

Libreremo

Questo libro è il frutto di un percorso di lotta per l'accesso alle conoscenze e alla formazione promosso dal **Csoa Terra Terra**, **Csoa Officina 99**, **Get Up Kids!**, **Neapolis Hacklab**. Questo libro è solo uno dei tanti messi a disposizione da **LIBREREMO**, un portale finalizzato alla condivisione e alla libera circolazione di materiali di studio universitario (e non solo!).

Pensiamo che in un'università dai costi e dai ritmi sempre più escludenti, sempre più subordinata agli interessi delle aziende, **LIBREREMO** possa essere uno strumento nelle mani degli studenti per riappropriarsi, attraverso la collaborazione reciproca, del proprio diritto allo studio e per stimolare, attraverso la diffusione di materiale controinformativo, una critica della proprietà intellettuale al fine di smascherarne i reali interessi.

I diritti di proprietà intellettuale (che siano brevetti o copyright) sono da sempre – e soprattutto oggi – grosse fonti di profitto per multinazionali e grandi gruppi economici, che pur di tutelare i loro guadagni sono disposti a privatizzare le idee, a impedire l'accesso alla ricerca e a qualsiasi contenuto, tagliando fuori dalla cultura e dallo sviluppo la stragrande maggioranza delle persone. Inoltre impedire l'accesso ai saperi, renderlo possibile solo ad una ristretta minoranza, reprimere i contenuti culturali dal carattere emancipatorio e proporre solo contenuti inoffensivi o di intrattenimento sono da sempre i mezzi del capitale per garantirsi un controllo massiccio sulle classi sociali subalterne.

L'ignoranza, la mancanza di un pensiero critico rende succubi e sottomette alle logiche di profitto e di oppressione: per questo riappropriarsi della cultura – che sia un disco, un libro, un film o altro – **è un atto cosciente caratterizzato da un preciso significato e peso politico**. Condividere e cercare canali alternativi per la circolazione dei saperi significa combattere tale situazione, apportando benefici per tutti.

Abbiamo scelto di mettere in condivisione proprio i libri di testo perché i primi ad essere colpiti dall'attuale repressione di qualsiasi tipo di copia privata messa in atto da SIAE, governi e multinazionali, sono la gran parte degli studenti che, considerati gli alti costi che hanno attualmente i libri, non possono affrontare spese eccessive, costretti già a fare i conti con affitti elevati, mancanza di strutture, carenza di servizi e borse di studio etc...

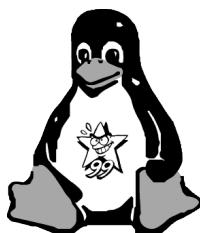
Questo va evidentemente a ledere il nostro diritto allo studio: le università dovrebbero fornire libri di testo gratuiti o quanto meno strutture e biblioteche attrezzate, invece di creare di fatto uno sbarramento per chi non ha la possibilità di spendere migliaia di euro fra tasse e libri originali... Proprio per reagire a tale situazione, senza stare ad aspettare nulla dall'alto, invitiamo tutt* a far circolare il più possibile i libri, approfittando delle enormi possibilità che ci offrono al momento attuale internet e le nuove tecnologie, appropriandocene, liberandole e liberandoci dai limiti imposti dal controllo repressivo di tali mezzi da parte del capitale.

**Facciamo fronte comune davanti ad un problema che coinvolge tutt* noi!
Riappropriiamoci di ciò che è un nostro inviolabile diritto!**



Get Up Kids

www.getupkids.org



Neapolis Hacklab

www.neapolishacklab.org

**csoa
Terra★Terra**

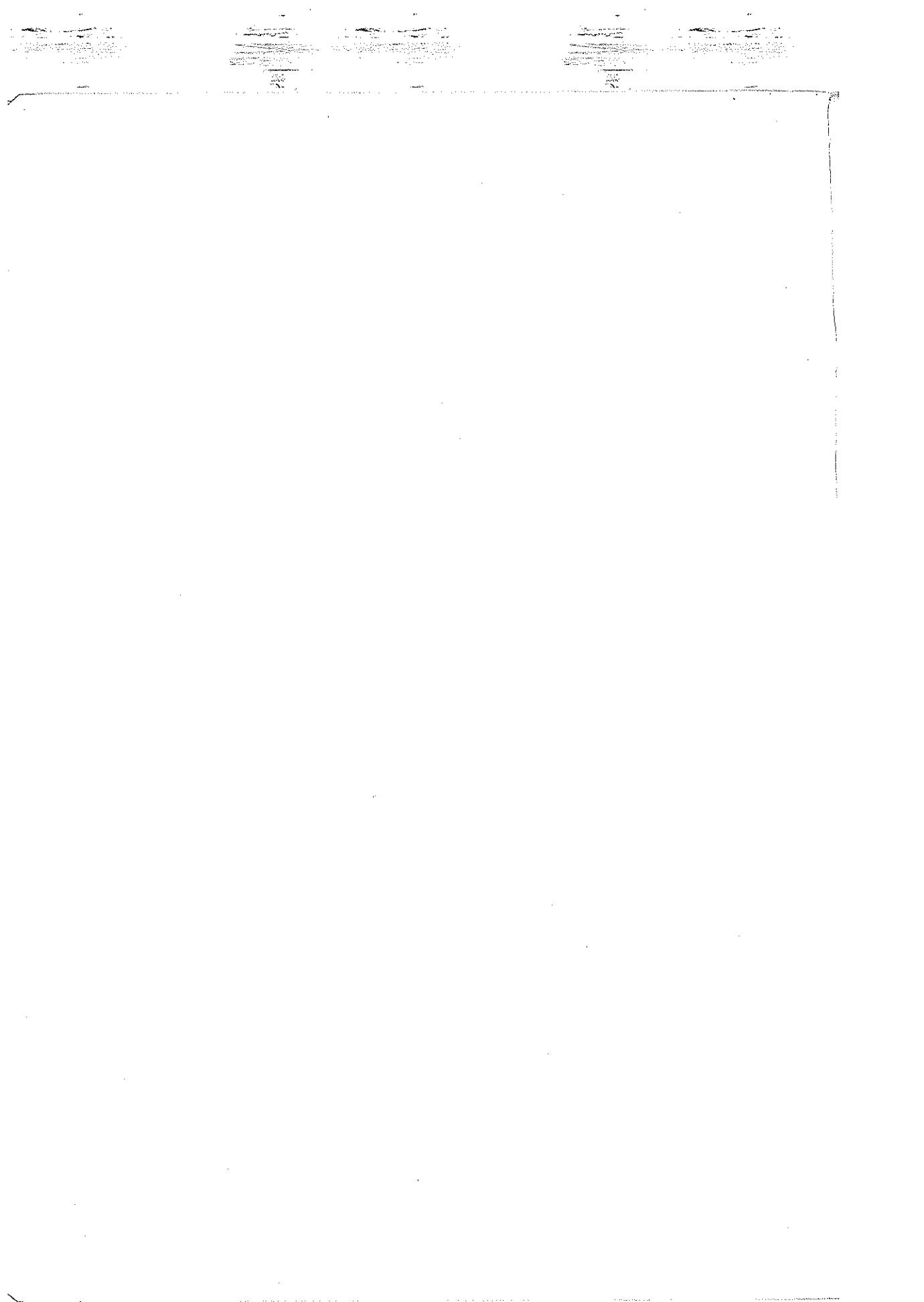


csoa Officina 99

www.officina99.org

www.libreremo.org





GIUSEPPE MARTINELLI

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'UNIVERSITÀ
DI ROMA "LA SAPIENZA".

MARIO SALERNO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'UNIVERSITÀ
DI ROMA "TOR VERGATA".

FONDAMENTI DI ELETTROTECNICA

CIRCUITI LINEARI E PERMANENTI

VOLUME PRIMO

SECONDA EDIZIONE

EDIZIONI SCIENTIFICHE SIDEREÀ

© 1995 dell'Editrice SIDREA-ROMA. Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta o trasmessa in qualsiasi forma e in qualunque modo; elettronico o meccanico, inclusi la fotocopia, la registrazione o qualunque altro sistema di immagazzinamento e richiamo dell'informazione, senza permesso scritto della Casa Editrice.

Le copie non firmate da uno degli Autori si ritengono contraffatte.

161
MRE

Edizioni Scientifiche **SIDREA** - 00184 ROMA (I)
Via Terme di Traiano, 5/a - Tel. e Fax: (06) 4872374

INTRODUZIONE

Alla seconda edizione del testo

Le modifiche introdotte nella versione presente sono state suggerite sia da esigenze didattiche degli autori, maturate nell'ambito del settore dell'informazione, sia dai cambiamenti tecnologici più significativi intervenuti successivamente alla stesura iniziale. Le prime hanno suggerito una ripartizione diversa degli argomenti già trattati, l'eliminazione di altri ed un'illustrazione più completa tramite esempi. Le seconde hanno spinto a dare maggiore spazio all'aspetto numerico, già presente nella versione iniziale. Tale aspetto interessa particolarmente il settore dell'informazione, in cui ha un'uguale importanza il comportamento del circuito dal punto di vista dell'energia e dell'informazione. Il comportamento del circuito da quest'ultimo punto di vista è quello di un elaboratore di segnali e la sua caratterizzazione richiede nozioni circuituali specifiche.

Lo sviluppo tecnologico ha reso fondamentale la discretizzazione dei segnali nel tempo e nell'ampiezza. Per seguire tale sviluppo occorre estendere la nozione di circuito introducendo una nuova categoria: quella dei circuiti digitali. Tale estensione è effettuata nel testo solo a livello introduttivo e finalizzata alla valutazione complessiva degli errori determinati dai metodi alle differenze finite nell'ambito dell'analisi automatica dei circuiti. Un maggiore approfondimento di tale argomento esula dalle finalità del testo, rivolto solo alle nozioni di base della teoria dei circuiti.

* * *



PREMESSA : L'approccio circuitale.

La complessità dei fenomeni naturali richiede, per una loro valutazione quantitativa ed una loro utilizzazione pratica, l'impiego di procedimenti che siano nello stesso tempo sufficientemente generali, semplici ed accurati.

Per quanto riguarda la semplicità, essa viene raggiunta usualmente mediante una suddivisione del problema d'interesse in subproblemI parziali. Tale suddivisione ha il vantaggio sia di rendere più facili i singoli passi del procedimento, sia di non perdere di vista l'obiettivo principale, ciò che potrebbe accadere senza la suddetta organizzazione. A titolo di esempio basti pensare a ciò a cui si andrebbe incontro se volessimo descrivere il funzionamento di un televisore direttamente mediante le equazioni di Maxwell.

Le auspicate caratteristiche di generalità e semplicità sono possedute in larga misura dall'approccio circuitale alla valutazione quantitativa del comportamento di una struttura fisica ed al suo proporzionamento finalizzato ad uno scopo pratico assegnato. Tale approccio prevede la riduzione della struttura fisica ad una connessione di elementi idealizzati di pochi tipi. Quindi sono presenti in questo approccio due nozioni fondamentali: la *connessione*, definita tramite un grafo e le *relazioni costitutive* degli elementi componenti. È interessante osservare che molte proprietà della struttura fisica in questo modo derivano semplicemente da vincoli di natura topologica legati al grafo. Del resto ciò non deve meravigliare in quanto nel grafo confluiscono in forma intuitiva parte delle leggi che caratterizzano la struttura fisica d'interesse. Ad esempio, nel caso delle strutture elettriche, l'idealizzazione della struttura nel senso circuitale comporta la sostituzione delle leggi di Kirchhoff a quelle di Maxwell e le leggi di Kirchhoff non sono altro che vincoli topologici. La rimanente caratterizzazione della struttura fisica confluisce nelle relazioni costitutive dei pochi elementi idealizzati che emergono dal modellamento della struttura stessa.

L'operazione di modellamento si basa sulla possibilità di caratterizzare i fenomeni d'interesse mediante coppie di grandezze di due tipi

diversi. Il primo tipo corrisponde a grandezze che in via di principio od effettivamente richiedono una misura tra due punti (*grandezze agli estremi*). L'altro tipo corrisponde a grandezze che richiedono una misura su un solo punto (*grandezze attraverso*). Nel caso di elementi definiti da una sola coppia di grandezze, le relazioni costitutive che si trovano in natura sono quattro, implicando sia il legame diretto tra i due tipi di grandezze sia il legame con i relativi integrali nel tempo. In particolare per i vari tipi di strutture fisiche sia le grandezze in questione, sia tali integrali, corrispondono a ben note grandezze (tabb. 1 e 2).

