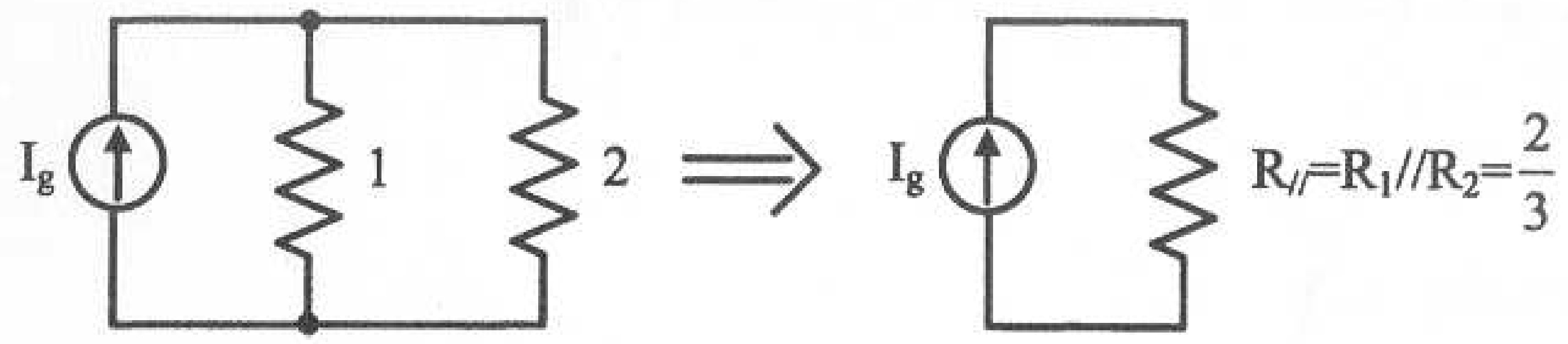
### Svolgimento

Analisi per $t < 0$.

Siamo in regime continuo ($\omega = 0$) in quanto $I_g(t)$ è costante e $V_g(t)$ è nullo. Essendo $V_g(t) = 0$, il generatore di tensione corrisponde ad un corto-circuito ed il circuito complessivo può essere ridisegnato nel seguente modo:




In regime continuo il condensatore $C$ è un circuito aperto e quindi il circuito può essere ulteriormente semplificato:

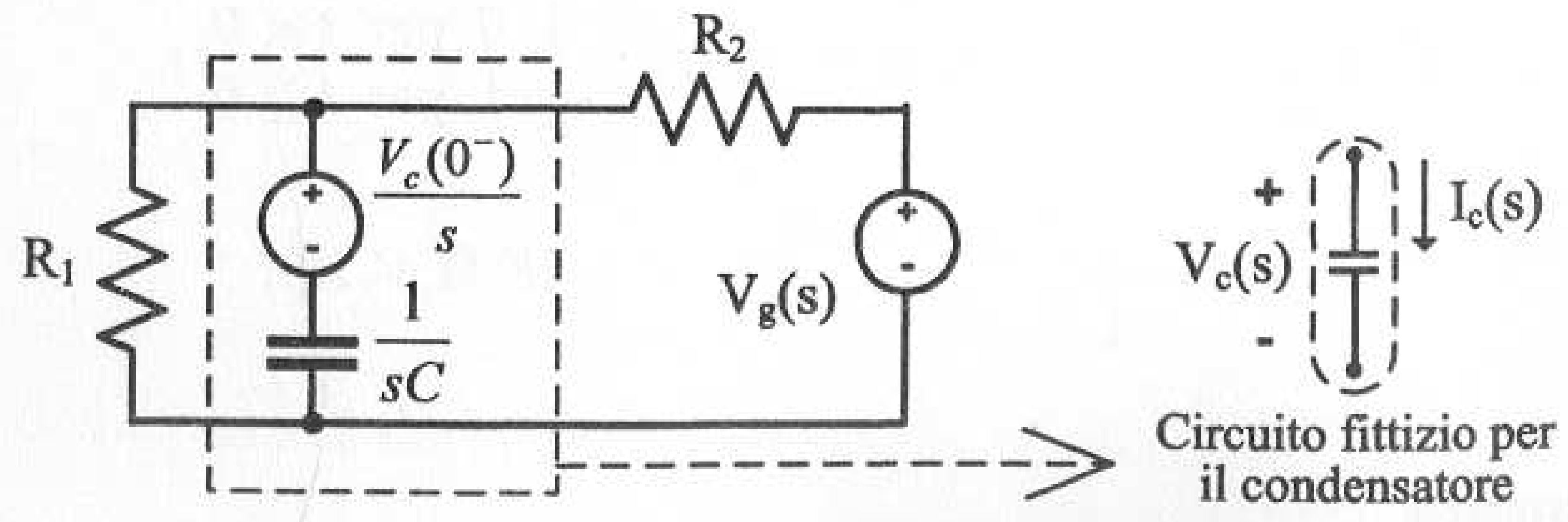



da cui risulta

$$V_C(t) = I_g \cdot R_{\|} = \frac{2}{3}\,[V]$$

Analisi per $t \geq 0$.

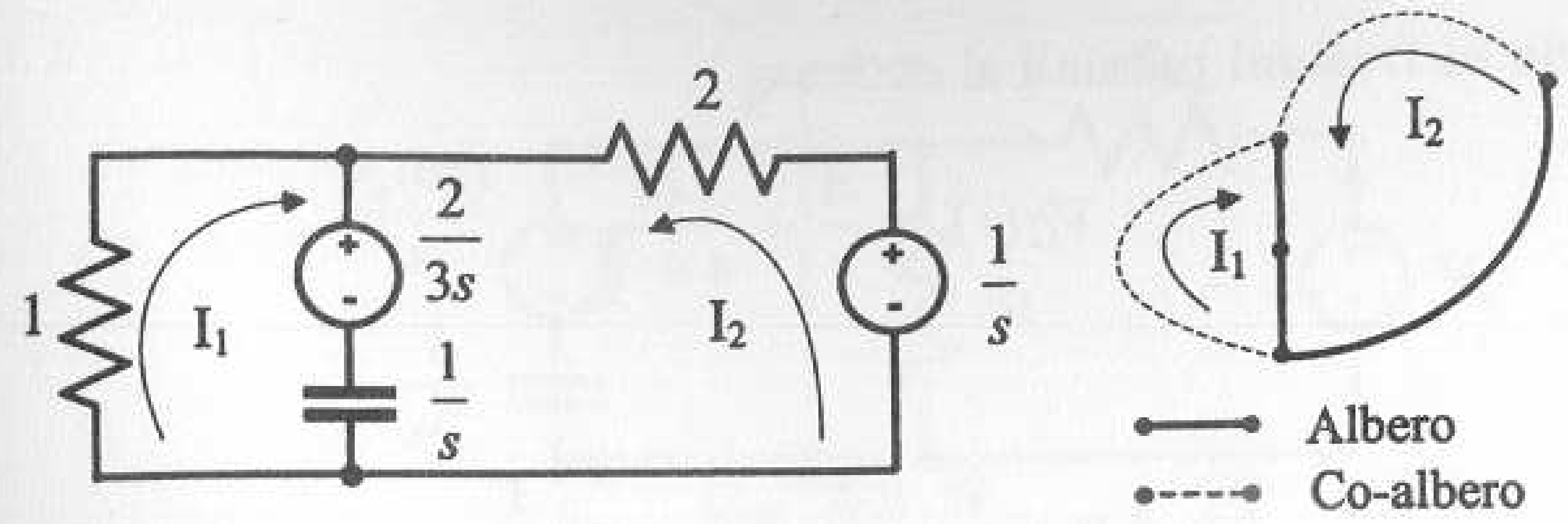
Si analizza il circuito nel dominio di Laplace. Il generatore di corrente non è attivo, in quanto $I_g(t) = 0$, quindi diventa un circuito aperto. Si deve inoltre tenere conto delle condizioni iniziali sul condensatore:




dove risulta $V_C(0^-) = \frac{2}{3}$, secondo il precedente calcolo per $t < 0$, e $V_g(s) = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$. Risolviamo col metodo delle maglie:








per il quale il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 2+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3s} \\ \frac{1}{s}-\frac{2}{3s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3s} \\ \frac{1}{3s} \end{bmatrix}$$

il quale porta alle seguenti soluzioni:

$$\Delta = \frac{(s+1)(2s+1)}{s^2} - \frac{1}{s^2} = \frac{2s+3}{s};$$

$$I_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} -\frac{2}{3s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{3s} & \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix}}{\frac{2s+3}{s}} = -\frac{4s+3}{3s(2s+3)};$$

$$I_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & -\frac{2}{3s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{3s} \end{bmatrix}}{\frac{2s+3}{s}} = \frac{s+3}{3s(2s+3)};$$

$$I_C = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2s+3};$$

$$V_C(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{V_C(0^-)}{s} = -\frac{1}{2s+3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{3s} = \frac{4s+3}{6s(s+\frac{3}{2})}.$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$V_C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{3}{2}},$$

con

$$A = \left.\frac{4s+3}{6s(s+\frac{3}{2})}\cdot s\right|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left.\frac{4s+3}{6s(s+\frac{3}{2})}\cdot\left(s+\frac{3}{2}\right)\right|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

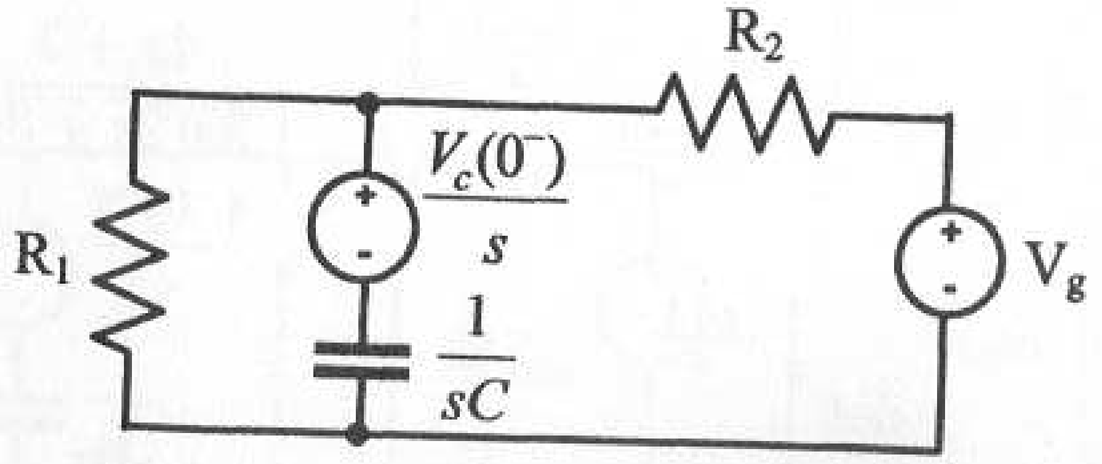
e quindi

$$V_C(s) = \frac{1}{3s} + \frac{1}{3\left(s+\frac{3}{2}\right)},$$

che porta alla seguente soluzione nel tempo:

$$V_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\} = \frac{1}{3}u_{-1}(t) + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}u_{-1}(t)\ [V]$$

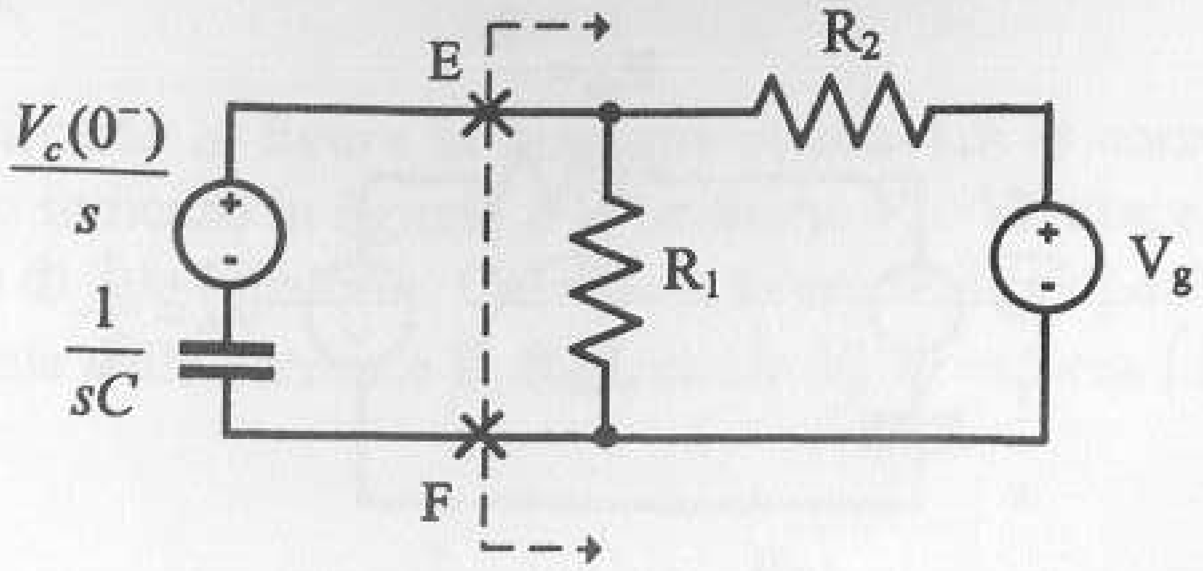
Soluzione alternativa col teorema di Thevenin (per $t \geq 0$).



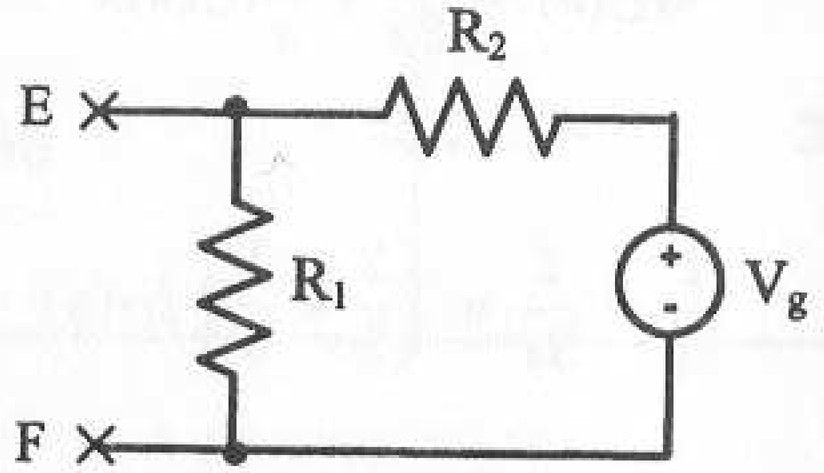

Il circuito si può ridisegnare nel seguente modo:



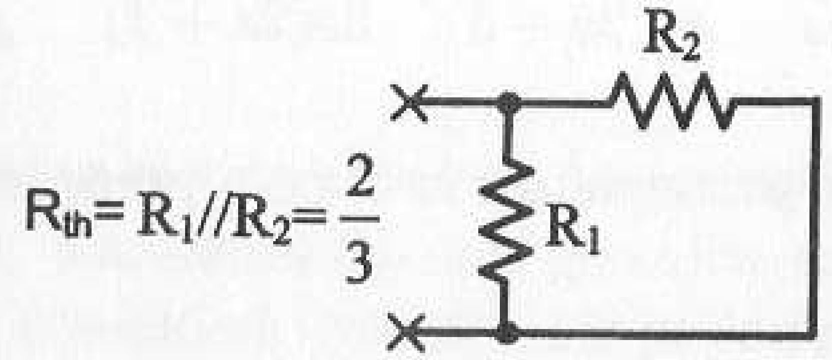





applicando poi il teorema di Thevenin alla parte destra dei morsetti E-F:



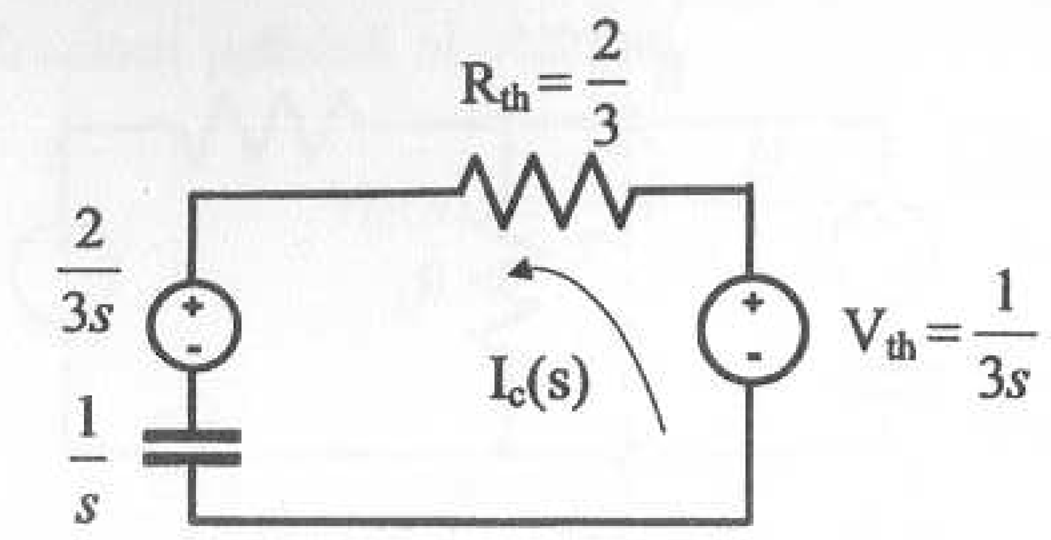

- Calcolo di $R_{th}$:




- Calcolo di $V_{th}$: si ha un partitore di tensione, per il quale

$$V_{th} = V_g(s)\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{1}{3s}.$$

Quindi si ottiene il seguente circuito semplificato:




dove la tensione sul condensatore è data da

$$V_C(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{s} I_C(s) .$$

Equazione maglia:

$$\frac{1}{3s} - \frac{2}{3s} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{s}\right) I_C(s)$$

$$I_C(s) = -\frac{1}{2s+3}$$

$$V_C(s) = \frac{2}{3s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2s+3} = \frac{4s+3}{3s(2s+3)} = \frac{4s+3}{6s\left(s+\frac{3}{2}\right)} .$$

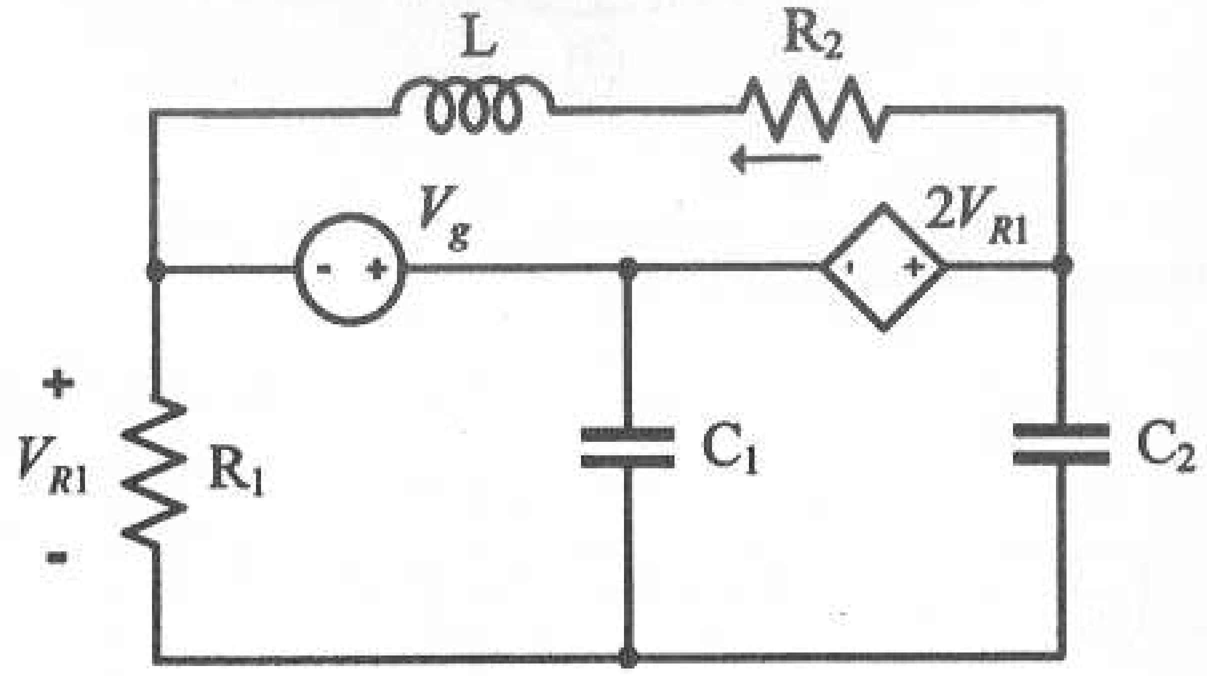
Dopodiché la soluzione prosegue come al caso precedente...





## Esercizio 4.2

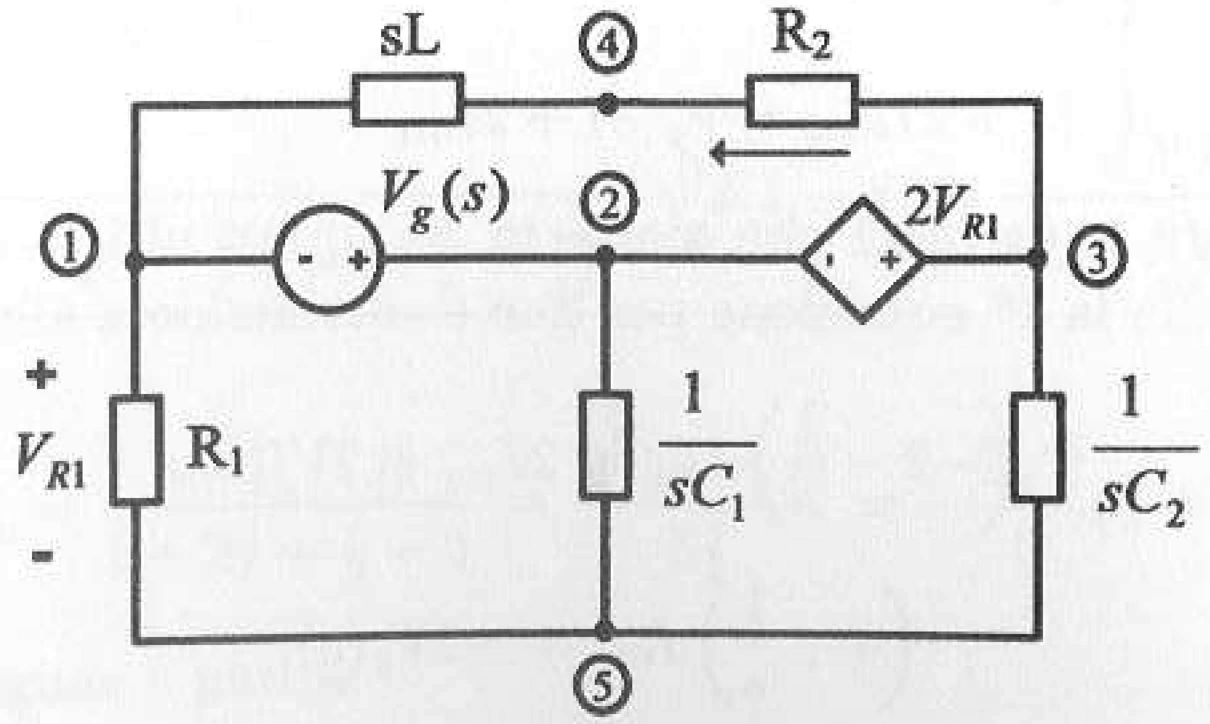
Calcolare per il circuito in figura la funzione di rete tra la corrente che scorre in $R_2$ (con il verso indicato in figura) e la tensione $V_g$. Valutare la stabilità del circuito sulla base di tale funzione. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente sinusoidale della corrente in $R_2$ quando $V_g(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) u_{-1}(t)$.



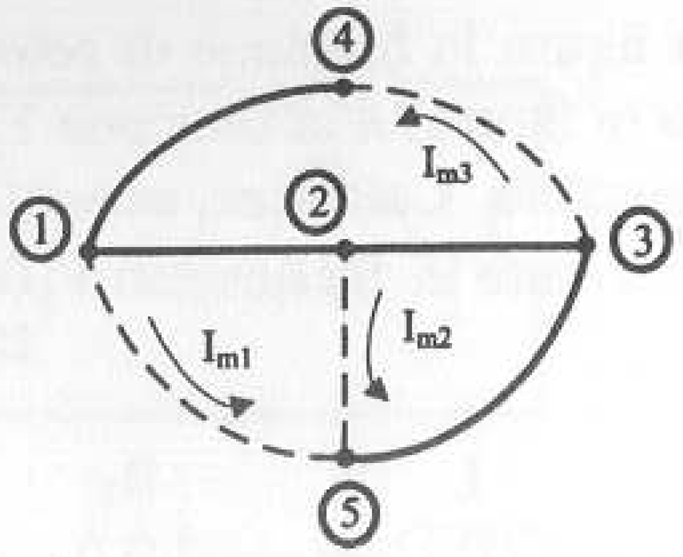

$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega];\; C_1 = C_2 = 1\,[F];\; L = 1\,[H].$$

### Svolgimento

Per il calcolo della funzione di rete richiesta è necessario analizzare il circuito nel dominio di Laplace, considerando una generica eccitazione $V_g(s)$ per il generatore di tensione e condizioni iniziali nulle su induttori e condensatori:



Si utilizza il metodo delle maglie, scegliendo il seguente albero:




Il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(R_1 + \frac{1}{sC_2}\right) & \frac{1}{sC_2} & 0 \\ \frac{1}{sC_2} & \left(\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & (sL + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \\ I_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2V_{R_1} - V_g(s) \\ -2V_{R_1} \\ V_g(s) + 2V_{R_1} \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$2V_{R_1} = 2R_1 I_{m_1} ,$$

in quanto la corrente che scorre in $R_1$ è proprio $I_{m_1}$.

Sostituendo quest'ultima equazione nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_{m_1} + \frac{1}{s} I_{m_2} = -2I_{m_1} - V_g(s) \\ \frac{1}{s} I_{m_1} + \frac{2}{s} I_{m_2} = -2I_{m_1} \\ (s+1) I_{m_3} = V_g(s) + 2I_{m_1} \end{cases}$$

Dovendo calcolare la corrente che scorre in $R_2$, quest'ultima è proprio pari a $I_{m_3}$. Moltiplicando la 1$^a$ equazione per due e sottraendola alla 2$^a$ si ottiene:

$$\left(-2 - \frac{1}{s}\right) I_{m_1} = 2I_{m_1} + 2V_g(s)$$

$$\left(4 + \frac{1}{s}\right) I_{m_1} = -2V_g(s)$$

$$I_{m_1} = -\frac{2s}{4s+1} V_g(s) .$$





Sostituendo $I_{m_1}$ nella 3$^a$ equazione si ha:

$$(s+1) I_{m_3} = V_g(s) - \frac{4s}{4s+1} V_g(s)$$

$$I_{m_3} = \frac{4s + 1 - 4s}{(s+1)(4s+1)} V_g(s)$$

e quindi:

$$I_{R_2} = I_{m_3} = \frac{1}{(s+1)(4s+1)} V_g(s) .$$

La funzione di rete richiesta è:

$$H(s) = \frac{I_{R_2}(s)}{V_g(s)} = \frac{1}{(s+1)(4s+1)} .$$

Questa funzione presenta poli in $s = -1$ e $s = -\frac{1}{4}$, quindi il circuito risulta stabile asintoticamente. In tale situazione esiste la risposta a regime permanente sinusoidale. Il fasore della risposta a regime $\vec{I}_{R_2}$ si ottiene dalla relazione notevole:

$$\vec{I}_{R_2} = H(s)\Big|_{s=j\omega} \cdot \vec{V}_g$$

dove, essendo l'eccitazione a regime $V_g(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, risulta $\omega = \frac{1}{2}$ e

$$\vec{V}_g = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) = \sqrt{2}(1-j) .$$

A questo punto si ottiene:

$$\vec{I}_{R_2} = \frac{1}{\left(j \cdot \frac{1}{2} + 1\right)\left(4 \cdot j \cdot \frac{1}{2} + 1\right)} \cdot \sqrt{2}(1-j) = \frac{\sqrt{2}(1-j)}{\left(1 + \frac{j}{2}\right)(1+2j)}$$

$$\vec{I}_{R_2} = \frac{\sqrt{2}(1-j)}{1 + 2j + \frac{j}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(1-j)}{5\frac{j}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+j) .$$

La risposta a regime è pari a:

$$I_{R_2}(t) = |\vec{I}_{R_2}| \cos\left(\frac{1}{2}t + \angle \vec{I}_{R_2}\right) ,$$

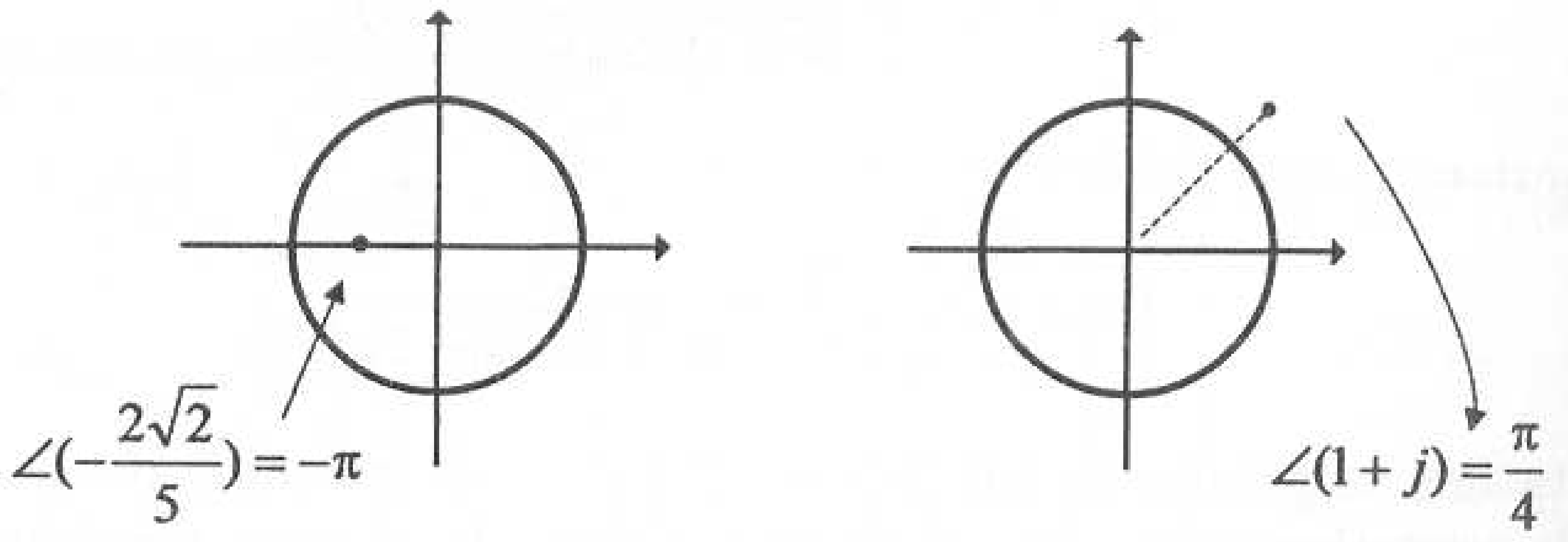
dove

$$|\vec{I}_{R_2}| = \frac{2\sqrt{2}}{5}|1+j| = \frac{4}{5}$$

e

$$\angle\vec{I}_{R_2} = \angle\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) + \angle(1+j)\,.$$

Analizzando la locazione dei due termini complessi si ha che:




da cui deriva:

$$\angle\vec{I}_{R_2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

In definitiva, l'andamento a regime di $I_{R_2}(t)$ sarà:

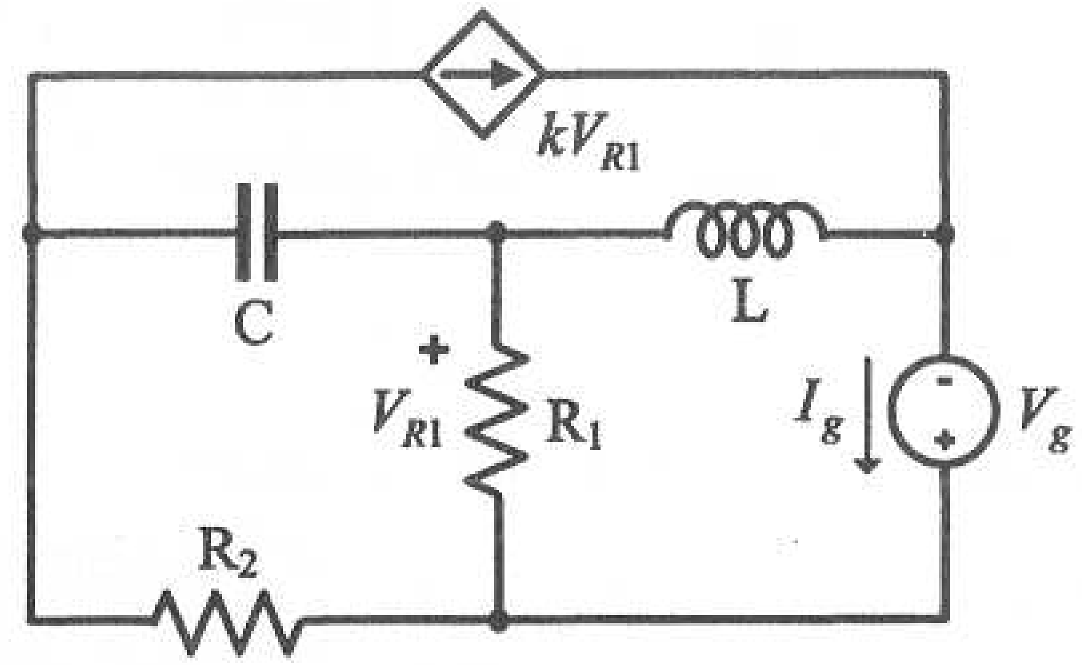
$$I_{R_2}(t) = \frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{2}t - \pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad [V]$$

N.B.: $\cos(-\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$



## Esercizio 4.3

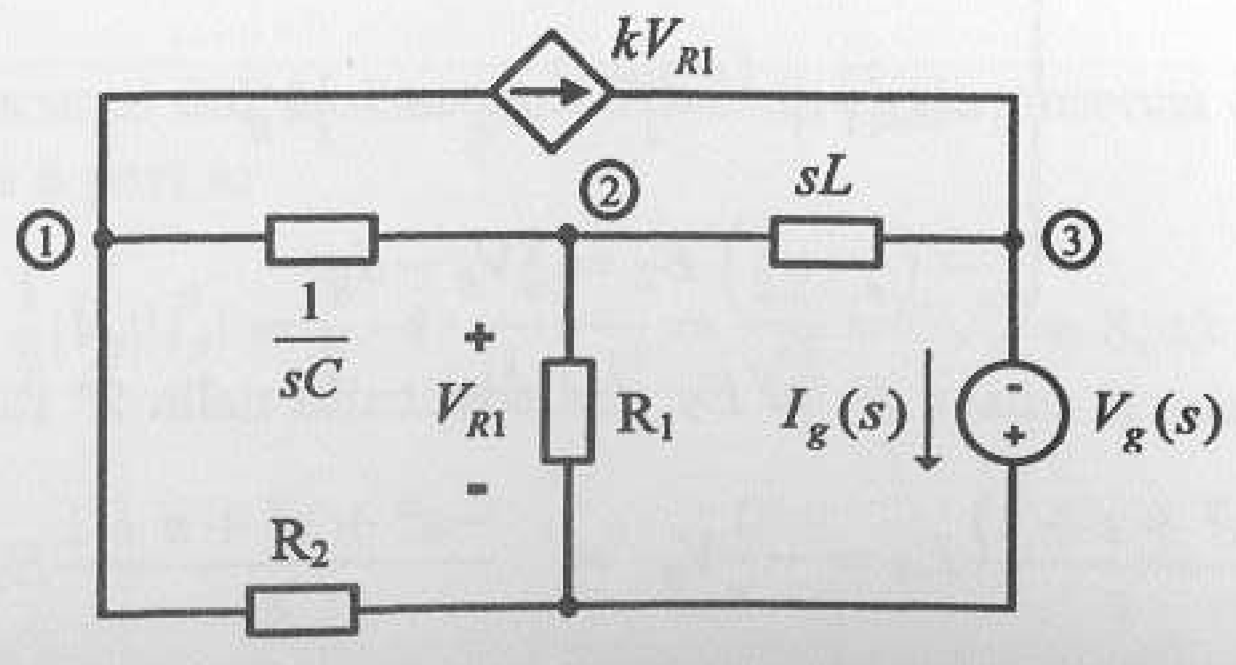
Nel seguente circuito, calcolare la funzione di rete tra la corrente $I_g$ che scorre nel generatore $V_g$ (con il verso indicato in figura) e la tensione del generatore stesso. Verificare se esiste la risposta a regime permanente sinusoidale e, in caso affermativo, calcolare la potenza apparente erogata dal generatore di tensione quando $V_g(t) = 4\cos(t)u_{-1}(t)\,[V]$.




$$R_1 = 1\,[\Omega];\; R_2 = 2\,[\Omega];\; C = 1\,[F];\; L = 1\,[H];\; k = -\frac{1}{2}\,[A/V].$$

### Svolgimento

Per il calcolo della funzione di rete richiesta si deve analizzare il circuito nel dominio di Laplace, considerando una generica eccitazione $V_g(s)$ e condizioni iniziali nulle sui componenti con memoria. Si ha quindi:



Si analizza il circuito con il metodo dei nodi, osservando che la corrente $I_g(s)$, da calcolare per la funzione di rete, figura anche come incognita ausiliaria sul generatore di tensione. Abbiamo quindi il seguente sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} \left(sC + \frac{1}{R_2}\right) & -sC & 0 \\ -sC & \left(sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right) & -\frac{1}{sL} \\ 0 & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kV_{R1} \\ 0 \\ kV_{R1} - I_g \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore di tensione:

$$E_3 = -V_g\,.$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato:

$$kV_{R1} = kE_2\,,$$

in quanto la tensione $V_{R1}$ è proprio pari a $E_2$.