Struttura	Grandezze attraverso E	Grandezze agli estremi F	Integrale grandezze attraverso Q	Integrale grandezze agli estremi P
Elettrica	Corrente	Tensione	Carica	Flusso
Fluido	Flusso di corrente	Pressione	Volume	Momento di pressione
Reazione chimica	Velocità di reazione	Affinità	Avanzamento reazione	-
Meccanica (rotazione)	Coppia	Velocità angolare	Quantità di moto	Spostam. angolare

Tab. 1 - *Grandezze usate nelle varie strutture.*

Relazioni costitutive	Caso elettrico
$\Phi_1(E, F) = 0$	Resistore
$\Phi_2(E, P) = 0$	Induttore
$\Phi_3(E, Q) = 0$	Condensatore
$\Phi_4(E, P) = 0$	Memristore

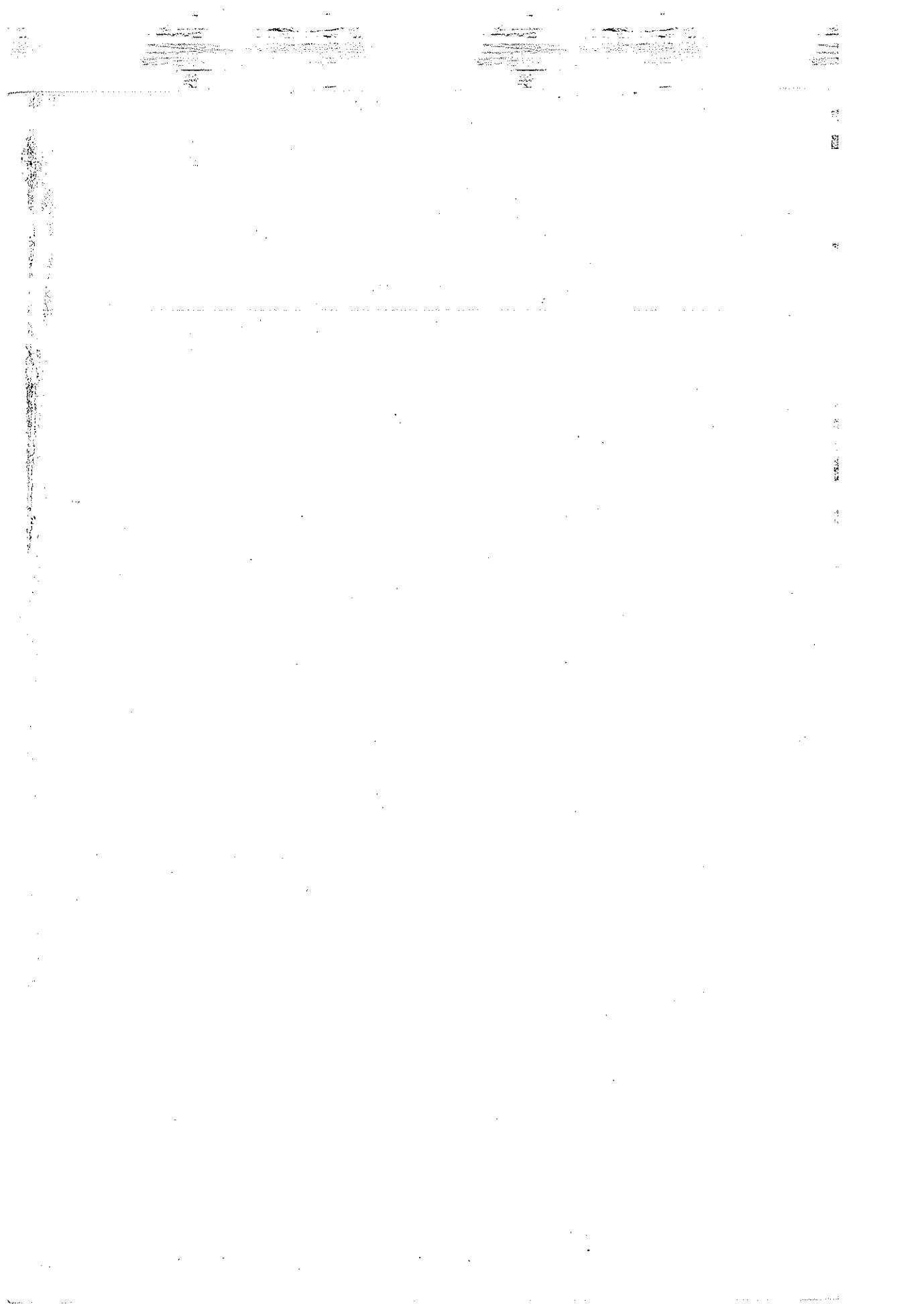
Tab. 2 - *Relazioni costitutive nel caso elettrico.*

È interessante sottolineare che una conseguenza importante dell'approccio circuitale è la possibilità di trattare in modo unificato campi diversi dalla fisica e di travasare quindi nozioni e proprietà tra di essi. La generalità dell'approccio permette inoltre di modellare anche strutture non fisiche, quali ad esempio l'elaborazione dei segnali. Tale possibilità è particolarmente utile per l'ingegnere, in quanto lo rende capace di

riversare la propria esperienza, maturata nel contesto specifico della sua specializzazione, in altri contesti, anche non fisici. Un esempio importante di tale possibilità si ha nel caso dell'elaborazione dei segnali, quando si utilizzano i circuiti digitali per il suo modellamento. Estendendo, infatti, ai circuiti digitali le nozioni, le proprietà e le tecniche dei circuiti elettrici, è possibile risolvere problemi di notevole difficoltà, utilizzando il grande bagaglio culturale disponibile per questi ultimi.

È infine importante tenere presente che la caratterizzazione circuitale di una struttura fisica è valida solo se sono soddisfatte condizioni particolari. Tali condizioni sono quelle che rendono possibile la sostituzione dei legami differenziali esistenti tra le grandezze fisiche con legami algebrici. Quando tale situazione non è accettabile, occorre ricorrere all'approccio alternativo dei campi. Questa necessità può riguardare tutte e tre le dimensioni spaziali, oppure in casi più semplici, una o due dimensioni soltanto.

* * *



CAPITOLO I

INTRODUZIONE AI CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE DI TIPO ELETTRICO

I.1 - Grandezze fisiche considerate.

Nei limiti di validità che verranno discussi in dettaglio nel par. I.7, una struttura elettrica può essere caratterizzata tramite le grandezze corrente e tensione. Tali grandezze sono variabili reali dipendenti dal tempo, appartenenti rispettivamente: la prima alla classe delle grandezze «attraverso», cioè a quelle grandezze che richiedono per la loro misura l'inserzione di uno strumento opportuno in un «punto» della struttura; la seconda alla classe delle grandezze «agli estremi», cioè a quelle grandezze che richiedono l'inserzione di uno strumento opportuno tra due «punti» della struttura.

L'unità di misura della corrente è l'«ampere»⁽¹⁾ (simbolo A) o molto spesso i suoi multipli e sottomultipli, come il kilo-ampere (simbolo kA: valore 1000 A) nei sistemi di potenza o il milli e micro-ampere (simboli mA e μ A: valori 10^{-3} e 10^{-6} A) in elettronica. Nella rappresentazione grafica, la corrente viene indicata con una freccia che precisa, sia il «punto» della struttura in cui viene considerata, sia il verso da considerare come positivo.

L'unità di misura della tensione è il «volt»⁽²⁾ (simbolo V) o molto spesso i suoi multipli e sottomultipli, come il kilo-volt (simbolo kV: valore 1000 V) nei sistemi di potenza ed il milli e micro-volt (sim-

(1) - L'ampere è definito come il valore di quella corrente che, percorrendo in modo concorde e contemporaneo due conduttori filiformi, rettilinei, paralleli, infinitamente lunghi, posti nel vuoto a distanza di un metro, provoca una forza d'attrazione tra di essi di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro di conduttore.

(2) - Il volt è definito come il valore di tensione che si misura agli estremi di una struttura elettrica accessibile solo in corrispondenza a questi due estremi, quando in essi fluisce una corrente di 1A e la potenza assorbita è di 1 W.

boli mV e μ V: valori 10^{-3} e 10^{-6} V) in elettronica. Nella rappresentazione grafica la tensione viene rappresentata con una freccia oppure con una coppia di segni $-+$, che individuano i due «punti» tra cui essa viene definita e precisano anche il verso con cui considerarla. Precisamente il punto con il $+$ oppure verso cui punta la freccia va considerato a tensione positiva rispetto all'altro.

1.2 - Il circuito elettrico.

Il modello di struttura elettrica che viene definito come *circuito a costanti concentrate* è costituito dalla connessione di elementi ideali privi di dimensioni geometriche e caratterizzati da opportuni legami tra tensione e corrente ad essi applicate. Ciascuna connessione è considerata a tensione costante e priva di dimensioni geometriche; di conseguenza non ha importanza la sua lunghezza e forma. Per comodità di rappresentazione gli elementi sono indicati con un rettangolo da cui emergono due o più terminali filiformi, ciascuno dei quali ha per estremo un punto (morsetto). Per quanto detto, non ha importanza la dimensione del rettangolo e la posizione e lunghezza dei terminali.

L'elemento fondamentale del circuito è quello a due terminali o bipolo. Per caratterizzarlo dal punto di vista elettrico sono sufficienti la tensione tra i suoi morsetti e la corrente che lo attraversa. Tale corrente è univocamente definita in quanto, come vedremo successivamente, la corrente entrante in corrispondenza ad un morsetto del bipolo è uguale e contraria a quella entrante dall'altro morsetto.

I versi positivi con cui considerare la corrente e la tensione applicati al bipolo possono essere scelti arbitrariamente. È usuale però, per comodità, di sceglierli coordinati in modo tale che il loro prodotto, che rappresenta una potenza⁽¹⁾, coincida con la potenza elettrica assorbita dal bipolo. Tali versi coordinati sono mostrati in fig I.2.1 e se non è detto il contrario verranno presupposti nel seguito della trattazione.

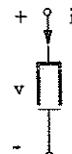


Fig.I.2.1 - Versi coordinati della corrente e della tensione applicate ad un bipolo.

⁽¹⁾ - Tenere presente che la definizione di tensione ricordata nel paragrafo precedente è tale che moltiplicandola per una corrente si ottiene una potenza.

È importante osservare che la scelta coordinata dei versi positivi della tensione e della corrente non ha in sé alcuna implicazione fisica. In altre parole se scegliessimo la convenzione contraria, avremmo come risultato di ottenere con il prodotto $v \cdot i$ una potenza ceduta dal bipolo. Di conseguenza, se, ad esempio, il bipolo *effettivamente* assorbe 1 watt, nel caso coordinato avremmo $v \cdot i = 1 \text{ W}$ e nell'altro caso $v \cdot i = -1 \text{ W}$.

Osserviamo che, anche nell'ambito della caratterizzazione esterna che stiamo facendo degli elementi bipolarì, è possibile differenziarli dal punto di vista energetico. Precisamente, come vedremo successivamente in dettaglio, si possono avere tre comportamenti diversi, eventualmente presenti in modo combinato in uno stesso bipolo:

1) *trasferimento irreversibile di energia elettrica.* In questo caso il bipolo assorbe l'energia elettrica trasformandola in un altro tipo, per esempio calore. Si tratta di un processo irreversibile, nel senso che tale energia esce dal circuito;

2) *trasferimento reversibile vincolato di energia elettrica.* Il bipolo assorbe o cede energia, accumulandola in base agli scambi energetici con il resto del circuito, partendo da un valore iniziale noto di energia. La quantità di energia contenuta nel bipolo è perciò definita in ogni istante ed in particolare è vincolata a non scendere al di sotto del valore zero, in quanto valori negativi implicherebbero cessione di energia interna, non ricevuta dal bipolo con gli scambi con il resto del circuito;

3) *trasferimento reversibile senza vincoli di energia elettrica.* Il bipolo assorbe o cede energia senza alcun vincolo. Ciò implica che internamente al bipolo si ha un accumulatore di energia di capacità infinita, nel senso cioè che non è modificata dagli scambi energetici con il resto del circuito.

1.3 - Le leggi di Kirchhoff.

Le tensioni e correnti presenti in un circuito elettrico debbono soddisfare due leggi fisiche, che prendono il nome di leggi di Kirchhoff. Tali leggi sono approssimazioni di quelle di Maxwell nell'ambito dei circuiti a costanti concentrate e la loro validità è connessa alla validità dell'ipotesi di «costanti concentrate», che verrà discussa in dettaglio nel paragrafo I.7. L'approssimazione è dello stesso tipo che si presenta in altri rami della fisica; ad esempio si ha una situazione simile a quella della meccanica in cui la legge di Newton è un'approssimazione di

quelle della meccanica relativistica. Occorre ricordare che, anche se tali leggi (Newton e Kirchhoff) sono approssimazioni della realtà, esse possono essere applicate con successo alla soluzione di moltissimi problemi di grande interesse pratico e teorico. È importante tenere sempre presenti le ipotesi di validità di tali leggi, perché altrimenti si possono commettere errori. Ciò verrà chiarito nel § I.7, a cui si rimanda.

1.3.1 - Prima legge di Kirchhoff (legge delle correnti).

«La corrente che complessivamente esce da una superficie chiusa è uguale a quella che vi entra». L'applicazione di tale legge ad un circuito, implica l'utilizzazione di una superficie chiusa e finita che tagli gli elementi solo in corrispondenza ai terminali. Infatti, come detto nel paragrafo precedente, l'elemento è privo di dimensioni ed il rettangolo con cui lo rappresentiamo ha solo uno scopo di aiuto visivo. Inoltre, poiché rappresentiamo i circuiti su un piano, l'utilizzazione della legge precedente viene praticamente effettuata facendo riferimento ad una linea chiusa di dimensioni finite. A titolo di esempio, consideriamo il circuito di fig.I.3.1. La legge delle correnti per la linea tratteggiata (chiusa e di dimensioni finite) è, con i simboli di figura:

$$(I.3.1) \quad i_2 + i_6 = i_3 + i_5 + i_4$$

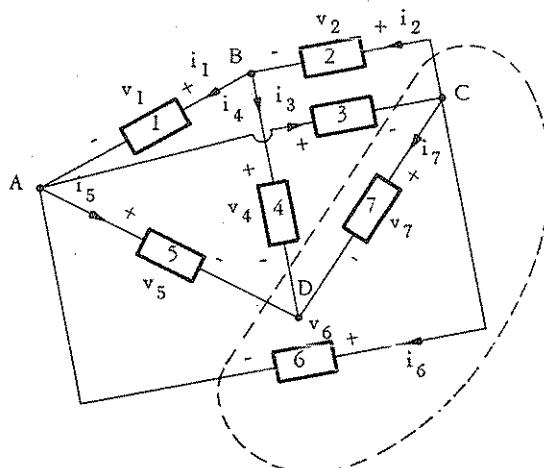


Fig.I.3.1 - Esempio di applicazione delle leggi di Kirchhoff.

In particolare, l'applicazione della legge delle correnti ad una superficie che racchiude un elemento mostra che «la corrente che entra in un morsetto di un elemento è uguale ed opposta a quella che entra nell'altro».

Ricordando che la carica elettrica è l'integrale della corrente, la legge delle correnti implica che non si può accumulare carica entro una superficie chiusa di un circuito a costanti concentrate.

1.3.2 - Seconda legge di Kirchhoff (legge delle tensioni).

«È nulla la somma algebrica delle tensioni, che s'incontrano in un circuito spostandoci lungo una linea chiusa e finita. Le tensioni vanno considerate positive se concordi con il verso dello spostamento e negative nel caso contrario». L'applicazione di tale legge ad un circuito implica l'utilizzazione di una linea chiusa e finita che tagli i componenti solo in corrispondenza ai loro morsetti. Infatti sia i rettangoli che i terminali degli elementi sono privi di dimensioni ed hanno solo scopo di aiuto visivo. A titolo di esempio applichiamo la legge delle tensioni alla linea chiusa che tocca successivamente i morsetti A, B, C, D, A del circuito di fig. I.3.1; si ha, indicando con V_A , V_B , V_C , V_D le tensioni dei morsetti rispetto ad un riferimento qualsiasi:

$$(I.3.2) \quad (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) = 0$$

che equivale a:

$$(I.3.3) \quad v_1 + v_2 - v_7 + v_5 = 0$$

Osservazione.

Le equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff sono lineari e omogenee nelle correnti e nelle tensioni degli elementi del circuito. Esse non dipendono dalla natura degli elementi, ma solo dal loro numero e dal modo in cui sono collegati, cioè dalla «topologia del circuito».

1.4 - Elementi a più di due terminali. Definizione di porta.

Gli elementi che compongono un circuito possono avere più di due terminali. In questo caso si avranno tante correnti quanti sono i terminali e tante tensioni quanti sono i morsetti, avendo preso un riferimen-

to qualsiasi per le tensioni. Le leggi di Kirchhoff, tuttavia, stabiliscono dei vincoli tra queste grandezze. Precisamente, considerando una linea chiusa attorno all'elemento e tale da interessare solo i suoi terminali, si ha per la legge delle correnti che è nulla la somma delle correnti entranti nell'elemento. Ciò significa che è sufficiente conoscere le correnti di $M - 1$ terminali, se M è il numero complessivo dei terminali dell'elemento, per conoscere tutte le correnti. Analogamente, la legge delle tensioni applicata ad una linea chiusa, che tocchi successivamente i morsetti dell'elemento (e solo questi), implica che è sufficiente conoscere le tensioni di $M - 1$ morsetti, per conoscerle tutte.

Quanto detto suggerisce per gli elementi a più di due terminali il seguente tipo di descrizione:

- 1) scegliere un morsetto come riferimento;
- 2) definire le tensioni dei rimanenti morsetti rispetto a questo, localizzando su questo il segno «meno»;
- 3) considerare le correnti di tutti i terminali, escluso quello di riferimento.

Per ragioni di comodità, conviene poi scegliere coordinati i versi positivi delle correnti e tensioni. Ciò si ottiene considerando positive le correnti entranti nell'elemento ed il segno «meno» delle tensioni localizzato sul morsetto di riferimento. In fig. I. 4. 1 si riporta un esempio di elemento a cinque terminali.

È chiaro che con la scelta fatta, è possibile conoscere la tensione di qualunque morsetto rispetto ad un altro. Per esempio, la tensione del morsetto 3 rispetto al morsetto 1 vale $v_3 - v_1$.

La scelta fatta per le tensioni e correnti, atte a descrivere l'elemento, non è ovviamente l'unica possibile. In alcuni casi, infatti, è utile procedere in modo diverso, come quando, per il modo particolare di accesso all'elemento, sono presenti coppie di morsetti che costituiscono delle unità a se stanti. È il caso in cui nell'elemento si creino delle «porte».

Si definisce come «porta» di un elemento o più in generale di un circuito una coppia di morsetti per i quali sussiste la seguente condizione «la corrente entrante nell'uno è uguale ed opposta a quella entrante nell'altro».

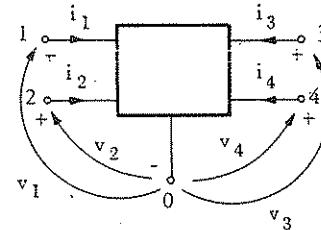


Fig. I. 4. 1 - Esempio di elemento a cinque terminali con versi coordinati per le tensioni e le correnti.

Da questa definizione risulta che per una porta è completamente definita la corrente e la tensione; si ha cioè una situazione del tutto simile a quella di un bipolo. In particolare, un bipolo può essere considerato come un elemento o circuito accessibile solo da una porta. Utilizzando i versi coordinati di fig. I.2.1 per la tensione e corrente di porta, è possibile esprimere la potenza entrante nell'elemento o circuito accessibile da N porte rappresentato in fig. I.4.2 mediante la formula:

(I.4.1)

$$\boxed{P = \sum_{k=1}^N v_k i_k}$$

Ritorneremo nel cap. VI in dettaglio sulla nozione di porta.

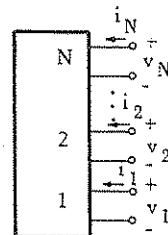


Fig.I.4.2 - Elemento o circuito 'N-porte coi versi delle correnti e delle tensioni di porta coordinati.'

Osservazione.

Il legame tra le tensioni e le correnti di un elemento a più terminali è rappresentato analiticamente tramite equazioni. Tali equazioni dipendono, oltre che dalle proprietà fisiche dell'elemento, anche dal morsetto scelto come riferimento. *Perciò tale morsetto di riferimento va sempre precisato.* Ad esempio, nel caso delle specifiche delle case costruttrici di transistori, è sempre chiaramente precisato se il morsetto di riferimento è l'emettitore, oppure la base o il collettore.

I.5 - Proprietà generali dei componenti e dei circuiti.

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato della rappresentazione grafica degli elementi che compongono il circuito e del modo di scegliere ed orientare le grandezze elettriche che ne definiscono lo stato. Un passo ulteriore nella caratterizzazione di questi elementi e quindi dei circuiti elettrici riguarda l'introduzione di alcune proprietà molto generali che essi possono possedere. Si tratta della linearità e della permanenza. *Tali proprietà si supporranno possedute da tutti gli elementi e circuiti che verranno considerati nel seguito.*

Verrà anche dato un breve cenno di altre proprietà di tipo generale e del legame che intercorre tra esse. Alcune proprietà verranno formulate in termini di causa ed effetto, senza precisare la loro natura fisica, che nel caso del componente o del circuito, corrisponde ad una tensione oppure una corrente. Si presuppone che i circuiti considerati siano bidirezionali nel senso che le due grandezze di porta possono svolgere indifferentemente il ruolo di causa ed effetto. Vedremo successivamente una categoria di circuiti (unidirezionali) in cui tale ipotesi non vale.

1.5.1 - Linearità.

«Il componente o il circuito è lineare se l'effetto dovuto ad una qualsiasi causa è proporzionale alla stessa». Una conseguenza immediata di questa proprietà è il principio di sovrapposizione degli effetti che stabilisce che «l'effetto dovuto a più cause che agiscono contemporaneamente è esattamente la somma degli effetti dovuti a ciascuna causa considerata come se agisse da sola».

La proprietà di linearità implica che le *equazioni costitutive degli elementi componenti il circuito sono lineari* e che le *rappresentazioni dei circuiti sono costituite da equazioni lineari*.

1.5.2 - Permanenza.

«Il componente o il circuito è permanente (ovvero con altra dizione «invariante nel tempo») se l'effetto non dipende dall'istante di applicazione della causa». Questa proprietà si può esprimere semplicemente nel seguente modo. Supponiamo che $e(t)$ sia l'effetto dovuto alla causa $c(t)$; allora se consideriamo la nuova causa $c(t + t_0)$, l'effetto è uguale a $e(t + t_0)$.

La proprietà di permanenza, associata a quella di linearità implica che i coefficienti delle equazioni lineari costitutive degli elementi e delle rappresentazioni dei circuiti sono *indipendenti dalla variabile tempo*.

L'importanza delle due proprietà di linearità e permanenza risulterà chiara successivamente; fin da adesso si può anticipare che tale importanza è legata alla possibilità di impiegare metodi di analisi molto potenti e semplici per i circuiti che godono di queste due proprietà.

1.5.3 - Reciprocità.

La reciprocità è una proprietà generale dei circuiti o elementi che riguarda l'interazione di due eccitazioni sul circuito stesso. Una misu-

ra intuitiva di questa interazione si ottiene considerando la potenza entrante nel circuito o elemento, supposto accessibile da N porte, come indicato in fig.I.4.2, in due situazioni diverse di eccitazione e poi quando tali eccitazioni agiscono contemporaneamente. Si ha:

$$(I.5.1) \quad P_1 = \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(1)} ; \quad P_2 = \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(2)} ;$$

$$\begin{aligned} P_{12} &= \sum_{k=1}^N (v_k^{(1)} + v_k^{(2)}) (i_k^{(1)} + i_k^{(2)}) = P_1 + P_2 + \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} + \\ &+ \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)} \end{aligned}$$

I termini:

$$\sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}$$

rappresentano l'interazione tra le due eccitazioni. Se la rete è reciproca tali interazioni sono uguali, cioè:

$$(I.5.2) \quad \boxed{\sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} = \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}}$$

In ciò consiste la legge di reciprocità di Lorentz, che può enunciarsi come segue: «Considerate due situazioni elettriche diverse, indicate rispettivamente con 1 e 2, le grandezze elettriche di porta di un elemento o circuito, accessibile da N porte, debbono soddisfare la (I.5.2), se esso è reciproco».

E importante sottolineare il fatto che le due eccitazioni considerate in precedenza debbono agire esclusivamente all'esterno dell'elemento o del circuito considerato.

1.5.4 - Passività.

Da un punto di vista intuitivo, possiamo definire come passivo un circuito od un elemento per il quale l'effetto di una qualsiasi causa di breve durata tende a scomparire con il passare del tempo. Si tratta in questo caso di un circuito od elemento «passivo in senso stretto». Una definizione più tenue, molto importante dal punto di vista delle semplificazioni che permette di introdurre, è la seguente «l'effetto di una qualsiasi causa di breve durata si mantiene limitato al passare del tempo».

Vedremo nel Cap.IV le conseguenze della passività ed in particolare della definizione intuitiva precedente.

Un'altra definizione di passività, anch'essa intuitiva, è l'impossibilità per un circuito od elemento passivo di fornire energia. Ciò ovviamente non significa che tale circuito od elemento non possa erogare energia per un limitato intervallo di tempo, ma che tale energia sia inferiore od al massimo uguale a quella accumulata in precedenza.

A quest'ultima definizione si può associare una definizione quantitativa della passività. Supponiamo che l'elemento o il circuito considerato sia accessibile da N porte e che tensione e corrente di porta siano definiti nel modo coordinato precisato in precedenza. La potenza elettrica entrante ad un generico istante vale:

$$(I.5.3) \quad p(t) = \sum_{k=1}^N v_k(t) i_k(t)$$

Il componente o il circuito si dice passivo se:

$$(I.5.4) \quad \int_{-\infty}^t p(t) dt \geq 0$$

per ogni t e per ogni tipo di eccitazione. È da notare che l'inserimento di $-\infty$ nell'integrale, equivale a considerare il componente o il circuito a partire da un istante remoto, prima del quale si ammette che il circuito sia a riposo, cioè che non agiscano eccitazioni di alcun genere.

1.5.5 - Causalità.