Sostituendo le equazioni di vincolo nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}\right) E_1 - sE_2 = \frac{1}{2}E_2 \\ -sE_1 + \left(s + 1 + \frac{1}{s}\right) E_2 + \frac{1}{s}V_g = 0 \\ -\frac{1}{s}E_2 - \frac{1}{s}V_g = -\frac{1}{2}E_2 - I_g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(s + \frac{1}{2}\right) E_1 - \left(s + \frac{1}{2}\right) E_2 = 0 \\ -sE_1 + \frac{(s^2+s+1)}{s} E_2 = -\frac{1}{s}V_g \\ -\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right) E_2 = \frac{1}{s}V_g - I_g \end{cases}$$

Dalla $1^a$ equazione si ricava $E_1 = E_2$, che sostituita nella $2^a$ fornisce:

$$-sE_2 + \frac{(s^2+s+1)}{s}E_2 = -\frac{1}{s}V_g \;\Rightarrow\; \frac{-s^2+s^2+s+1}{s}E_2 = -\frac{1}{s}V_g$$





e quindi

$$E_2 = -\frac{1}{s+1}V_g\,.$$

Sostituendo $E_2$ nella $3^a$ equazione del sistema si ottiene:

$$-\left(\frac{2-s}{2s}\right)\left(-\frac{1}{s+1}\right)V_g - \frac{1}{s}V_g = -I_g$$

$$\frac{(2-s-2s-2)}{2s(s+1)}V_g = -I_g$$

$$I_g = \frac{3}{2(s+1)}V_g$$

e la funzione di rete richiesta è

$$H(s) = \frac{I_g(s)}{V_g(s)} = \frac{3}{2(s+1)}\,.$$

Poiché la funzione di rete ha un unico polo reale in $s = -1$, il circuito risulta asintoticamente stabile ed ammette risposta a regime permanente sinusoidale. A regime, il fasore della corrente del generatore $\vec{I}_g$ si ottiene dalla relazione notevole:

$$\vec{I}_g = H(s)\Big|_{s=j\omega} \cdot \vec{V}_g$$

dove, essendo a regime $V_g(t) = 4\cos(t)$, si ottiene $\omega = 1$, $\vec{V}_g = 4$ e quindi:

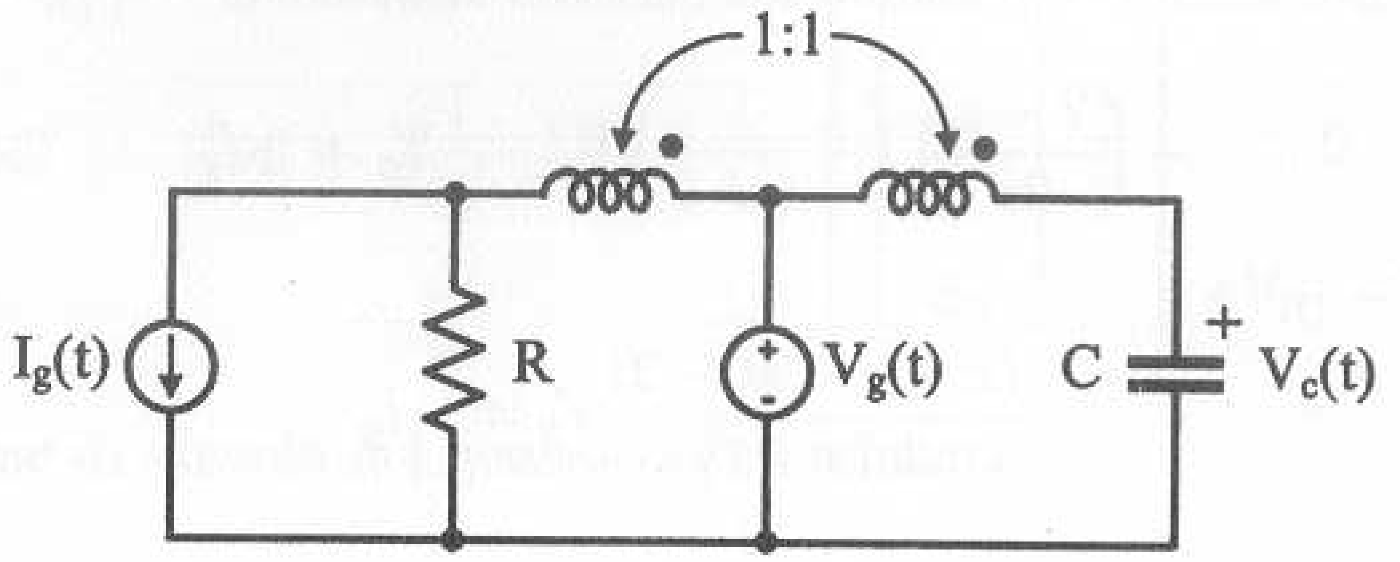
$$\vec{I}_g = \frac{3}{2(j+1)} \cdot 4 = \frac{6}{1+j}\,.$$

Dato che $\vec{I}_g$ è uscente dal morsetto positivo di $\vec{V}_g$, la potenza apparente $P_{app}$ erogata a regime è pari a:

$$P_{app} = \frac{1}{2}|\vec{V}_g||\vec{I}_g| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{6}{|1+j|} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} = 8,49 \quad [VA]$$

## Esercizio 4.4

Nel circuito in figura, calcolare l'andamento della tensione $V_c$ ai capi del condensatore per tutto l'asse dei tempi.

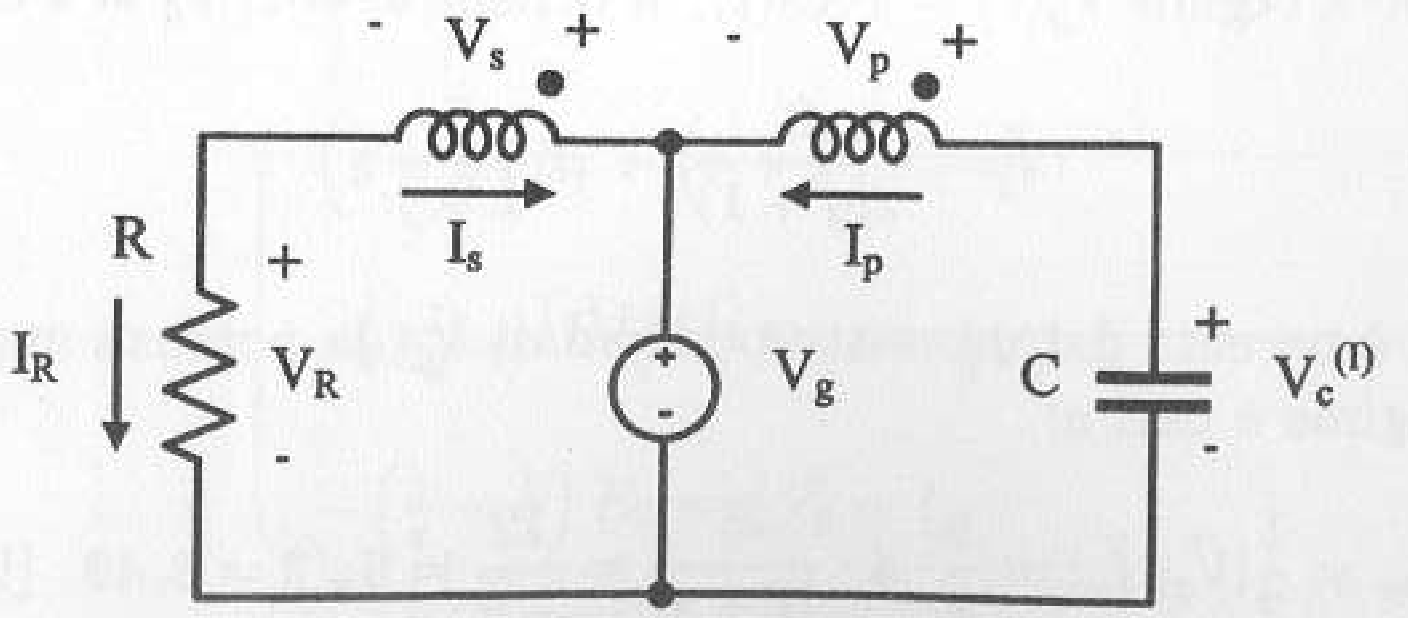



$$V_g(t) = 3\,[V]\,;\; I_g(t) = \begin{cases} 2\sin(t)\,, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} [A]\,;\; R = 1\,[\Omega]\,;\; C = 1\,[F]\,.$$

### Svolgimento

Analisi per $t < 0$.
Si usa il metodo dei fasori, dal momento che il circuito è in regime permanente sinusoidale. Sono presenti la pulsazione $\omega = 0$, dovuta a $V_g(t)$, e la pulsazione $\omega = 1$ dovuta a $I_g(t)$.

$\omega = 0$) Si disattiva il generatore $I_g(t)$, il quale diventa un circuito aperto:



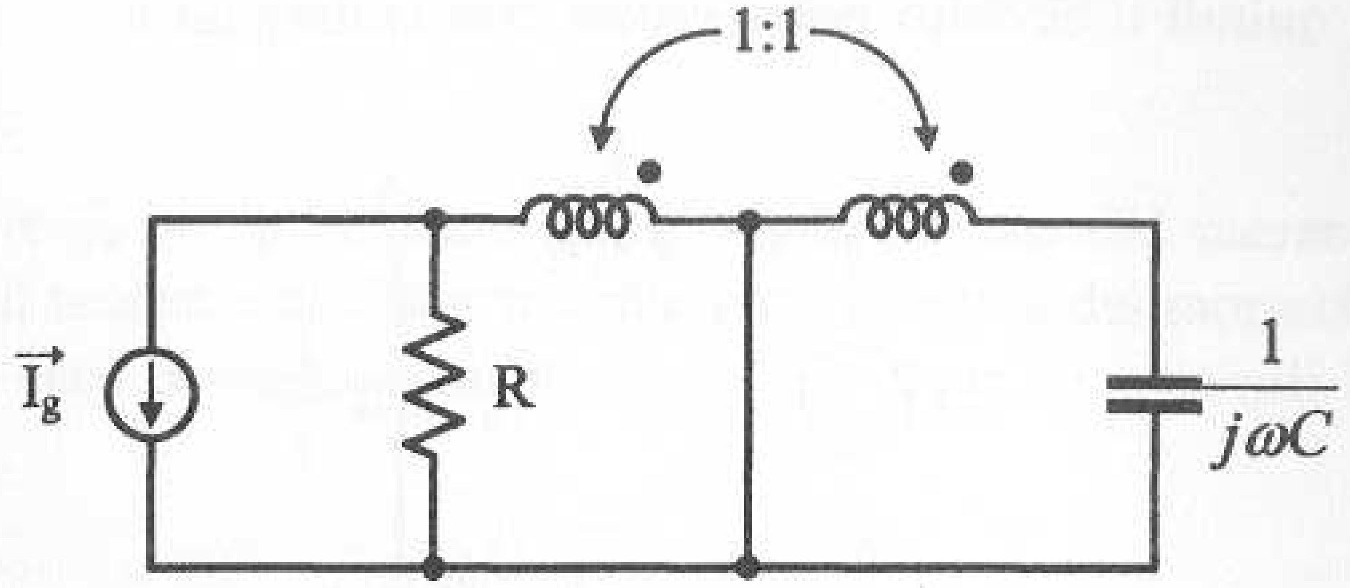

Poiché si è in continua, il condensatore corrisponde ad un circuito aperto. Ne deriva che $I_p = 0$ e quindi, per il vincolo del trasformatore ideale, è anche $I_s = I_p = 0$ (si noti che $I_s$ è uscente dal morsetto positivo, mentre $I_p$ è



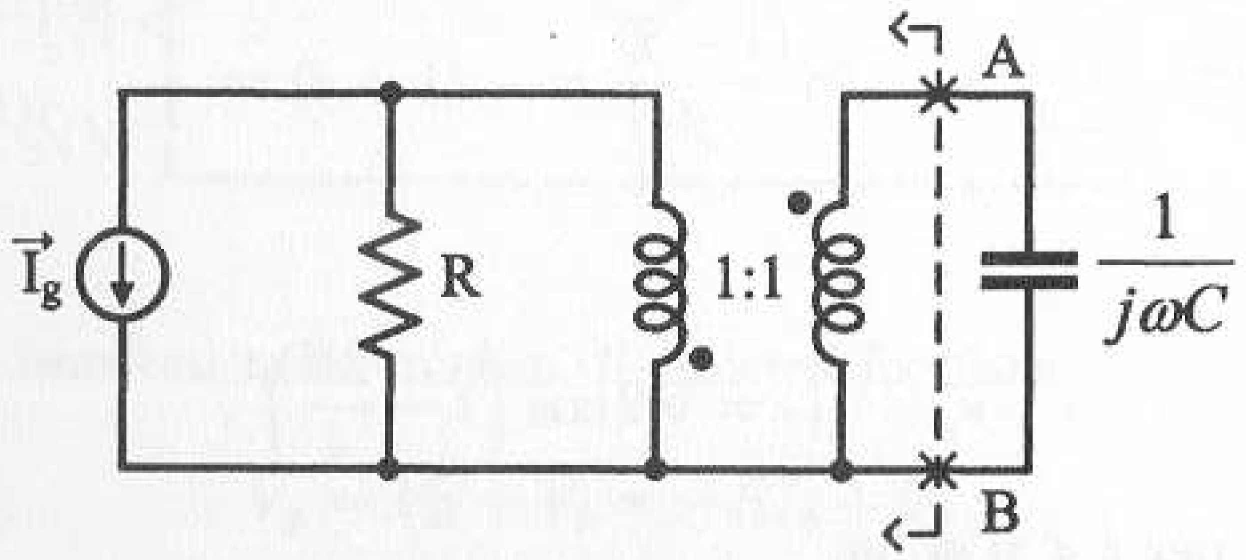
entrante, quindi non compare il segno meno). Questo comporta $I_R = -I_s = 0$ e $V_R = RI_R = 0$. In conclusione si ha che $V_g = V_s + V_R \Rightarrow V_s = V_g$ e quindi, dato che $V_p = V_s$ (per la condizione imposta dal trasformatore ideale), si ha:

$$V_c^{(I)} = V_g + V_p = V_g + V_s = 2V_g \Rightarrow V_c^{(I)} = 6\,.$$

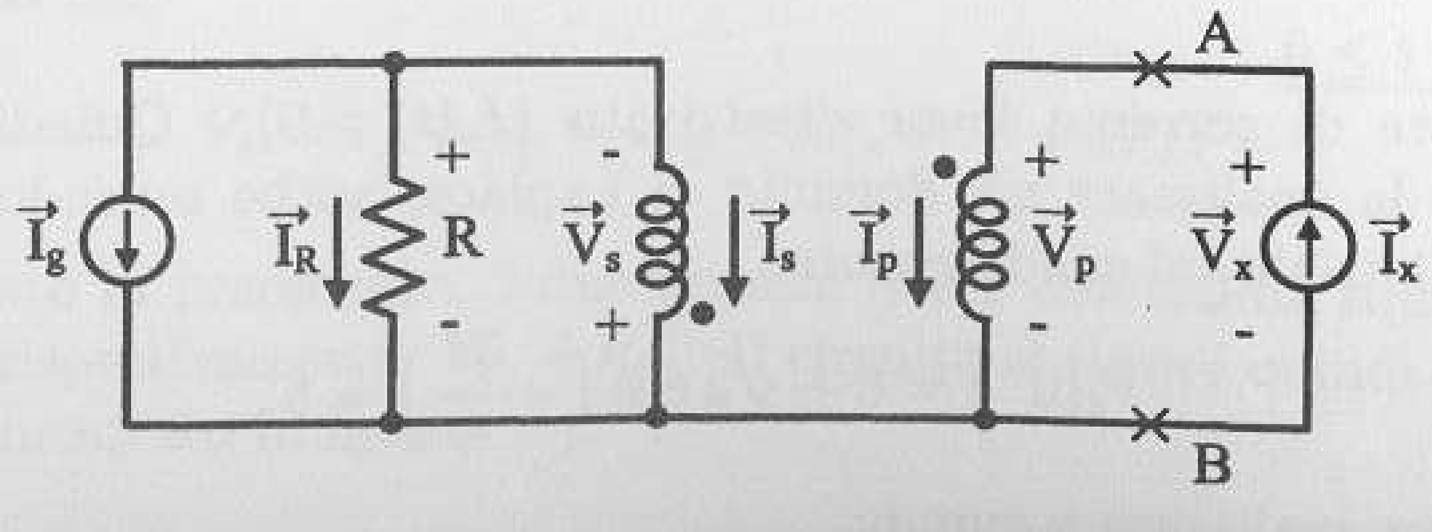
$\omega = 1$) Si disattiva $V_g(t)$, che diventa un corto-circuito:




Poiché $2\sin(t) = 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$, si ha che $\vec{I_g} = -2j$. Il circuito può essere ridisegnato come mostrato in figura:



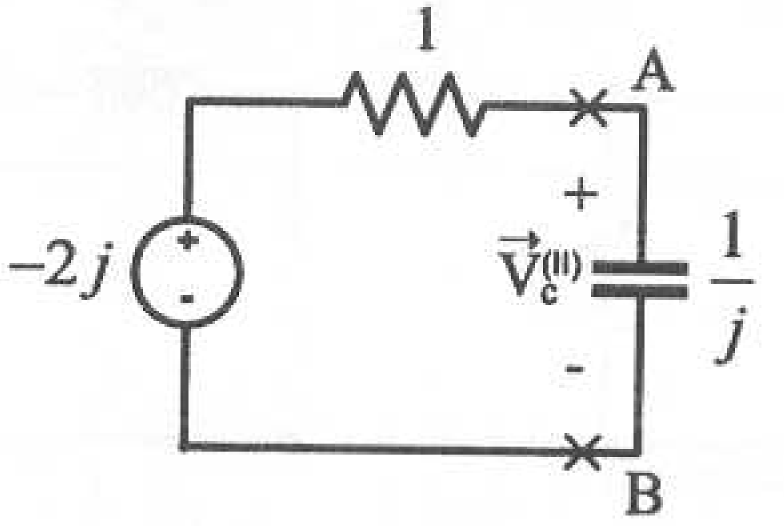

Di seguito si applica il teorema di Thevenin alla parte sinistra dei morsetti A-B evidenziati nella figura precedente:



dove il trasformatore ideale impone i vincoli $\vec{V}_s = \vec{V}_p$ e $\vec{I}_s = \vec{I}_p$ ($\vec{I}_s$ è uscente dal morsetto positivo mentre $\vec{I}_p$ è entrante, quindi non compare il segno meno). Si ha che $\vec{I}_p = \vec{I}_x$ e quindi che $\vec{I}_s = \vec{I}_p = \vec{I}_x$; inoltre:

$$\vec{V}_R = R\vec{I}_R = R\left(-\vec{I}_s - \vec{I}_g\right) = -R\left(\vec{I}_g + \vec{I}_x\right);$$
$$\vec{V}_x = \vec{V}_p = \vec{V}_s = -\vec{V}_R \Rightarrow \vec{V}_x = R\vec{I}_g + R\vec{I}_x = -2j + 1\vec{I}_x\,.$$

Nell'ultima equazione i termini $-2j$ e 1 rappresentano, rispettivamente, i valori di $V_{th}$ e $R_{th}$, quindi il circuito potrà essere così ridisegnato:




La tensione sul condensatore si ottiene come partitore di tensione:

$$\vec{V}_c^{(II)} = -2j\frac{\frac{1}{j}}{1+\frac{1}{j}} = -\cancel{2}j\frac{(1-j)}{\cancel{2}} = -(1+j) \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{V}_c^{(II)}\right| = \sqrt{2} \\ \angle\vec{V}_c^{(II)} = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Quindi sarà:

$$V_c^{(II)}(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Ricapitolando, per $t < 0$ si ha:

$$V_c(t) = V_c^{(I)}(t) + V_c^{(II)}(t) = 6 + \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)\ [V]$$

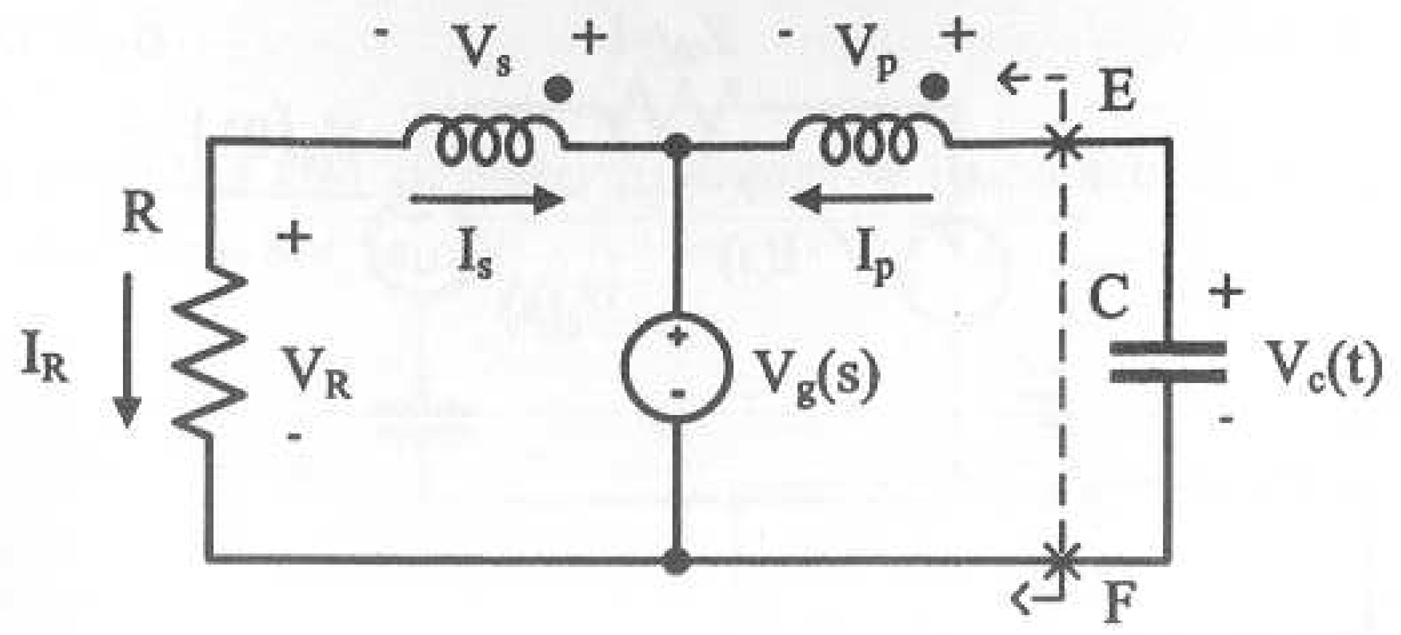
Analisi per $t \geq 0$.

Il generatore di corrente viene disattivato ($I_g(t) = 0$). Quindi ci sarà un transitorio da analizzare nel dominio di Laplace, anche tenendo conto della condizione iniziale sul condensatore:

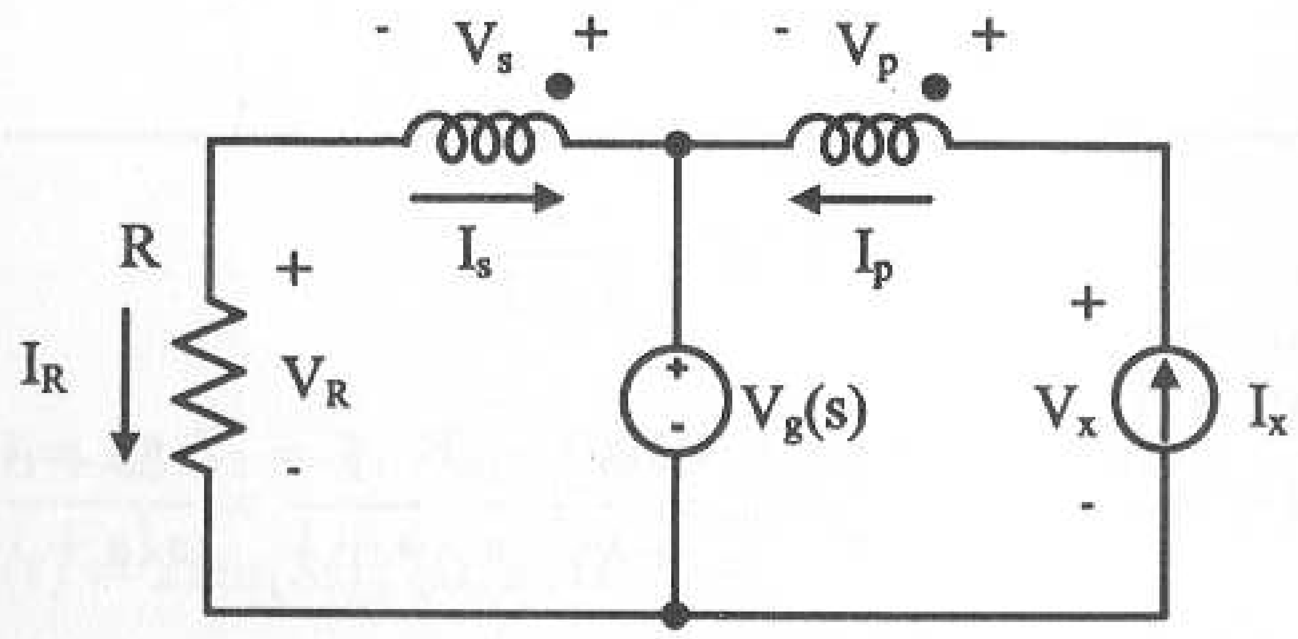
$$V_c(0^-) = 6 + \sqrt{2}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 5\,.$$

Il circuito da analizzare è quindi:






con $V_s = V_p$ e $I_s = I_p$ (sempre perchè $I_s$ è uscente dal morsetto positivo). Applichiamo il teorema di Thevenin alla parte sinistra dei morsetti E-F. Si noti che in questo caso bisogna considerare $V_g(t) = 3u_{-1}(t)$ e quindi $V_g(s) = \frac{3}{s}$.




Il bilancio delle tensioni nella maglia di sinistra fornisce:

$$V_g = V_R + V_s = -RI_s + V_s\,,$$

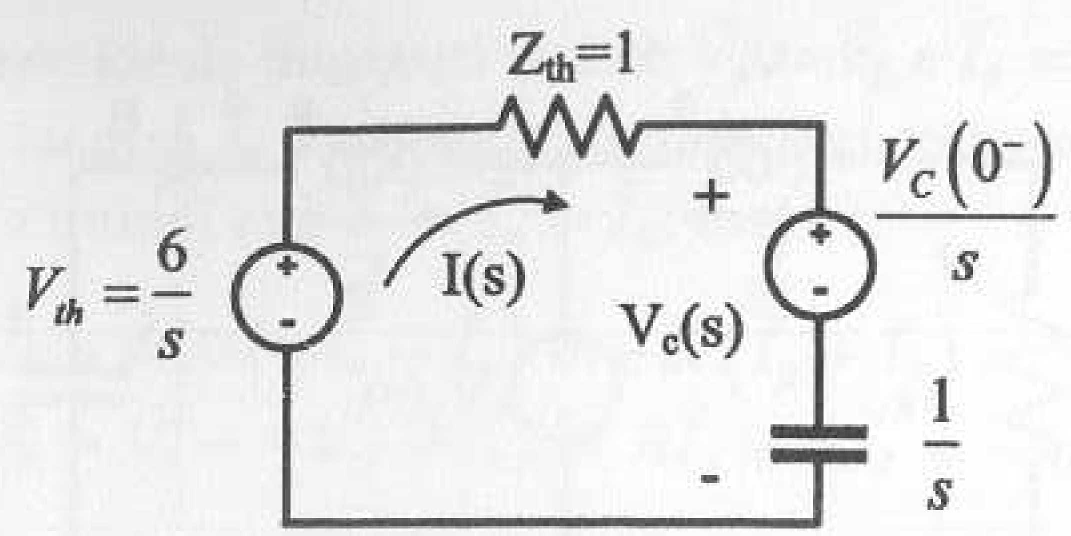
ma essendo $I_s = I_p = I_x$ e $V_s = V_p$, sarà anche:

$$V_g = -RI_x + V_p \Rightarrow V_p = V_g + RI_x\,.$$

Inoltre risulta che:

$$V_x = V_g + V_p = 2V_g + RI_x = \frac{6}{s} + 1I_x\,.$$

Come già visto in precedenza, i due termini $\frac{6}{s}$ e 1 dell'ultima equazione rappresentano, rispettivamente, $V_{th}$ e $R_{th}$. Il circuito si riduce quindi al semplice circuito RC mostrato in figura:




Equazione di maglia:

$$\left(1+\frac{1}{s}\right) I(s) = V_{th} - \frac{V_c(0^-)}{s}$$

$$\frac{(s+1)}{s} I(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s}$$

$$I(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$V_c(s) = \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{1}{s} I(s) = \frac{5}{s} + \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1} = \frac{5s+6}{s(s+1)}.$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$V_c(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$\begin{cases} A = \frac{5s+6}{s\cdot(s+1)} s\Big|_{s=0} = 6 \\ B = \frac{(5s+6)}{s\cdot(s+1)} (s+1)\Big|_{s=-1} = -1 \end{cases}$$

Quindi

$$V_c(s) = \frac{6}{s} - \frac{1}{s+1}$$

e, in conclusione,

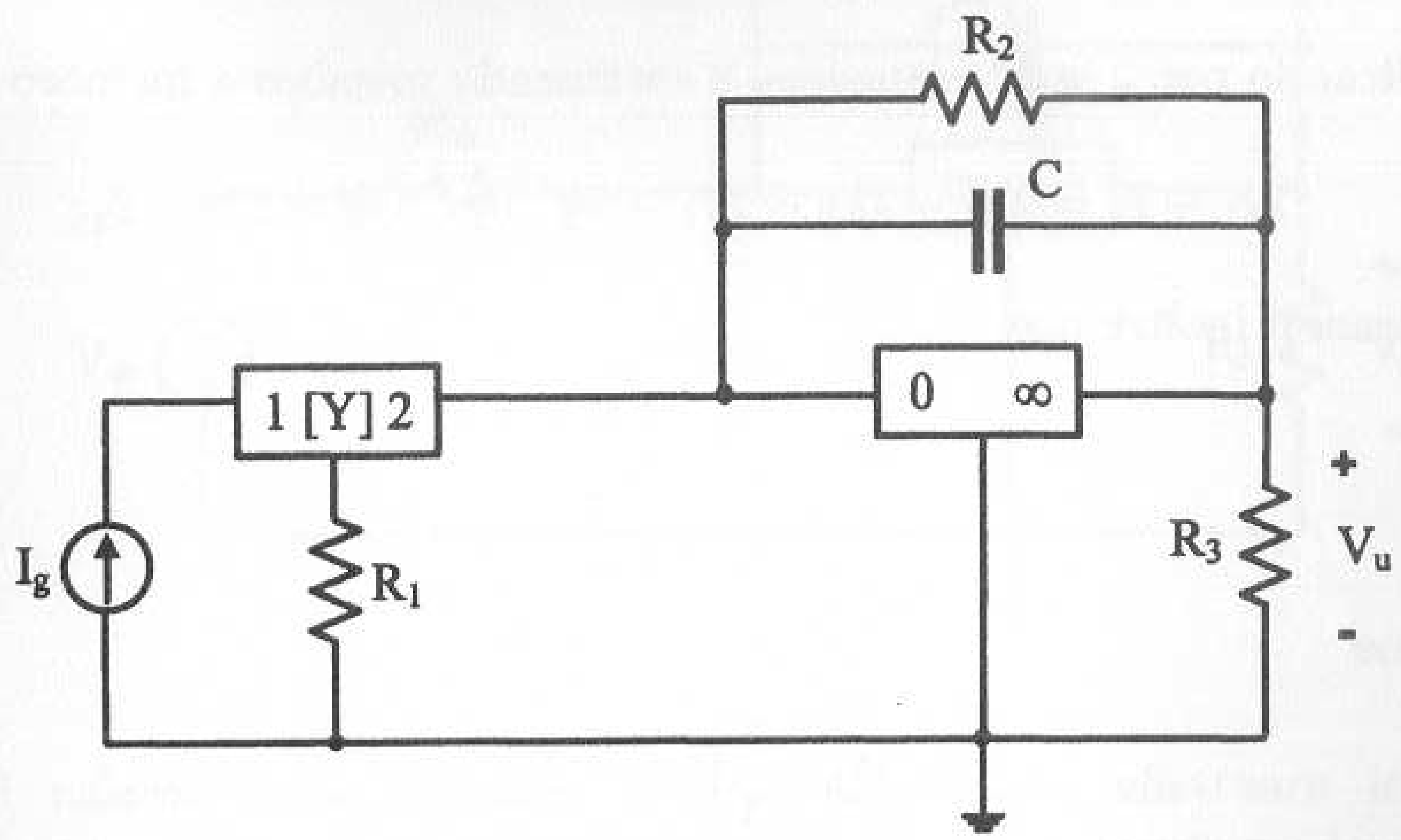
$$V_c(t) = \left(6 - e^{-t}\right) u_{-1}(t)\ [V]$$





## Esercizio 4.5

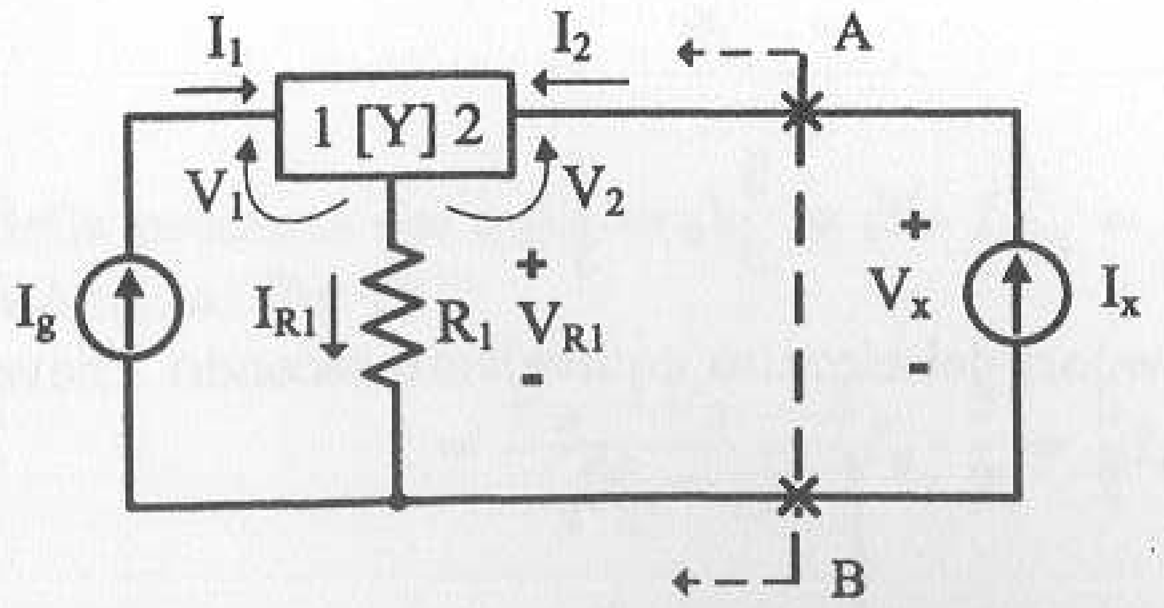
Discutere la stabilità del circuito in figura e calcolare la tensione di uscita $V_u(t)$ per tutto l'asse dei tempi.




$$R_1 = 1\,;\ R_2 = 1\,;\ R_3 = 0{,}756\,;\ C = 1\,;\ [Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$
$$I_g(t) = 2\sin(3t)\,;\ [\Omega, F, \Omega^{-1}, A].$$

### Svolgimento

Si applichi il teorema di Thevenin alla parte di circuito a sinistra dei morsetti A-B:



La rete 2-porte impone i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} I_1 = V_1 + 2V_2 \\ I_2 = 2V_1 + V_2 \end{cases}$$

Moltiplicando per 2 la 1$^a$ equazione e sottraendo membro a membro la 2$^a$:

$$2I_1 - I_2 = 2V_1 + 4V_2 - 2V_1 - V_2 \;\Rightarrow\; 3V_2 = 2I_1 - I_2 \,;$$

considerando inoltre che

$$I_1 = I_g$$

e che

$$I_2 = I_x \,,$$

si ottiene

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(2I_g - I_x\right) .$$

Per quanto riguarda il resistore $R_1$, è evidente che

$$I_{R_1} = I_1 + I_2 = I_g + I_x \;\Rightarrow\; V_{R_1} = R_1 I_{R_1} = I_g + I_x \,.$$

Quindi la tensione $V_x$ è pari a

$$V_x = V_{R_1} + V_2 = I_g + I_x + \frac{1}{3}(2I_g - I_x)$$

$$V_x = \left(1 + \frac{2}{3}\right) I_g + \left(1 - \frac{1}{3}\right) I_x$$

e in definitiva si avrà:

$$V_x = \frac{5}{3} I_g + \frac{2}{3} I_x \,,$$

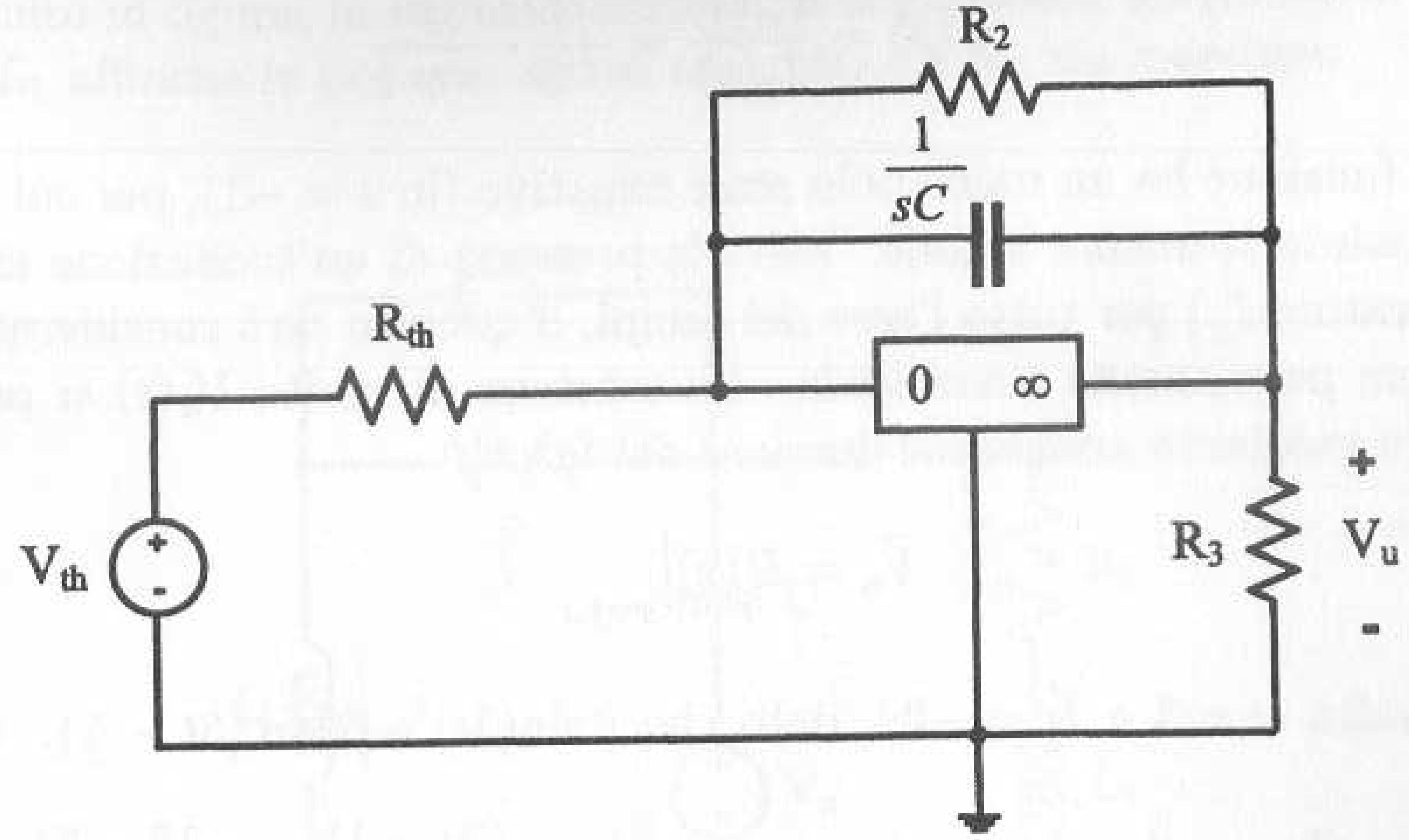
da cui si ottengono i valori del circuito equivalente secondo Thevenin:

$$\begin{cases} V_{th} = \frac{5}{3} I_g \\ R_{th} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

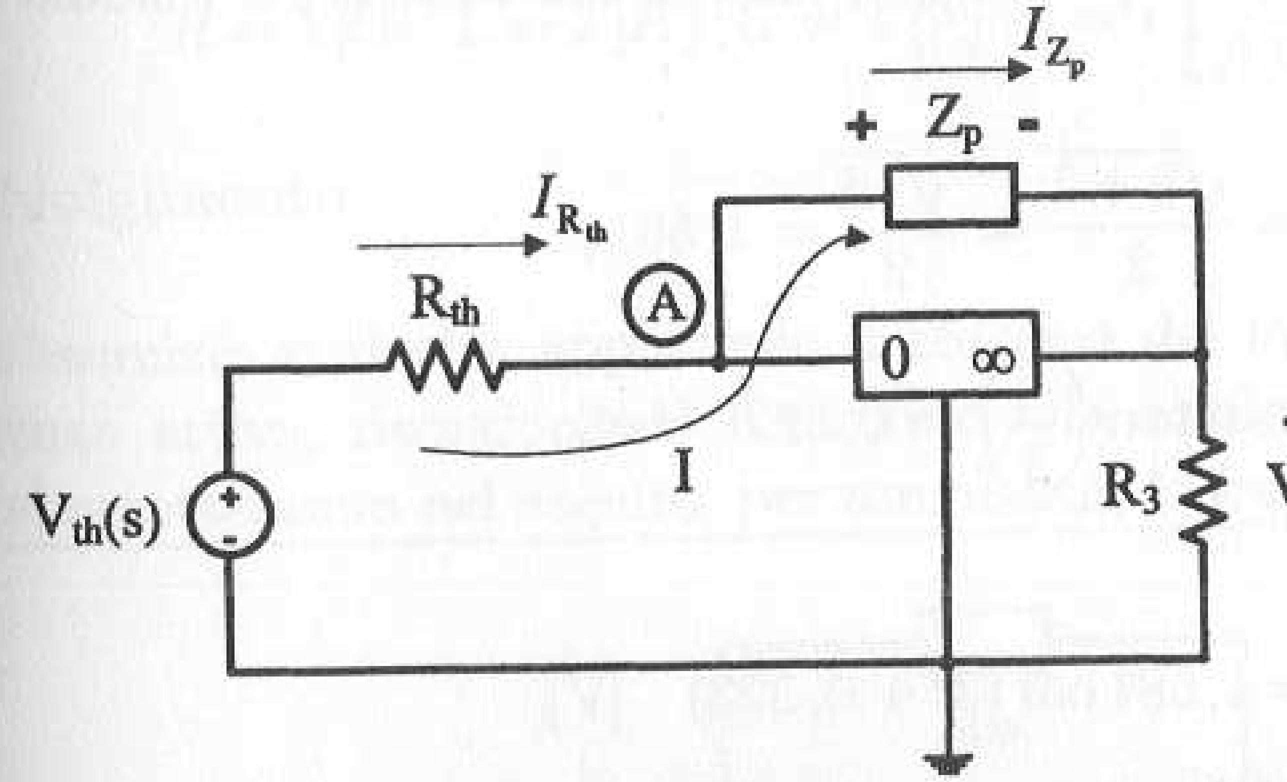




Il circuito nel dominio di Laplace diventa dunque il seguente:




Per il calcolo della funzione di rete si possono effettuare le seguenti considerazioni, dopo aver ridisegnato il circuito nel seguente modo:




dove $Z_p = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + sC} = \dfrac{1}{s+1}$

A causa della presenza del nullatore si ha che $I_{R_{th}} = I_{Z_p} = I$ e che la tensione al nodo A è nulla. Per cui:

$$I = \frac{V_{th} - V_A}{R_{th}} = \frac{5}{3} I_g \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} I_g$$

e quindi

$$V_u = V_A - V_{Z_p} = -I \frac{1}{s+1} \;\Rightarrow\; V_u(s) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot I_g(s) \,.$$

Ne deriva che la funzione di rete è data da

$$H(s) = \frac{V_u(s)}{I_g(s)} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+1}\,.$$

Questa funzione ha un unico polo reale negativo (in $s=-1$), per cui il circuito risulta asintoticamente stabile. Vista la presenza di un'eccitazione sinusoidale (il generatore $I_g$) per tutto l'asse dei tempi, il circuito sarà considerato sempre in regime permanente sinusoidale. La tensione di uscita $V_u(t)$ si può quindi calcolare mediante analisi nel dominio dei fasori:

$$\vec{V}_u = H(s)\Big|_{s=j\omega}\cdot\vec{I}_g\,,$$

dove risulta $\omega = 3$ e $\vec{I}_g = -2j$, dato che $2\sin(3t) = 2\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi si avrà:

$$\vec{V}_u = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3j+1}\cdot(-2j) = \frac{5j}{3j+1}\cdot\frac{(3j-1)}{(3j-1)} = \frac{-15-5j}{-9-1}$$

$$\vec{V}_u = \frac{15+5j}{10} = \frac{3+j}{2}\,.$$

Per ottenere l'andamento nel tempo di $V_u(t)$ si deve ora calcolare il modulo e la fase di $\vec{V}_u$:

$$|\vec{V}_u| = \frac{\sqrt{9+1}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,581\,;$$

$$\angle\vec{V}_u = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0,322 \quad [\mathrm{rad}]\,.$$

In conclusione si avrà:

$$V_u(t) = 1,581\cos(3t+0,322) \quad [V]$$

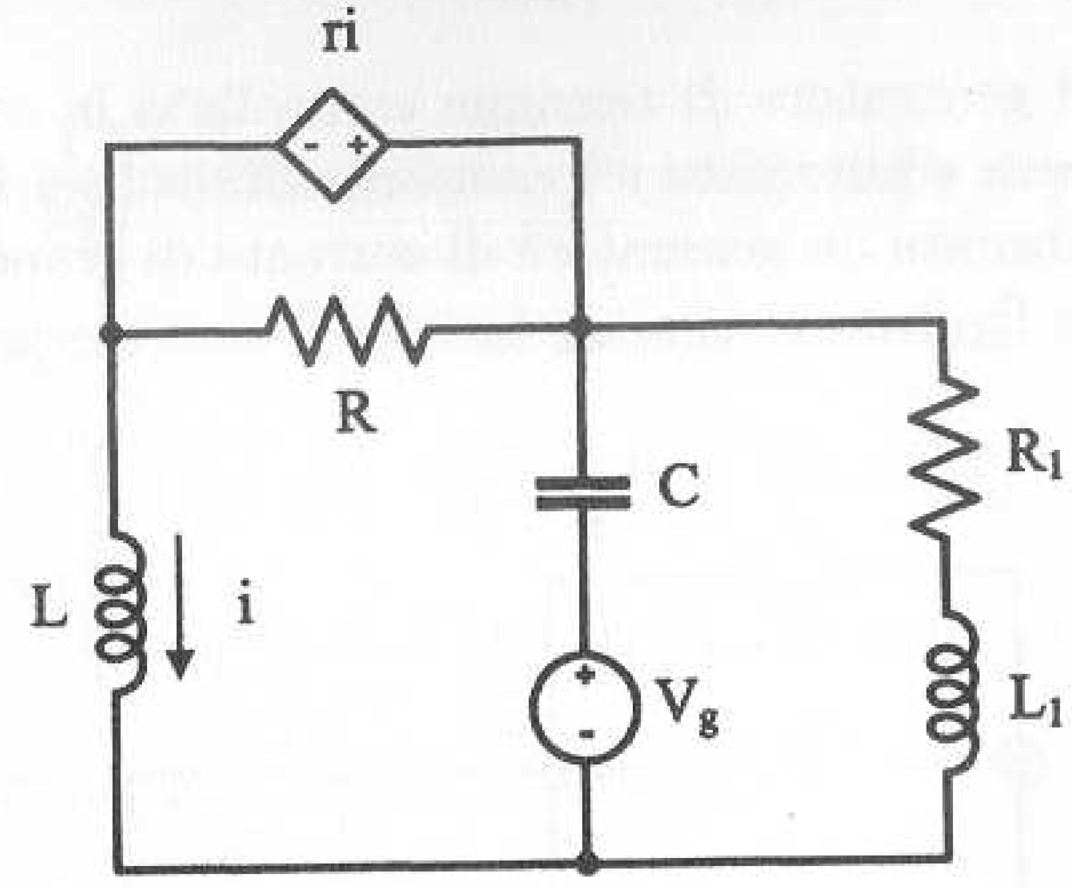
per $-\infty < t < +\infty$.





## Esercizio 4.6

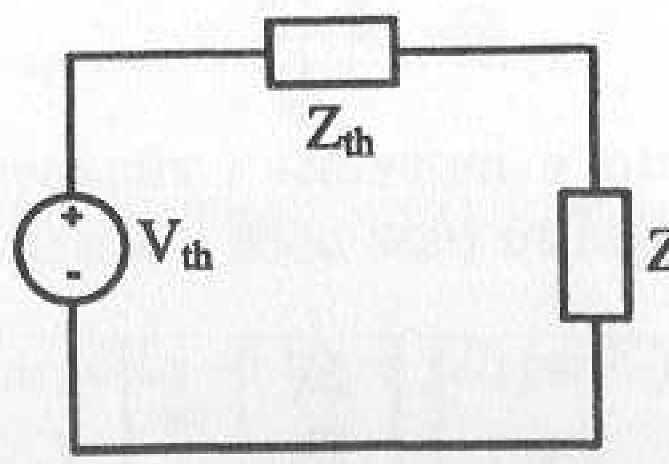
Per il circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, determinare i valori di $R_1$ ed $L_1$ affinché la potenza attiva assorbita da $R_1$ sia massima.




$$R = 1\,[\Omega]\,;\,L = 2\,[H]\,;\,C = 1\,[F]\,;\,r = 1\left[\frac{V}{A}\right];\,V_g\,(t) = \cos\,(t)\,[V]\,.$$

### Svolgimento

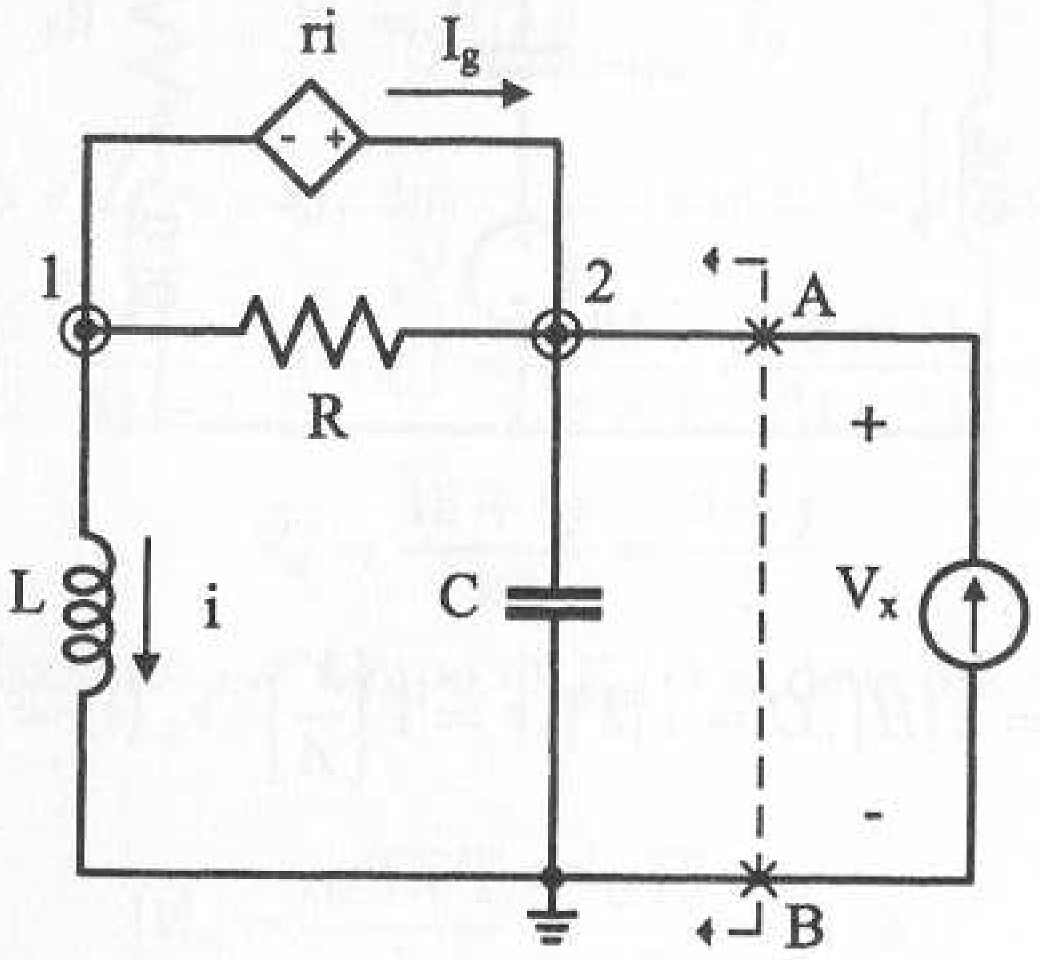
L'esercizio si risolve applicando il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, riconducendo il circuito alla configurazione mostrata in figura (si ometteranno nel seguito, per semplicità, le frecce relative ai fasori):




Si avrà il massimo trasferimento di potenza attiva per $Z_{th} = Z_L^*$, avendo indicato con $Z_L = R_1 + j\omega L_1$ l'impedenza di carico del circuito. Per ricondursi a tale schema, si applica il teorema di Thevenin alla parte del circuito a sinistra dell'impedenza di carico. Si noti che non è necessario calcolare la tensione equivalente $V_{th}$, ma solo l'impedenza $Z_{th}$ "vista" dal carico. Dal momento che il circuito è in regime permanente sinusoidale, si usa il metodo dei fasori (con $\omega = 1$), per cui le impedenze dell'induttore e del condensatore sono:

$$\begin{cases} L \to j\omega L = 2j \\ C \to \frac{1}{j\omega C} = -j \end{cases}$$

Per la presenza del generatore di tensione controllato in corrente, ai fini del calcolo dell'impedenza equivalente è necessario alimentare il bipolo che si intende trasformare tramite un generatore di corrente di grandezza impressa $I_x$, come nella seguente figura:




Una volta determinata la tensione $V_x$, l'impedenza equivalente è data dal seguente rapporto:

$$Z_{th} = \frac{V_x}{I_x}.$$

Scelto il nodo di riferimento e numerati i rimanenti nodi come in figura, applicando il metodo di analisi su base nodi il sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2j} & -1 \\ -1 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ I_g + I_x \end{bmatrix}$$

con il vincolo imposto dal generatore di tensione controllato in corrente:

$$E_2 - E_1 = ri.$$





Poiché $i = \frac{E_1}{2j}$, si ha

$$E_2 - E_1 = \frac{E_1}{2j}.$$

Quindi:

$$E_1\left(1+\frac{1}{2j}\right) = E_2 \Rightarrow E_1\frac{1+2j}{2j} = E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{2j}{1+2j}E_2.$$

Sostituendo tale espressione di $E_1$ nel sistema risolvente:

$$\begin{cases} \left(1+\frac{1}{2j}\right)\cdot\left(\frac{2j}{1+2j}\right)E_2 - E_2 = -I_g \\ -\frac{2j}{1+2j}E_2 + (1+j)E_2 = I_g + I_x \end{cases}$$

Dalla prima equazione del precedente sistema:

$$I_g = E_2\left(-\frac{1+2j}{2j}\cdot\frac{2j}{1+2j}+1\right) = 0$$

e quindi, dalla seconda equazione del medesimo sistema, si ha:

$$E_2\left(-\frac{2j}{1+2j}+1+j\right) = I_x \Rightarrow E_2\frac{-2j+(1+j)\cdot(1+2j)}{1+2j} = I_x$$

$$\frac{E_2}{I_x} = \frac{V_x}{I_x} = Z_{th} = \frac{1+2j}{-2j+1+2j+j-2} = \frac{1+2j}{j-1} = \frac{(1+2j)(-1-j)}{2}$$

$$Z_{th} = \frac{-1-j-2j+2}{2} = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}j.$$

Pertanto, per il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva è:

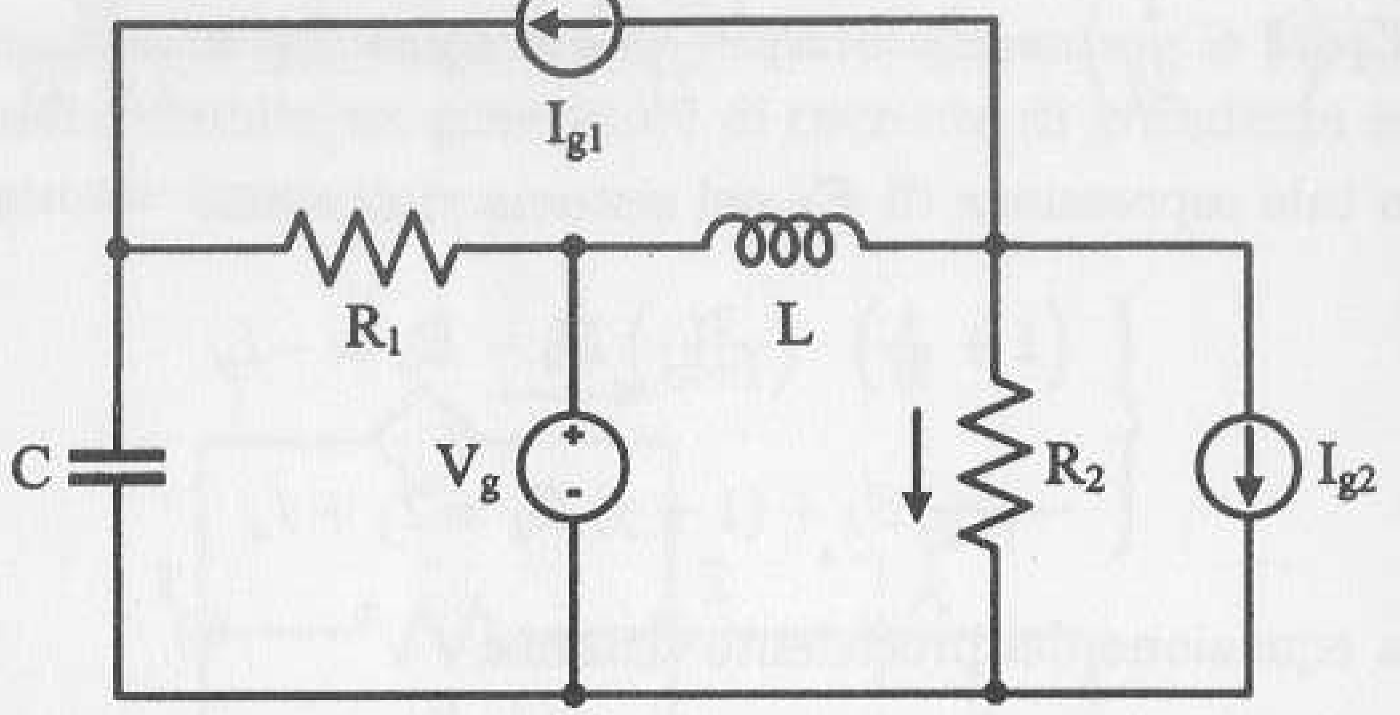
$$Z_L = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jL_1 = Z_{th}^* = \frac{1}{2}+j\frac{3}{2}.$$

Uguagliando le parti reali ed immaginarie si ricavano infine i valori di $R_1$ ed $L_1$:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2} = 0,5\ [\Omega] \\ L_1 = \frac{3}{2} = 1,5\ [H] \end{cases}$$

# Esercizio 4.7

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare l'andamento nel tempo della corrente che scorre nel resistore $R_2$ come nel verso indicato. Calcolare inoltre il valore della potenza assorbita da $R_2$.



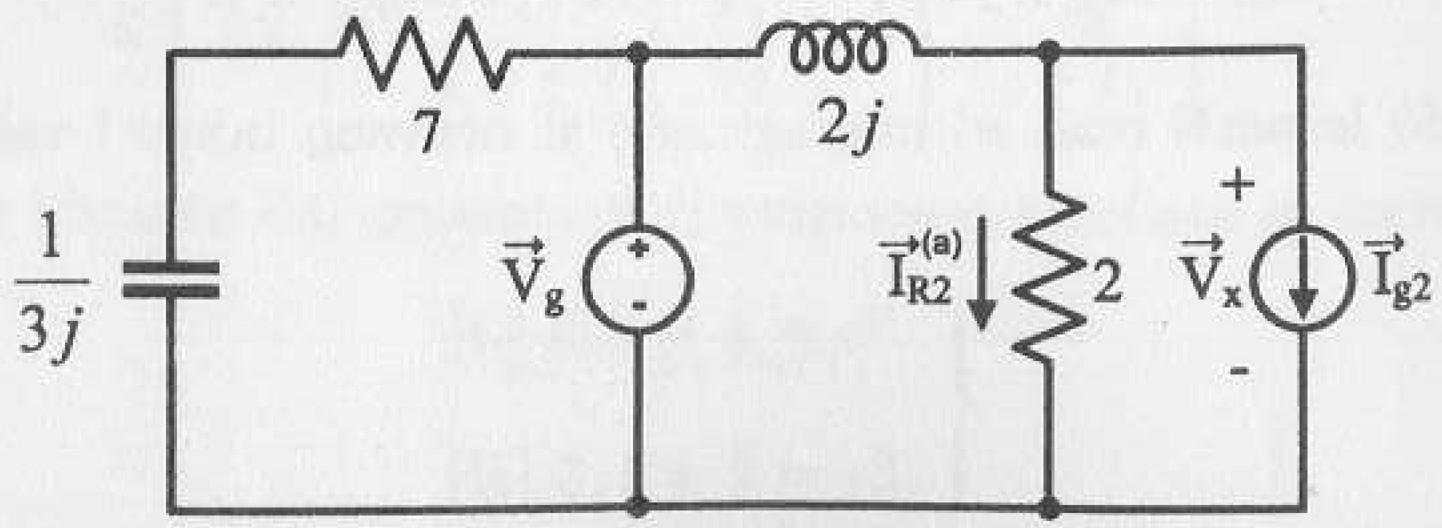

$$V_g(t) = -3\cos(t)\,[V]\ ;\ I_{g1}(t) = \cos(2t)\,[A]\ ;\ I_{g2}(t) = \frac{3}{2}\sin(t)\,[A]\ ;$$

$$R_1 = 7\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 2\,[\Omega]\ ;\ L = 2\,[H]\ ;\ C = 3\,[F]\ .$$

**Svolgimento**

Essendo i generatori a pulsazione diversa, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e separare l'analisi:

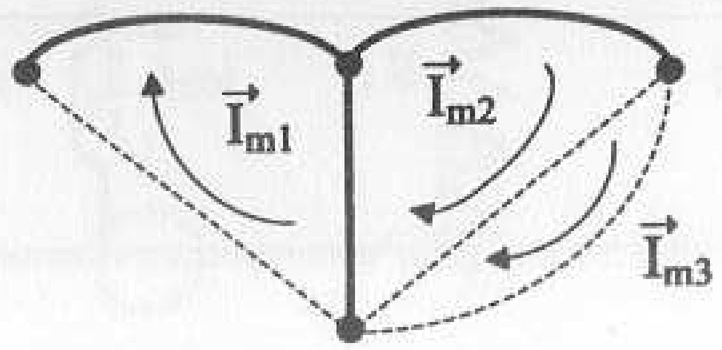
$\omega = 1$) Si disattiva il generatore $I_{g1}(t)$, che diventerà un circuito aperto. In questo caso si ha che $\vec{V}_g = -3$ e $\vec{I}_{g2} = -\frac{3}{2}j$. Si può quindi ridisegnare il circuito nel seguente modo:








Si applica il metodo delle maglie, introducendo l'incognita ausiliaria $\vec{V}_x$ sul generatore di corrente e utilizzando il seguente albero, in cui $\vec{I}_{m2} = \vec{I}^{(a)}_{R2}$ e $\vec{I}_{m3} = \vec{I}_{g2}$:




Perciò sarà:

$$\begin{bmatrix} 7+\frac{1}{3j} & 0 & 0 \\ 0 & 2+2j & 2j \\ 0 & 2j & 2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m1} \\ \vec{I}_{m2} \\ \vec{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{V}_g \\ \vec{V}_g \\ \vec{V}_g - \vec{V}_x \end{bmatrix}$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$(2+2j)\,\vec{I}_{m2} + 2j\vec{I}_{m3} = \vec{V}_g \Rightarrow (2+2j)\,\vec{I}^{(a)}_{R2} + 2j\vec{I}_{g2} = \vec{V}_g$$

e quindi:

$$\vec{I}^{(a)}_{R2} = \frac{\vec{V}_g - 2j\vec{I}_{g2}}{2+2j} = \frac{-3-3}{2(1+j)} = -\frac{3}{(1+j)}\frac{(1-j)}{(1-j)} = -\frac{3}{2}(1-j)\ .$$

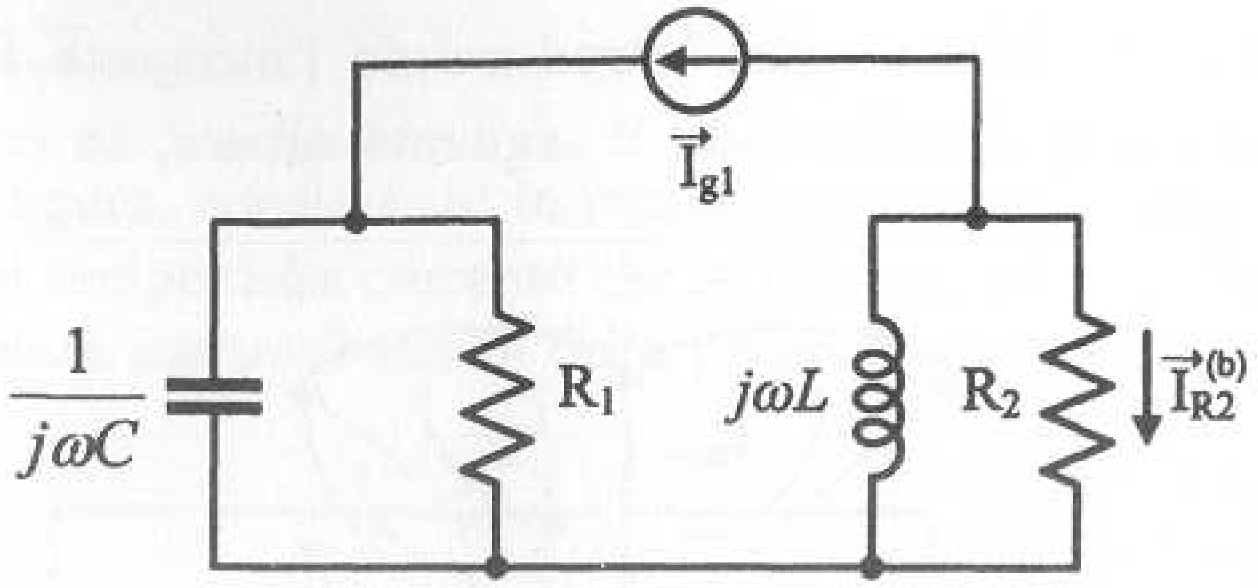
Si può così procedere al calcolo di modulo e fase di $\vec{I}_{R2}$:

$$\begin{cases} \left|\vec{I}^{(a)}_{R2}\right| = \frac{3}{2}|1-j| = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2,12 \\ \angle\vec{I}^{(a)}_{R2} = \angle\left(-\frac{3}{2}\right) + \angle(1-j) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 2,35\ \text{[rad]} \end{cases}$$

perciò si avrà:

$$I^{(a)}_{R2}(t) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) = 2,12\cos(t + 2,35)\ .$$

$\omega = 2$) Si disattivano $I_{g2}$ e $V_g$, il primo diventerà un circuito aperto mentre $V_g$ diventerà un corto-circuito. In questo caso il circuito si può ridisegnare come segue:




La corrente $\vec{I}^{(b)}_{R2}$ può essere ricavata con la formula del partitore di corrente, tenendo presente che la corrente che scorre nel parallelo tra $L$ ed $R_2$ è pari a $-\vec{I}_{g1}$ e che $\vec{I}_{g_1} = 1$:

$$\vec{I}^{(b)}_{R_2} = -\vec{I}_{g_1}\frac{j\omega L}{j\omega L + R_2} = -1 \cdot \frac{j \cdot 2 \cdot 2}{j \cdot 2 \cdot 2 + 2} = -\frac{2j}{1+2j}$$

$$\vec{I}^{(b)}_{R_2} = -\frac{2j}{1+2j} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = -\frac{4+2j}{5} \,.$$

Per il modulo e la fase si avrà:

$$\begin{cases} \left|\vec{I}^{(b)}_{R2}\right| = \frac{1}{5}\left|4+2j\right| = \frac{2}{5}\left|2+j\right| = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0,89 \\ \angle\vec{I}^{(b)}_{R2} = \angle\left(-\frac{1}{5}\right) + \angle\left(4+2j\right) = \pi + \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 3,6 \text{ [rad]} \end{cases}$$

e quindi sarà

$$I^{(b)}_{R2}(t) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\left(2t+3,6\right) = 0,89\cos\left(2t+3,6\right) \,.$$

Riunendo i risultati delle analisi per le due pulsazioni differenti, si ottiene:

$$I_{R2}(t) = I^{(a)}_{R2}(t) + I^{(b)}_{R2}(t) = 2,12\cos\left(t+2,35\right) + 0,89\cos\left(2t+3,6\right) \; [A]$$

Inoltre, la potenza attiva $P_a$ assorbita da $R_2$ sarà:

$$P_a = \frac{1}{2}R_2\left|\vec{I}^{(a)}_{R2}\right|^2 + \frac{1}{2}R_2\left|\vec{I}^{(b)}_{R2}\right|^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot 2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{4}{25}\cdot 5$$

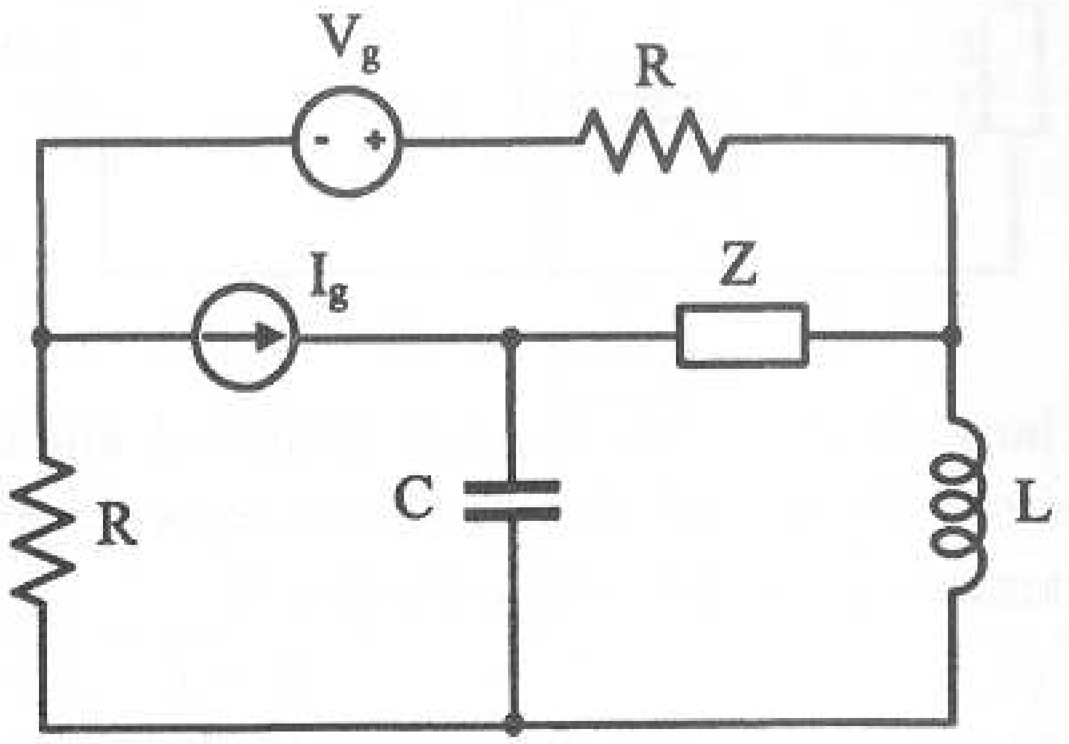
da cui:

$$P_a = \frac{9}{2} + \frac{4}{5} = 5,3 \; [W]$$



## Esercizio 4.8

Calcolare per il circuito in figura, supposto in regime permanente sinusoidale, il valore di $Z$ per cui tale bipolo assorbe la massima potenza attiva. Calcolare il valore di tale potenza massima.