«In qualsiasi istante t_0 , l'effetto dipende solo dai valori della causa per $t \leq t_0$ ». Tale proprietà potrebbe essere violata dal circuito solo per l'inadeguatezza dei modelli usati. Analiticamente, questa proprietà si può enunciare nel seguente modo. Sia $c_1(t)$ ed $e_1(t)$ una particolare coppia causa-effetto per $-\infty < t < +\infty$. Sia inoltre $c_2(t)$ ed $e_2(t)$ un'altra coppia; supponiamo che:

$$(I.5.5) \quad c_2(t) = c_1(t) \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Allora, qualunque siano $c_2(t)$ e $c_1(t)$ per $t > t_0$, si ha:

$$(I.5.6) \quad e_2(t) = e_1(t) \quad \text{per} \quad t \leq t_0 .$$

Una forma più semplice di enunciato è possibile nel caso che c'interessa di elementi e circuiti lineari. L'enunciato è il seguente: «L'effetto è nullo per $t \leq t_0$ se è nulla la causa per $t \leq t_0$ ».

È facile rendersi conto che i due enunciati sono equivalenti nel caso lineare. Supponiamo dapprima che sia valido il secondo e facciamo vedere che ne consegue il primo. A questo scopo, con riferimento alle eccitazioni e cause considerate nelle (I.5.5) e (I.5.6), consideriamo la causa $c(t) = c_2(t) - c_1(t)$. Per definizione:

$$(I.5.7) \quad c(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Poichè il circuito o elemento è lineare, l'effetto di $c(t)$ è uguale a $e(t) = e_2(t) - e_1(t)$. In base al secondo enunciato risulta:

$$(I.5.8) \quad e(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Dalla (I.5.8) consegue la (I.5.6) e quindi la validità del primo enunciato. Inversamente supponiamo che sia valido il primo enunciato e facciamo vedere che ne consegue il secondo. Come nel caso precedente, consideriamo la causa $c(t) = c_2(t) - c_1(t)$. L'effetto che gli corrisponde è, poichè il circuito è lineare, $e(t) = e_2(t) - e_1(t)$. In base al primo enunciato e quindi alle (I.5.5) ed (I.5.6) si ha che $c(t)$ ed $e(t)$ soddisfano alle (I.5.7) ed (I.5.8), cioè al secondo enunciato.

Osservazione.

Come detto in precedenza, la violazione della proprietà di causalità da parte di un circuito od elemento è solo conseguenza dell'inadeguatezza dei modelli usati. Tale inadeguatezza riguarda i casi più complessi. Infatti, nel caso dei circuiti passivi lineari è facile dimostrare che essi sono necessariamente causali. A questo scopo consideriamo per semplicità un bipolo lineare e passivo e siano $v_1(t), i_1(t)$ e $v_2(t), i_2(t)$ due coppie causa-effetto definite per esso per $-\infty < t < \infty$. Sia inoltre per $t \leq t_0$:

$$v_1(t) = 0, \quad v_2(t) \neq 0$$

Consideriamo quindi come causa agente sul bipolo:

$$v(t) = m v_1(t) + v_2(t)$$

con m costante arbitraria. Per la linearità, a tale causa corrisponde l'effetto:

$$i(t) = m i_1(t) + i_2(t)$$

Per la passività, deve essere per ogni t :

$$\int_{-\infty}^t v(\tau) i(\tau) d\tau \geq 0 .$$

In particolare per $t \leq t_0$, l'espressione precedente diviene:

$$\int_{-\infty}^t v_2(\tau) i_2(\tau) d\tau + m \int_{-\infty}^t v_2(\tau) i_1(\tau) d\tau \geq 0 .$$

Il primo integrale è non negativo per la passività del bipolo. Il secondo termine può assumere qualsiasi valore in quanto m è arbitraria e $v_2(t) \neq 0$. Perciò la relazione è soddisfatta solo se tale termine è nullo. Tale condizione deve essere verificata per ogni t e quindi:

$$i_1(t) = 0 \quad \text{per } t \leq t_0 .$$

1.6 - Relazioni costitutive degli elementi bipolari lineari e permanenti.

Gli elementi ideali a due terminali (bipoli) che compongono il circuito elettrico a costanti concentrate lineare e permanente sono di pochi tipi, che definiremo di seguito, e scaturiscono dal modellamento di componenti reali. È interessante osservare che gli elementi ideali che si considerano sono buone approssimazioni dei corrispondenti componenti reali. Tale situazione è completamente diversa da quella che si verifica per gli elementi ideali a più di due terminali, che vedremo nel paragrafo successivo.

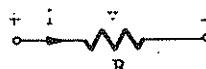
1.6.1 - Resistore.

«Il resistore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.1) \quad v(t) = R i(t)$$

con R reale e costante, a cui si dà il nome di resistenza. Il simbolo usato è quello di fig.I.6.1».

Fig.I.6.1 - Simbolo del resistore.



La resistenza si misura in ohm (simbolo Ω) o spesso nei suoi multipli ($1k \Omega = 1000 \Omega$; $1M\Omega = 1.000.000 \Omega$) e la sua inversa, che prende il nome di conduttanza, in Ω^{-1} .

Risulta perciò:

$$(I.6.2)$$

$$G = \frac{1}{R}$$

$$i(t) = Gv(t)$$

Il resistore passivo è quello per cui R è una quantità non negativa e corrisponde con buona approssimazione al componente reale corrispondente. Il resistore passivo è un puro dissipatore di energia; infatti in qualsiasi intervallo di tempo esso assorbe energia, senza mai restituirla, poiché la potenza elettrica assorbita:

$$(I.6.3)$$

$$p(t) = i^2(t) \cdot R$$

è sempre non negativa. In esso ha luogo un trasferimento irreversibile di energia.

Il componente reale che corrisponde al resistore passivo è caratterizzato dal valore della resistenza (valori commerciali comuni da qualche Ω alle decine di $M\Omega$), dalla precisione con cui è realizzato, dalla potenza che può dissipare senza alterarsi (potenza elettrica che si trasforma in calore).

Il resistore attivo è caratterizzato da una resistenza negativa. Perciò esso fornisce sempre energia al circuito. Il componente reale che gli corrisponde è usualmente rappresentato bene da tale modello solo entro limiti piuttosto modesti delle ampiezze di tutte le grandezze elettriche ad esso applicate e quando non interessi il comportamento completo del componente reale. In particolare è facile dimostrare che il resistore attivo facilmente dà origine a circuiti a cui sono associate assurdità di tipo fisico.

I.6.2 - Condensatore.

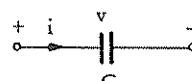
Il condensatore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.4)$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

con C costante reale, a cui si dà il nome di capacità. Il simbolo usato è quello di fig.I.6.2

Fig.I.6.2 - Simbolo del condensatore.



La capacità si misura in farad (simbolo F) o usualmente nei suoi sottomultipli (micro-farad = 10^{-6} F, simbolo μ F; nano-farad = 10^{-9} F,

simbolo nF ; pico-forad = $10^{-12} F$, simbolo pF). Le dimensioni della capacità si deducono dalla (I.6.4), cioè:

(I.6.5)

$$\boxed{\text{farad} = \frac{\text{secondo}}{\text{ohm}}}$$

Il condensatore passivo è quello per cui C è positiva e rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale. È facile vedere che il condensatore passivo trasferisce energia in modo reversibile con il vincolo di cedere energia al circuito a cui è collegato in quantità minore o uguale a quella immagazzinata in precedenza. Il valore dell'energia immagazzinata è facilmente deducibile, partendo dalla (I.6.4); infatti:

$$(I.6.6) \quad \underline{\mathcal{E}(t)} = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t i(\tau) v(\tau) d\tau = \\ = C \int_{-\infty}^t v(\tau) \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau = \boxed{\frac{1}{2} C v^2(t)}$$

nell'ipotesi che, nell'istante remoto indicato con $t = -\infty$, il condensatore fosse a riposo, cioè senza energia immagazzinata. È chiaro quindi dalla (I.6.6) che il condensatore è passivo nel caso di capacità positiva.

La (I.6.4) può inoltre interpretarsi come legame tra tensione e carica elettrica, cioè:

(I.6.7)

$$\boxed{q} = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \boxed{C v(t)}$$

e la capacità rappresenta in questo caso il coefficiente nella relazione costitutiva di semplice proporzionalità tra carica e tensione.

Il componente reale che corrisponde al condensatore passivo è caratterizzato dal valore della capacità (valori commerciali comuni da qualche pF a millesimi di F), dalla precisione con cui è realizzato, dal valore di tensione che può sopportare senza danni.

Il condensatore «attivo» è caratterizzato da un valore negativo di capacità. L'uso di tale elemento ideale è limitato e riguarda circuiti particolari. Il campo di validità del modello è entro intervalli modesti delle grandezze elettriche applicate.

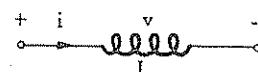
I.6.3 - Induttore.

«L'induttore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.8) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

con L costante reale, a cui si dà il nome di induttanza. Il simbolo usato è quello di fig. I.6.3».

Fig. I.6.3 - Simbolo dell'induttore.



L'induttanza si misura in henry (simbolo H) o usualmente anche con i suoi sottomultipli (milli-henry = 10^{-3} H, simbolo mH; micro-henry = 10^{-6} H, simbolo μ H). Le dimensioni dell'induttanza si deducono dalla (I.6.8), cioè:

$$(I.6.9) \quad \text{henry} = \text{ohm} \cdot \text{secondo}$$

Il componente passivo è quello per cui L è positiva e rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale. È facile vedere che l'induttore passivo trasferisce energia in modo reversibile, con il vincolo di cedere energia al circuito a cui è collegato in quantità minore od uguale a quella immagazzinata in precedenza. Il valore di tale energia immagazzinata è facilmente deducibile, partendo dalla (I.6.8); infatti:

$$(I.6.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v(\tau) i(\tau) d\tau = \\ &= L \int_{-\infty}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \boxed{\frac{1}{2} L i^2(t)}. \end{aligned}$$

È chiaro quindi dalla (I.6.10) che l'induttore è passivo nel caso d'induttanza positiva.

La (I.6.8) può inoltre interpretarsi come legame tra flusso d'induzione magnetica e corrente, cioè:

$$(I.6.11) \quad \phi(B) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = L i(t)$$

e l'induttanza rappresenta in questo caso il coefficiente nella relazione costitutiva di semplice proporzionalità tra flusso d'induzione e corrente.

Il componente reale che corrisponde all'induttore passivo viene realizzato utilizzando i circuiti magnetici.

L'induttore «attivo» è caratterizzato da un valore negativo di induttanza. L'uso di tale elemento ideale è limitato e riguarda circuiti particolari. Il campo di validità del modello è entro intervalli modesti delle grandezze elettriche applicate.

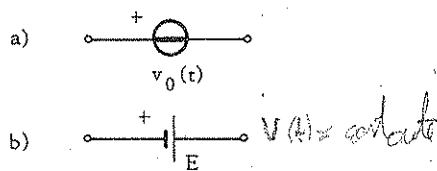
1.6.4 - Il generatore indipendente di tensione.

Il generatore indipendente di tensione è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(1.6.12) \quad v(t) = v_0(t)$$

con v_0 una funzione del tempo assegnata, eventualmente costante. Il simbolo usato è quello di fig. I.6.4 a). Nel caso di ampiezza costante, cioè $v_0(t) = E$, viene spesso usato il simbolo di fig. I.6.4 b).

Fig. I.6.4 - Simbolo del generatore indipendente di tensione.



Il generatore indipendente di tensione rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale, quale ad esempio una batteria, la rete di distribuzione dell'energia elettrica in corrispondenza ad una presa. È facile vedere che il generatore indipendente di tensione è sede di un trasferimento reversibile non vincolato di energia; infatti la corrente che esso eroga dipende dal circuito a cui è connesso e perciò la potenza istantanea che esso eroga può assumere qualsiasi valore e segno. Ciò significa che idealmente tale elemento è collegato ad un accumulatore di energia di capacità infinita, cioè non perturbabile dagli scambi di energia. Il generatore indipendente di tensione costituisce uno dei due modi in cui si può intervenire dall'esterno su un circuito. Come vedremo nel § I.6.7, si possono avere degli inconvenienti, usando tale modello, in quanto esso non rappresenta in modo completo il corrispondente componente reale.

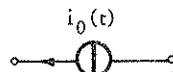
1.6.5 - Il generatore indipendente di corrente.

Il generatore indipendente di corrente è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(1.6.13) \quad i(t) = i_0(t)$$

con i_0 una funzione del tempo assegnata, eventualmente costante. Il simbolo usato è quello di fig. I.6.5.

Fig. I.6.5 - Simbolo del generatore indipendente di corrente.



Il generatore indipendente di corrente, a differenza di quello di tensione, ha più importanza come ingrediente di circuiti equivalenti di componenti reali che come modello di un unico componente reale. È facile vedere che tale elemento è sede di un trasferimento reversibile non vincolato di energia; infatti la tensione che si stabilisce tra i suoi morsetti dipende dal circuito a cui è connesso e perciò la potenza istantanea che esso eroga può assumere qualsiasi valore e segno. Quindi, come per il generatore indipendente di tensione, si può pensare che quello di corrente sia collegato idealmente ad un accumulatore di energia di capacità infinita.

I due generatori indipendenti costituiscono i due modi in cui si può intervenire dall'esterno sul circuito. Nel § I.6.7, metteremo in evidenza alcune incongruenze a cui i modelli dei generatori indipendenti danno luogo.

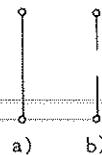
1.6.6 - Corto-circuito e circuito aperto.

«Il corto-circuito è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.14) \quad v(t) = 0$$

ed il simbolo con cui viene rappresentato è mostrato in fig.I.6.6 a).

Fig.I.6.6 - Simboli del
corto-circuito a) e del
circuito-aperto b).



Tale elemento ideale è di grande uso nei circuiti, anche se non corrisponde ad alcun componente reale. Si può pensare come un caso limite del generatore di tensione. In particolare, è interessante notare come un generatore indipendente di tensione che venga disattivato, cioè la cui tensione impressa sia messa a zero dall'esterno del circuito, si riduca proprio ad un corto-circuito. Tale osservazione verrà utilizzata successivamente in varie occasioni.

«Il circuito-aperto è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.15) \quad i(t) = 0$$

ed il simbolo con cui viene rappresentato è mostrato in fig.I.6.6 b). Tale elemento ideale è di grande uso nei circuiti, anche se non corrispon-

de ad alcun componente reale. Si può pensare come un caso limite del generatore di corrente. In particolare, è interessante notare come *un generatore indipendente di corrente, che venga disattivato, cioè la cui corrente impressa sia messa a zero dall'esterno del circuito, si riducapro-prio ad un circuito aperto.*

1.6.7 - Incongruenze associate agli elementi ideali e circuiti equivalenti dei bipoli reali.

Gli elementi introdotti nei paragrafi precedenti sono ideali. La «storia» che ha portato alla loro definizione non è usualmente fondamentale, ma può aiutare a capire se hanno un significato fisico. Nel caso dei bipoli il significato fisico è sempre presente, in quanto, a parte per il generatore indipendente di corrente, la definizione dell'elemento ideale è scaturita da un processo di «idealizzazione» di qualche componente reale di uso comune.

L'idealizzazione, però, a volte può essere stata eccessiva, con il ché possono insorgere in un circuito (ideale) delle incongruenze. Accenniamo in fig. I.6.7 alle più macroscopiche ed evidenti, discutendo in dettaglio il caso a) dei due generatori indipendenti di tensione. È evidente che se le due tensioni impresse $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono diverse, il circuito di fig. I.6.7 a) non ha senso. D'altra parte se $v_1 = v_2$, risulta indeter-

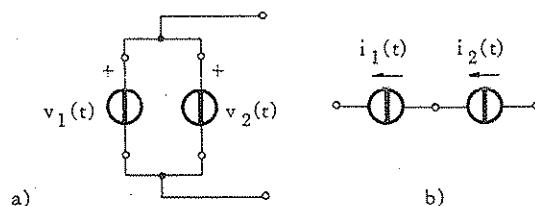
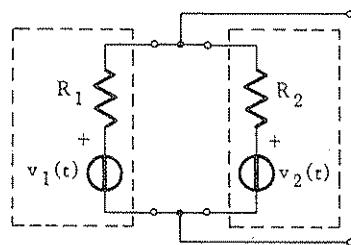


Fig. I.6.7 - Due esempi di incongruenze che possono verificarsi connet-tendo elementi ideali bipolari.

minata la corrente erogata da ciascun generatore. In ambedue i casi si è in una situazione «non fisica». D'altra parte che l'incongruenza sia do-vuta all'idealizzazione è evidente, in quanto è chiaramente identificabile la situazione che si verrebbe ad avere con due generatori di tensione reali. Ciò mette in evidenza che il componente reale richiede di essere caratterizzato con un circuito equivalente che contiene oltre all'ele-men-to ideale corrispondente, anche altri elementi ideali. Ad esempio, già la presenza di un resistore elimina l'inconveniente di fig. I.6.7 a), come mo-strato in fig. I.6.8, dove entro le zone tratteggiate sono riportati i circui-

ti equivalenti dei generatori indipendenti di tensione reali. Ovviamente il circuito equivalente di fig.I.6.8 non è sufficiente a tenere conto di altri comportamenti del componente reale, come ad esempio la capacità di seguire rapidamente le variazioni di carico. Sarà necessario per questo scopo e per altri possibili arricchire il circuito equivalente adottato.

Fig.I.6.8 - Rimozione dell'incongruenza di fig.I.6.7 a) mediante un circuito equivalente opportuno per il generatore indipendente di tensione reale.



Il modellamento dei bipoli reali non incontra incongruenze di base nel caso lineare passivo. L'elemento ideale rappresenta bene il componente reale nel caso del resistore, mentre occorre usare due componenti, come indicato in fig. I.6.9 nel caso dell'induttore e del condensatore. I resistori ideali aggiunti agli elementi ideali corrispondenti sono usualmente definiti tramite un coefficiente di merito del componente reale, che misura l'effetto del resistore aggiunto.

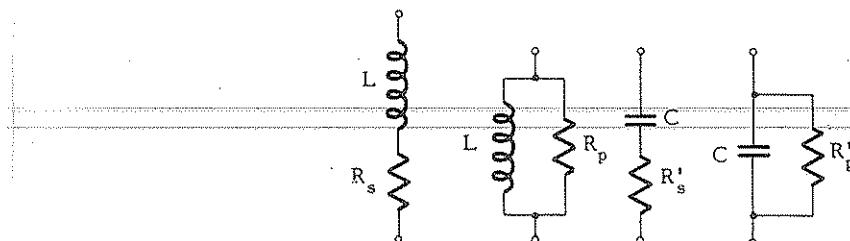


Fig.I.6.9 - Circuiti equivalenti degli induttori e condensatori reali che tengono conto delle perdite associate.

Il modellamento è invece notevolmente complesso nel caso dei componenti reali non-lineari attivi. Infatti, quando si cerca, attraverso l'operazione di linearizzazione, di rappresentarli con un circuito equivalente lineare, si introducono facilmente incongruenze. I circuiti a cui si perviene possono non soddisfare proprietà fisiche importanti, quali: la causalità, la riduzione del contenuto dell'informazione trasmessa nella propagazione di un segnale attraverso un circuito.

I.6.8 - Generatori reali di tensione e di corrente.

Come accennato nel paragrafo precedente, il modo più semplice di considerare generatori reali, consiste nell'associare dei resistori ai generatori ideali e precisamente in serie a quelli di tensione ed in parallelo a quelli di corrente, come indicato in fig. I.6.10.

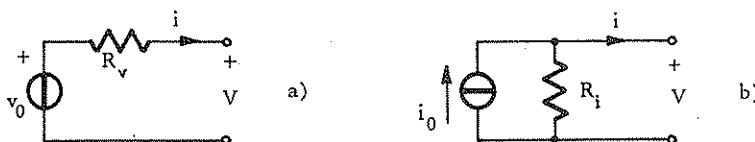


Fig. I.6.10 - Schemi equivalenti semplificati di generatori reali di tensione e di corrente.

Si può dimostrare che i generatori reali così introdotti sono fra loro equivalenti, nel senso che possono essere sostituiti l'uno all'altro sotto certe condizioni. Infatti per il generatore reale di tensione si ottiene:

$$(I.6.16) \quad v = v_0 - R_v i$$

mentre per il generatore reale di corrente si ha:

$$(I.6.17) \quad i = i_0 - G_i v .$$

ove $G_i = 1/R_i$. Entrambe le relazioni (I.6.16) e (I.6.17) possono essere rappresentate con il grafico di fig. I.6.11, ove v_{ca} e i_{cc} sono rispettivamente la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito del bipolo considerato.

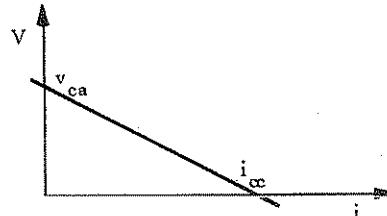


Fig. I.6.11 - Caratteristica tensione-corrente per i generatori reali di tensione e di corrente.

Tali grandezze assumono i seguenti valori:

Tipo di generatore	v_{ca}	i_{cc}
Generatore ideale di tensione	v_0	v_0/R_v
Generatore ideale di corrente	$i_0 R_i$	i_0

L'equivalenza si ottiene imponendo per i generatori reali la medesima carattistica tensione-corrente e cioè:

$$(I.6.18) \quad v_0 = i_0 R_i \quad , \quad v_0 / R_v = i_0$$

da cui si ottengono le seguenti condizioni di equivalenza:

$$(I.6.19) \quad R_i = R_v = v_0 / i_0 \quad .$$

È interessante confrontare il comportamento dei generatori reali rispetto a quelli ideali nei confronti della potenza erogata. Con riferimento al generatore ideale di tensione, la potenza erogata è pari a:

$$(I.6.20)$$

$$p = v i = (v_0 - R_v i) i$$

L'andamento di p in funzione della corrente i è indicato in fig. I.6.12.

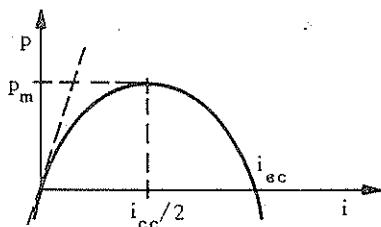


Fig. I.6.12 - Andamento della potenza erogata in funzione della corrente in un generatore reale di tensione.

Con la linea tratteggiata è indicato il caso limite di $R_v = 0$, corrispondente al generatore ideale di tensione. Si vede che, mentre nel caso ideale la potenza erogata è illimitata, nel caso reale essa ha un valore massimo in corrispondenza alla corrente $i = i_{cc} / 2$ che vale:

$$(I.6.21) \quad P_m = v_0^2 / (4 R_v) \quad .$$

D'altra parte, considerato che il generatore ideale v_0 nello schema di fig. I.6.10 eroga una potenza $P_0 = v_0 i$, è possibile definire un rendimento η pari a:

$$(I.6.22) \quad \eta = p / P_0 = 1 - R_v i / v_0$$

il cui andamento è rappresentato in fig. I.6.13.

Esaminando gli andamenti delle figg. I.6.12 e I.6.13, è possibile distinguere due casi d'interesse:

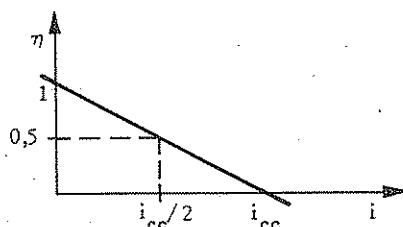


Fig. I.6.13 - Andamento del rendimento di un generatore reale di tensione in funzione della corrente erogata.

- a) Circuiti nei quali interessa ottenere un elevato valore del rendimento. In questi casi è opportuno far erogare ai generatori reali di tensione correnti molto più piccole di $i_{cc} / 2$, ottenendo potenze inferiori a quella massima ottenibile. Tali casi corrispondono alle applicazioni in cui sono utilizzati elevati valori di potenza (circuiti per il trasferimento dell'energia).
- b) Circuiti nei quali interessa ottenere la massima potenza possibile dal generatore, indipendentemente dal rendimento. In questi casi i generatori reali di tensione devono erogare correnti pari a $i_{cc} / 2$, ottenendo un rendimento pari a $\eta = 1/2$. Tali casi corrispondono alle applicazioni per piccole potenze, in cui occorre però evitare degradazioni delle forme d'onda d'interesse (circuiti per il trasferimento di segnali).

I.7 - Derivazione del modello di circuito a costanti concentrate e suoi limiti di validità.

I.7.1 - Introduzione.

La generica struttura elettrica è costituita da una regione di spazio, contenente corpi di diversa natura e che diviene sede di fenomeni elettromagnetici, quando in essa si verificano sollecitazioni esterne coincidenti usualmente con trasformazioni di energia non elettrica in elettrica. La caratterizzazione quantitativa del fenomeno elettromagnetico richiede l'uso di grandezze appropriate, la conoscenza delle leggi fisiche che vincolano tali grandezze e la definizione di opportune quantità atte a precisare il comportamento dei vari corpi presenti nella regione d'interesse. Le grandezze in questione sono:

È campo elettrico: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in volt su metro ($LMT^{-2} Q^{-1}$)⁽¹⁾;

(1) - Le unità di misura sono quelle del sistema MKSQ, cioè metro, kilogrammo-massa, secondo e coulomb.

\vec{D} *induzione elettrica*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in coulomb su metro quadrato ($Q L^{-2}$);

\vec{H} *campo magnetico*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in ampère-spire su metro ($L^{-1} T^{-1} Q$);

\vec{B} *induzione magnetica*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in weber su metro quadrato ($M T^{-1} Q^{-1}$);

\vec{J} *densità della corrente di conduzione*: è una grandezza vettoriale, la cui ampiezza si misura in ampère su metro quadrato ($M^{-2} T^{-1} Q$).