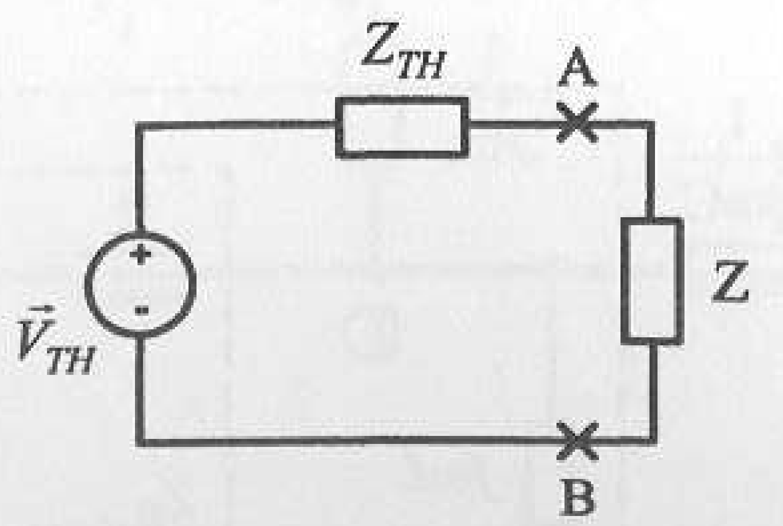



$$V_g(t) = 2\cos(2t)\,[V]\,;\; I_g(t) = \sin(2t)\,[A]\,;$$

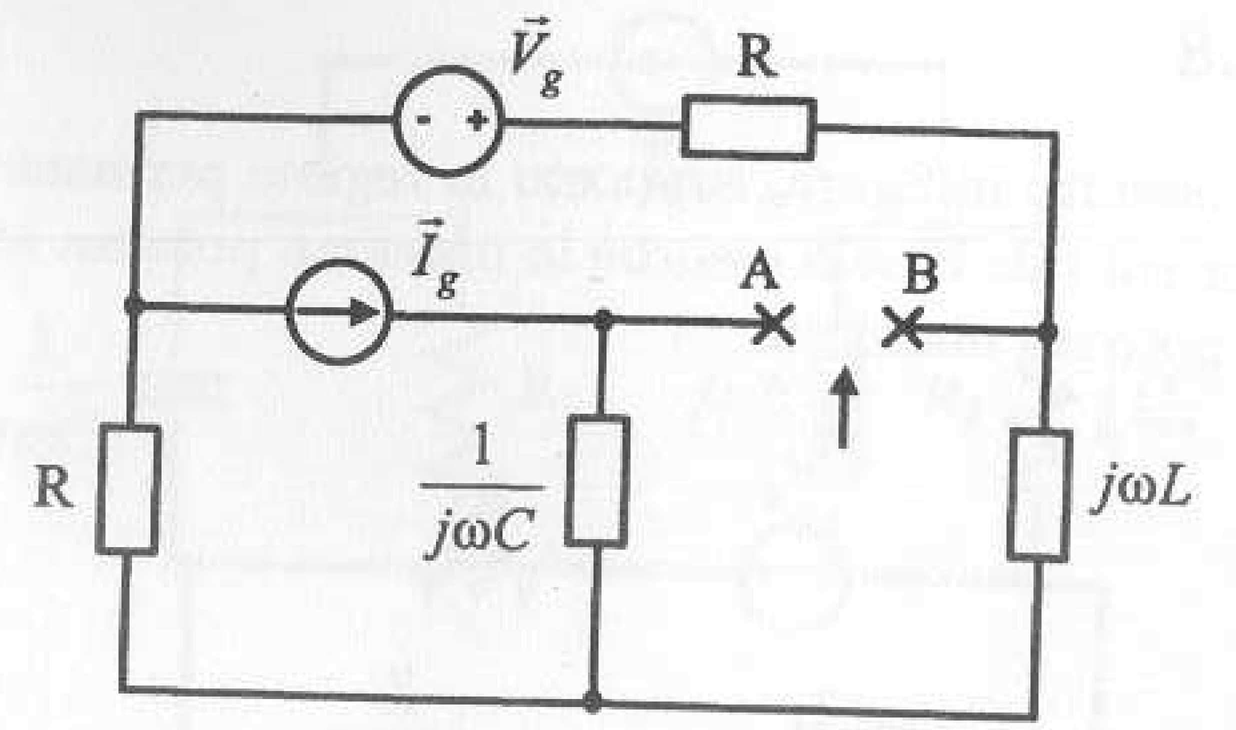
$$R = 1\,[\Omega]\,;\; C = 1/2\,[F]\,;\; L = 1/2\,[H]\,.$$

### Svolgimento

Bisogna applicare il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva nel dominio dei fasori. Il bipolo $Z$ risulta pertanto il carico da determinare nella seguente configurazione:

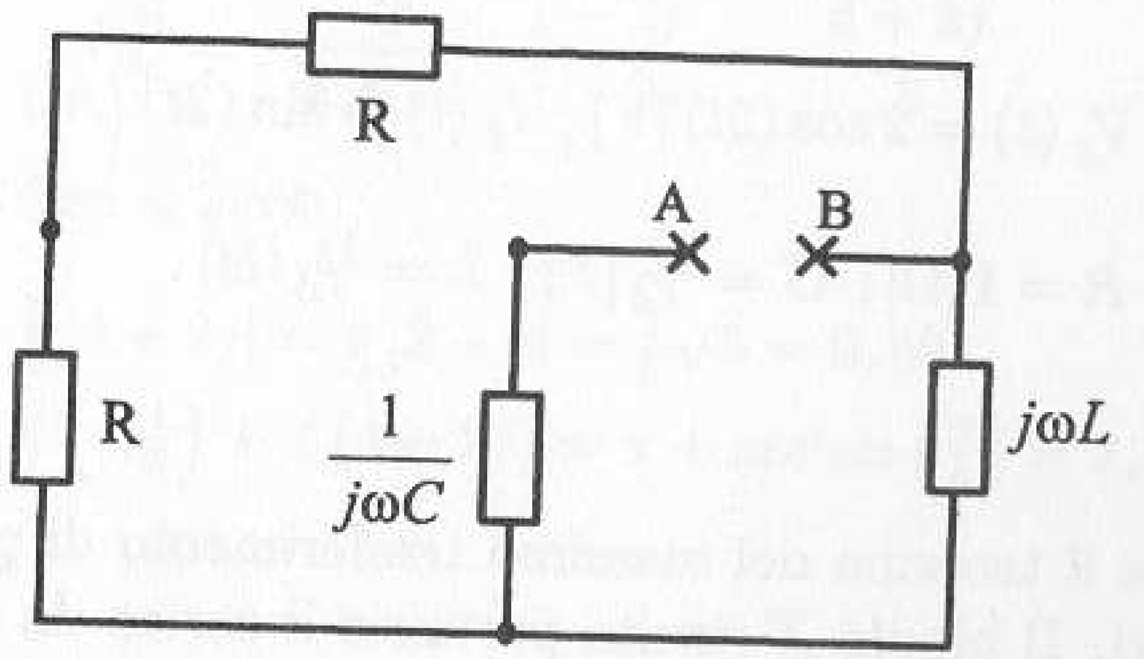



I valori di $\vec{V}_{TH}$ e $Z_{TH}$ si ottengono dall'applicazione del teorema di Thevenin ai capi dei morsetti A-B del circuito di partenza, una volta rimosso il bipolo $Z$:

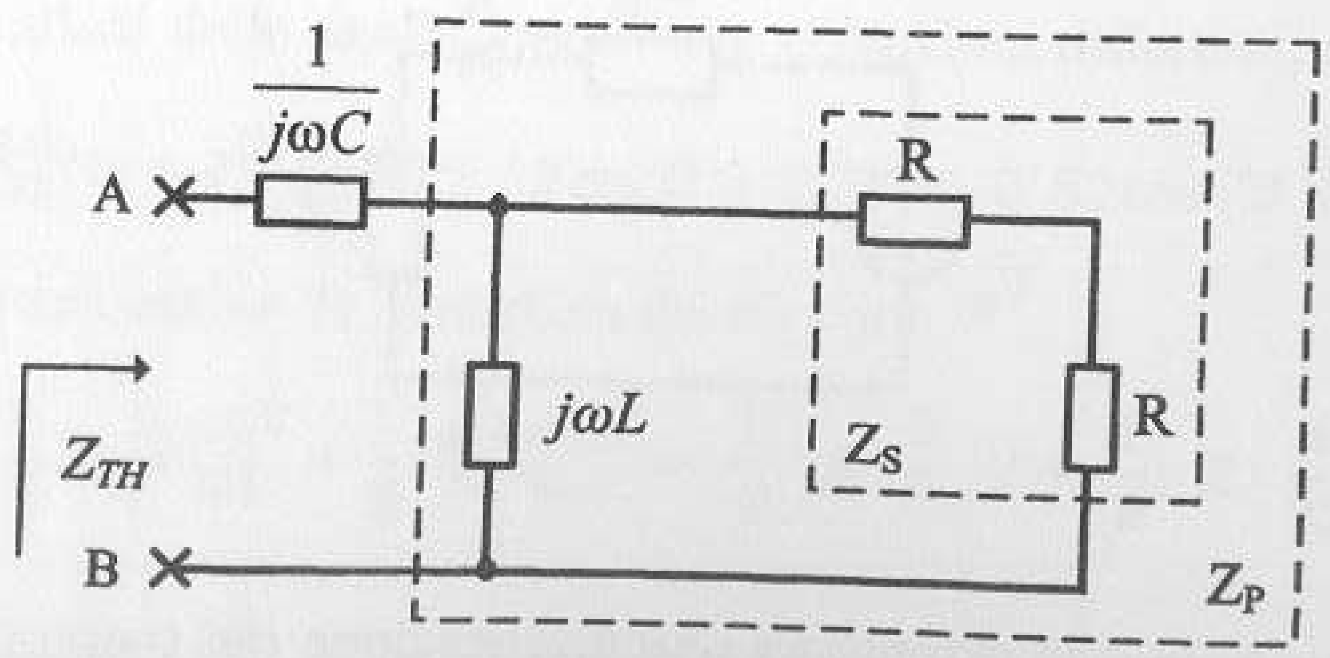



E' necessario calcolare sia $Z_{TH}$ che $\vec{V}_{TH}$, in quanto è anche richiesto il valore della potenza massima. Poiché nel circuito sono presenti solo bipoli, possiamo calcolare i due parametri in modo indipendente.

Calcolo di $Z_{TH}$) Disattiviamo i due generatori (indipendenti) nel circuito:




Ridisegnando il circuito otteniamo:




L'impedenza $Z_{TH}$ è data dalla serie del condensatore $\frac{1}{j\omega C}$ con l'impedenza $Z_P$. Quest'ultima risulta essere il parallelo tra l'induttanza $j\omega L$ e la serie $Z_S$ dei



due resistori. Quindi:

$$Z_{TH} = \frac{1}{j\omega C} + Z_P;$$
$$Z_P = j\omega L // Z_S;$$
$$Z_S = R + R;$$

da cui, essendo $\omega = 2$, si ottiene:

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{Z_S} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - j$$

ossia

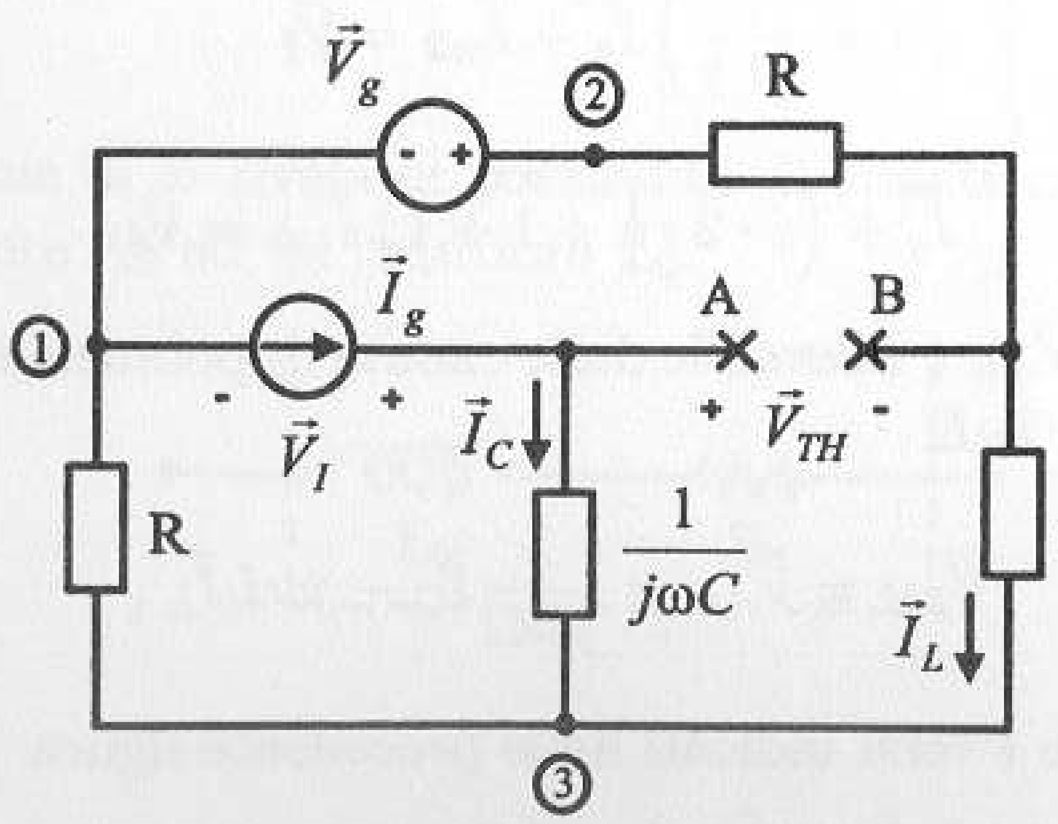
$$Z_P = \frac{2}{1-2j}\ .$$

Dunque:

$$Z_{TH} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{2}{1-2j} = -j + \frac{2}{1-2j} = \frac{-j-2+2}{1-2j} = -\frac{j}{1-2j}$$

$$Z_{TH} = \frac{-j}{(1-2j)}\frac{(1+2j)}{(1+2j)} = \frac{2-j}{5}\ .$$

Calcolo di $\vec{V}_{TH}$) Dobbiamo calcolare la tensione a vuoto ai capi dei morsetti A-B indicati in figura:

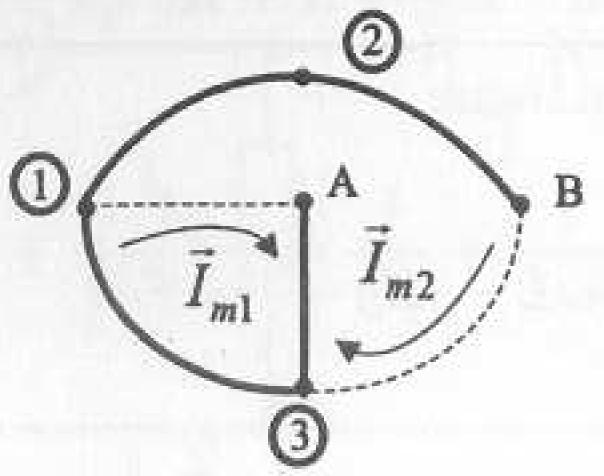



dove è sempre $\omega = 2$ ed inoltre:

$$V_g(t) = 2\cos(2t) \Rightarrow \vec{V}_g = 2\ ;$$

$$I_g(t) = \sin(2t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{I}_g = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\ .$$

Conviene applicare il metodo delle maglie, introducendo l'incognita ausiliaria $\vec{V}_I$ sul generatore di corrente. L'albero scelto è il seguente, in cui abbiamo avuto l'accortezza di far cadere il generatore di corrente sul co-albero:




Il sistema risolvente è quindi:

$$\begin{bmatrix} \left(R+\frac{1}{j\omega C}\right) & R \\ R & (j\omega L+R+R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m1} \\ \vec{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_I \\ \vec{V}_g \end{bmatrix}$$

dove il vincolo del generatore di corrente pone semplicemente:

$$\vec{I}_{m1} = \vec{I}_g .$$

Quindi:

$$\begin{cases} \left(1+\frac{1}{j\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}\right)\vec{I}_g + \vec{I}_{m2} = \vec{V}_I \\ \vec{I}_g + \left(j\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+1+1\right)\vec{I}_{m2} = \vec{V}_g \end{cases}$$

La tensione $\vec{V}_{TH} = \vec{V}_{AB}$ è ricavabile dalle cadute di potenziale sul condensatore $\frac{1}{j\omega C}$ e sull'induttore $j\omega L$:

$$\vec{V}_{TH} = \vec{V}_{AB} = \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_C - j\omega L\vec{I}_L ,$$

dove $\vec{I}_C$ ed $\vec{I}_L$ hanno i versi indicati nelle precedente figura. Pertanto:

$$\vec{I}_C = \vec{I}_{m1} , \quad \vec{I}_L = \vec{I}_{m2}$$

e

$$\vec{V}_{TH} = \frac{1}{j\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}\vec{I}_{m1} - \left(j\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right)\vec{I}_{m2} .$$

Sapendo che $\vec{I}_{m1} = \vec{I}_g$ si ha:

$$\vec{V}_{TH} = -j\,(-j) - j\vec{I}_{m2} = -1 - j\vec{I}_{m2} .$$





Dobbiamo quindi risolvere il precedente sistema solo rispetto a $\vec{I}_{m2}$. Analizzando la $2^a$ equazione del sistema si ha:

$$-j + (j+2)\,\vec{I}_{m2} = 2 \;\Rightarrow\; \vec{I}_{m2} = \frac{2+j}{2+j} = 1 ,$$

quindi

$$\vec{V}_{TH} = -1 - j .$$

A questo punto, per il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva deve essere:

$$Z = Z^*_{TH} = \frac{2+j}{5} .$$

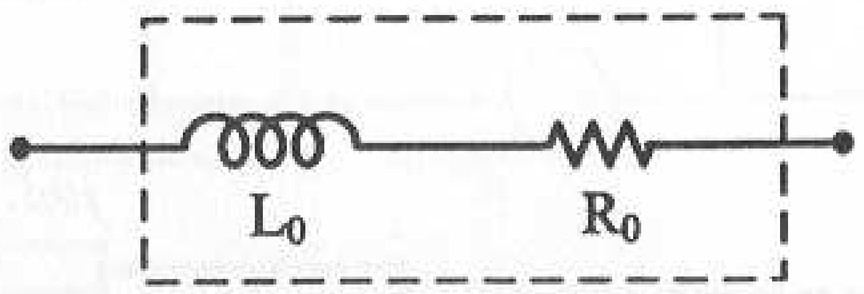
La potenza massima assorbita da $Z$ si ottiene proprio nelle condizioni di adattamento prima calcolate. Tale potenza massima è pari alla potenza disponibile $P_d$ del generatore associato al circuito equivalente di Thevenin:

$$P_d = \frac{\left|\vec{V}_{TH}\right|^2}{8R_{TH}} = \frac{\left|\vec{V}_{TH}\right|^2}{8\text{Re}\{Z_{TH}\}}$$

e dunque

$$P_d = \frac{|-1-j|^2}{8\cdot\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8} = 0,625\ [W]$$

<u>Nota</u>: l'espressione di $Z$ rivela la possibilità di sintetizzare il bipolo come la serie di un resistore $R_0$ ed un induttore $L_0$:




con

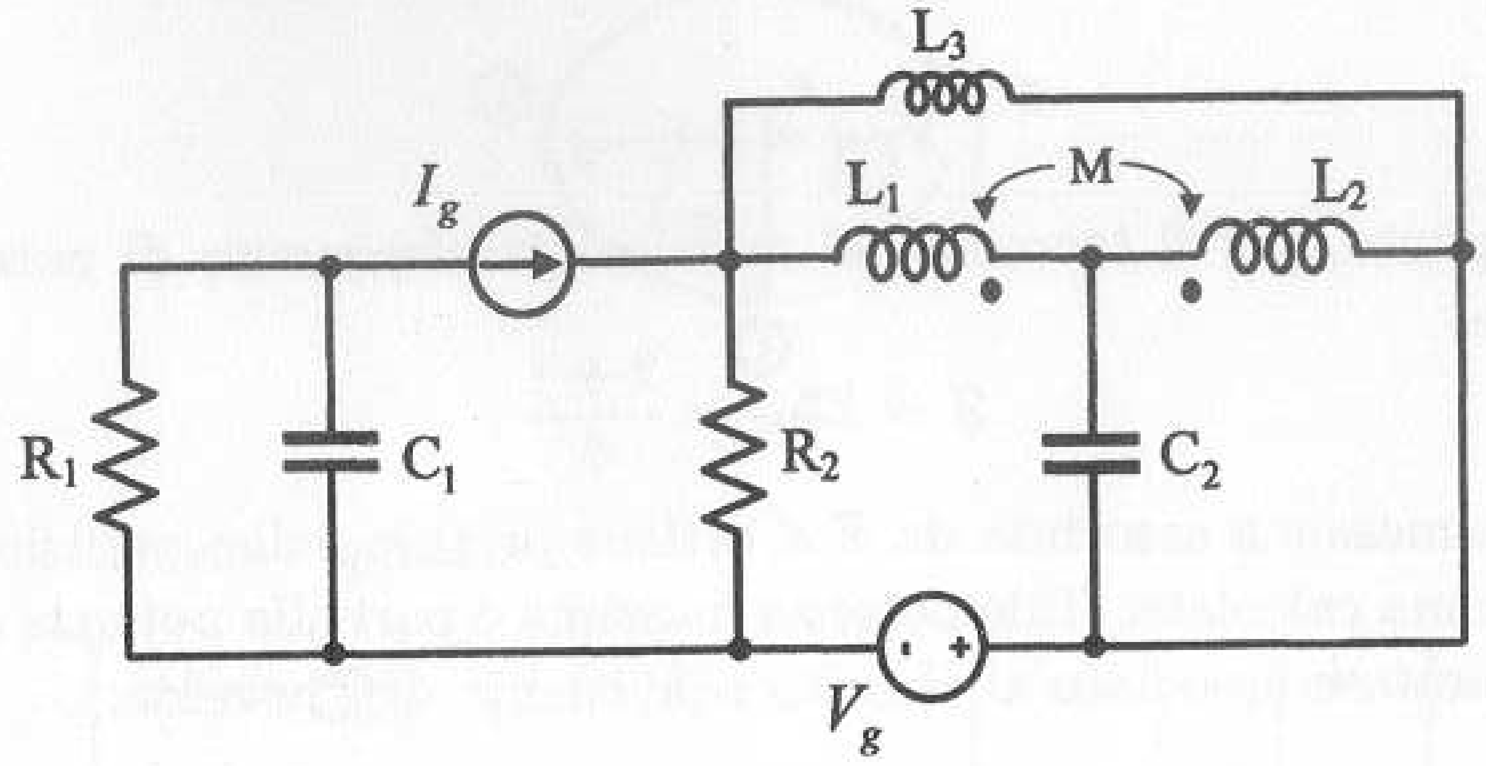
$$Z = R_0 + j\omega L_0 = \frac{2}{5} + j\frac{1}{5}$$

e quindi

$$\begin{cases} R_0 = \frac{2}{5} = 0,4\ [\Omega] \\ L_0 = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,1\ [H] \end{cases}$$

## Esercizio 4.9

Nel circuito in figura, in regime permanente sinusoidale, calcolare la potenza reattiva scambiata dall'induttore $L_3$.

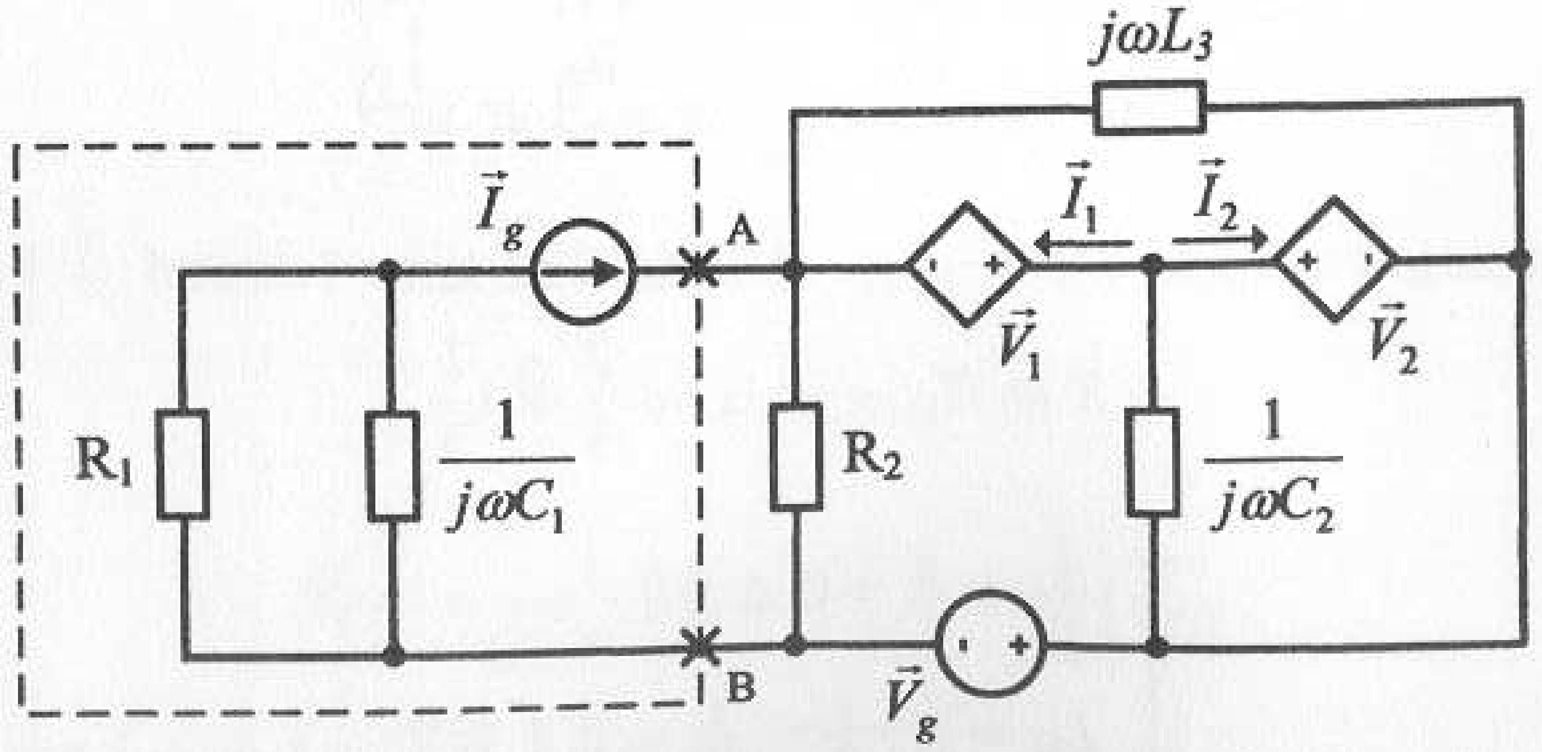



$$V_g(t) = 2\sin(t)\,[V];\ I_g(t) = \sin(t)\,[A];\ R_1 = R_2 = 1\,[\Omega];$$

$$C_1 = C_2 = 1\,[F];\ L_1 = L_2 = L_3 = 1\,[H];\ M = \tfrac{1}{2}\,[H].$$

### Svolgimento

Per risolvere il quesito si deve analizzare il circuito nel dominio dei fasori e calcolare la corrente e/o la tensione dell'induttore $L_3$. Il circuito è quindi il seguente:








dove $\omega = 1$ ed inoltre:

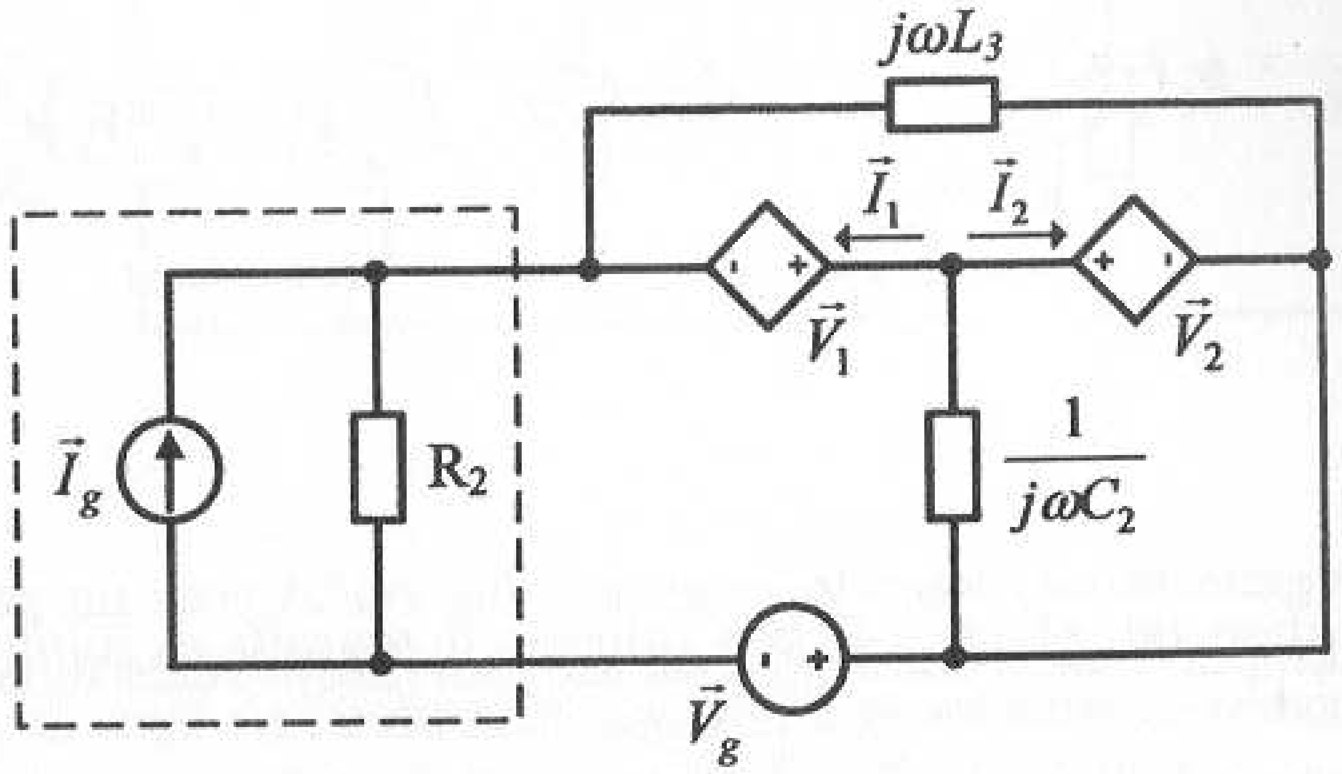
$$V_g(t) = 2\sin(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{V}_g = 2e^{-\frac{j\pi}{2}} = -2j\,;$$

$$I_g(t) = \sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{I}_g = e^{-\frac{j\pi}{2}} = -j\,.$$

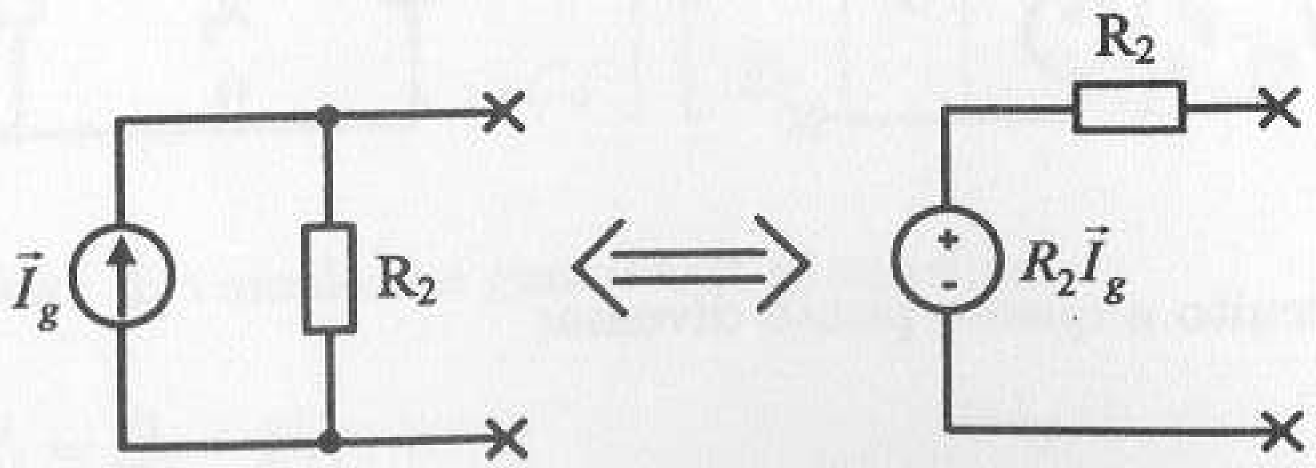
Abbiamo inoltre sostituito agli avvolgimenti degli induttori mutuamente accoppiati due generatori controllati per i quali:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = j\omega L_1\vec{I}_1 + j\omega M\vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M\vec{I}_1 + j\omega L_2\vec{I}_2 \end{cases}$$

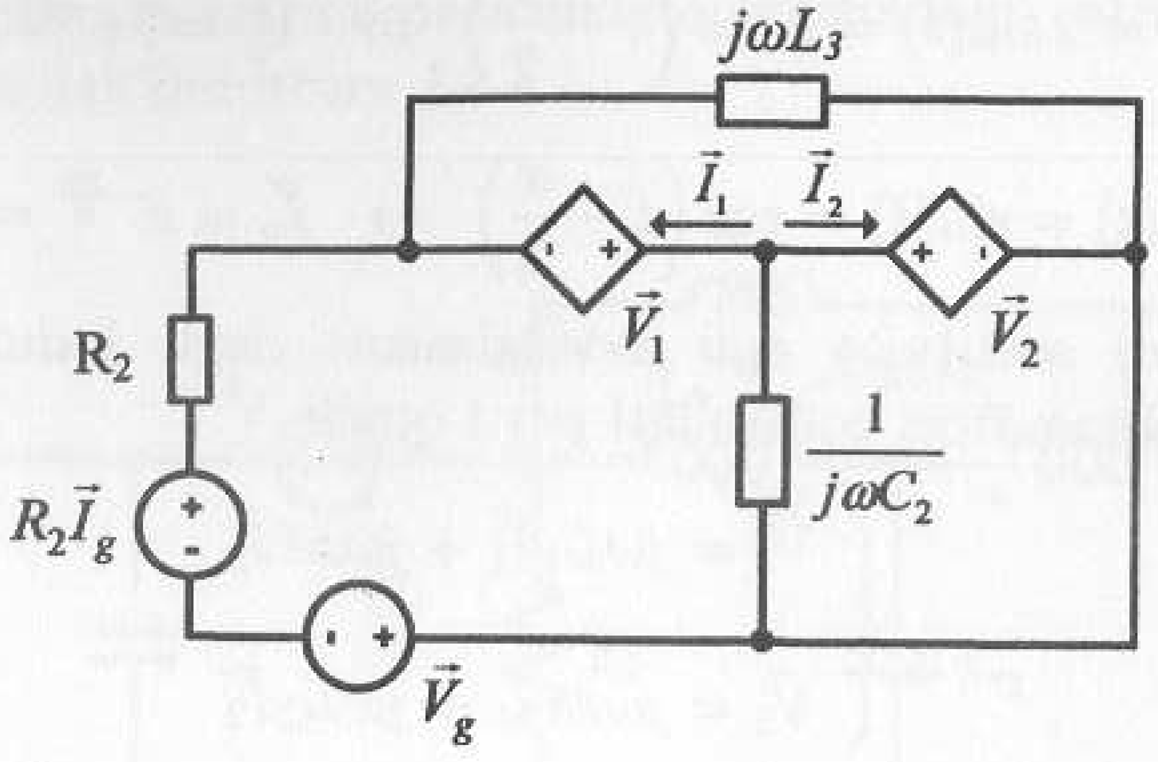
Prima di procedere si può osservare che la parte di circuito evidenziata dal riquadro tratteggiato, a sinistra dei morsetti A-B, è accessibile da questa unica porta. La corrente che scorre nella porta A-B è nota a priori ed è evidentemente pari a $\vec{I}_g$ (uscente dal morsetto A). Per il teorema di sostituzione questa parte di circuito può essere rimpiazzata dal solo generatore $\vec{I}_g$, ottenendo:



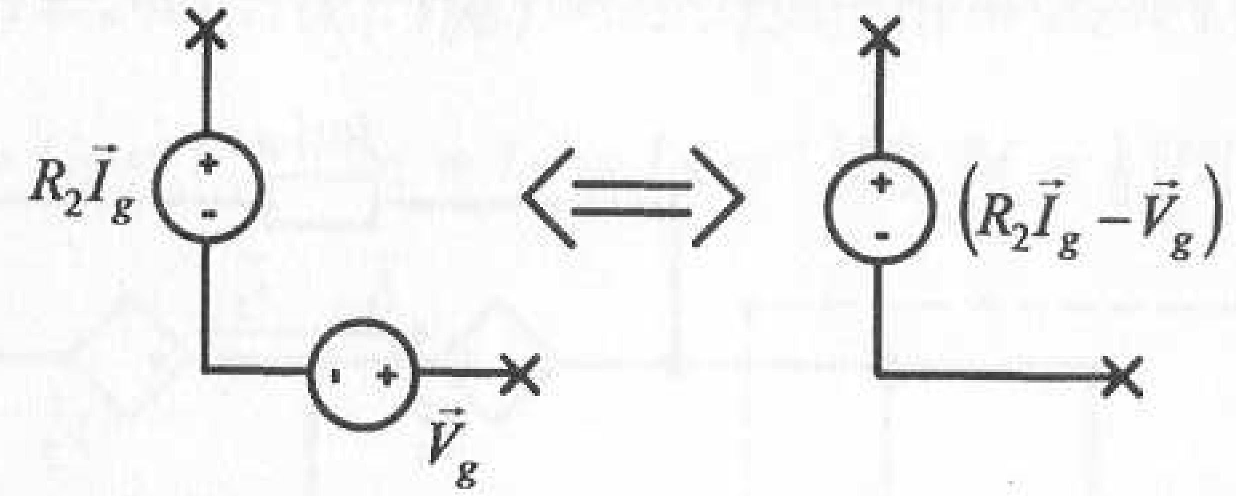

Il parallelo evidenziato tra il generatore $\vec{I}_g$ ed il resistore $R_2$ è un generatore reale di corrente che può essere sostituito da un generatore reale di tensione:



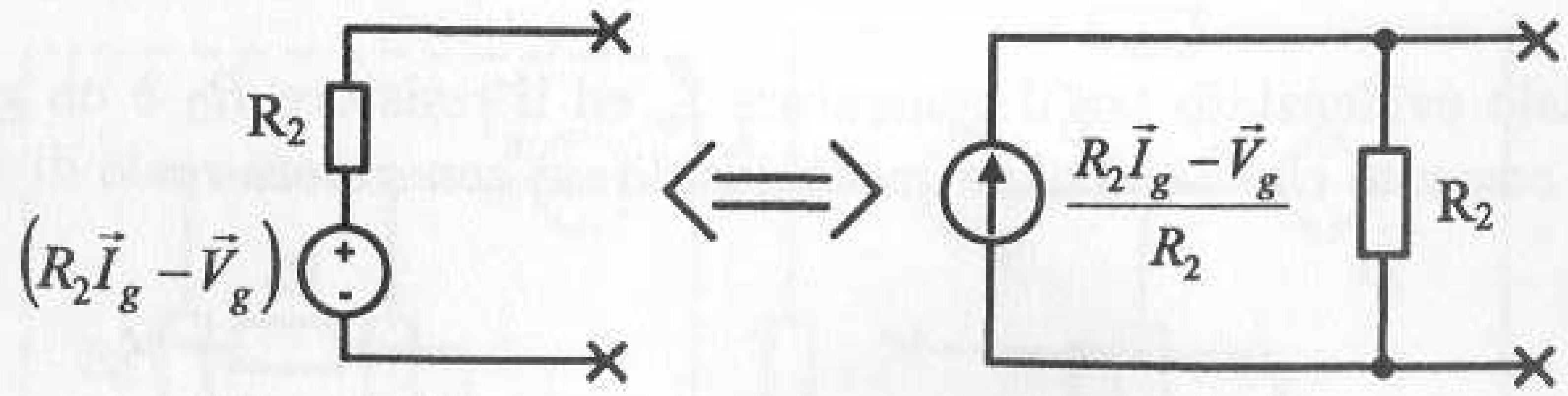
Dunque il circuito è ora il seguente:




La serie dei generatori di tensione $R_2\vec{I}_g$ e $\vec{V}_g$ è equivalente ad un unico generatore ideale di tensione:



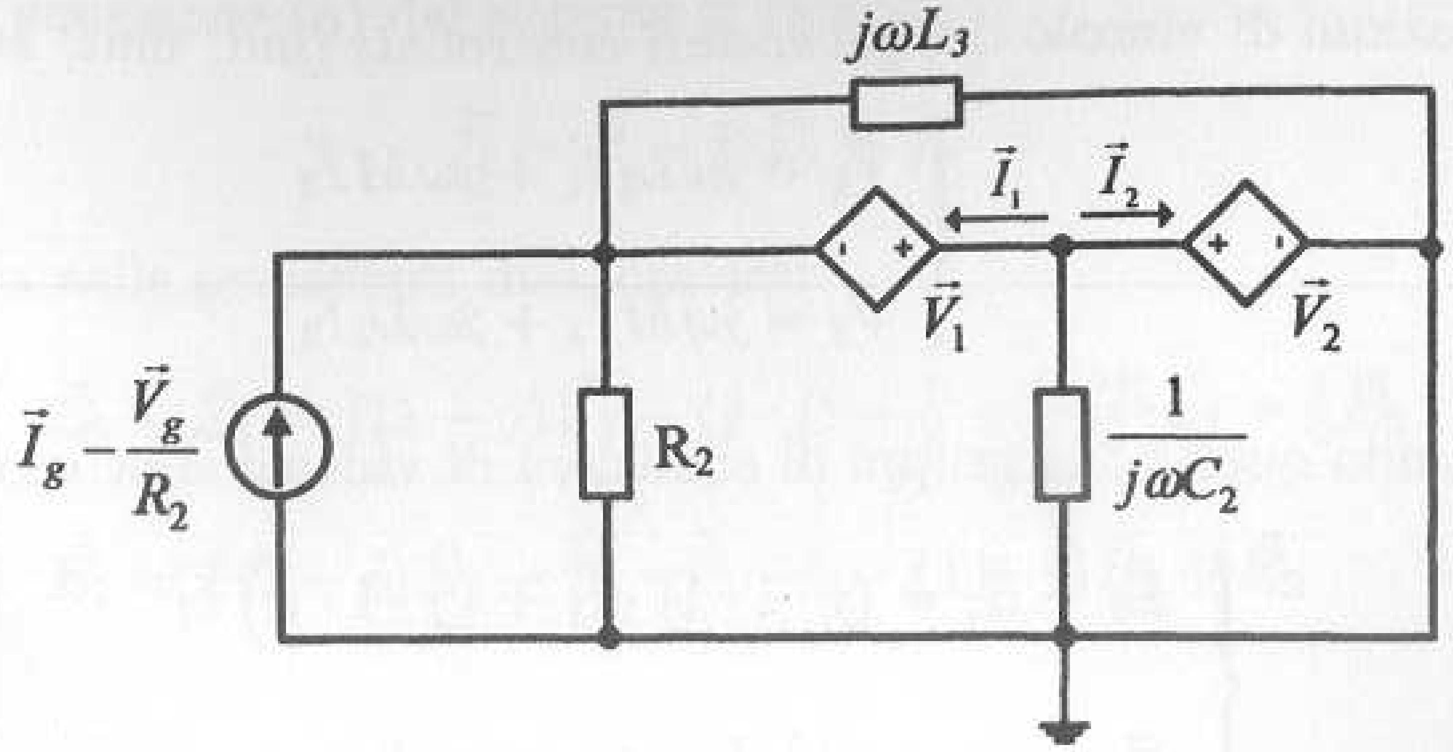

Quest'ultimo generatore, essendo in serie a $R_2$, costituisce un generatore reale di tensione che può essere sostituito da un generatore reale di corrente:



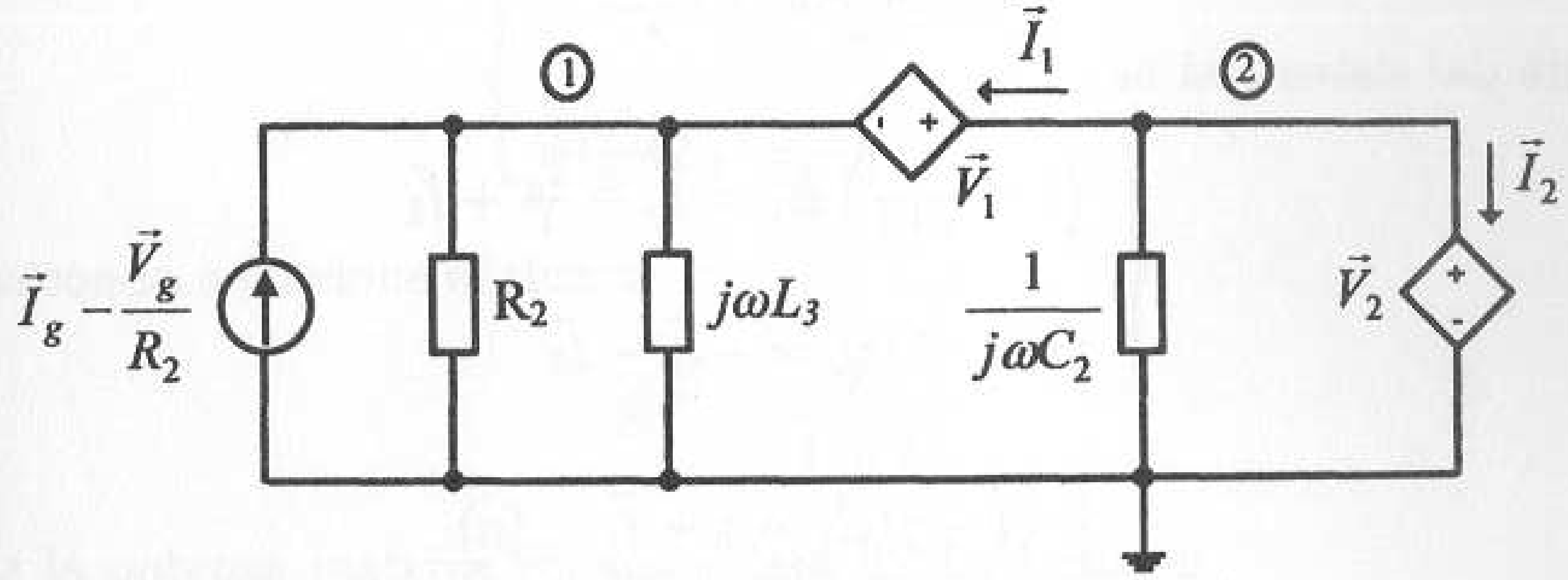

Dunque il circuito a questo punto diventa:








Questo circuito può essere ridisegnato nel seguente modo, mantenendo la scelta del morsetto di riferimento:




Conviene quindi analizzare il circuito con il metodo dei nodi per calcolare la tensione $\vec{E}_1$ ai capi dell'induttore $L_3$. Per i generatori di tensione figurano già le incognite ausiliarie date dalle correnti $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$. Quindi il sistema è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_3}\right) & 0 \\ 0 & j\omega C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{I}_g - \frac{\vec{V}_g}{R_2} + \vec{I}_1 \\ -\vec{I}_1 - \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

- Equazioni di vincolo dei generatori di tensione:

-) $\vec{V}_1 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$;

-) $\vec{V}_2 = \vec{E}_2$.

- Equazioni di vincolo dei generatori controllati (ind. mut. accoppiati):

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = j\omega L_1 \vec{I}_1 + j\omega M \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M \vec{I}_1 + j\omega L_2 \vec{I}_2 \end{cases}$$

Raggruppando questi due gruppi di equazioni di vincolo si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = (j\cdot 1\cdot 1)\cdot \vec{I}_1 + \left(j\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\right)\vec{I}_2 \\ \vec{E}_2 = \left(j\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\right)\vec{I}_1 + (j\cdot 1\cdot 1)\vec{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = j\vec{I}_1 + \frac{j}{2}\vec{I}_2 \\ \vec{E}_2 = \frac{j}{2}\vec{I}_1 + j\vec{I}_2 \end{cases}$$

Mentre dal sistema si ha:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{j\cdot 1\cdot 1}\right)\vec{E}_1 = \vec{I}_g - \frac{\vec{V}_g}{1} + \vec{I}_1 \\ (j\cdot 1\cdot 1)\vec{E}_2 = -\vec{I}_1 - \vec{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-j)\vec{E}_1 = j + \vec{I}_1 \quad (a) \\ j\vec{E}_2 = -\vec{I}_1 - \vec{I}_2 \end{cases}$$

Sommando queste due ultime equazioni del sistema si ottiene:

$$(1-j)\vec{E}_1 + j\vec{E}_2 = j - \vec{I}_2 \;\Rightarrow\; \vec{I}_2 = j - (1-j)\vec{E}_1 - j\vec{E}_2 .$$

Sostituendo questa equazione nelle due precedenti equazioni di vincolo ne deriva che:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = j\vec{I}_1 + \left(\frac{j}{2}\cdot j\right) - \frac{j}{2}(1-j)\vec{E}_1 - \frac{j}{2}\cdot j\cdot \vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 = \frac{j}{2}\vec{I}_1 + (j\cdot j) - j(1-j)\vec{E}_1 - j\cdot j\cdot \vec{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = j\vec{I}_1 - \frac{1}{2} - \frac{(1+j)}{2}\vec{E}_1 + \frac{1}{2}\vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 = \frac{j}{2}\vec{I}_1 - 1 - (1+j)\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \end{cases}$$



Dalla prima equazione $(a)$ del sistema si ricava:

$$\vec{I}_1 = (1-j)\vec{E}_1 - j ,$$

che sostituita nelle precedenti due fornisce:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = j(1-j)\vec{E}_1 - (j\cdot j) - \frac{1}{2} - \frac{(1+j)}{2}\vec{E}_1 + \frac{1}{2}\vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 = \frac{j}{2}(1-j)\vec{E}_1 - \left(\frac{j}{2}\cdot j\right) - 1 - (1+j)\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = (1+j)\vec{E}_1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{(1+j)}{2}\vec{E}_1 + \frac{1}{2}\vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 = \frac{(1+j)}{2}\vec{E}_1 + \frac{1}{2} - 1 - (1+j)\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{(3+j)}{2}\vec{E}_1 + \frac{1}{2}\vec{E}_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{(1+j)}{2}\vec{E}_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{1+j} ,$$

dunque la potenza reattiva $P_R$ scambiata da $L_3$ è pari a:

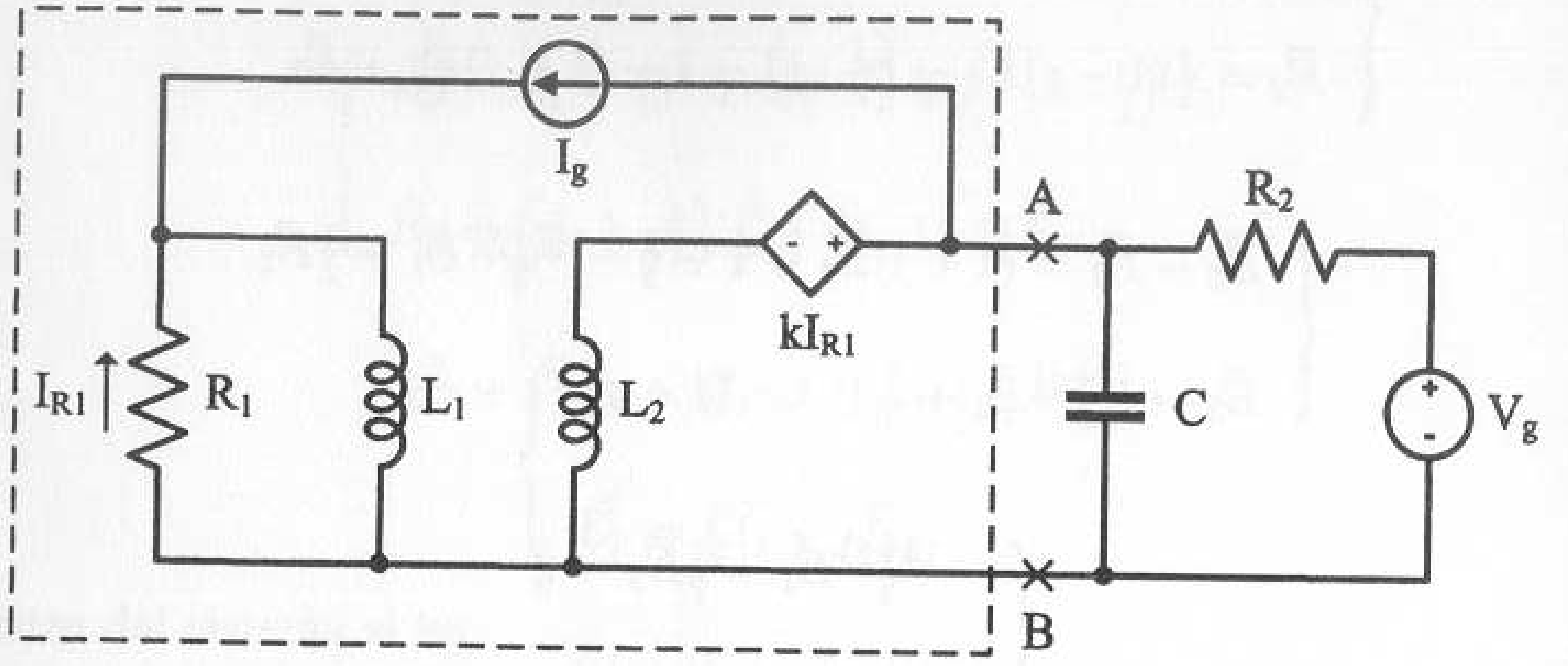
$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\vec{E}_1 \cdot \vec{I}^*_{L_3}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\vec{E}_1 \cdot \left(\frac{\vec{E}_1}{j\omega L_3}\right)^*\right\}$$

$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\frac{|\vec{E}_1|^2}{-j}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{j|\vec{E}_1|^2\right\} = \frac{1}{2}|\vec{E}_1|^2$$

$$P_R = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{1}{1+j}\right|^2 = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad [VAR]$$

## Esercizio 4.10

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, applicare il teorema di Norton alla parte di circuito evidenziata (nel rettangolo tratteggiato) ed accessibile dalla coppia di morsetti A-B. Successivamente, calcolare l'andamento nel tempo della tensione ai capi del condensatore $C$.

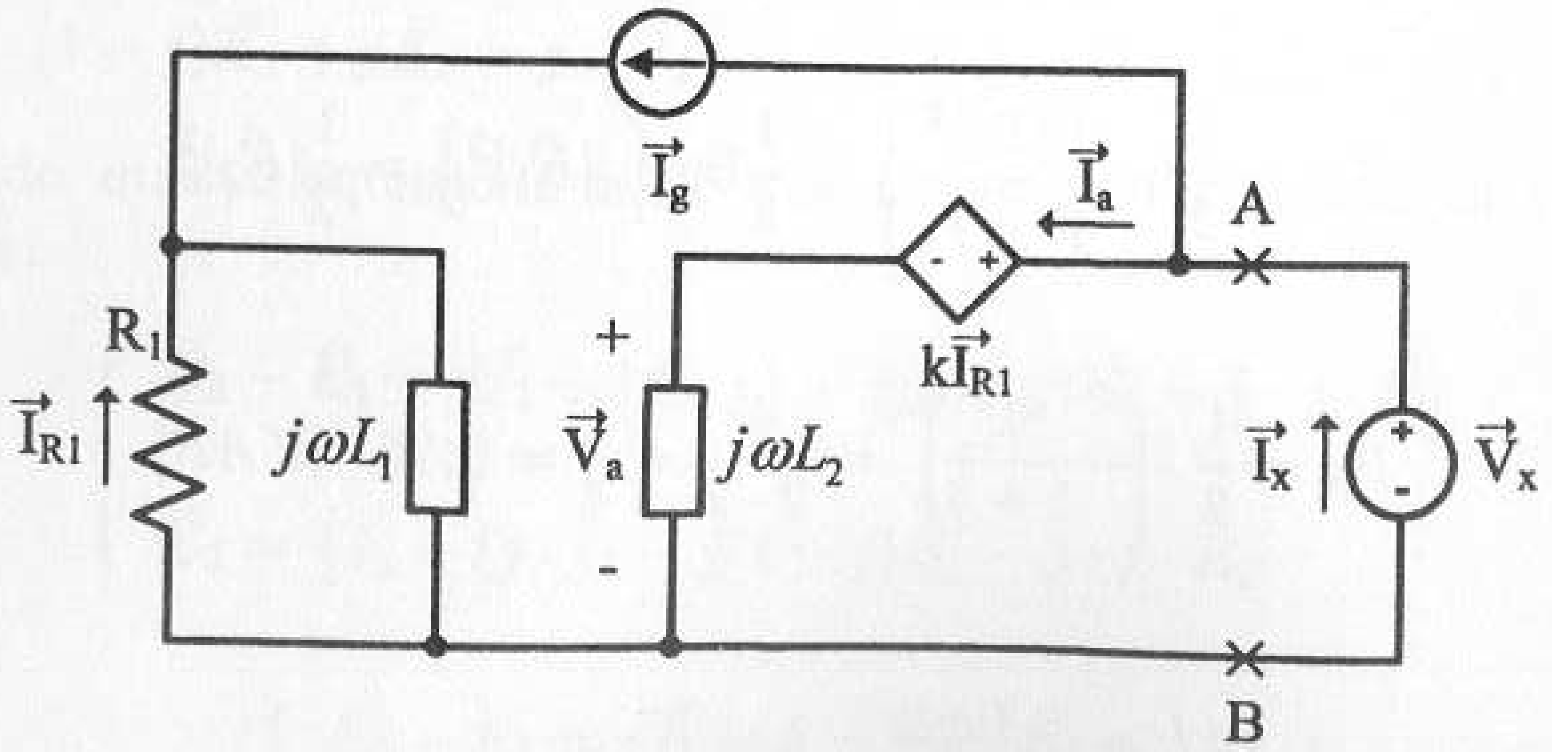



$$I_g(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)[A]\ ;\ V_g(t) = \cos(2t)\,[V]\ ;\ R_1 = 1\,[\Omega]\ ;\ R_2 = 2\,[\Omega]\ ;$$

$$L_1 = 1\,[H]\ ;\ L_2 = 2\,[H]\ ;\ C = 1\,[F]\ ;\ k = 1\,[V/A]\ .$$

### Svolgimento

Si applica il teorema di Norton nel dominio dei fasori, calcolando in modo congiunto entrambi i parametri del circuito equivalente:








Dalle eccitazioni risulta $\omega = 2$ ed inoltre

$$I_g(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right),$$

per cui:

$$\vec{I}_g = 3e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) = -2,12\,(1+j)\ .$$

Dall'analisi dello schema circuitale si nota che $\vec{I}_x = \vec{I}_a + \vec{I}_g$, dove $\vec{I}_a = \frac{\vec{V}_a}{j\omega L_2}$ e $\vec{V}_a = \vec{V}_x - k\vec{I}_{R1}$, quindi:

$$\vec{I}_x = \vec{I}_g + \frac{\vec{V}_x - k\vec{I}_{R1}}{j\omega L_2}\ .$$

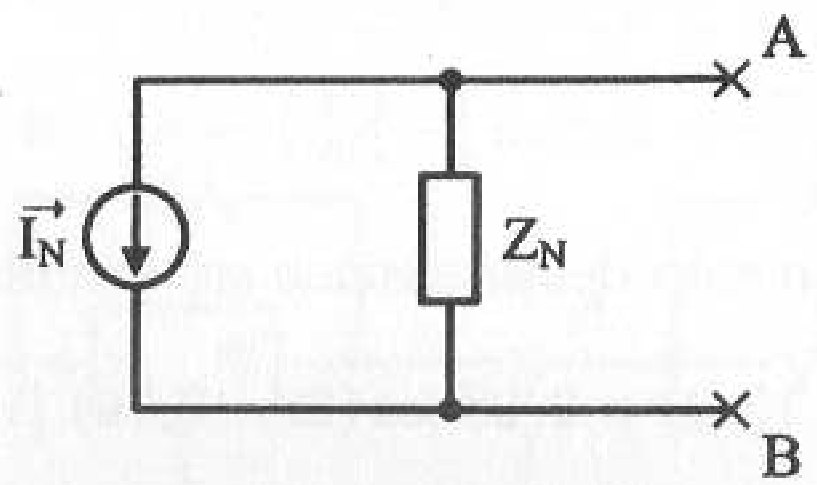
La corrente $\vec{I}_{R1}$ è calcolabile con la formula del partitore di corrente, ossia:

$$\vec{I}_{R1} = -\vec{I}_g\frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1}\ .$$

Quindi sarà:

$$\vec{I}_x = \frac{\vec{V}_x}{j\omega L_2} + \vec{I}_g\left[1 + \frac{kL_1}{L_2(R_1 + j\omega L_1)}\right] = \frac{\vec{V}_x}{4j} + \vec{I}_g\left[1 + \frac{1}{2(1+2j)}\right].$$

Il circuito equivalente di Norton è quindi il seguente:

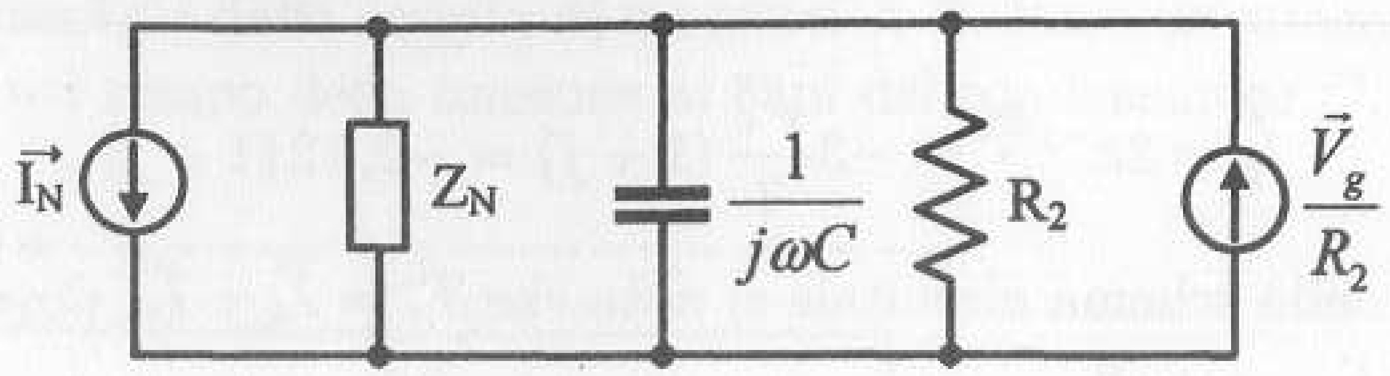



in cui $Z_N = 4j$ e $\vec{I}_N = \vec{I}_g\left[1 + \frac{1}{2(1+2j)}\right]$. Sviluppando numericamente si ottiene:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_g\left[1 + \frac{1-2j}{2(1+2j)(1-2j)}\right] = \vec{I}_g\left(1 + \frac{1-2j}{10}\right)$$

$$\vec{I}_N = -2,12\,(1+j)\,(1,1 - 0,2j) = -2,76 - 1,91j\ .$$

Per il calcolo della tensione sul condensatore si trasforma il generatore reale di tensione (costituito da $\vec{V}_g$ e $R_2$) in un generatore reale di corrente, come nello schema mostrato in figura, in cui $\vec{V}_g = 1$:




La tensione sul condensatore si ricava dall'unica equazione di nodo:

$$\left(j\omega C + \frac{1}{Z_N} + \frac{1}{R_2}\right)\vec{V}_C = \frac{\vec{V}_g}{R_2} - \vec{I}_N$$

da cui

$$\left(2j + \frac{1}{4j} + \frac{1}{2}\right)\vec{V}_C = \frac{1}{2} + 2{,}76 + 1{,}91j\,.$$

Perciò sarà:

$$\vec{V}_C = \frac{3{,}26 + 1{,}91j}{0{,}5 + 1{,}75j} = \frac{(3{,}26 + 1{,}91j)\,(0{,}5 - 1{,}75j)}{(0{,}5 + 1{,}75j)\,(0{,}5 - 1{,}75j)} = \frac{4{,}97 - 4{,}75j}{3{,}31}\,.$$

Si procede, quindi, al calcolo del modulo e della fase di $\vec{V}_C$:

$$\begin{cases} \left|\vec{V}_C\right| = \frac{\sqrt{4{,}97^2 + 4{,}75^2}}{3{,}31} = 2{,}08 \\ \angle\vec{V}_C = \arctan\left(-\frac{4{,}75}{4{,}97}\right) = -0{,}76 \text{ [rad]} \end{cases}$$

Si ottiene infine l'andamento della tensione sul condensatore:

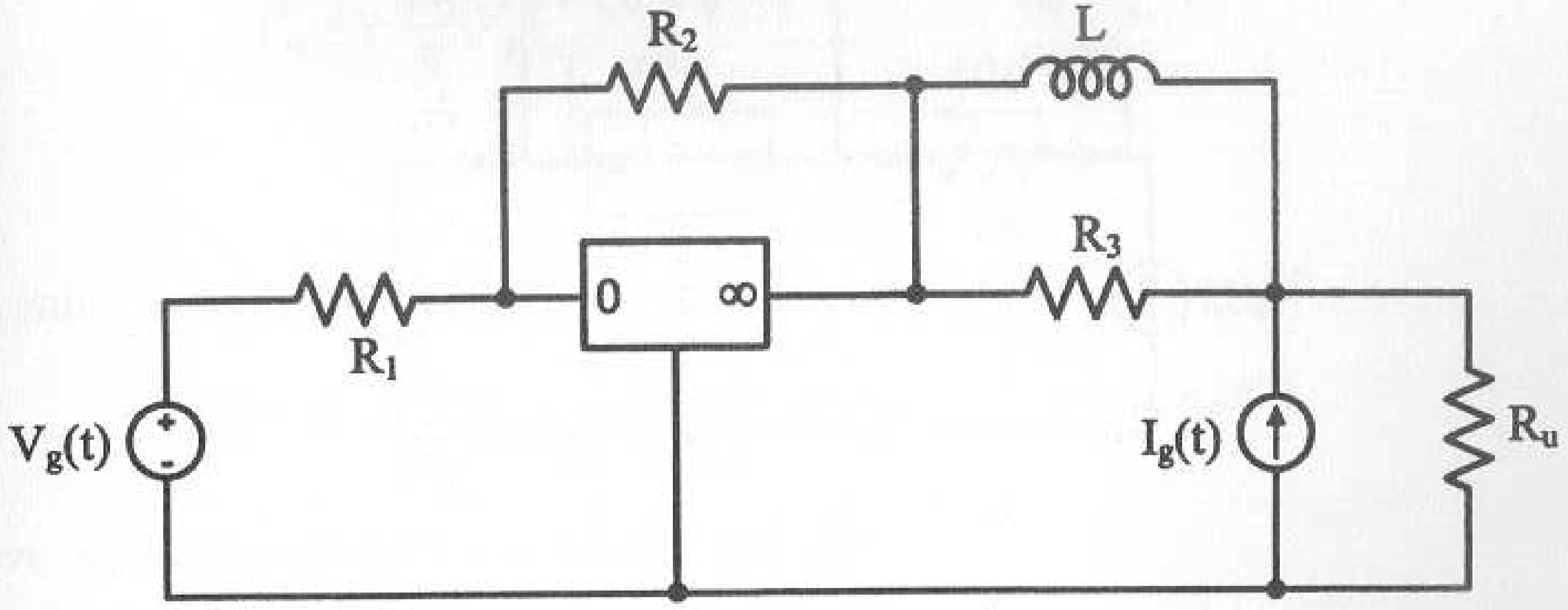
$$V_C(t) = 2{,}08\cos\left(2t - 0{,}76\right)\ [V]$$





# Esercizio 4.11

Nel circuito in figura, considerato in regime permanente sinusoidale, calcolare l'andamento (nel tempo) della tensione sul resistore $R_u$. Calcolare, inoltre, la potenza attiva assorbita da $R_u$.

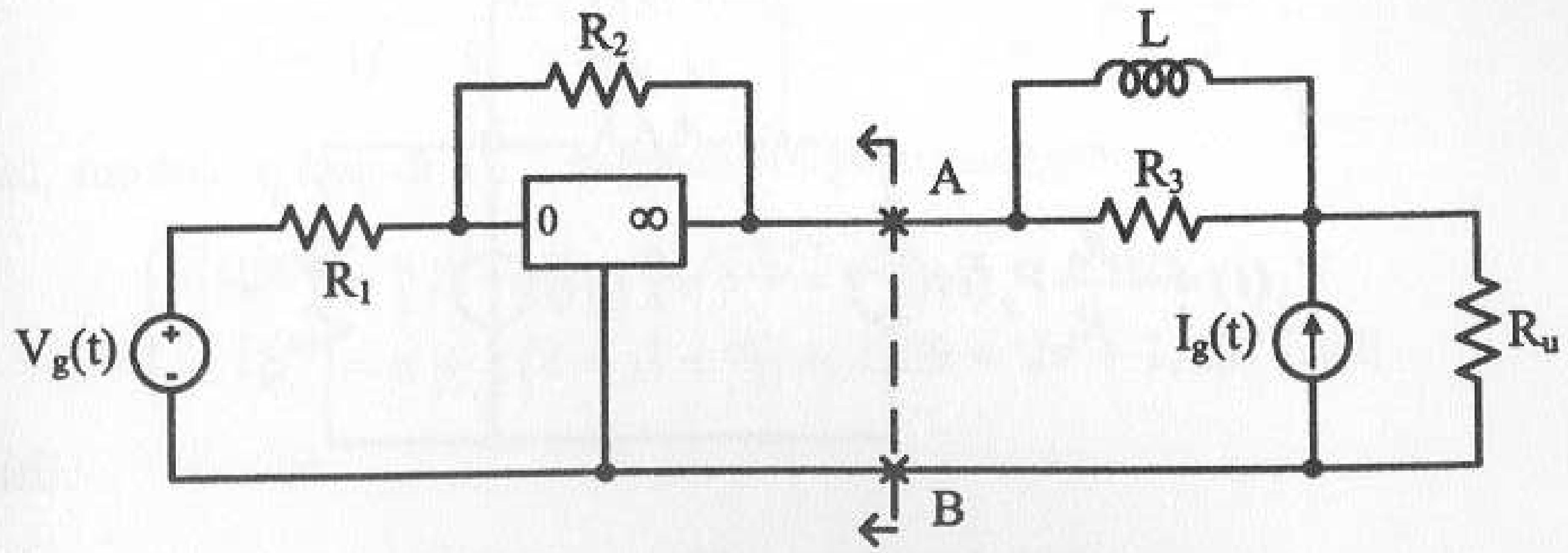



$$V_g(t) = 3\cos\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right)\ [V]\,;\ I_g(t) = \sin(3t)\,[A]\,;\ R_1 = 1\,[\Omega]$$

$$R_2 = 3\,[\Omega]\,;\ R_3 = 2\,[\Omega]\,;\ R_u = 1\,[\Omega]\,;\ L = 1\,[H]\,.$$

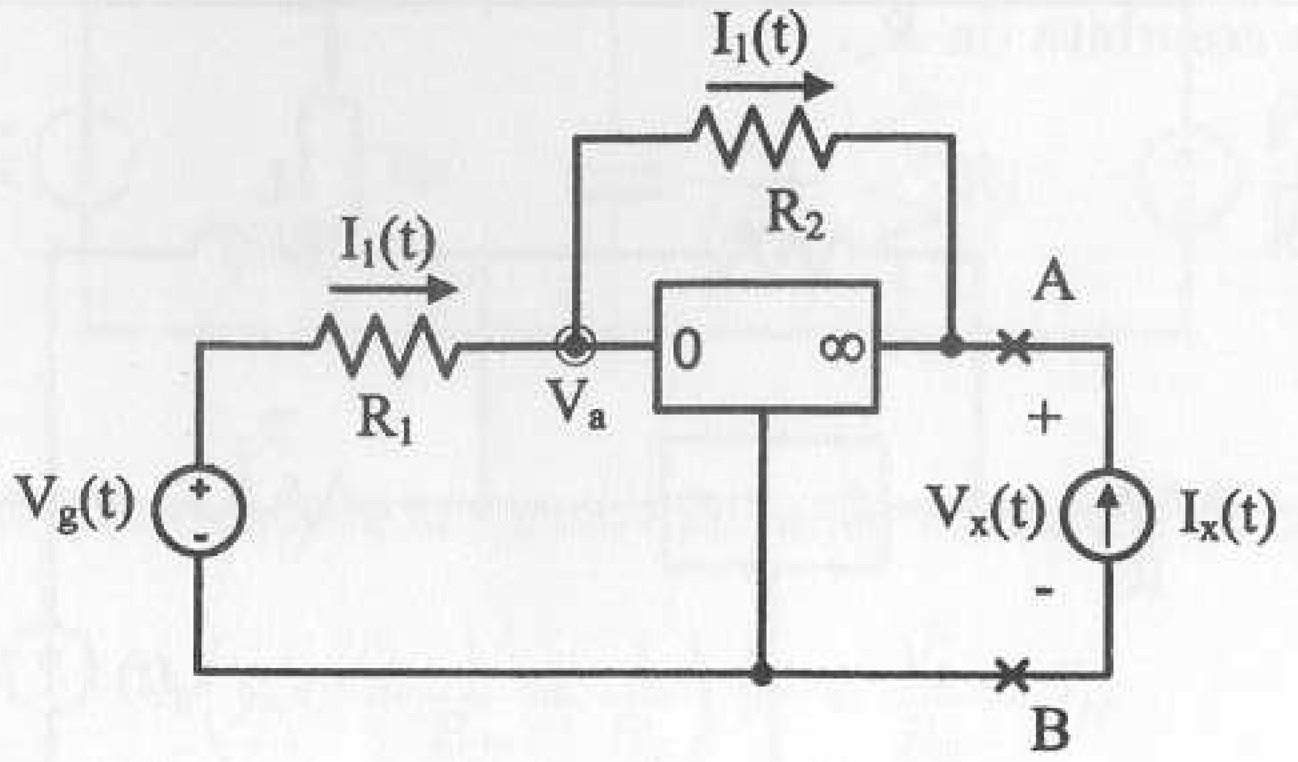
## Svolgimento

Il circuito proposto può essere ridisegnato nella seguente maniera:




Dal momento che nella parte sinistra del circuito evidenziata in figura non sono presenti componenti con memoria, sarà possibile applicare il teorema di Thevenin nel tempo, indipendentemente dal tipo di analisi che verrà utilizzata successivamente.