Le quantità che precisano il comportamento dei vari corpi presenti nella regione, sono:

γ *conducibilità*: grandezza scalare che si misura in mho su metro ($L^{-3} M^{-1} Q^2 T$);

ϵ *costante dielettrica*: grandezza scalare che si misura in farad su metro ($L^{-3} M^{-1} Q^2 T^2$);

μ *permeabilità magnetica*: grandezza che si misura in henry su metro ($L M Q^{-2}$);

ρ *densità volumetrica di carica*: grandezza scalare che si misura in coulomb su metro cubo ($L^3 Q$).

Le grandezze precedenti sono in generale funzioni del punto e del tempo e sono legate fra loro in base alle equazioni di Maxwell, cioè:

$$(I.7.1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(I.7.2) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(I.7.3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(I.7.4) \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

Esistono inoltre altre relazioni che legano le grandezze precedenti e che dipendono dalla natura dei corpi presenti nella regione d'interesse. Tali equazioni sono, nei vari casi possibili:

$$(I.7.5) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$(I.7.6) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(I.7.7) \quad \vec{J} = \gamma (\vec{E} - \vec{E}_0) + \vec{J}_0$$

in cui \vec{E}_0 e \vec{J}_0 sono le grandezze elettriche impresse, direttamente legate alle sollecitazioni. Occorre notare che, nello scrivere le equazioni (I.7.5), (I.7.6) e (I.7.7), è stata fatta l'ipotesi che i mezzi che occupano le regioni d'interesse siano isotropi (ciò comporta che le quantità ϵ , μ , γ siano coincidenti con grandezze scalari); nel seguito tale ipotesi verrà mantenuta, insieme alle ipotesi di linearità, permanenza e omogeneità (ciò comporta che le quantità ϵ , μ , γ siano indipendenti dallo stato elettromagnetico presente, dal tempo e dal punto).

La conoscenza della forma e natura dei corpi contenuti nella regione d'interesse e delle sollecitazioni impresse rende possibile l'individuazione delle grandezze elettriche in ogni punto della regione. Tale individuazione è molto complessa e può essere notevolmente semplificata nel caso in cui la struttura elettrica in esame sia rappresentabile mediante il modello circuitale a costanti concentrate. L'ipotesi che sta alla base di questo modello è che *le dimensioni della regione d'interesse siano sufficientemente piccole da poter essere trascurate*. L'ipotesi di «*assenza di dimensioni*» è del tutto equivalente a quella di «*velocità di propagazione del fenomeno elettromagnetico infinita*» oppure a quella di «*tempo nullo di trasmissione del fenomeno elettromagnetico da un punto all'altro della regione d'interesse*».

Le tre formulazioni precedenti dell'ipotesi di costanti concentrate permettono di approfondire sia i limiti di validità dell'ipotesi stessa (§ I.7.2), sia la derivazione del modello di circuito a costanti concentrate nella sua forma globale e nelle sue componenti (§§ I.7.3 e I.7.4).

I.7.2 - Limiti di validità dell'ipotesi di «costanti concentrate».

La formulazione dell'ipotesi di «*costanti concentrate*» che più si presta ad una verifica di validità, è quella che riguarda il tempo impiegato dal campo elettromagnetico per spostarsi da un punto all'altro della regione d'interesse. Tale tempo deve potersi trascurare, nel senso che esso deve essere molto piccolo se confrontato con l'entità delle variazioni temporali delle grandezze elettriche tipiche dell'applicazione considerata. Sappiamo infatti che in ogni applicazione delle strutture elettriche è completamente fissata la larghezza dell'intervallo di frequenza in cui cadono gli spettri delle grandezze elettriche. Alla frequenza massima f_{\max} di questo intervallo è legato in modo semplice il minimo intervallo di tempo che è possibile apprezzare, cioè:

$$(I.7.8) \quad t_{\min} = \frac{1}{2 f_{\max}}$$

Il tempo impiegato dal campo elettromagnetico per propagarsi da un punto all'altro del circuito risulta sempre:

$$(I.7.9) \quad t \leq L/c$$

dove L è la dimensione massima della regione d'interesse e c è la velocità di propagazione nello spazio libero.

Quindi la verifica da effettuare è che sia:

$$(I.7.10) \quad L/c \ll \frac{1}{2 f_{\max}} \quad \text{ovvero} \quad 2 \frac{L}{c} f_{\max} \ll 1$$

Poichè in ogni applicazione, oltre a f_{\max} , è nota anche la massima dimensione che può avere la struttura elettrica d'interesse, la verifica suggerita dalla (I.7.10) è molto semplice da farsi, come messo in evidenza in tab. I.7.1, che si riferisce a due applicazioni tipiche ed al valore di c uguale a $3 \cdot 10^8$ m/sec.

Tabella I.7.1 - Controllo della validità dell'ipotesi di «costanti concentrate» in due applicazioni tipiche. Nel caso dell'applicazione relativa alle microonde, si è considerato per f_{\max} il valore più basso delle frequenze utilizzate in tale campo; tale condizione è ovviamente la più favorevole all'accettabilità dell'ipotesi.

Applicazione	Intervallo frequenze	Dimensione massima L (metri)	$2 \frac{L}{c} f_{\max}$	Risultato del controllo
Riproduzione sonora (alta fedeltà)	< 20 kHz	1	$1,3 \cdot 10^{-4}$	Ipotesi accettabile
Microonde	> 1 GHz	0,1	0,66	Ipotesi non accettabile

I.7.3 - Conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: suddivisione in regioni tipiche della struttura elettrica.

Per effetto dell'ipotesi di «costanti concentrate» è possibile individuare a priori quali sono le caratteristiche salienti della regione di

interesse. In particolare è facile vedere che si possono avere solo pochi tipi di regione, compatibili con l'ipotesi suddetta, caratterizzabili facilmente a partire dalla formulazione basata sulla velocità infinita di propagazione del campo elettromagnetico. Ciò implica, infatti, che sia nullo il prodotto $\epsilon \mu$, che, come è noto, è inversamente proporzionale al quadrato della suddetta velocità. Di conseguenza la regione d'interesse può essere costituita solo di parti aventi nulla o la costante dielettrica ϵ o la permeabilità magnetica μ oppure ambedue contemporaneamente. Ciascuna di queste parti ha caratteristiche ben determinate che vanno esaminate in dettaglio.

- Regione di tipo 1.

La regione di tipo 1 è caratterizzata dall'avere nulle sia ϵ che μ . Di conseguenza le grandezze \vec{B} e \vec{D} sono entrambe nulle e pertanto in tale regione non c'è energia elettrica o magnetica immagazzinata, ricordando che si ha:

$$\text{densità di energia elettrica} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

(I.7.11)

$$\text{densità di energia magnetica} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Poichè D è nullo, dalla (I.7.4) si deduce che deve essere nulla la densità di carica elettrica; ciò implica che non si può avere accumulo di cariche elettriche nella regione e perciò la corrente di conduzione entrante deve essere uguale a quella uscente, ricordando che con corrente di conduzione si intende la quantità di carica che attraversa nell'unità di tempo la superficie che racchiude la regione. Questo risultato, d'altra parte, consegue immediatamente dalla (I.7.2), osservando che, se $\vec{D} = 0$, risulta:

$$(I.7.12) \quad \vec{J} = \text{rot} \vec{H}$$

e quindi:

$$(I.7.13) \quad \text{div} \vec{J} - \text{div} \text{rot} \vec{H} = 0$$

Inoltre l'annullarsi di B comporta dalla (I.7.1) che:

$$(I.7.14) \quad \text{rot} \vec{E} = 0$$

il che significa che il campo elettrico è conservativo e può quindi farsi derivare da una funzione potenziale. È pertanto possibile parlare senza ambiguità di differenza di potenziale tra due punti.

Le ulteriori proprietà della regione di tipo 1 sono legate alla forma che assume la sua relazione costitutiva e cioè la (I.7.7). In particolare ciò che influisce è il valore della conducibilità γ e l'eventuale presenza delle grandezze impresse \vec{E}_0 e \vec{J}_0 . Si possono avere i seguenti casi:

- *Regione di tipo 1A.*

La caratteristica di questa regione è l'assenza di \vec{E}_0 e \vec{J}_0 nella (I.7.7) ed il valore nullo di γ . Di conseguenza non c'è corrente, cioè si ha:

$$(I.7.15) \quad \vec{J} = 0$$

La (I.7.15) implica l'assenza di fenomeni di trasformazione di energia misurati da:

$$(I.7.16) \quad \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Le proprietà messe in evidenza dimostrano che la regione di tipo 1A coincide con il «vuoto».

- *Regione di tipo 1B.*

Si ottiene questa regione nel caso che siano assenti \vec{E}_0 e \vec{J}_0 nella (I.7.7) e che sia $\gamma = \infty$. Il valore infinito della conducibilità implica che sia:

$$(I.7.17) \quad \vec{E} = 0$$

Quindi il potenziale della regione di tipo 1B è costante in tutti i suoi punti.

La (I.7.17) implica l'assenza di fenomeni di trasformazione di energia, misurati dalla (I.7.16).

È evidente dalle proprietà messe in evidenza che la regione di tipo 1B coincide con un «conduttore perfetto».

- *Regione di tipo 1C.*

Nel caso che siano assenti \vec{E}_0 e \vec{J}_0 dalla (I.7.7) e che γ abbia un valore finito diverso da zero, si ha la regione di tipo 1C o *regione resistiva*. Tale regione è caratterizzata da una trasformazione irreversibile di energia elettrica in un'altra forma di energia. Quantitativamente si ha una dissipazione di potenza per unità di volume data dalla (I.7.16), che nel caso presente diviene:

$$(I.7.18) \quad \gamma |\vec{E}|^2$$

La regione di questo tipo è il costituente fondamentale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *resistor*.

- *Regione di tipo 1D.*

In questo caso si ha $\gamma = 0$, $\vec{E}_0 = 0$, $\vec{J}_0 \neq 0$. La regione risultante è sede di una trasformazione reversibile di energia non elettrica in elettrica, tramite un fenomeno che impone la distribuzione della densità di corrente \vec{J}_0 . L'entità della potenza trasformata per unità di volume è, dalla (I.7.16), pari a:

$$(I.7.19) \quad \vec{J}_0 \cdot \vec{E}$$

La regione di questo tipo è il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate, che prende il nome di *generatore indipendente di corrente*.

- *Regione di tipo 1E.*

In questo caso si ha: $\gamma = \infty$, $E_0 \neq 0$, $J_0 = 0$. La regione risultante è del tutto simile alla 1D e coincide con il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *generatore indipendente di tensione*.

- *Regione di tipo 2.*

La regione di tipo 2 è caratterizzata da un valore nullo della costante dielettrica ϵ ed un valore diverso da zero della permeabilità magnetica μ . Di conseguenza risulta nulla sia l'induzione elettrica \vec{D} sia l'energia elettrica immagazzinata, in base alla (I.7.5) ed alla (I.7.11). Risulta perciò presente solo l'energia magnetica, misurata per unità di volume dalla seconda delle (I.7.11).

La regione di tipo 2 è il costituente essenziale dei componenti del circuito a costanti concentrate che prendono il nome di *induttore, induttori accoppiati e trasformatore*.

- *Regione di tipo 3.*

La regione di tipo 3 è caratterizzata da un valore della permeabilità magnetica μ nullo ed un valore diverso da zero della costante dielettrica ϵ . Di conseguenza risulta nulla sia l'induzione magnetica \vec{B} sia l'energia magnetica immagazzinata, in base alla (I.7.6) e alla seconda delle (I.7.11). Risulta perciò presente solo l'energia elettrica, la cui densità per unità di volume è data dalla prima delle (I.7.11).

La regione di tipo 3 è il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *condensatore*.

1.7.4 - Ulteriori conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: il modello circuitale della struttura elettrica.

Dall'ipotesi di «*costanti concentrate*» nella formulazione che impone una velocità infinita del campo elettromagnetico, consegue che la regione occupata dalla struttura elettrica può essere o del tipo 1, 2, 3 oppure coincidere con un aggregato di parti, a loro volta dei tipi suddetti. Occorre inoltre osservare che tali parti sono associate in modo opportuno, allo scopo di permettere una interazione reciproca. In particolare: 1) la regione del tipo 1A costituisce il mezzo in cui sono immerse tutte le altre; 2) regioni del tipo 1B funzionano come connessioni delle rimanenti altre. È chiaro quindi che, più che considerare le rimanenti regioni di per se stesse, conviene considerare sempre aggregati costituiti nel seguente modo: una regione qualunque delle precedenti, con l'esclusione delle 1A e 1B, compresa tra due regioni del tipo 1B non contigue e per il resto confinante con la regione 1A. Uno schema di principio di tale aggregato è mostrato in fig. I.7.1. I vari aggregati sono connessi tra di loro in corrispondenza alle regioni di tipo 1B.

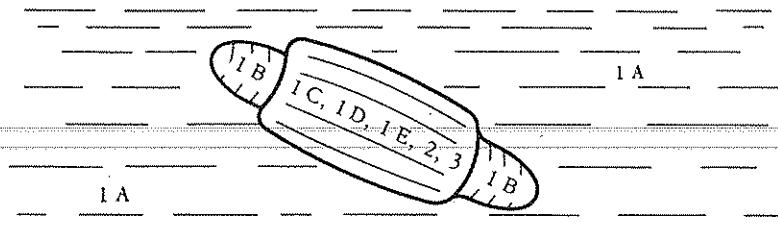


Fig.I.7.1 - Aggregato tipico di regioni in una struttura elettrica che soddisfa l'ipotesi di «*costanti concentrate*».

Tenendo conto di quanto detto in precedenza e della formulazione alternativa dell'ipotesi di «*costanti concentrate*», che stabilisce la assenza di dimensioni delle regioni, si arriva automaticamente al modello circuitale della struttura elettrica, introdotto nel § I.1.2. Gli elementi ideali privi di dimensioni sono gli aggregati di fig.I.7.1; le connessioni filiformi sono le regioni del tipo 1B; la regione in cui sono immersi gli elementi e le connessioni è del tipo 1A. Rimane da far vedere:

- 1) la possibilità di caratterizzare ciascun elemento con tensione e corrente;

- 2) la derivazione delle leggi di Kirchhoff dalle equazioni di Maxwell;
- 3) il modo in cui derivare le relazioni costitutive degli elementi ideali tipici.

Punto 1

Per quanto riguarda il punto 1), è sufficiente tenere conto che, per quanto detto nel § I.7.3.1, le regioni del tipo 1B sono equipotenziali e non accumulano carica. Perciò esse chiaramente si comportano come i terminali ed i morsetti degli elementi ideali. Inoltre, per quanto detto nel § I.7.3.1, nella regione 1A può essere definita senza ambiguità la differenza di potenziale tra due punti e non si ha corrente o carica accumulata. Ciò significa che si può parlare senza ambiguità di tensione applicata all'elemento ideale; essa coincide con la differenza di potenziale tra le due regioni del tipo 1B di fig.I.7.1. Per quanto riguarda la corrente, consideriamo una superficie chiusa che intersechi le due regioni di tipo 1B e la regione di tipo 1A, racchiudendo nel suo interno la regione centrale dell'aggregato. Facciamo vedere che la corrente entrante in questa superficie è nulla, ciò che dimostra il fatto che la corrente che entra in un morsetto è di ampiezza uguale e verso contrario a quella entrante nell'altro morsetto. A questo scopo osserviamo che:

$$(I.7.20) \quad \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$$

in cui V è il volume della regione racchiusa dalla superficie S considerata ed \vec{n} la normale all'elemento di superficie dS supposta positiva in senso entrante. Poichè si ha $\epsilon = 0$, sia nella regione 1A che 1B, risulta $\vec{D} = 0$ sulla superficie S e quindi l'integrale (I.7.20) è nullo. Tale integrale rappresenta la carica accumulata entro la regione racchiusa dalla superficie S e dimostra quanto asserito, in quanto la corrente entrante vale:

$$(I.7.21) \quad I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

Poichè la corrente entrante in un morsetto è di ampiezza uguale e verso contrario a quella entrante nell'altro morsetto, si può parlare senza ambiguità della corrente che percorre l'aggregato.

Punto 2

Quanto detto in precedenza mette in evidenza che la struttura elettrica è costituita da elementi, cioè gli aggregati di fig.I.7.1, connessi tra di loro da regioni equipotenziali rappresentabili mediante fili, poichè la dimensione delle regioni non ha influenza, e immersi in un mezzo vuoto. Ciascun elemento è caratterizzabile tramite una tensione ed una corrente.

La prima legge di Kirchhoff si ottiene considerando una superficie chiusa che intersechi gli aggregati del tipo di fig.I.7.1, solo in corrispondenza alle regioni del tipo 1B ed 1A e seguendo una dimostrazione del tipo di quella basata sulle (I.7.20) e (I.7.21).

La seconda legge di Kirchhoff si ottiene considerando una curva chiusa che si svolga nelle regioni 1A e 1B ed intersechi gli aggregati solo in corrispondenza alle regioni 1B. Poichè il campo elettrico è irrotazionale nelle regioni 1A e 1B, il suo integrale lungo la suddetta curva chiusa è nullo. D'altra parte tale integrale coincide con la somma delle tensioni degli elementi via via toccati dalla curva, ciò che dimostra la seconda legge di Kirchhoff.

Punto 3

La derivazione delle relazioni costitutive degli elementi ideali bipolari viene effettuata considerando i vari tipi possibili di aggregati aventi la struttura di fig. I.7.1. A titolo esemplificativo, sviluppiamo il solo caso del resistore, che prevede una regione centrale nell'aggregato di fig. I.7.1 del tipo 1C.

Il legame tra densità di corrente e campo elettrico in tale regione è, come messo in evidenza nel § I.7.3.1:

$$(I.7.22) \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

Poichè consideriamo regioni occupate da mezzi lineari è evidente che il campo elettrico in ogni punto è proporzionale alla differenza di potenziale che si ha tra le due regioni 1B dell'aggregato di fig.I.7.1, cioè:

$$(I.7.23) \quad \vec{E} = \vec{f}(P) V$$

essendo: $\vec{f}(P)$ una funzione vettoriale di punto avente dimensione L^{-1} ; P il generico punto della regione d'interesse; V la differenza di potenziale, in generale funzione del tempo e naturalmente indipendente dal punto.

Un discorso del tutto simile si può fare anche per la densità di corrente, cioè essa è proporzionale alla corrente che attraversa l'aggregato, definibile senza ambiguità, come messo in evidenza nel paragrafo precedente. Quindi risulta:

$$(I.7.24) \quad \vec{J} = \vec{g}(P) I$$

essendo: $\vec{g}(P)$ una funzione vettoriale di punto, avente dimensioni L^{-2} ; I la corrente che attraversa l'aggregato, in generale funzione del tempo e naturalmente indipendente dal punto.

Dalle (I.7.22), (I.7.23), (I.7.24), si ha:

$$(I.7.25) \quad |\vec{g}(P)| I = \gamma |\vec{f}(P)| V$$

che corrisponde a:

$$(I.7.26) \quad V = \frac{|\vec{g}(P)|}{|\vec{f}(P)|} \frac{1}{\gamma} I$$

Il rapporto:

$$(I.7.27) \quad \frac{|\vec{g}(P)|}{|\vec{f}(P)|} = h_R$$

deve essere necessariamente costante, di valore dipendente solo dalla forma geometrica dell'aggregato; le sue dimensioni sono L^{-1} .

La (I.7.26) è la relazione costitutiva del resistore ideale di resistenza:

$$(I.7.28) \quad R = \frac{h_R}{\gamma}$$

dove h_R è un fattore di forma dato dalla (I.7.27).

I.8 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte attivi lineari e permanenti.

Da quanto detto nel § I.6 ed in particolare nel § I.6.7 il modello di un componente bipolare reale nasce da un compromesso tra due esigenze contrastanti:

- 1) il modello deve essere sufficientemente completo per rappresentare convenientemente il componente dal punto di vista d'interesse;

2) il modello deve essere semplice per evitare che l'analisi del circuito si complichi in modo proibitivo.

Tale compromesso nel caso dei componenti bipolari reali è stato risolto, introducendo elementi ideali opportuni tramite un processo di idealizzazione dei componenti reali. I modelli che ne risultano per i componenti bipolari reali sono assai soddisfacenti, in quanto usualmente richiedono l'elemento ideale corrispondente ed eventualmente qualche altro elemento degli altri tipi, con funzione di correzione.

Nel caso dei componenti due-ponte attivi reali la situazione è completamente diversa. Il processo di idealizzazione si può applicare, ma porta ad un elemento ideale molto distante dal componente reale. Per questa ragione l'elemento ideale in questione, che vedremo nel § I.8.2 serve essenzialmente per due scopi: analisi grossolana e rapida dei circuiti contenenti componenti attivi; derivazione di circuiti equivalenti.

La maggioranza degli elementi ideali attivi due-ponte si ottiene mediante dei procedimenti completamente avulsi dalla realtà e successivamente essi vengono utilizzati, insieme agli usuali elementi bipolarì ideali nei circuiti equivalenti dei componenti reali.

A causa di questa tecnica, esistono numerosi elementi ideali attivi, non tutti indispensabili, nel senso cioè che si può rappresentare l'uno come aggregato di altri. La loro conoscenza è utile, in quanto si prestano con efficacia diversa al modellamento dei componenti reali nelle diverse situazioni di impiego.

È infine opportuno mettere in evidenza che le due porte di ciascun elemento possono essere completamente separate, come accade negli elementi «bilanciati» oppure possono avere un terminale in comune, come accade negli elementi sbilanciati. In fig. I.8.1 sono riportati i simboli relativi ai due casi.



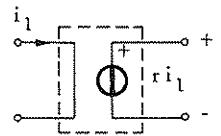
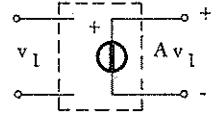
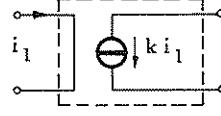
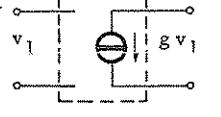
Fig. I.8.1 - Simboli usati per gli elementi bilanciati a) e sbilanciati b).

I.8.1 - Generatori controllati.

I generatori controllati sono elementi attivi ideali due-ponte caratterizzati dal fatto che la grandezza impressa è proporzionale tramite una costante che prende il nome di parametro di controllo ad un'altra grandezza elettrica applicata al loro ingresso. Dipendentemente dal fatto che la grandezza impressa e quella di controllo possono essere una

tensione od una corrente, si hanno quattro tipi di generatori controllati. Per comodità, si riportano in tab.I.8.1 per ciascuno dei quattro tipi il nome particolare usato, le relazioni costitutive con riferimento a figura I.8.1, il simbolo usato per rappresentarli nel caso bilanciato, le dimensioni del parametro di controllo.

TABELLA I.8.1 - Vari tipi di generatori controllati.

Generatore di tensione controllato in corrente (transimpedenza)	$v_2 = r i_1$ $v_1 = 0$		Ω
Generatore di tensione controllato in tensione	$v_2 = A v_1$ $i_1 = 0$		Adimensionale
Generatore di corrente controllato in corrente	$i_2 = k i_1$ $v_1 = 0$		Adimensionale
Generatore di corrente controllato in tensione (transammettenza)	$i_2 = g v_1$ $i_1 = 0$		Ω^{-1}

I generatori controllati sono tra gli elementi ideali attivi più usati. È importante notare che ciascuno di essi è sufficiente ad individuare il circuito equivalente di qualsiasi componente reale quando venga unito agli elementi bipolar passivi. In particolare è possibile dedurre tutte e quattro i tipi di generatori controllati a partire da uno solo di essi.

A titolo esemplificativo, viene mostrato in fig.I.8.2 lo schema di un generatore di tensione controllato in corrente, ottenuto con tre transammettenze. La validità dello schema può essere accertata direttamente usando la prima legge di Kirchhoff.

È facile verificare che i generatori controllati sono elementi non-reciproci, controllando che essi non soddisfano la (I.5.2).

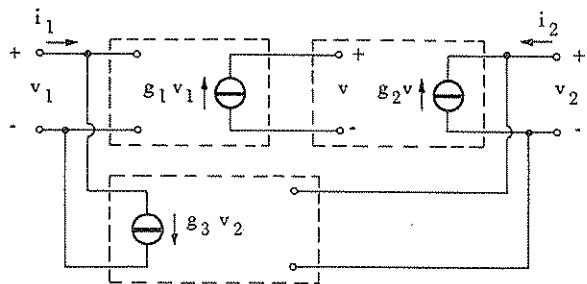


Fig.I.8.2 - Transimpedenza ottenuta con tre transmettrenze. Il parametro di controllo vale $1/g_3$ e $v_1 = 0$. I valori di g_1 e g_2 sono arbitrari, purchè diversi da zero.

I.8.2 - Nullore.

Il nullore è un elemento ideale attivo caratterizzato dalle seguenti relazioni costitutive:

$$(I.8.1) \quad \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ i_1 &= 0 \end{aligned}$$

È evidente che l'assenza nelle (I.8.1) delle grandezze elettriche della seconda porta, implica che queste possono assumere qualsiasi valore. Il simbolo usato è riportato in fig.I.8.3.



Fig.I.8.3 - Simbolo usato per il nullore bilanciato a) e sibilanciato b).

Il nullore è l'unico elemento ideale attivo due-ponte che si ottiene mediante un procedimento di idealizzazione. In fig.I.8.4 sono riportati i fondamenti di tale procedimento, relativamente all'amplificatore operazionale ed al transistore.

Mediante il nullore è possibile ottenere qualsiasi altro elemento ideale attivo due porte. Per vedere ciò, basta mostrare che è possibile ottenere una transammettenza mediante un circuito contenente nullori e resistori passivi. Ciò è riportato in fig.I.8.5.