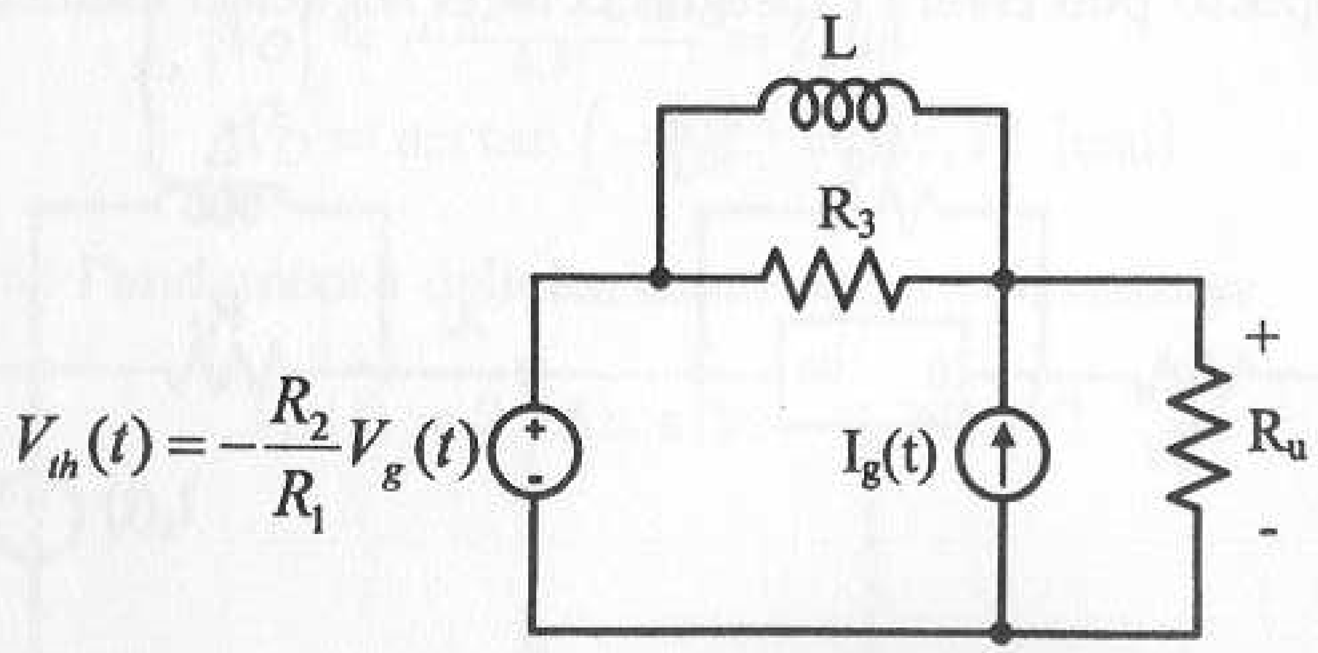
Per ottenere i valori di $V_{th}(t)$ e $R_{th}$, si sostituisce la parte destra del circuito con un generatore di corrente $I_x(t)$, ai cui capi sarà presente una differenza di potenziale $V_x(t)$, ottenendo quindi il circuito mostrato in figura:




La presenza del nullore fa sì che la corrente che scorre in $R_1$ sia uguale a quella che scorre in $R_2$ e inoltre che $V_a = 0$. Quindi si può scrivere:

$$V_x(t) = V_a(t) - R_2 I_1(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_g(t).$$

Non esiste un termine proporzionale a $I_x(t)$, quindi il circuito si comporta come un generatore ideale di tensione pari a $V_{th}(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_g(t)$. Si avrà quindi:

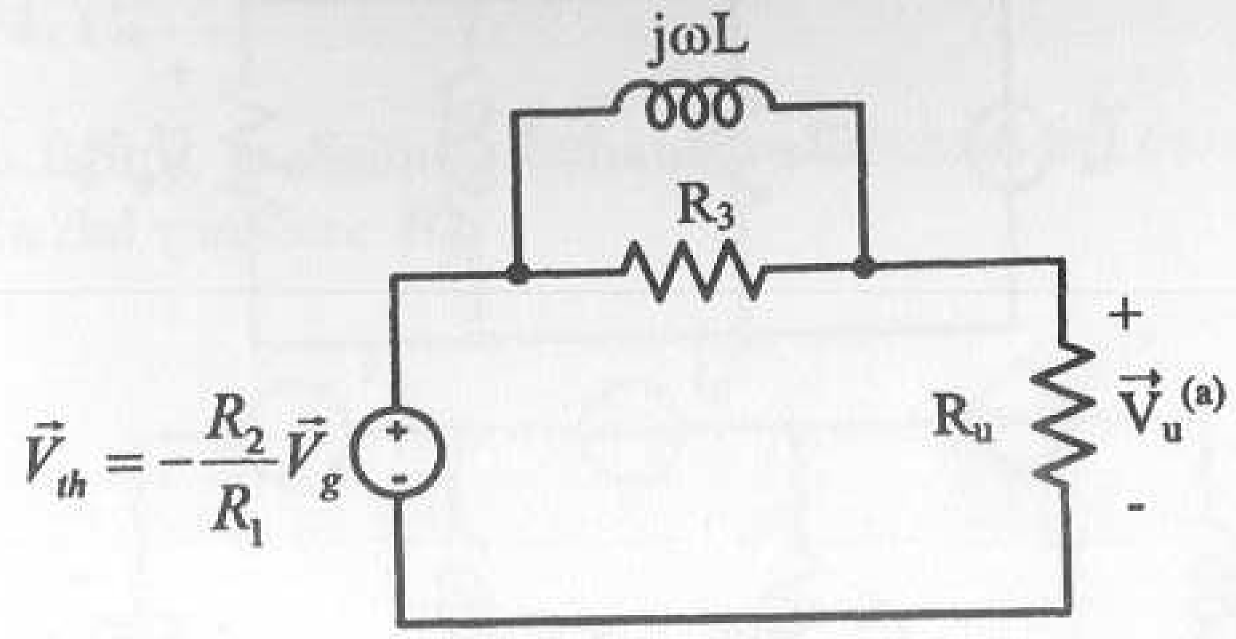



Si procede quindi con l'analisi del circuito attraverso il metodo dei fasori e la sovrapposizione degli effetti.

$\omega = 2\big)$ $I_g(t)$ è disattivato e diventa un circuito aperto:








Il circuito in figura è un partitore di tensione in cui:

$$\vec{V}_u^{(a)} = -\frac{R_2}{R_1}\vec{V}_g \cdot \frac{R_u}{R_u + Z_p}, \qquad \text{con} \qquad \vec{V}_g = 3e^{j3\frac{\pi}{2}},$$

e dove $Z_p$ è il parallelo tra L ed $R_3$, quindi:

$$Z_p = \frac{j\omega L R_3}{j\omega L + R_3} = \frac{j \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{j \cdot 2 \cdot 1 + 2} = \frac{4j}{2j+2} = \frac{2j}{1+j}.$$

Si ottiene così:

$$\vec{V}_u^{(a)} = -3 \cdot 3e^{j3\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2j}{1+j}} = -9 \cdot \frac{1+j}{1+3j} e^{j3\frac{\pi}{2}} = -9 \cdot \frac{2-j}{5} e^{j3\frac{\pi}{2}}.$$

L'ultimo passaggio dell'equazione è giustificato dal fatto che, per il termine $\frac{1+j}{1+3j}$, si ha:

$$\frac{1+j}{1+3j} = \frac{(1+j)\cdot(1-3j)}{(1+3j)\cdot(1-3j)} = \frac{4-2j}{10} = \frac{2-j}{5}.$$

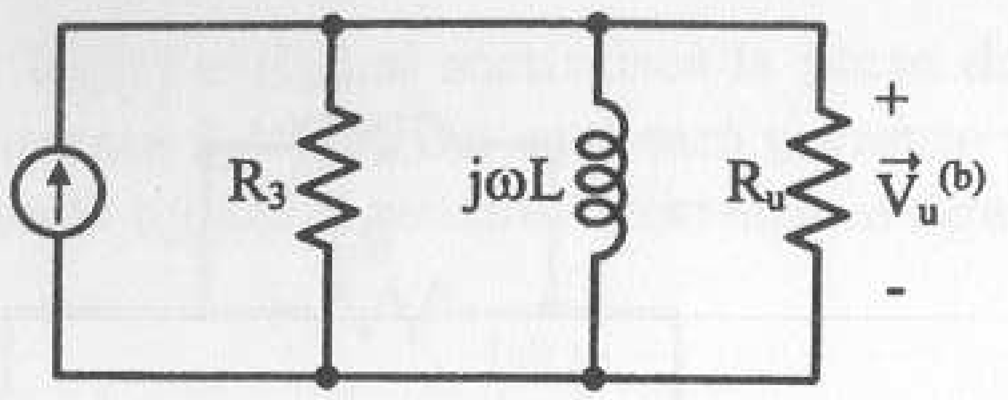
Perciò, modulo e fase di $\vec{V}_u^{(a)}$ valgono, rispettivamente:

$$\begin{cases} \left|\vec{V}_u^{(a)}\right| = \frac{9}{5}\,|2-j| = \frac{9}{5}\sqrt{4+1} = \frac{9}{5}\sqrt{5} = 4{,}025 \\ \angle \vec{V}_u^{(a)} = \pi + \angle(2-j) + \frac{3\pi}{2} = 7{,}39 = 2\pi + 1{,}107 \text{ [rad]} \end{cases}$$

Quindi:

$$\vec{V}_u^{(a)}(t) = 4{,}025\cos(2t + 1{,}107).$$

$\omega = 3\big)$ $V_g(t)$ è disattivato e diventa un corto-circuito. Quando si disattiva $V_g(t)$ si deve porre a zero anche il corrispondente generatore di Thevenin $-\frac{R_2}{R_1}V_g(t)$. Il circuito si può quindi ridisegnare nel seguente modo:




Si avrà:

$$\vec{V}_u^{(b)} = \vec{I}_g \cdot Z_p',$$

in cui $\vec{I}_g = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, poiché $\sin(3t) = \cos(3t - \frac{\pi}{2})$, mentre $Z_p'$ è il parallelo di $R_3$, L ed $R_U$, per cui:

$$Z_p' = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_u}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j\cdot 3\cdot 1} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{3j}} = \frac{6j}{9j+2}$$

$$Z_p' = \frac{6j\,(2-9j)}{(2+9j)\,(2-9j)} = \frac{12j+54}{4+81} = \frac{54+12j}{85}.$$

Si può così calcolare $\vec{V}_u^{(b)}$ e i relativi valori di modulo e fase:

$$\vec{V}_u^{(b)} = -j \cdot Z_p' = \frac{12-54j}{85}$$

$$\begin{cases} \left|\vec{V}_u^{(b)}\right| = \frac{\sqrt{144+2916}}{85} = 0,651 \\ \angle\vec{V}_u^{(b)} = \angle\,(12-54j) = \arctan\left(-\frac{54}{12}\right) = -1,352\,[\text{rad}] \end{cases}$$

Quindi:

$$V_u^{(b)}(t) = 0,651\cos(3t - 1,352).$$

In definitiva, andando a riunire i due risultati ottenuti, si avrà:

$$V_u\,(t) = V_u^{(a)}\,(t) + V_u^{(b)}\,(t) = 4,025\cos\,(2t+1,107) + 0,651\cos\,(3t-1,352)\ \ [\text{V}]$$

Dal momento che le pulsazioni sono diverse, la potenza attiva sarà pari alla somma delle potenze attive alle singole frequenze:

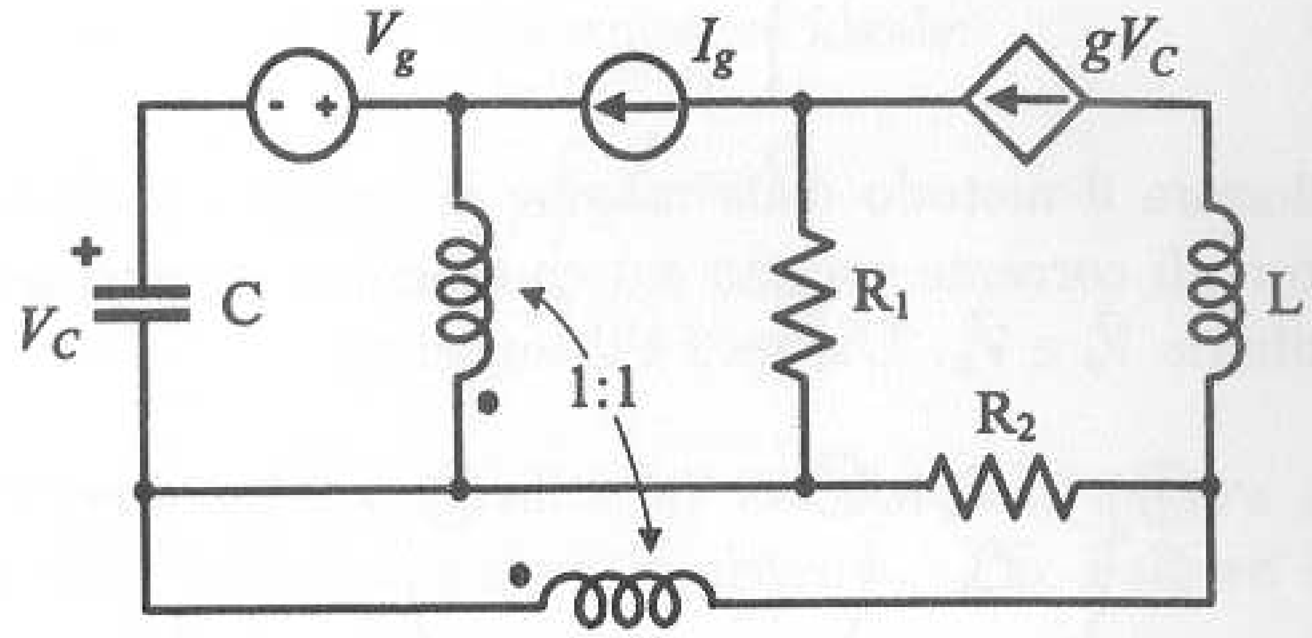
$$P_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{V}_u^{(a)}\right|^2}{R_u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\vec{V}_u^{(b)}\right|^2}{R_u} = \frac{1}{2}\left(4,025^2 + 0,651^2\right) = 8,312\ [\text{W}]$$





## Esercizio 4.12

Nel circuito in figura, a regime permanente sinusoidale, calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore $R_2$.



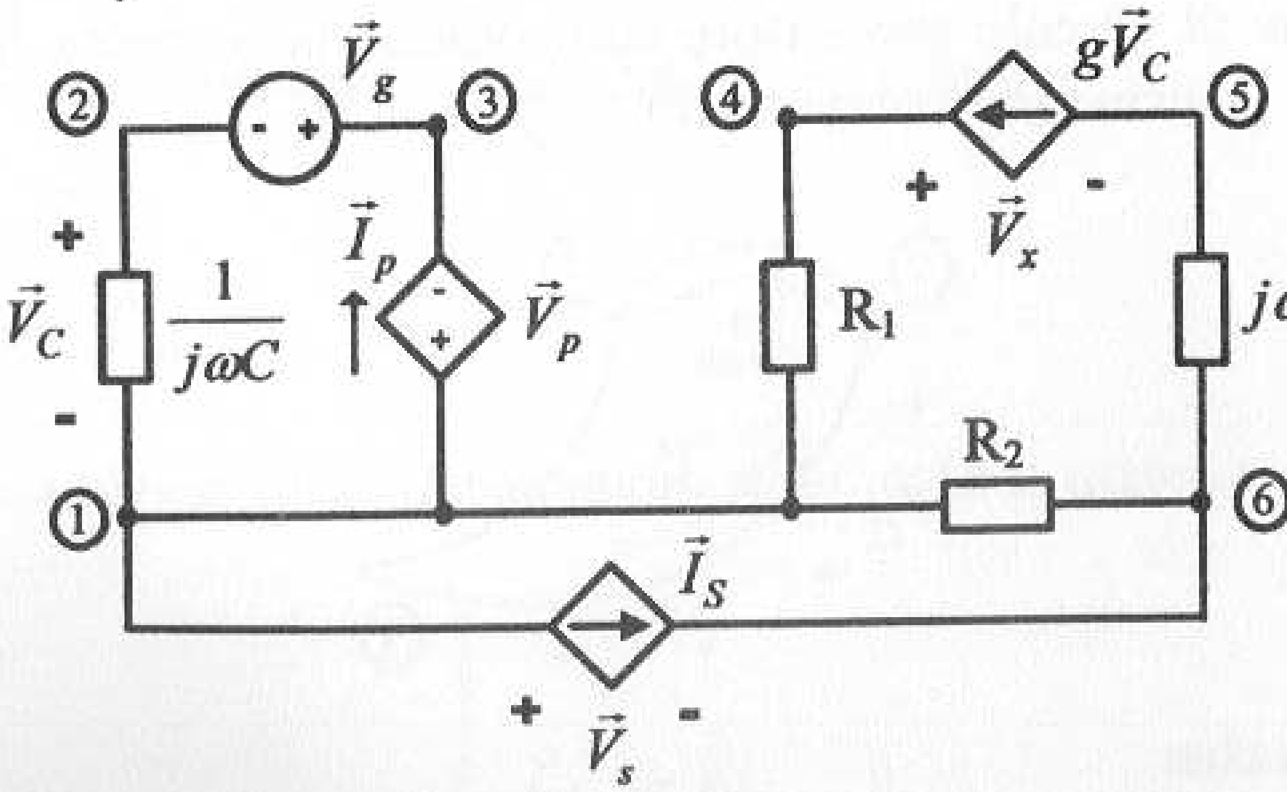

$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega];\ C = 1\,[F];\ L = 1\,[H];\ g = 1\,[A/V];$$

$$V_g(t) = \cos(2t)\,[V];\ I_g(t) = 5\sin(t)\,[A].$$

### Svolgimento

Per calcolare la potenza attiva assorbita da $R_2$ si deve analizzare il circuito nel dominio dei fasori e determinare la tensione ai capi di $R_2$ o la corrente che scorre in esso. Poiché le eccitazioni dei generatori indipendenti hanno pulsazioni differenti, si deve effettuare l'analisi separatamente per ciascuna di esse.

Calcolo per $\omega = 2$) Si disattiva il generatore $I_g$, che diventa un circuito aperto:



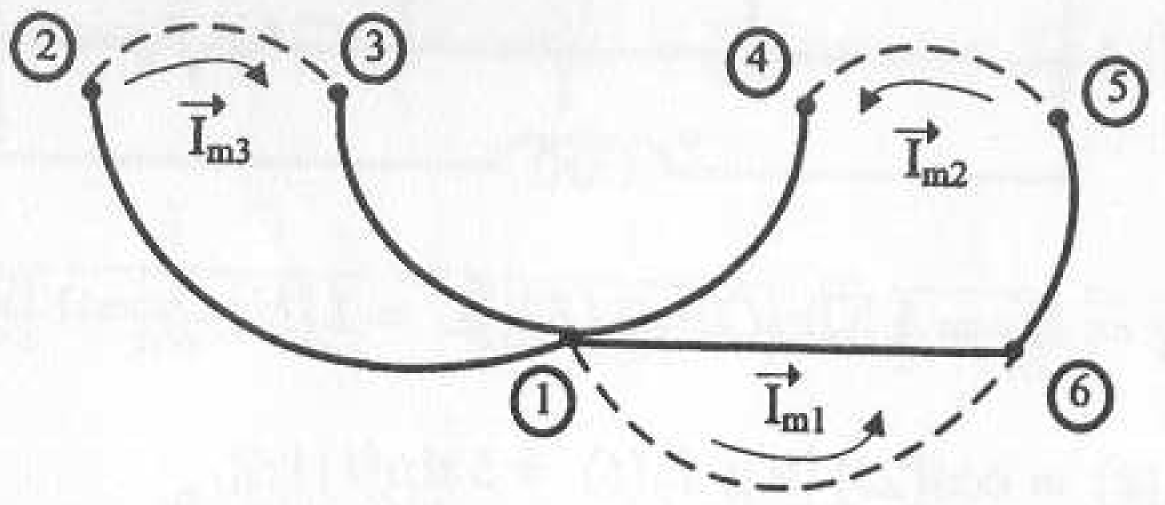

con

$$V_g(t) = \cos(2t) \quad\Rightarrow\quad \vec{V}_g = 1.$$

Gli avvolgimenti del trasformatore ideale sono stati sostituiti con un generatore di tensione controllato in tensione ed un generatore di corrente controllato in corrente, ove risulta:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$

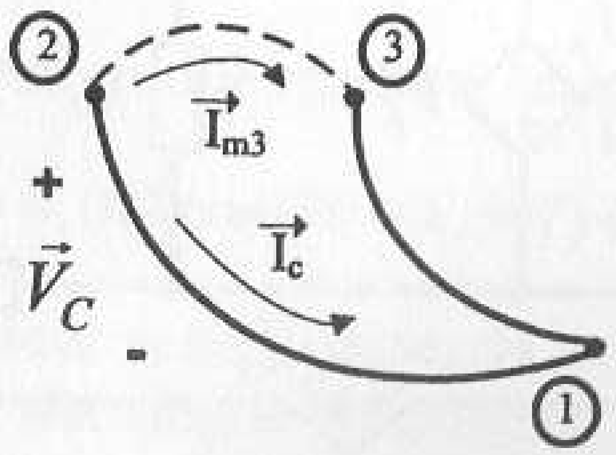
Conviene utilizzare il metodo delle maglie; si sceglie un albero in modo che i due generatori di corrente cadano sul co-albero e si considerano per essi le incognite ausiliarie $\vec{V}_s$ e $\vec{V}_x$. L'albero è il seguente:




da cui deriva il sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_1 + R_2 + j\omega L) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m_1} \\ \vec{I}_{m_2} \\ \vec{I}_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{V}_s \\ \vec{V}_x \\ \vec{V}_p + \vec{V}_g \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo generatore controllato: la corrente $\vec{I}_C$ entrante dal morsetto positivo del condensatore $\frac{1}{j\omega C}$ è $-\vec{I}_{m_3}$:




Ne deriva che:

$$\vec{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_C = -\frac{1}{j\omega C}\vec{I}_{m_3} = -\frac{1}{j \cdot 2 \cdot 1}\vec{I}_{m_3} = \frac{j}{2}\vec{I}_{m_3}$$





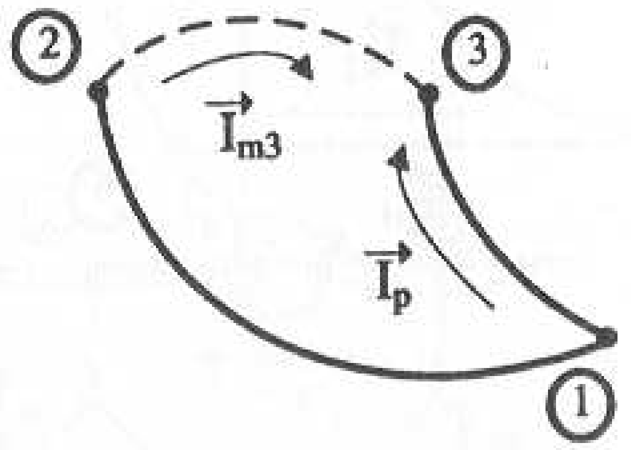
e dunque l'equazione di vincolo è

$$g\vec{V}_C = g \cdot \frac{j}{2}\vec{I}_{m_3} = \frac{j}{2}\vec{I}_{m_3}\,.$$

- Equazioni costitutive del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$

dove $\vec{V}_s$ è un'incognita (ausiliaria) del sistema, mentre $\vec{I}_p$ va espressa in funzione delle incognite del sistema. Per l'albero scelto risulta evidentemente $\vec{I}_p = -\vec{I}_{m_3}$:




quindi le equazioni di vincolo diventano:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = \vec{I}_{m_3} \end{cases}$$

- Equazioni costitutive dei generatori di corrente:
  - -) $\vec{I}_s = \vec{I}_{m_1}$;
  - -) $g\vec{V}_C = \vec{I}_{m_2}$.

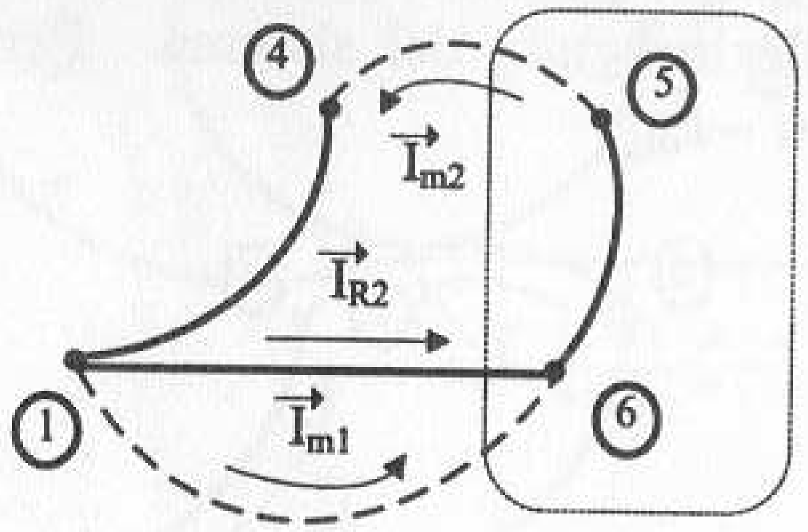
Raggruppando assieme tutte le equazioni di vincolo si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_{m_1} = \vec{I}_{m_3} \\ \frac{j}{2}\vec{I}_{m_3} = \vec{I}_{m_2} \end{cases}$$

mentre dal sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} = -\vec{V}_s \\ -\vec{I}_{m_1} + 2(1+j)\vec{I}_{m_2} = \vec{V}_x \\ -\frac{j}{2}\vec{I}_{m_3} = \vec{V}_g + \vec{V}_p \end{cases}$$

Per calcolare la potenza attiva su $R_2$ si deve risolvere rispetto a $\vec{I}_{m_1}$ e $\vec{I}_{m_2}$. Infatti la corrente $\vec{I}_{R_2}$ che scorre in $R_2$ si ricava dall'equazione di bilancio delle correnti applicata al taglio evidenziato sull'albero scelto:




per cui risulta

$$\vec{I}_{R_2} + \vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_1}\,.$$

Sostituendo la 2$^a$ equazione di vincolo nella 3$^a$ equazione di vincolo si ottiene:

$$\frac{j}{2}\vec{I}_{m_1} = \vec{I}_{m_2}\,. \qquad (a)$$

Essendo $\vec{V}_p = \vec{V}_s$, sommando la 1$^a$ e la 3$^a$ equazione del sistema ne deriva che:

$$\vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} - \frac{j}{2}\vec{I}_{m_3} = \vec{V}_g\,.$$

Sostituendo la 3$^a$ equazione di vincolo in quest'ultima si ha:

$$\vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_2} = \vec{V}_g \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{m_1} - 2\vec{I}_{m_2} = 1\,. \qquad (b)$$

Sostituendo l'equazione $(a)$ nella $(b)$ si ottiene:

$$\vec{I}_{m_1} - 2\cdot\frac{j}{2}\vec{I}_{m_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{m_1} = \frac{1}{1-j}\,.$$





Quindi

$$\vec{I}_{m_2} = \frac{j}{2}\vec{I}_{m_1} = \frac{j}{2}\cdot\frac{1}{1-j}$$

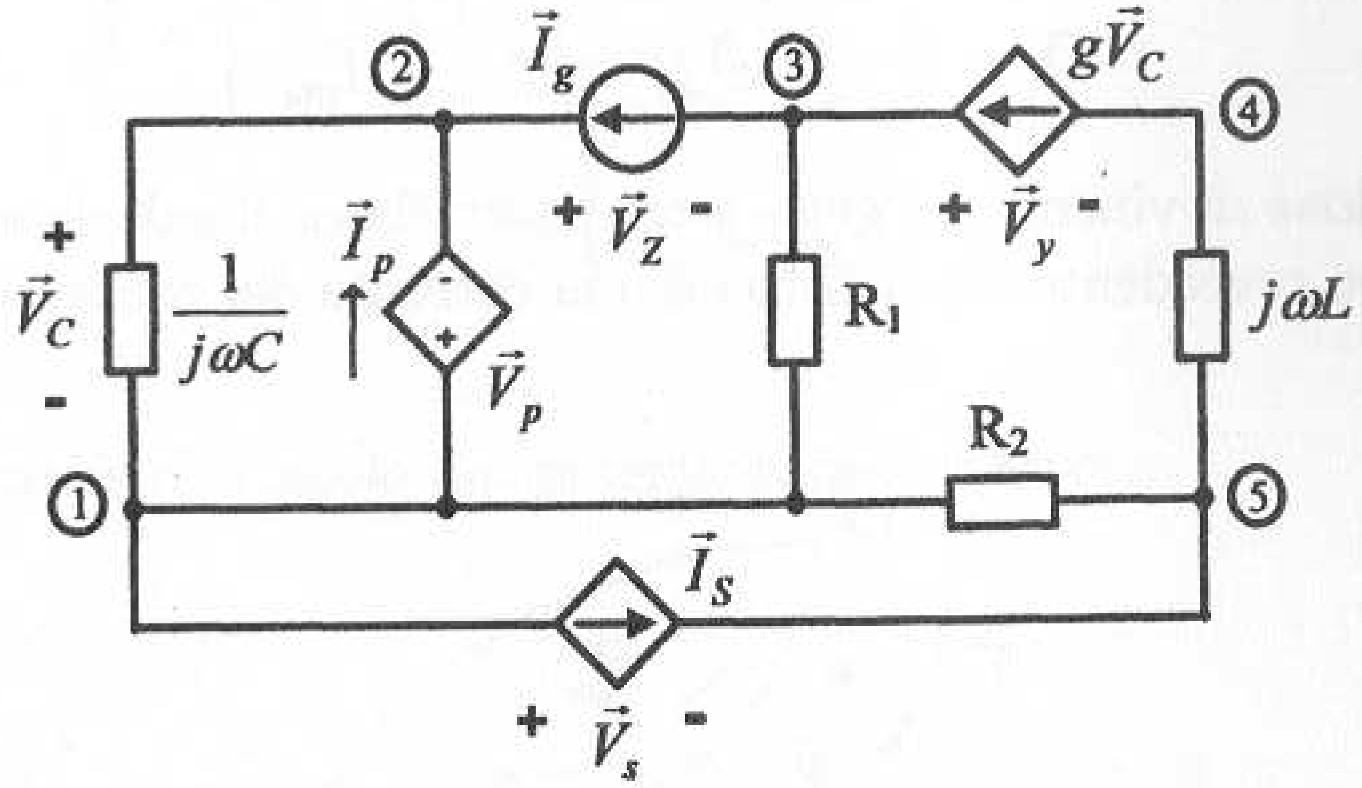
e, in definitiva,

$$\vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_1} = \left(\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{1-j}\right) - \frac{1}{1-j} = \frac{j-2}{2(1-j)}\cdot\frac{(1+j)}{(1+j)} = -\frac{(3+j)}{4}\,.$$

Dunque il contributo $P_a^{(\omega=2)}$ alla potenza attiva assorbita da $R_2$ per $\omega = 2$ è dato da:

$$P_a^{(\omega=2)} = \frac{1}{2}R_2|\vec{I}_{R_2}|^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{|3+j|^2}{16} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}\,.$$

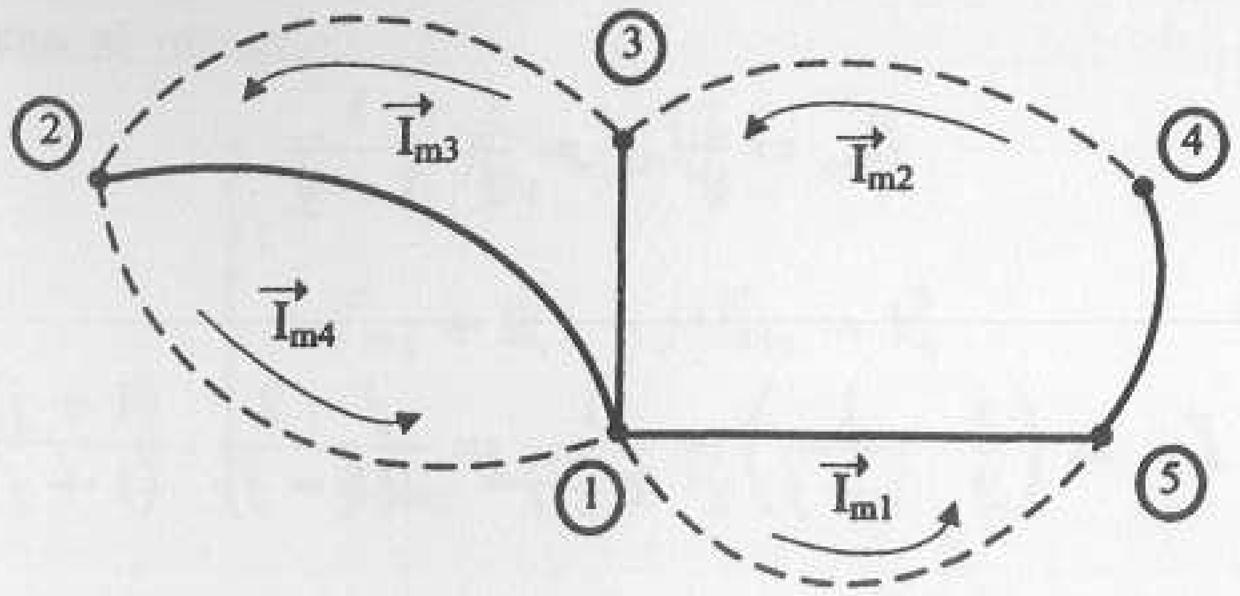
Calcolo per $\omega = 1\big)$ Si disattiva $V_g$ che, diventando un corto-circuito, porta al seguente circuito:




con

$$I_g(t) = 5\sin(t) = 5\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_g = 5e^{-j\frac{\pi}{2}} = -5j\,.$$

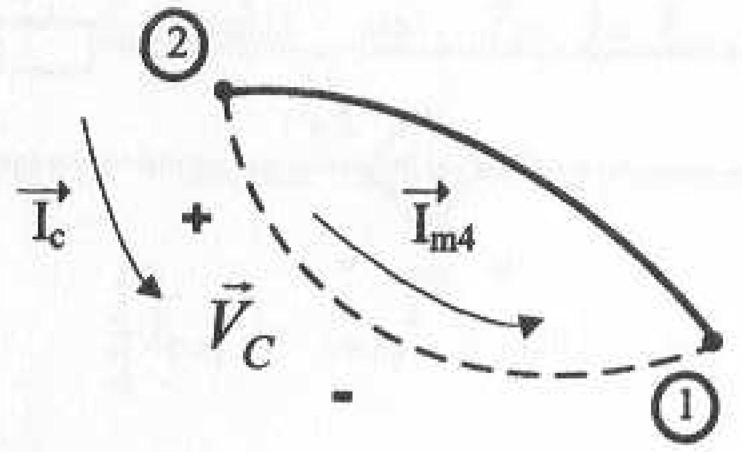
Anche in questo caso è stata effettuata la sostituzione per il trasformatore ideale esattamente come nel caso precedente. Si analizza il circuito con il metodo delle maglie, scegliendo anche in questo caso un co-albero in cui cadano tutti i generatori di corrente e aggiungendo le incognite ausiliarie $\vec{V}_y$ e $\vec{V}_z$, oltre a quella già introdotta per il trasformatore ideale (cioè $\vec{V}_s$):




Il sistema è dunque il seguente:

$$\begin{bmatrix} R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & (R_1+R_2+j\omega L) & -R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{m_1} \\ \vec{I}_{m_2} \\ \vec{I}_{m_3} \\ \vec{I}_{m_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{V}_s \\ \vec{V}_y \\ \vec{V}_z+\vec{V}_p \\ -\vec{V}_p \end{bmatrix}$$

- Equazione di vincolo del generatore controllato: il calcolo si esegue come nel caso precedente. In questo caso la corrente del condensatore è pari a $\vec{I}_{m_4}$:




dunque

$$\vec{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\vec{I}_C = \frac{1}{j\cdot 1\cdot 1}\vec{I}_{m_4} = -j\vec{I}_{m_4}$$

ed il vincolo diventa:

$$g\vec{V}_C = -j\vec{I}_{m_4}\,.$$

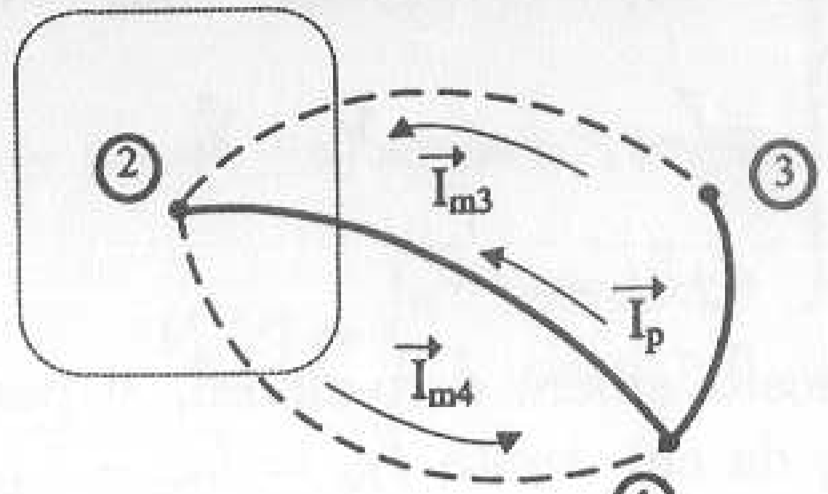
- Equazione costitutiva del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = -\vec{I}_p \end{cases}$$





Come per il caso precedente si deve esprimere $\vec{I}_p$ in funzione delle incognite del sistema. La corrente $\vec{I}_p$ si ricava dalla equazione di bilancio ad un opportuno taglio effettuato sull'albero scelto:




Risulta $\vec{I}_p + \vec{I}_{m_3} - \vec{I}_{m_4} = 0$ e dunque $\vec{I}_p = \vec{I}_{m_4} - \vec{I}_{m_3}$. Allora il vincolo del trasformatore ideale diventa:

$$\begin{cases} \vec{V}_p = \vec{V}_s \\ \vec{I}_s = \vec{I}_{m_3} - \vec{I}_{m_4} \end{cases}$$

- Equazioni di vincolo dei generatori di corrente:

  -) $\vec{I}_{m_1} = \vec{I}_s$;

  -) $\vec{I}_{m_2} = g\vec{V}_C$;

  -) $\vec{I}_{m_3} = \vec{I}_g$.

Raggruppando assieme le equazioni di vincolo si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{I}_{m_1} = \vec{I}_{m_3} - \vec{I}_{m_4} \\ \vec{I}_{m_2} = -j\vec{I}_{m_4} \\ \vec{I}_{m_3} = \vec{I}_g \\ \vec{V}_p = \vec{V}_s \end{cases}$$

mentre dal sistema si ha:

$$\begin{cases} \vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} = -\vec{V}_s \\ -\vec{I}_{m_1} + (2+j)\vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_3} = \vec{V}_y \\ -\vec{I}_{m_2} + \vec{I}_{m_3} = \vec{V}_z + \vec{V}_p \\ -j\vec{I}_{m_4} = -\vec{V}_p \end{cases}$$

Per come sono stati scelti albero e co-albero, si può fare un ragionamento analogo al caso $\omega = 2$, da cui risulta $\vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_1}$. Essendo $\vec{V}_s = \vec{V}_p$, dal confronto tra la $1^a$ e la $4^a$ equazione del sistema si ottiene:

$$\vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} = -j\vec{I}_{m_4}. \quad (a)$$

Sostituendo l'equazione $(a)$ nella $2^a$ equazione di vincolo si ottiene:

$$\vec{I}_{m_2} = \vec{I}_{m_1} - \vec{I}_{m_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{m_1} = 2\vec{I}_{m_2}. \quad (b)$$

Tuttavia l'equazione $(a)$ può essere riscritta come:

$$\vec{I}_{m_4} = j\vec{I}_{m_1} - j\vec{I}_{m_2},$$

che sostituita nella $1^a$ equazione di vincolo fornisce:

$$\vec{I}_{m_1} = \vec{I}_{m_3} - j\vec{I}_{m_1} + j\vec{I}_{m_2}.$$

Essendo inoltre, per la $3^a$ equazione di vincolo, $\vec{I}_{m_3} = \vec{I}_g = -5j$, l'ultima equazione può essere riscritta come:

$$\vec{I}_{m_1} = -5j - j\vec{I}_{m_1} + j\vec{I}_{m_2}. \quad (c)$$

Sostituendo l'equazione $(b)$ nella $(c)$ si ottiene:

$$2\vec{I}_{m_2} = -5j - 2j\vec{I}_{m_2} + j\vec{I}_{m_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{m_2} = -\frac{5j}{2+j}.$$

Dunque, riutilizzando la $(b)$, si ha in conclusione:

$$\vec{I}_{R_2} = \vec{I}_{m_2} - \vec{I}_{m_1} = -\vec{I}_{m_2} = \frac{5j}{2+j} \cdot \frac{2-j}{2-j} = 1 + 2j.$$

Il contributo $P_a^{(\omega=1)}$ alla potenza attiva assorbita da $R_2$ per $\omega = 1$ è pari a

$$P_a^{(\omega=1)} = \frac{1}{2} R_2 |\vec{I}_{R_2}|^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |1+2j|^2 = \frac{5}{2}.$$

In conclusione, la potenza attiva $P_a$ complessivamente assorbita da $R_2$ è

$$P_a = P_a^{(\omega=2)} + P_a^{(\omega=1)} = \frac{5}{16} + \frac{5}{2} = \frac{45}{16} = 2,812 \quad [W]$$





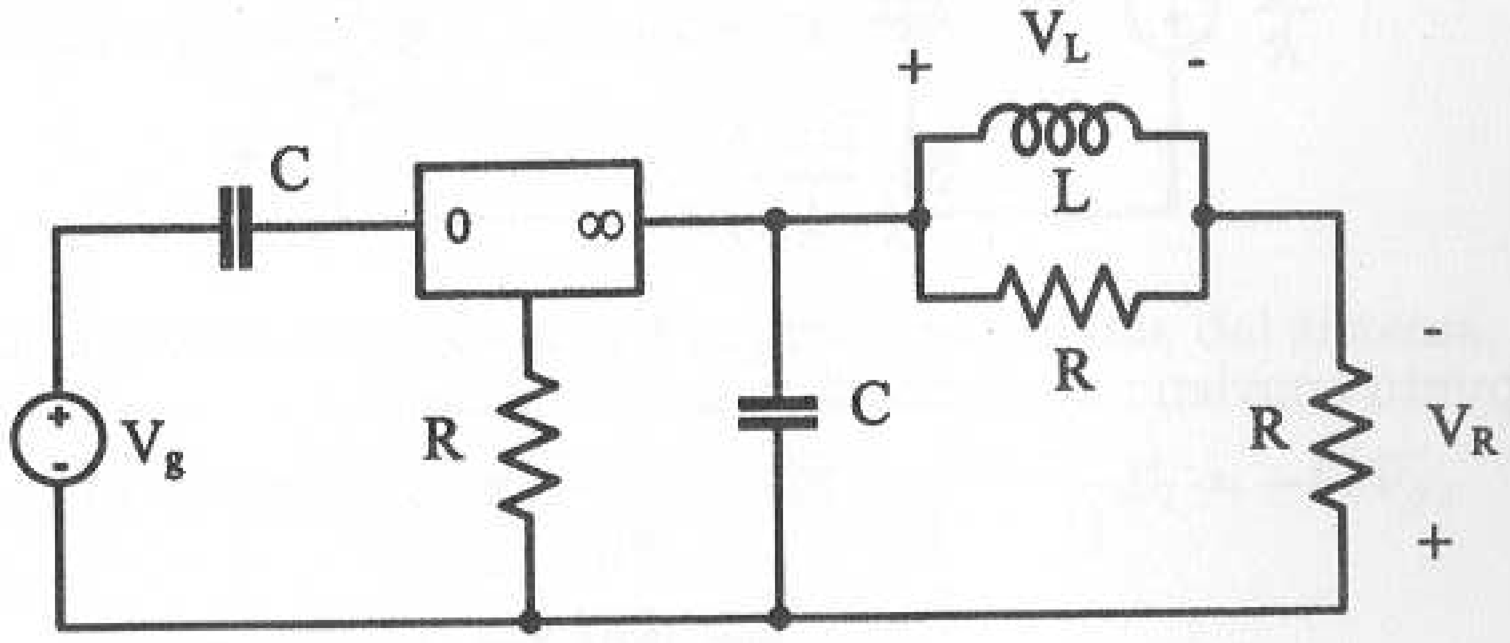
## Esercizio 4.13

Dato il circuito in figura, determinare:

a) le funzioni di rete $F(s) = \frac{V_L(s)}{V_g(s)}$ e $G(s) = \frac{V_R(s)}{V_g(s)}$, verificandone la stabilità;

b) la risposta $V_L(t)$ per il seguente segnale d'ingresso:

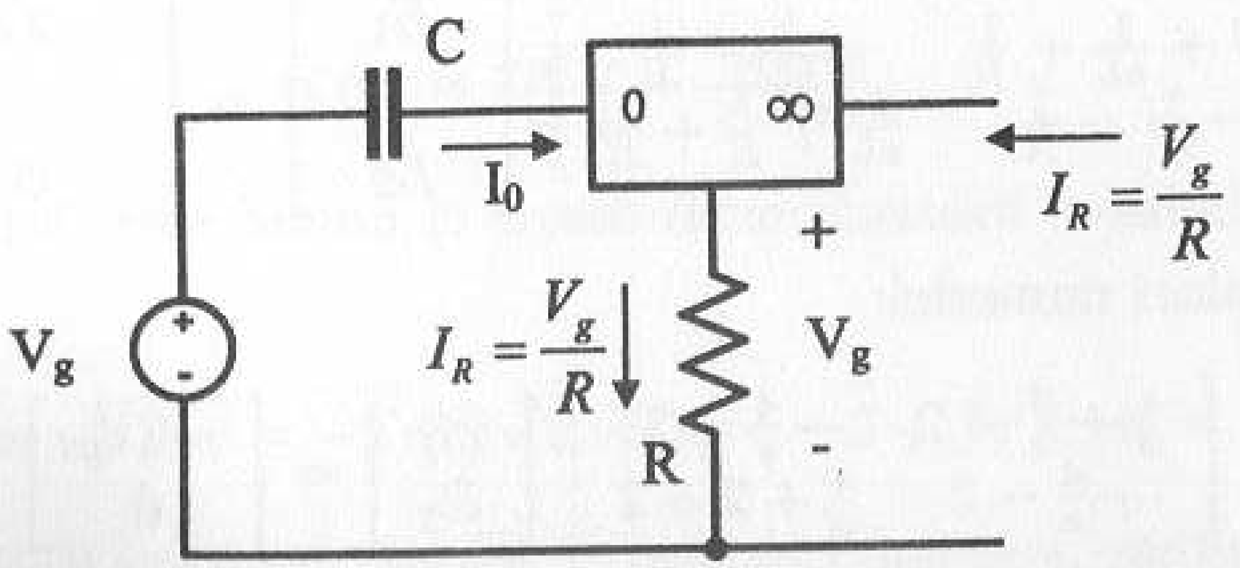
$$V_g(t) = \begin{cases} 0, \text{ per } t < 0 \\ 1, \text{ per } t \geq 0 \end{cases}$$



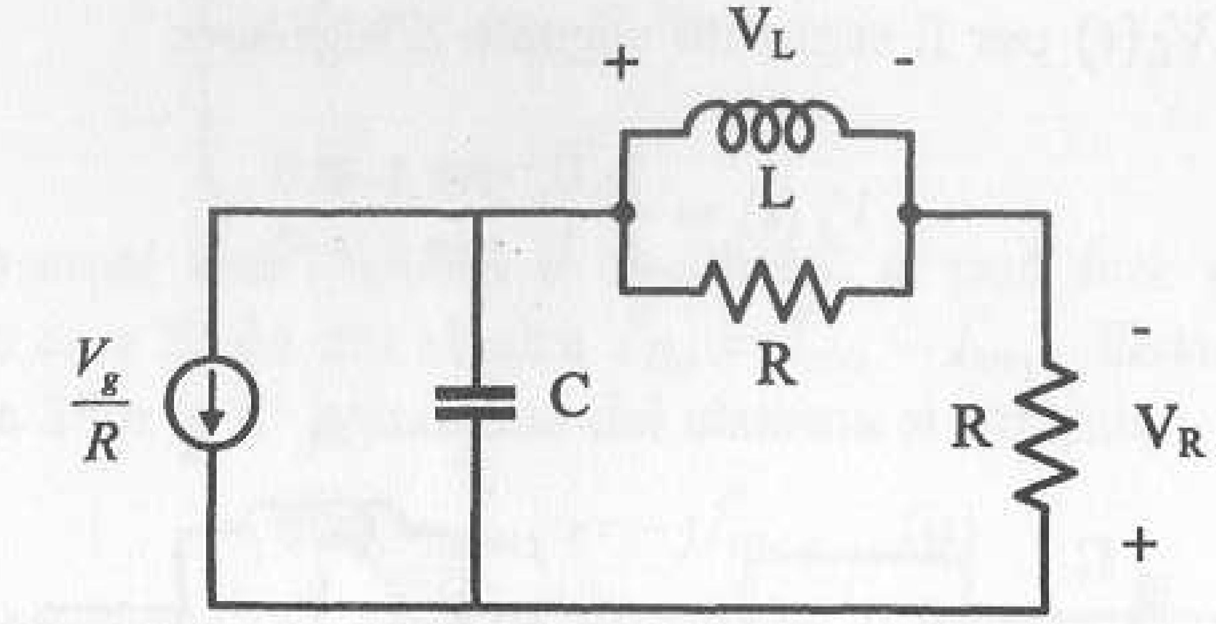

$$R = \frac{1}{2}\,[\Omega]\,;\; C = \frac{1}{3}\,[F]\,;\; L = \frac{1}{4}\,[H]\,.$$

### Svolgimento

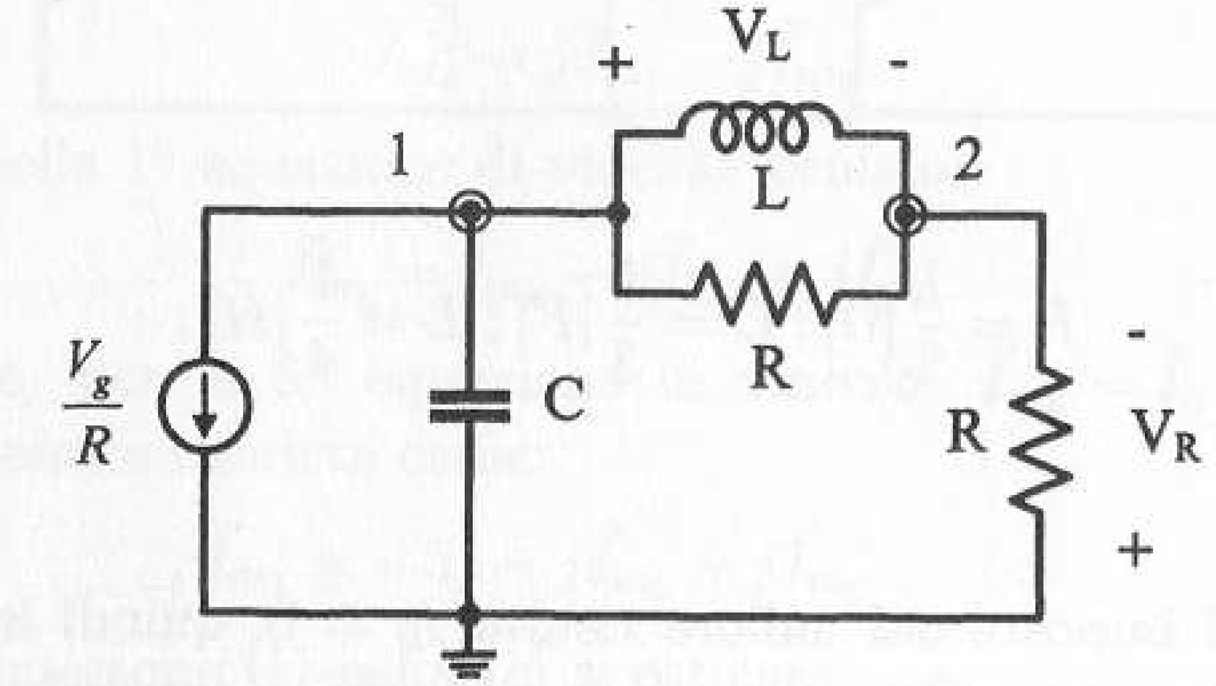
Per le condizioni imposte dal nullore risulta $I_0 = 0$, quindi la caduta di po-tenziale sul condensatore $C$ è nulla e la tensione $V_g$ si trasferisce inalterata sul resistore $R$ posto sotto il nullore stesso. Tale tensione impone sul resistore $R$ una corrente pari a $I_R = \frac{V_g}{R}$:



Poiché $I_0 = 0$, la corrente $I_R$ è la stessa che entra nel ramo noratore del nullore. Tutto il circuito a sinistra del condensatore $C$ si comporta quindi come un generatore ideale di corrente e, per il teorema di sostituzione, può essere semplicemente sostituito da un generatore indipendente di corrente con grandezza impressa pari a $\frac{V_g}{R} = 2V_g$:




A questo punto conviene applicare il metodo dei nodi:




il cui sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{sL} - \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{sL} - \frac{1}{R} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2V_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{3} + \frac{4}{s} + 2 & -\frac{4}{s} - 2 \\ -\frac{4}{s} - 2 & \frac{4}{s} + 2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2V_g \\ 0 \end{bmatrix}$$





da cui:

$$\begin{cases} \frac{s^2+12+6s}{3s} E_1 - \frac{4+2s}{s} E_2 = -2V_g \\ -\frac{4+2s}{s} E_1 + \frac{4+4s}{s} E_2 = 0 \end{cases}$$

Semplificando le precedenti equazioni:

$$\begin{cases} \left(s^2 + 6s + 12\right) E_1 - 6\,(s+2)\, E_2 = -6sV_g \\ -\,(s+2)\, E_1 + 2\,(s+1)\, E_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema si ottiene:

$$E_2 = \frac{s+2}{2\,(s+1)} E_1 \,.$$

Sostituendo l'ultima espressione nella prima equazione del sistema:

$$\left(s^2 + 6s + 12\right) E_1 - 6\,(s+2) \cdot \frac{s+2}{2\,(s+1)} E_1 = -6sV_g \,,$$

da cui:

$$E_1 = -\frac{12s\,(s+1)}{2s^3 + 8s^2 + 12s} V_g = -\frac{6\,(s+1)}{s^2 + 4s + 6} V_g \,.$$

Si può così utilizzare la precedente espressione per il calcolo di $E_2$:

$$E_2 = \frac{s+2}{2\,(s+1)} \cdot \left( -\frac{6\,(s+1)}{s^2+4s+6} \right) V_g = -\frac{3\,(s+2)}{s^2+4s+6} V_g \,.$$

Poiché $V_L = E_1 - E_2$ e $V_R = -E_2$, le due funzioni di rete sono le seguenti:

$$F\,(s) = \frac{V_L(s)}{V_g(s)} = -\frac{3s}{s^2+4s+6}\,;$$

$$G\,(s) = \frac{V_R(s)}{V_g(s)} = \frac{3(s+2)}{s^2+4s+6}\,.$$

Le due funzioni di rete hanno lo stesso denominatore e quindi gli stessi poli, posizionati in:

$$s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6} = -2 \pm j\sqrt{2} \Rightarrow s_1 = -2 + j\sqrt{2};\ s_2 = -2 - j\sqrt{2}\,.$$

Pertanto il circuito è sempre stabile, in quanto i due poli, complessi e coniugati ($s_2 = s_1^*$), hanno parte reale negativa.

Essendo l'ingresso un gradino unitario, la sua trasformata di Laplace è data da $V_g(s) = \frac{1}{s}$. Quindi la tensione $V_L$ ai capi dell'induttore nel dominio di Laplace è data da:

$$V_L(s) = F(s) \cdot V_g(s) = -\frac{3}{s^2+4s+6} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{A^*}{s-s_1^*},$$

che si antitrasforma come segue:

$$V_L(t) = 2e^{\mathrm{Re}\{s_1\}t}\left[\mathrm{Re}\{A\}\cos(\mathrm{Im}\{s_1\}t) - \mathrm{Im}\{A\}\sin(\mathrm{Im}\{s_1\}t)\right] \cdot u_{-1}(t).$$

Il residuo è calcolato nel seguente modo:

$$A = -\frac{3}{(s-s_1)\cdot(s-s_1^*)}\cdot(s-s_1)\Big|_{s=s_1}$$

$$A = -\frac{3}{s-s_1^*}\Big|_{s=s_1} = \frac{-3}{-2+j\sqrt{2}+2+j\sqrt{2}} = j\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Antitrasformando, si ottiene infine:

$$V_L(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-2t}\sin\left(\sqrt{2}t\right)u_{-1}(t)\ [V]$$



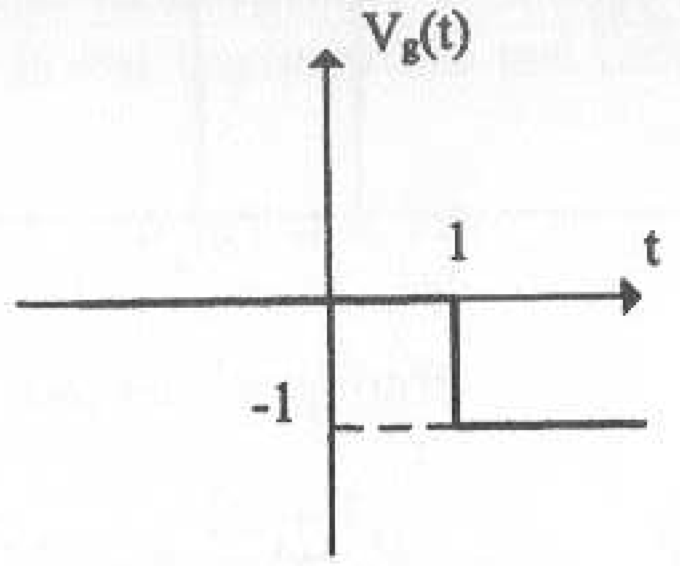


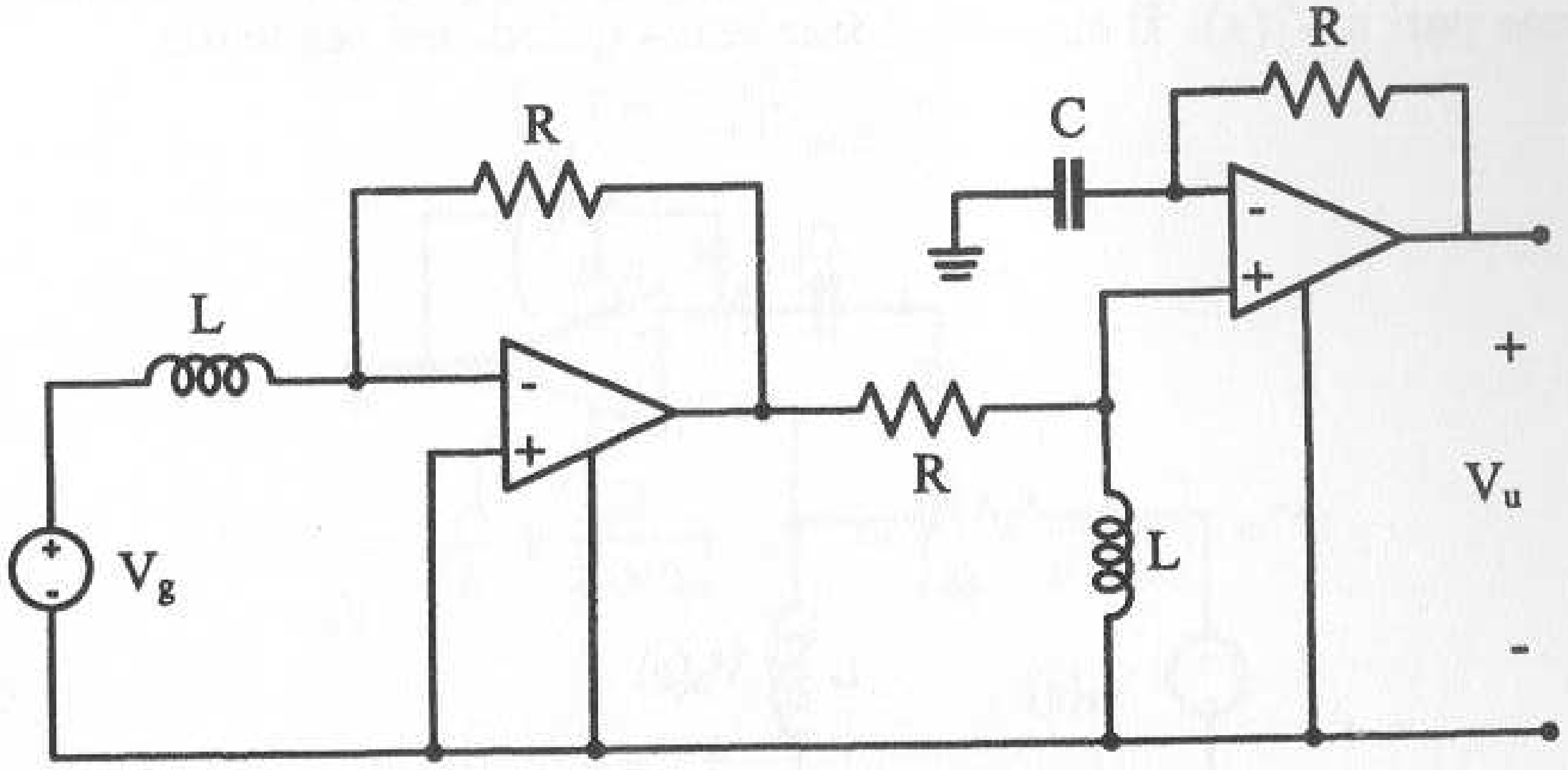
# Esercizio 4.14

Dato il circuito in figura, determinare:

a) la funzione di rete $F(s) = \frac{V_u(s)}{V_g(s)}$;

b) la risposta $V_u(t)$ per il seguente segnale d'ingresso:



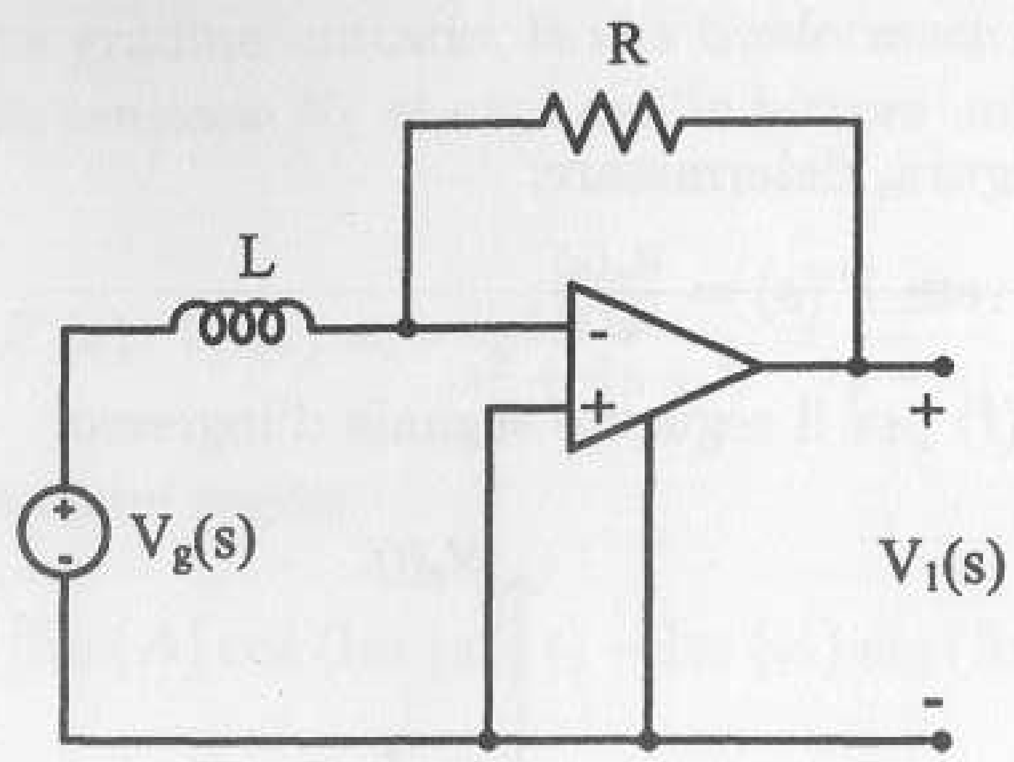




$$R = 1\,[\Omega];\ C = 2\,[F];\ L = 1\,[H].$$

## Svolgimento

### Soluzione quesito (a)

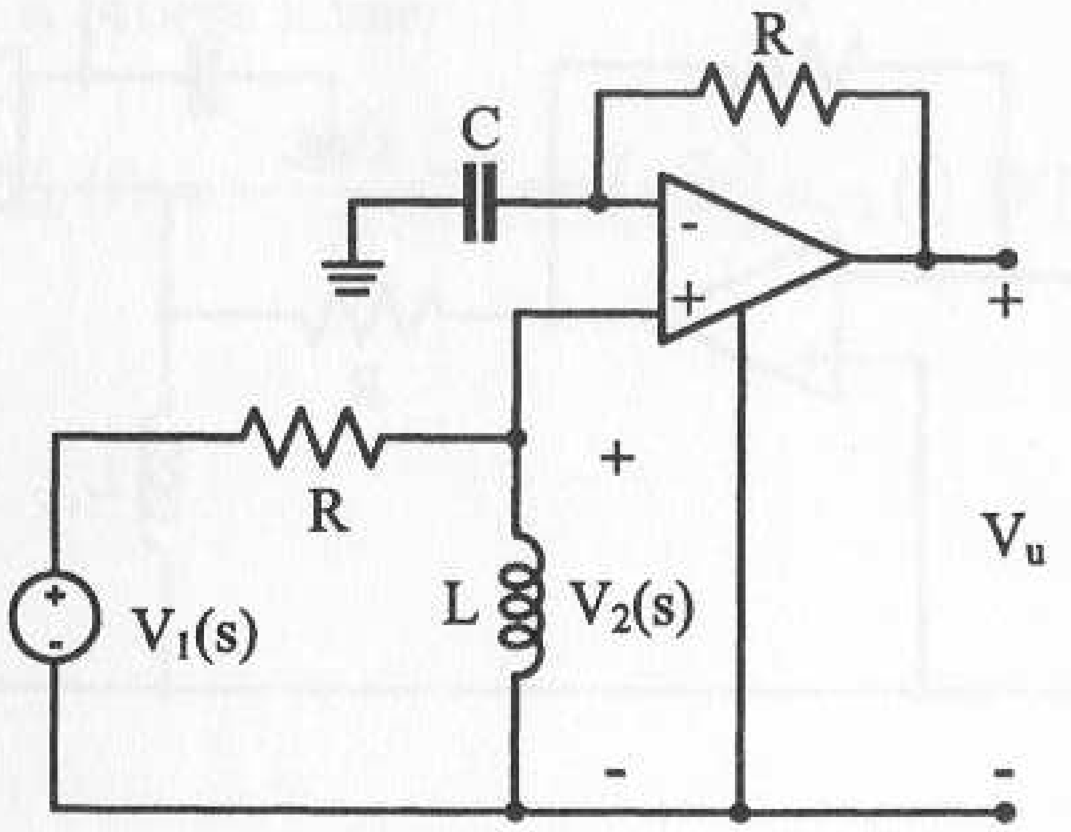
Il circuito è la cascata di tre stadi: un amplificatore operazionale in configurazione invertente, un partitore di tensione e un operazionale in configurazione non invertente. Nel dominio di Laplace, la tensione all'uscita del primo stadio è calcolata con la regola della configurazione invertente:




dove risulta:

$$V_1(s) = -\frac{R}{sL} \cdot V_g(s) = -\frac{1}{s} \cdot V_g(s) .$$

Il circuito è quindi equivalente a un generatore indipendente che imprime una tensione pari a $V_1(s)$. Il circuito si trasforma quindi nel seguente:




Poiché nell'ingresso non invertente dell'operazionale non scorre corrente, si può calcolare la tensione $V_2(s)$ ai capi dell'induttore con la regola del partitore:

$$V_2(s) = V_1(s) \cdot \frac{sL}{R+sL} = -\frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}}{s+1} \cdot V_g(s) = -\frac{1}{s+1} \cdot V_g(s) .$$

Quindi la tensione di uscita è calcolata con la formula dell'amplificatore operazionale in configurazione non invertente:

$$V_u(s) = \left(1 + \frac{R}{\frac{1}{sC}}\right) \cdot V_2(s) = -(1+2s) \cdot \frac{1}{s+1} \cdot V_g(s) .$$





Di conseguenza la funzione di rete richiesta è:

$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_g(s)} = -\frac{2s+1}{s+1} .$$

Soluzione quesito (b)

L'ingresso $V_g(t)$ è un gradino di ampiezza -1 e ritardato di un tempo $t_0 = 1$, ossia $V_g(t) = -u_{-1}(t-1)$, la cui trasformata nel dominio di Laplace è

$$V_g(s) = -\frac{e^{-s}}{s} .$$

La risposta nel dominio di Laplace è quindi:

$$V_u(s) = F(s) \cdot V_g(s) = \frac{2s+1}{s+1} \cdot \frac{e^{-s}}{s} = \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right] \cdot e^{-s} .$$

Calcolando i residui A e B si ottiene:

$$\begin{cases} A = \left.\frac{2s+1}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \\ B = \left.\frac{2s+1}{s}\right|_{s=-1} = 1 \end{cases}$$

da cui:

$$V_u(s) = \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right] \cdot e^{-s} = \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] \cdot e^{-s} .$$

Poiché

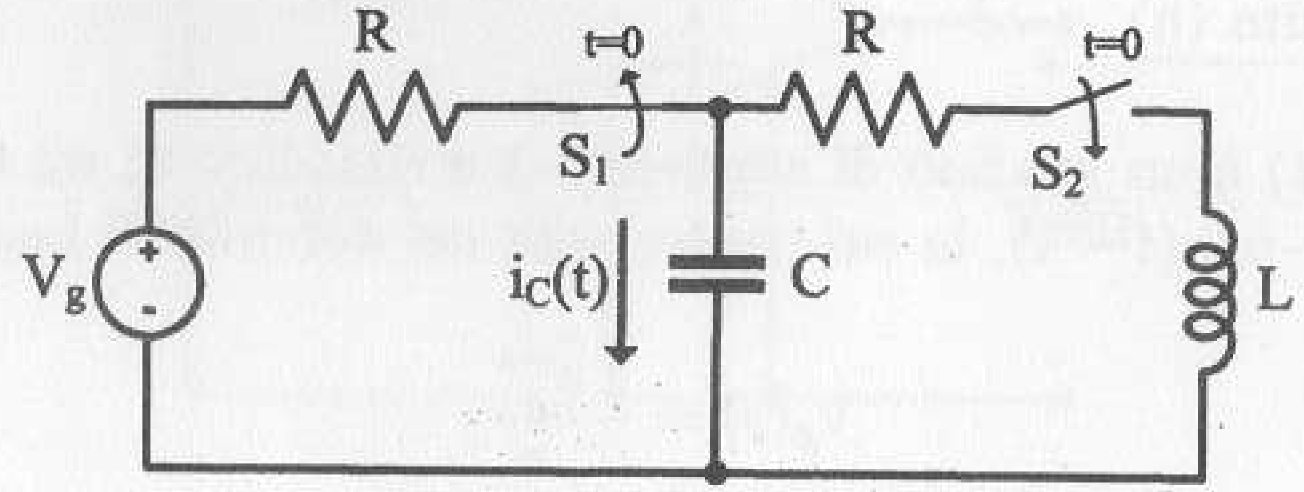
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = (1 + e^{-t}) \cdot u_{-1}(t) ,$$

applicando la proprietà della traslazione nel tempo della trasformata di Laplace, si ottiene la risposta cercata:

$$V_u(t) = \left[1 + e^{-t+1}\right] \cdot u_{-1}(t-1) \; [V]$$

## Esercizio 4.15

Dato il circuito in figura, determinare l'andamento di $i_C(t)$ nel verso indicato per tutto l'asse dei tempi.




$$R = 1\,[\Omega]\ ;\ L = 1\,[H]\ ;\ C = \frac{1}{2}\,[F]\ ;\ V_g(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}\ [V].$$

**Svolgimento**

Analisi per $t < 0$.

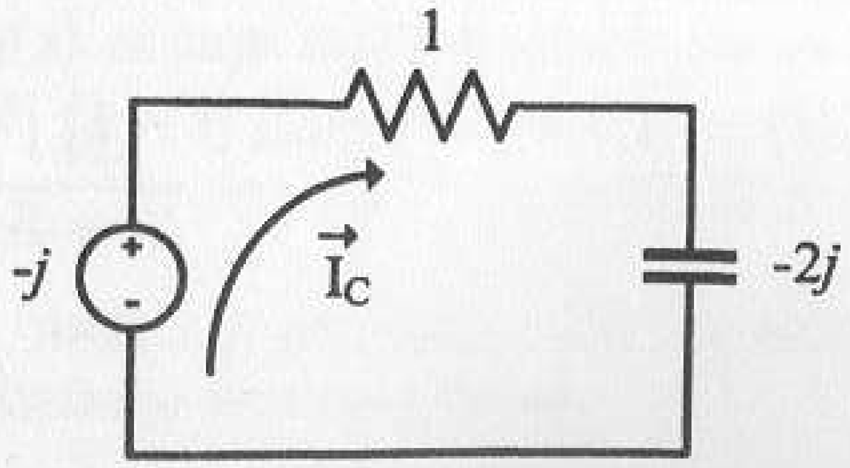
Per valori negativi di $t$, l'interruttore $S_1$ è chiuso mentre $S_2$ è aperto; pertanto solamente la maglia di sinistra è percorsa da corrente. Il circuito è in regime permanente sinusoidale; si può quindi applicare il metodo dei fasori. Dato che $\omega = 1$, il fasore corrispondente alla tensione impressa è:

$$V_g(t) = \sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \vec{V_g} = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\,.$$

Inoltre l'impedenza del condensatore è:

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{2}{j} = -2j\,.$$

Nel dominio dei fasori, il circuito dato (per $t < 0$) si riduce al seguente:








Dall'equilibrio delle tensioni sulla maglia si ottiene:

$$\vec{I_C} = -\frac{j}{1-2j} = \frac{1}{5}(2-j) = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-j\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-j\cdot 0{,}464}\,,$$

a cui corrisponde la seguente cosinusoide nel dominio del tempo:

$$i_C(t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{I_C} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(t - 0{,}464)\ [A]\ ,\ \text{per } t < 0\,.$$

Rimane da calcolare la condizione iniziale sul condensatore $C$, ossia la tensione $V_C(0^-)$:

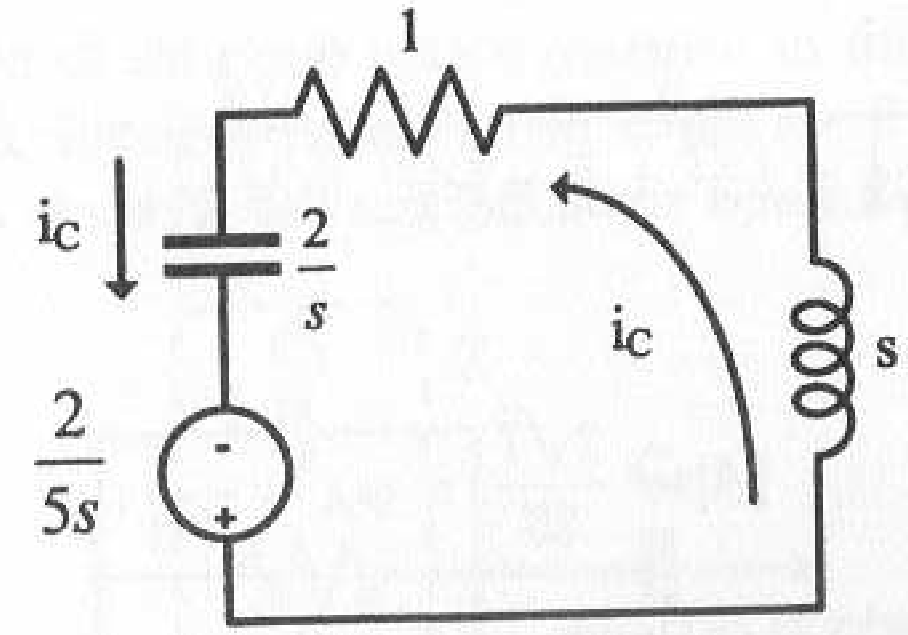
$$\vec{V_C} = -2j \cdot \vec{I_C} = -2j \cdot \frac{1}{5} \cdot (2-j) = -\frac{2}{5} \cdot (1+2j)$$

e quindi:

$$V_C(0^-) = \mathrm{Re}\left\{\vec{V_C}\right\} = -\frac{2}{5}\,.$$

Analisi per $t \geq 0$.

All'istante $t = 0$ l'interruttore $S_1$ si apre, mentre l'interruttore $S_2$ si chiude; si instaura un regime transitorio nella maglia di destra. Si può pertanto considerare il seguente circuito fittizio nel dominio di Laplace:




ove al condensatore è stato sostituito il modello serie che comprende il generatore di tensione di grandezza impressa pari a $\frac{V_C(0^-)}{s}$, dovuta ad una carica iniziale non nulla; si noti che la polarità del generatore è stata invertita dal momento che $V_C(0^-) = -\frac{2}{5}$.
Scrivendo direttamente l'equazione di maglia si ottiene la corrente sul condensatore $C$:

$$I_C = \frac{\frac{2}{5s}}{\frac{2}{s}+1+s} = \frac{2}{5s}\cdot\frac{s}{s^2+s+2} = \frac{\frac{2}{5}}{s^2+s+2} = \frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2},$$

dove

$$s_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \\ s_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}\end{cases}$$

ovvero è $s_2 = s_1^*$, da cui segue che $B = A^*$. Pertanto:

$$I_C(s) = \frac{A}{s-s_1}+\frac{A^*}{s-s_2},$$

la cui antitrasformata è data da:

$$i_C(t) = 2|A|\,e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t+\varphi_A)\,u_{-1}(t),$$

posto $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, essendo $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ e $\omega_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Per il calcolo del residuo si ha:

$$A = F(s)(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{\frac{2}{5}}{(s-s_1)(s-s_2)}(s-s_1)\Bigg|_{s=s_1} = \frac{\frac{2}{5}}{(s-s_2)}\Bigg|_{s=s_1}$$

$$A = \frac{\frac{2}{5}}{s_1-s_2} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{2j\frac{\sqrt{7}}{2}} = -j\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7} = -j\frac{2\sqrt{7}}{35}.$$

Dunque:

$$|A| = \frac{2\sqrt{7}}{35} \text{ e } \varphi_A = -\frac{\pi}{2}.$$

Infine, antitrasformando si ottiene:

$$i_C(t) = \frac{4\sqrt{7}}{35}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)u_{-1}(t) = \frac{4\sqrt{7}}{35}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)u_{-1}(t)\ [A]$$





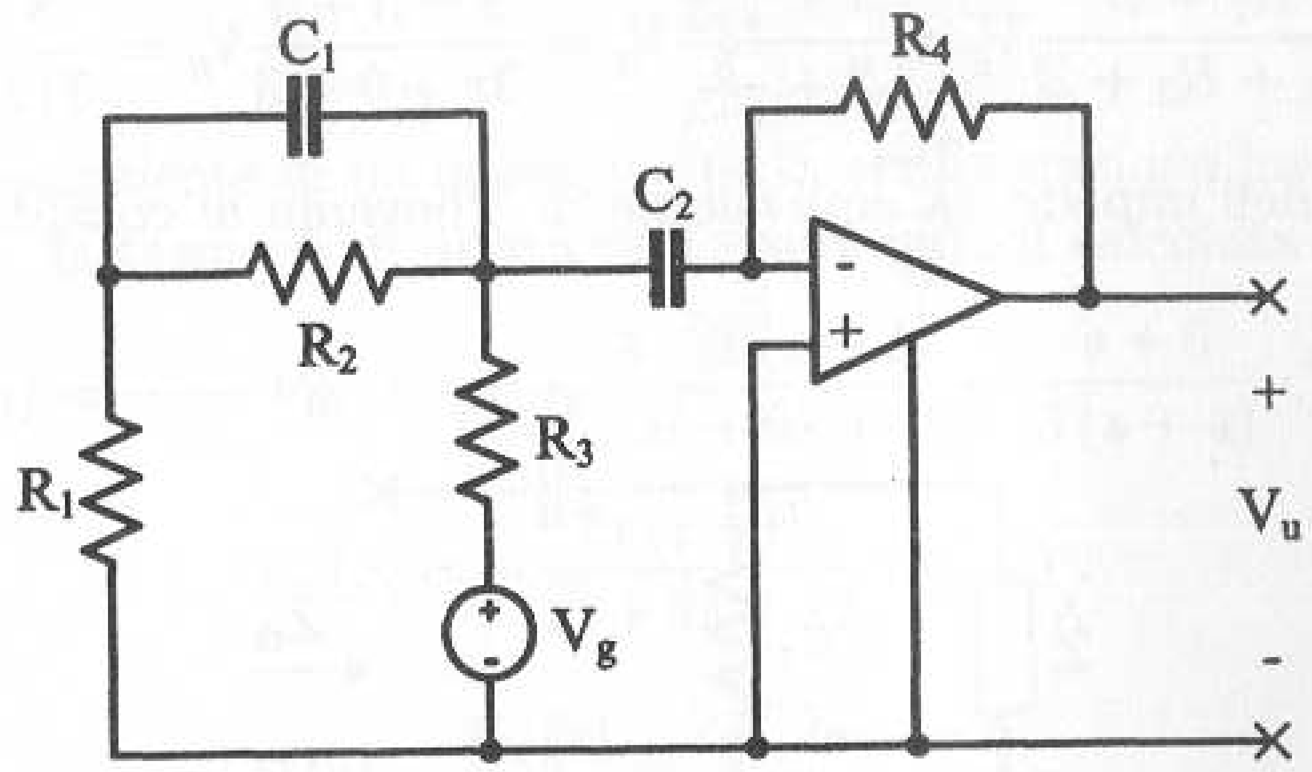
# Esercizio 4.16

Per il circuito in figura, determinare:

a) la funzione di rete $F(s) = \frac{V_u(s)}{V_g(s)}$;

b) la risposta per il seguente segnale d'ingresso:

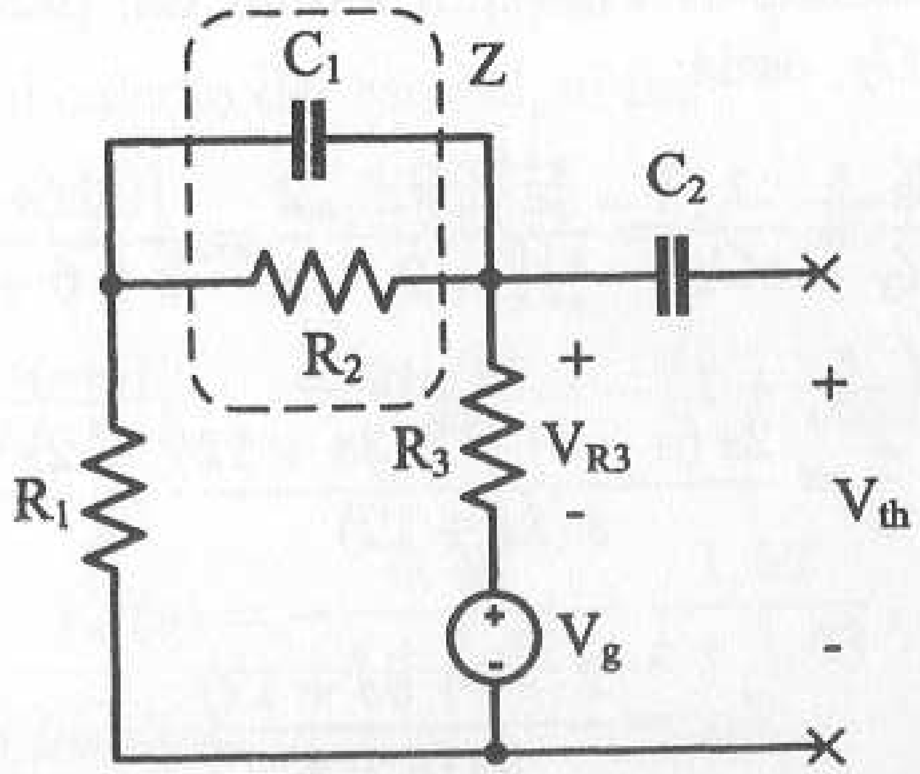
$$V_g(t) = \begin{cases} 0, \text{ per } t < 0 \\ 1, \text{ per } t \geq 0 \end{cases}$$




$$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]\,;R_3 = 2\,[\Omega]\,;R_4 = 4\,[\Omega]\,;C_1 = \frac{1}{3}\,[F]\,;C_2 = \frac{1}{2}\,[F].$$

## Svolgimento

Il calcolo della funzione di rete può essere eseguito in due passi, direttamente nel dominio di Laplace. Il primo consiste nell'applicare il teorema di Thevenin alla parte di circuito a sinistra dell'amplificatore operazionale:



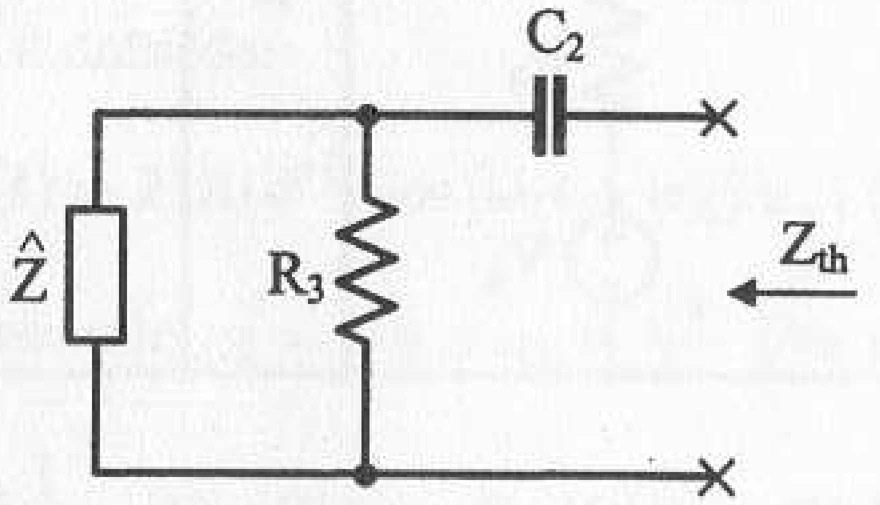
Detto Z il valore dell'impedenza del bipolo costituito dal parallelo del condensatore $C_1$ e del resistore $R_2$, si ha:

$$Z = \frac{\frac{1}{sC_1} \cdot R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2} = \frac{\frac{3}{s} \cdot 1}{\frac{3}{s} + 1} = \frac{\frac{3}{s}}{\frac{3+s}{s}} = \frac{3}{s+3} \, .$$

Dal momento che sul condensatore non scorre corrente, la tensione a vuoto $V_{th}$ coincide con la tensione ai capi della serie dell'impedenza Z con il resistore $R_1$. Tale tensione può essere calcolata tramite la formula del partitore di tensione:

$$V_{th} = \frac{R_1 + Z}{R_1 + R_3 + Z} V_g = \frac{1 + \frac{3}{s+3}}{3 + \frac{3}{s+3}} V_g = \frac{s+3+3}{3s+9+3} V_g = \frac{s+6}{3\,(s+4)} V_g \, .$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si consideri il seguente circuito:




ove si è disattivato il generatore indipendente di tensione e si è indicato con $\hat{Z}$ la serie di Z ed $R_1$:

$$\hat{Z} = 1 + \frac{3}{s+3} = \frac{s+6}{s+3} \, .$$

Evidentemente l'impedenza di Thevenin è data dal parallelo di $\hat{Z}$ con $R_3$ in serie al condensatore $C_2$, ossia:

$$Z_{th} = \frac{\hat{Z} \cdot R_3}{\hat{Z} + R_3} + \frac{1}{sC_2} = \frac{\frac{s+6}{s+3} \cdot 2}{\frac{s+6}{s+3} + 2} + \frac{2}{s} = \frac{2\,(s+6)}{s+6+2s+6} + \frac{2}{s}$$

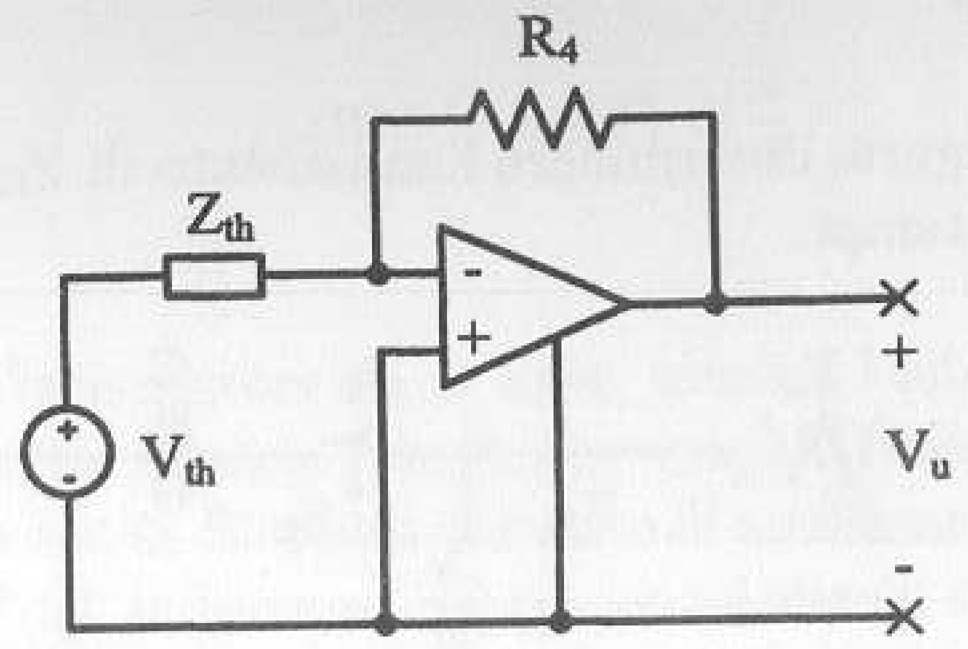
$$Z_{th} = \frac{2\,(s+6)}{3s+12} + \frac{2}{s} = \frac{2s\,(s+6) + 2\,(3s+12)}{s\,(3s+12)} = \frac{2s^2+12s+6s+24}{3s\,(s+4)}$$

$$Z_{th} = \frac{2\,(s^2+9s+12)}{3s\,(s+4)} \, .$$

Il circuito originale può essere quindi semplificato come segue:








Si tratta evidentemente di un operazionale in configurazione invertente. Come secondo passo, la tensione di uscita può essere quindi calcolata direttamente:

$$V_u\,(s) = -\frac{4}{Z_{th}} V_{th}\,(s) = -\frac{4 \cdot 3s\,(s+4)}{2\,(s^2+9s+12)} \cdot \frac{s+6}{3\,(s+4)} \cdot V_g\,(s)$$

$$V_u\,(s) = -\frac{2s\,(s+6)}{s^2+9s+12} \cdot V_g\,(s) \, .$$

Pertanto:

$$F\,(s) = \frac{V_u\,(s)}{V_g\,(s)} = -\frac{2s\,(s+6)}{s^2+9s+12} \, .$$

L'ingresso $V_g(t)$ è un gradino unitario; quindi la sua trasformata di Laplace è: $V_g(s) = \frac{1}{s}$. Dunque:

$$V_u\,(s) = F\,(s) \cdot V_g\,(s) = -\frac{2\,(s+6)}{s^2+9s+12} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} \, ,$$

dove:

$$s_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-48}}{2} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{-9-\sqrt{33}}{2} \cong -7{,}37 \\ s_2 = \frac{-9+\sqrt{33}}{2} \cong -1{,}63 \end{cases}$$

Per quanto concerne il calcolo dei residui, si ha:

$$\begin{cases} A = -\left.\frac{2(s+6)}{s-s_2}\right|_{s=s_1} = \frac{3-\sqrt{33}}{\sqrt{33}} = -\left(1 - \frac{3}{\sqrt{33}}\right) \cong -0{,}48 \\[2ex] B = -\left.\frac{2(s+6)}{s-s_2}\right|_{s=s_2} = \frac{3+\sqrt{33}}{\sqrt{33}} = -\left(1 + \frac{3}{\sqrt{33}}\right) \cong -1{,}52 \end{cases}$$

Quindi:

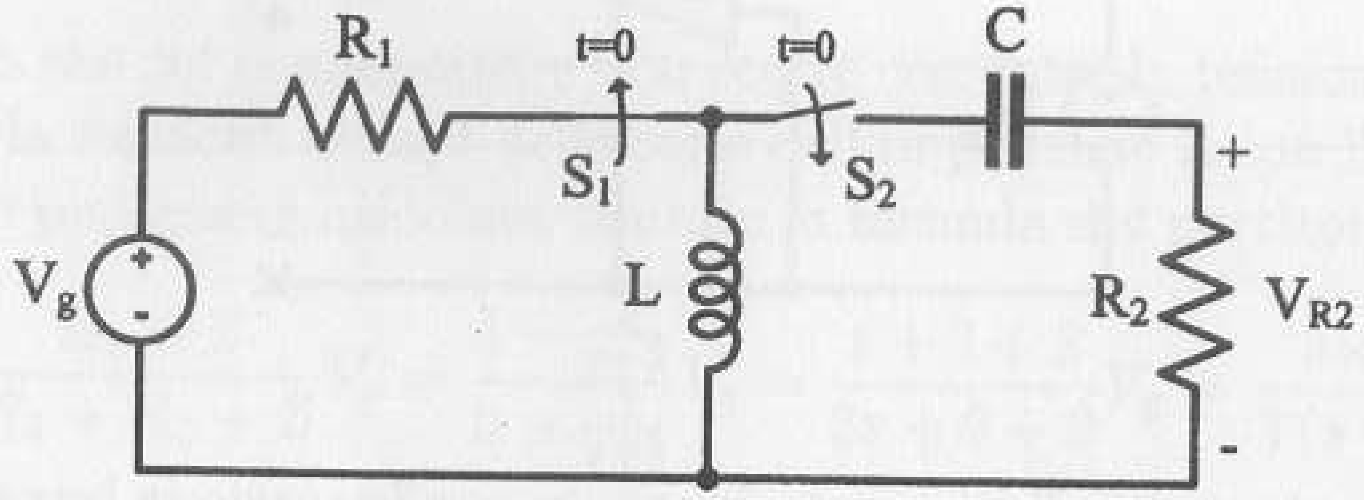
$$V_u\,(s) = -\frac{0{,}48}{s+7{,}37} - \frac{1{,}52}{s+1{,}63} \, ,$$

che antitrasformando fornisce:

$$V_u\,(t) = -\left[0{,}48 e^{-7{,}37t} + 1{,}52 e^{-1{,}63t}\right] \cdot u_{-1}\,(t) \;\; [V]$$

## Esercizio 4.17

Dato il circuito in figura, determinare l'andamento di $V_{R_2}(t)$ nel verso indicato per tutto l'asse dei tempi.




$$R_1 = 3\ [\Omega]\ ;\ R_2 = \frac{10}{3}\ [\Omega]\ ;\ L = 1\ [H]\ ;\ C = 1\ [F]\ ;\ V_g(t) = 2\cos(3t)\ [V].$$

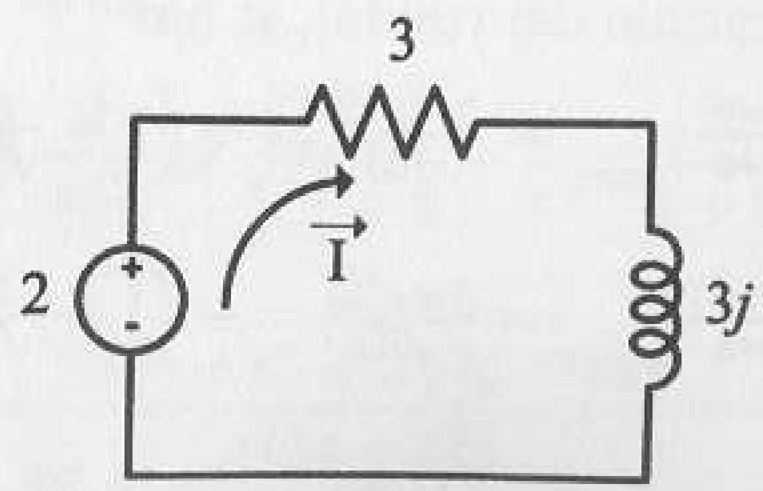
### Svolgimento

Analisi per $t < 0$.

In questo caso il circuito è in regime permanente sinusoidale; è possibile pertanto applicare il metodo dei fasori. Poiché per $t < 0$ l'interruttore $S_2$ è aperto, è nulla la corrente sul resistore $R_2$; di conseguenza:

$$V_{R_2}(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0.$$

Per procedere all'analisi per $t > 0$ occorre comunque calcolare la condizione iniziale sull'induttore $I_L(0^-)$. Dall'eccitazione $V_g(t)$ si ricava $\omega = 3$ e $\vec{V_g} = 2$, mentre l'impedenza dell'induttore è pari a $j\omega L = 3j$. Quindi, nel dominio dei fasori (per $t < 0$) il circuito dato si riduce al seguente:




Dall'equilibrio per le tensioni sulla maglia si ottiene:

$$2 = 3\vec{I} + 3j\vec{I} = (1+j)\,\vec{I} \Rightarrow \vec{I} = \frac{2}{3(1+j)} = \frac{1}{3}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

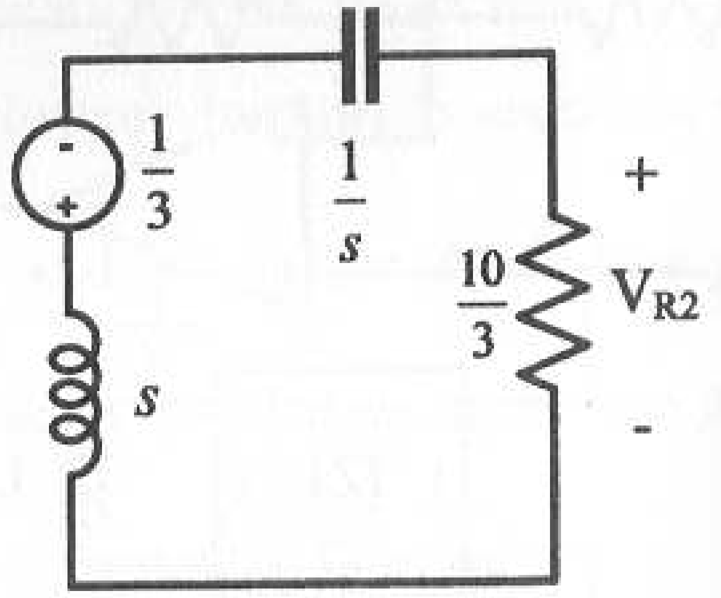


pertanto

$$I_L(0^-) = \mathrm{Re}\{\vec{I}\} = \frac{1}{3}.$$

Analisi per $t \geq 0$.

All'istante $t = 0$ l'interruttore $S_1$ si apre, mentre l'interruttore $S_2$ si chiude. Il condensatore risulta scarico (condizione iniziale nulla) dal momento che la corrente è nulla per $t < 0$. Si tratta pertanto di analizzare la risposta transitoria dovuta alla scarica dell'induttore. Si può considerare il seguente circuito fittizio nel dominio di Laplace:




La tensione su $R_2$ si calcola tramite la nota formula del partitore di tensione:

$$V_{R_2}(s) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}+\frac{1}{s}+s} = -\frac{10}{3}\cdot\frac{s}{3s^2+10s+3}$$

$$V_{R_2} = -\frac{10}{9}\cdot\frac{s}{(s+3)\left(s+\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+\frac{1}{3}}.$$

Per il calcolo dei residui A e B, si ha:

$$\begin{cases} A = \left.\dfrac{-\frac{10}{9}s}{s+\frac{1}{3}}\right|_{s=-3} = -\frac{5}{4} \\ B = \left.\dfrac{-\frac{10}{9}s}{s+3}\right|_{s=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{36} \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$V_{R_2}(s) = -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{3}}.$$

Infine, antitrasformando, si ottiene l'andamento per $t \geq 0$ della tensione su $R_2$

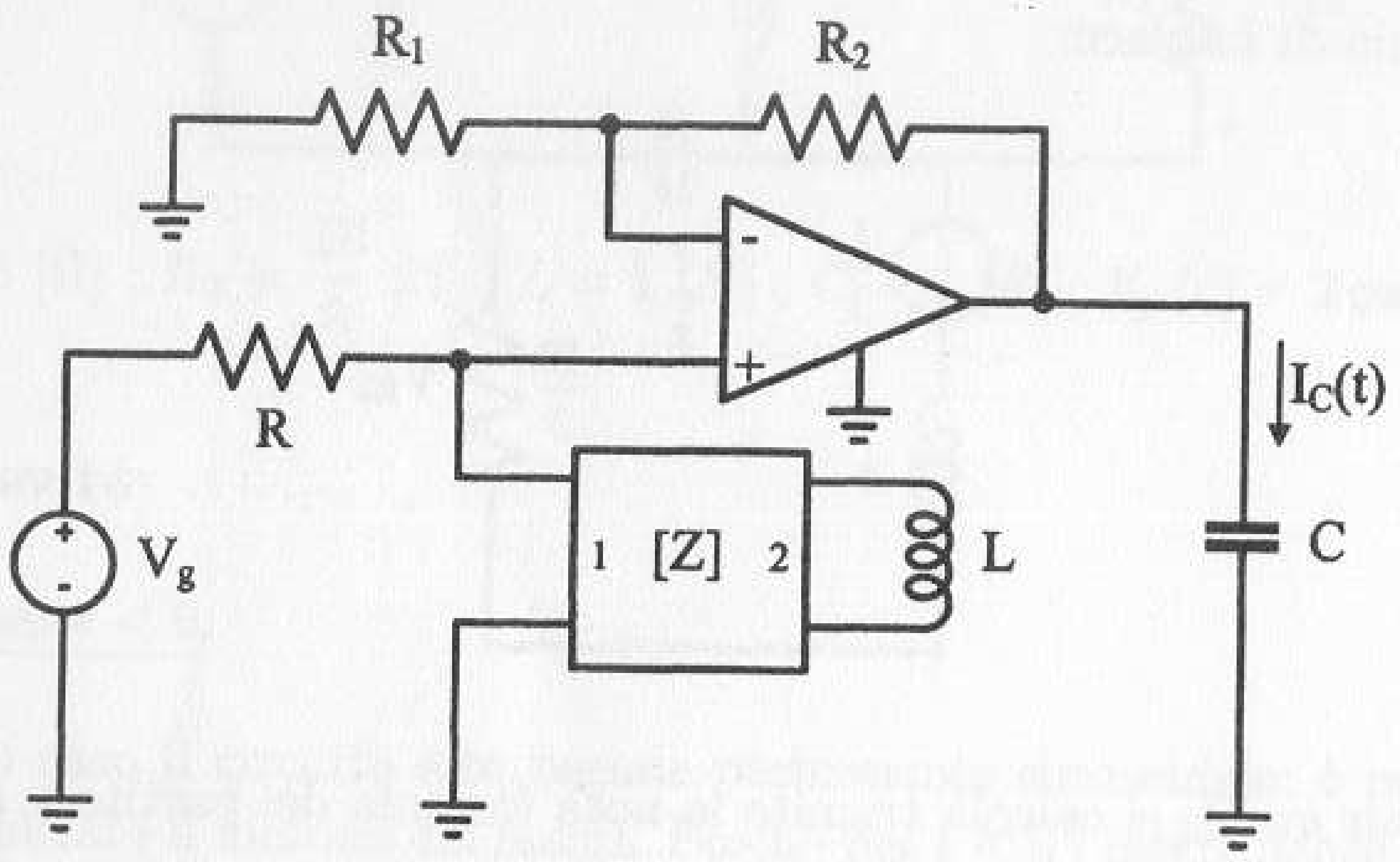
$$V_{R_2}(t) = \left[-\frac{5}{4}e^{-3t}+\frac{5}{36}e^{-\frac{t}{3}}\right]\cdot u_{-1}(t)\ [V]$$

## Esercizio 4.18

Per il circuito in figura, considerate nulle tutte le condizioni iniziali, determinare:

a) la funzione di rete $F(s) = \frac{I_C(s)}{V_g(s)}$;

b) la risposta $i_C(t)$ per $v_g(t) = u{-}1(t)$.




$$R = R_1 = 1\,[\Omega]\,;\; R_2 = 2\,[\Omega]\,;\; C = 1\,[F]\,;\; L = 1\,[H]\,;\; Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}[\Omega].$$

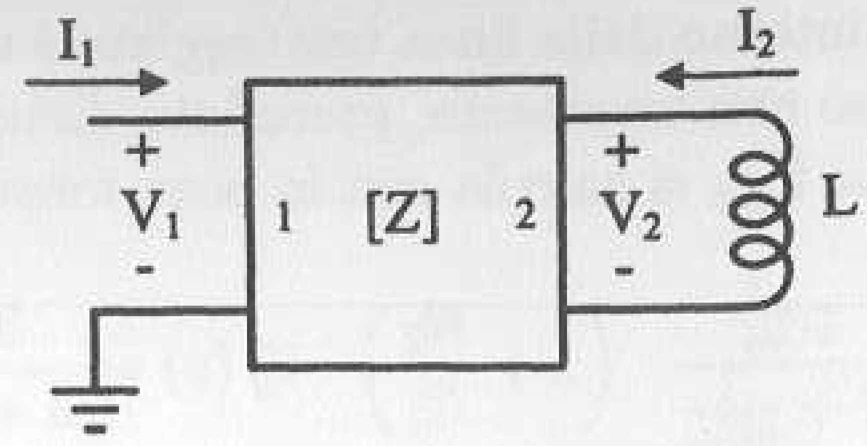
### Svolgimento

Soluzione quesito (a)

Il circuito è costituito da un amplificatore operazionale nella configurazione non invertente, preceduto da un partitore di tensione formato dalla resistenza $R$ e dalla rete 2-porte $[Z]$, chiuso su un carico costituito dal condensatore $C$. Anzitutto si calcoli l'impedenza equivalente del bipolo costituito della rete 2-porte e dall'induttore, ossia il rapporto tra la tensione e la corrente presenti sulla porta 1:








Per i vincoli imposti dalla rete 2-porte si avrà:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = -I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = I_1 \end{cases}$$

Inoltre, sulla porta 2, l'induttore impone la seguente relazione:

$$V_2 = -sLI_2 = -sI_2 = I_1 \Rightarrow I_2 = -\frac{1}{s}I_1$$

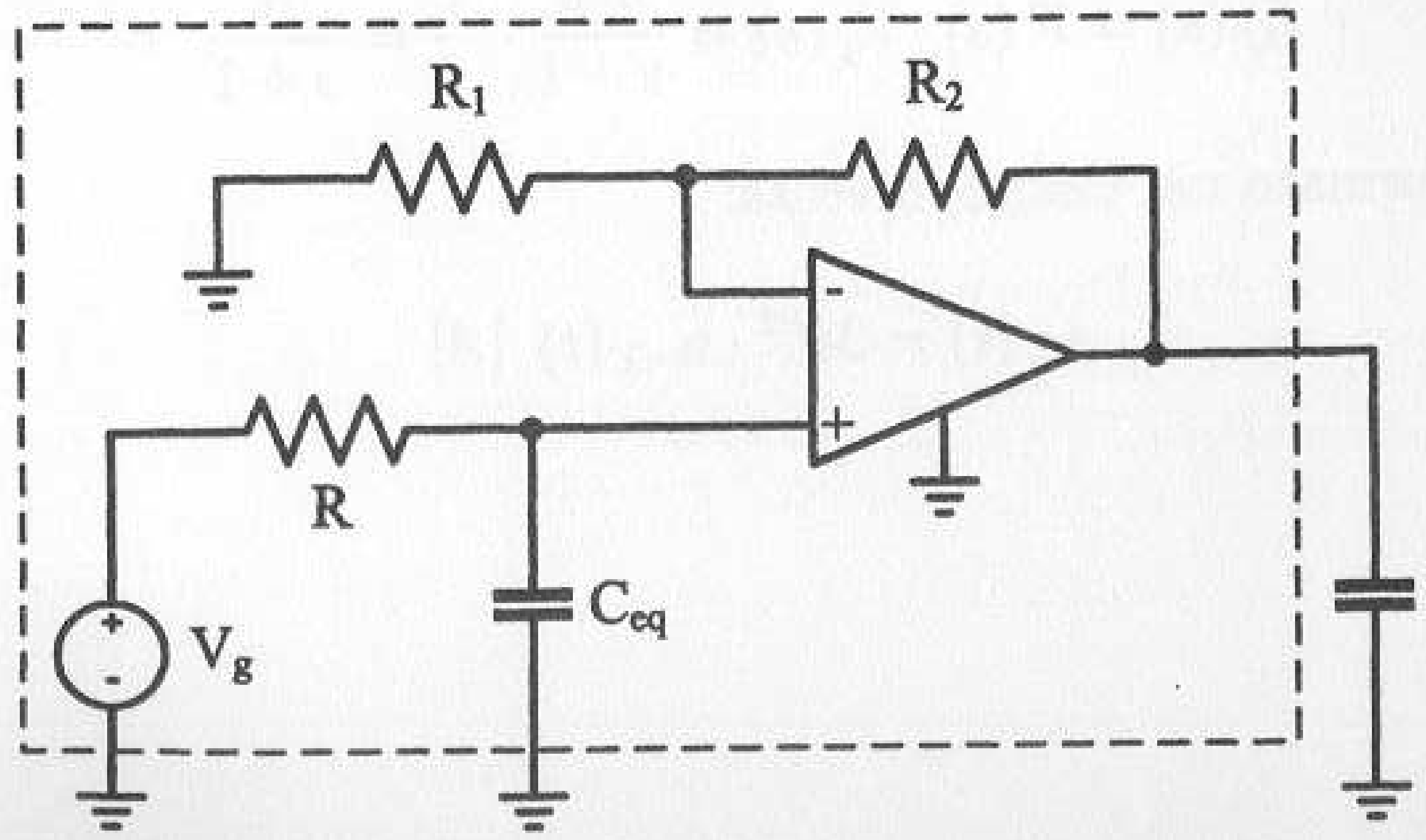
e quindi, dalla prima relazione costitutiva della rete 2-porte, si ricava:

$$V_1 = -I_2 = \frac{1}{s}I_1\,.$$

Dunque l'impedenza equivalente vista alla porta 1 è:

$$Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{1}{s}I_1}{I_1} = \frac{1}{s}\,,$$

ciò significa che il bipolo costituito dalla rete 2-porte e dall'induttore è equivalente ad un condensatore di capacità $C_{eq} = 1\,[F]$. Il circuito equivalente è quindi il seguente:



La parte di circuito all'interno della linea tratteggiata è un amplificatore operazionale in configurazione non invertente, preceduto da un partitore di tensione, la cui tensione di uscita $V_{out}$ si calcola con la nota formula:

$$V_{out}(s) = \frac{\frac{1}{sC_{eq}}}{R + \frac{1}{sC_{eq}}} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V_g(s) = \frac{3}{s+1} \cdot V_g(s) .$$

Quindi si procede al calcolo di $I_C(s)$:

$$I_C(s) = \frac{V_{out}(s)}{\frac{1}{sC}} = sV_{out}(s) = \frac{3s}{s+1} \cdot V_g(s) ,$$

da cui si ricava la funzione di rete richiesta:

$$F(s) = \frac{I_C(s)}{V_g(s)} = \frac{3s}{s+1} .$$

L'unico polo di $F(s)$ è in $s_1 = -1$, quindi il circuito risulta stabile asintoticamente.

Soluzione quesito (b)

L'ingresso $v_g(t)$ è un gradino, la cui trasformata di Laplace è

$$V_g(s) = \frac{1}{s} .$$

L'uscita corrispondente a questo ingresso vale quindi:

$$I_C(s) = F(s) \cdot V_g(s) = \frac{3\cancel{s}}{s+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{3}{s+1}$$

che, antitrasformato nel tempo, diventa:

$$i_C(t) = 3e^{-t} \cdot u_{-1}(t) \; [A]$$