E' stato detto nell'introduzione al § I.8 che l'elemento ideale ottenuto per idealizzazione di componenti attivi reali, serve essenzialmente per due scopi. Il primo è quello di permettere un'analisi rapida, anche

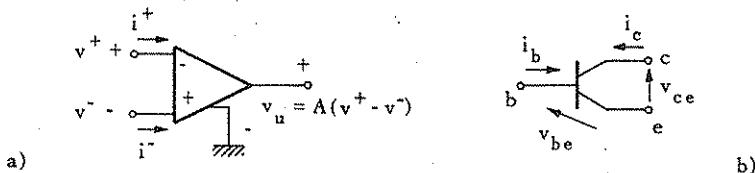


Fig.I.8.4 - Procedimento di idealizzazione che porta al nullore: a) *Amplificatore operazionale*: si ottiene il nullore bilanciato al tendere di i^+ e di i^- a zero e di A all'infinito. b) *Transistore (NPN o PNP)*: si ottiene il nullore sbilanciato con morsetto comune coincidente con l'emettitore, morsetto contrassegnato dallo 0 con la base e morsetto contrassegnato con ∞ con il collettore al tendere a zero di i_b e di v_{be} .

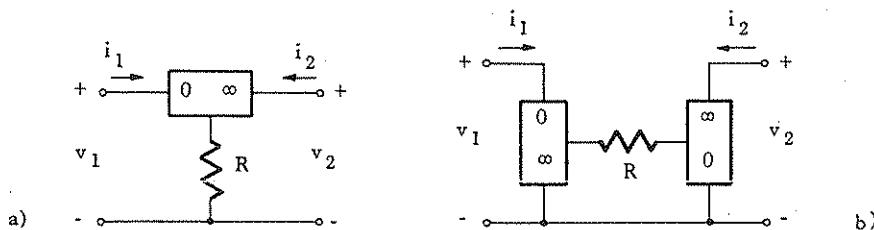


Fig.I.8.5 - Schema di una transammettanza sbilanciata ottenuta con nullori sbilanciati e resistori passivi: a) caso del parametro di controllo positivo; b) caso del parametro di controllo negativo. Il parametro di controllo ha ampiezza $1/R$ in tutte e due i casi.

se grossolana, di circuiti contenenti componenti reali attivi. Questo punto verrà sviluppato nel Cap. II.

Per quanto riguarda il secondo punto, cioè la possibilità di derivare circuiti equivalenti, anche se solo da un punto di vista ideale, lo considereremo qui di seguito. La proprietà del nullore, che è fondamentale a questo riguardo, è:

- 1) La possibilità di scinderlo in una coppia di bipoli, di per sé stessi anomali ed assurdi, se considerati separatamente, quali il nullatore ed il noratore. Tali elementi ideali sono definiti in fig.I.8.6. In fig. I.8.7, sono riportati gli schemi bilanciato e sbilanciato del nullore, ottenuti con la coppia nullatore-noratore;

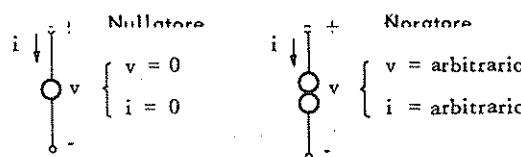


Fig.I.8.6 - Relazioni costitutive e simboli per il nullatore e per il noratore.

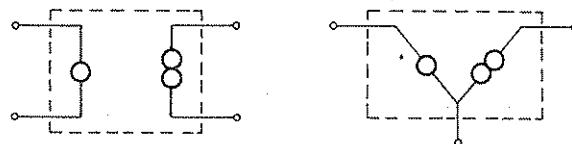


Fig.I.8.7 - Schema bilanciato e sbilanciato del nullore, ottenuto tramite la coppia nullatore-noratore.

- 2) La possibilità di ottenere con nullatori e noratori i circuiti equivalenti del corto-circuito e del circuito aperto, come messo in evidenza in figura I.8.8.

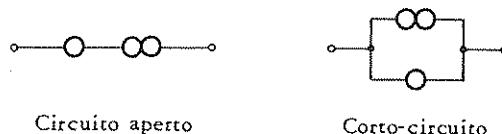


Fig.I.8.8 - Circuiti equivalenti del corto-circuito e del circuito aperto, ottenuti tramite il nullatore ed il noratore.

Il modo di procedere per derivare circuiti equivalenti, dal punto di vista esterno, ma internamente diversi, consiste nel materializzare nel circuito di partenza un circuito aperto oppure un corto-circuito o più di uno contemporaneamente e quindi nel sostituire agli elementi ideali attivi i nullori nella forma di fig.I.8.7. A questo punto associando opportunamente nullatori e noratori in modo da formare coppie, si ottengono nell'interno del circuito sia nullori in posizione diversa da quella di partenza sia un numero maggiore di essi. È evidente che il nuovo circuito, se si cerca di realizzarlo con componenti reali, si comporterà usualmente in modo molto diverso da quello di partenza, in quanto la lontananza degli elementi ideali dai componenti reali gioca un effetto diverso dipendentemente dal circuito considerato.

Illustriamo l'uso del nullore mediante un esempio molto semplice che riguarda la trasformazione di un circuito costituito da un amplificatore operazionale in un altro, equivalente dal punto di vista ideale, contenente due transistori. Il circuito di partenza è riportato in fig.I.8.9 a). Sostituendo all'amplificatore operazionale la coppia nullatore-noratore, il circuito diviene come mostrato nella parte b) della figura. Introducendo in parallelo ad R_2 la coppia nullatore-noratore equivalente al circuito aperto, si ottiene lo schema della parte c) della figura, equivalente al precedente. Raggruppando i nullatori e noratori, come indicato nella parte c) e sostituendo alle coppie ottenute i transistori, si ottiene lo schema delle parte d). I due circuiti mostrati in a) e d) sono equivalenti dal punto di vista ideale.

Il nullore è un elemento non reciproco, come si può verificare direttamente controllando che esso non soddisfa la (I.5.2).

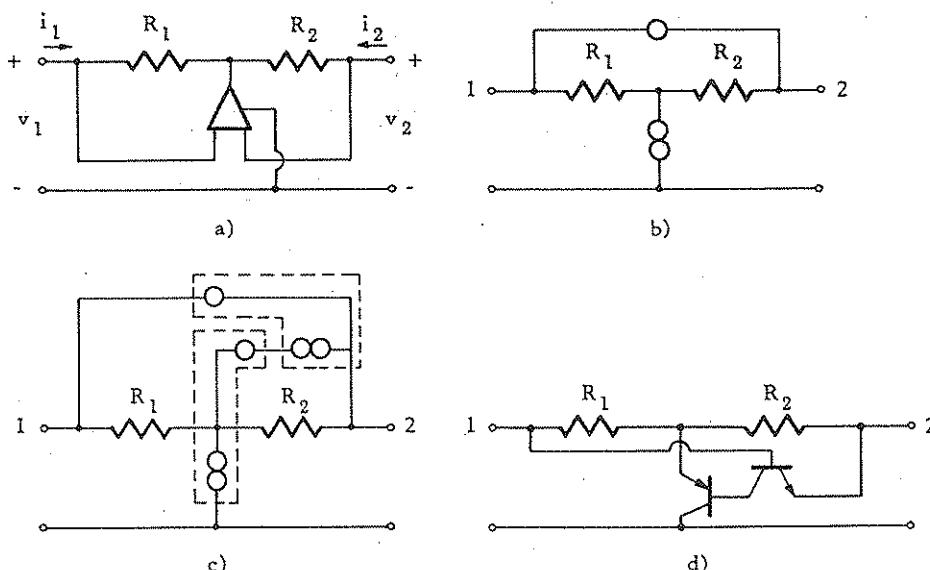


Fig.1.8.9 - Derivazione di circuiti equivalenti all'esterno. L'equivalenza vale nel caso ideale.

Esempio 1.8.1

Nel circuito di fig. I.8.10 determinare la tensione v_u e la corrente erogata dal noratore.

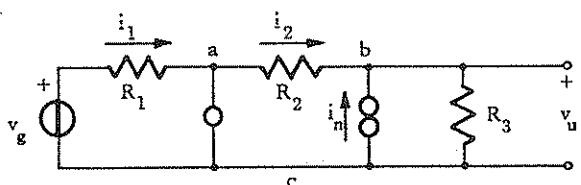


Fig.1.8.10 - Circuito considerato nell'esempio 1.8.1.

Poiché i nodi a e c , per la presenza del nullatore, si trovano allo stesso potenziale, il generatore di tensione eroga una corrente pari a $i_1 = v_g / R_1$. D'altra parte, tale corrente è vincolata a percorrere il resistore R_2 , ai capi del quale si ottiene una tensione pari a $i_1 R_2$. Tenendo conto un'altra volta della presenza del nullatore e considerati i versi delle tensioni e delle correnti, si ottiene:

$$v_u = - (R_2 / R_1) v_g .$$

Per la legge di Kirchhoff al nodo b, la corrente nel noratore risulta pari a:

$$i_n = -i_1 + \frac{v_u}{R_3} = -\frac{v_g}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) .$$

Occorre notare che il funzionamento del circuito considerato dipende dal comportamento anomalo dei nodi *a* e *c*, che per la presenza del nullatore, sono distinti ma si trovano allo stesso potenziale. Nei casi in cui il nodo *c* è connesso a massa, il nodo *a* viene detto *massa virtuale*.

1.9 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte passivi lineari e permanenti.

Gli elementi ideali che considereremo sono tre, di cui due provengono da un procedimento di idealizzazione del tipo di quello che è usato nel caso degli elementi bipolarì passivi. Gli elementi in questione sono le «induttanze mutuamente accoppiate» ed il «trasformatore ideale». Il procedimento di idealizzazione a partire dal componente reale corrispondente è molto più spinta per il trasformatore che per gli induttori mutuamente accoppiati. Il terzo elemento che considereremo è il giratore; anch'esso può essere ottenuto con un procedimento di idealizzazione di un componente reale. Tuttavia tale idealizzazione è eccessiva e perciò è più appropriato pensare tale elemento ideale ottenuto con un procedimento simile a quello impiegato nel caso attivo, ma applicato al caso degli elementi ideali passivi non-reciproci.

1.9.1 - Induttori mutuamente accoppiati e trasformatore ideale.

Gli induttori mutuamente accoppiati costituiscono un elemento ideale a due-porte, definito dalle seguenti relazioni costitutive, con riferimento a fig. I.8.1:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

(I.9.1)

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

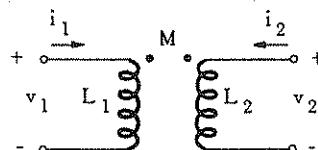
in cui L_1 ed L_2 prendono il nome di induttanze proprie ed M induttanza mutua. Nel caso dell'elemento passivo, che è l'unico che interessa, valgono le seguenti limitazioni:

$$(I.9.2) \quad L_1 \geq 0 \quad L_2 \geq 0 \quad |M| \leq \sqrt{L_1 L_2} .$$

Il simbolo usato per rappresentare questo elemento è mostrato in fig. I.9.1. È importante rilevare che:

1) nel simbolo usato sono presenti i simboli di due induttori di induttanza L_1 ed L_2 . Ciò, d'altra parte, non deve meravigliare in quanto l'elemento a due porte, se ridotto ad una, ad esempio aprendo una porta, coincide esattamente con un induttore;

Fig.I.9.1 - Simbolo usato per gli induttori mutualmente accoppiati.



2) nel simbolo usato è presente una coppia di punti. Tali punti indicano che nel calcolo della tensione su un induttore, la caduta di tensione provocata dalla corrente che scorre nell'altro (accoppiato) è concorde a quella provocata dalla corrente propria, se le due correnti si trovano nella stessa posizione rispetto ai suddetti punti, cioè tutte e due entranti o uscenti. Nel caso contrario le due cadute di tensione sono discordi, come indicato in fig.I.9.2.

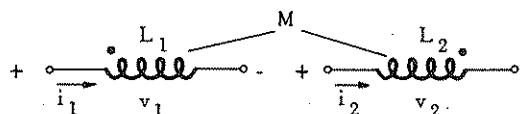


Fig.I.9.2 - Induttori mutualmente accoppiati con versi discordi delle correnti. Risulta:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} ; \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

L'elemento «induttori mutualmente accoppiati» è analogo dal punto di vista energetico ad un induttore, in particolare passivo se le tre costanti L_1 , L_2 , M soddisfano le (I.9.2). Di conseguenza in esso ha luogo un trasferimento reversibile di energia vincolato. Facciamo vedere la necessità e sufficienza delle (I.9.2) per la passività dell'elemento. A questo scopo è necessario calcolare l'energia immagazzinata nell'elemento a partire da un istante remoto ($t = -\infty$), in cui l'elemento stesso è a riposo. Si ha:

$$\begin{aligned}
 (I.9.3) \quad \mathcal{E}(t) &= \int_{-\infty}^t (v_1 i_1 + v_2 i_2) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M \left(i_2 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{di_2}{dt} \right) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2
 \end{aligned}$$

Supponiamo che l'elemento sia passivo, allora $\mathcal{E}(t) \geq 0$ qualunque sia il valore di i_1 ed i_2 . Ciò implica:

$$(I.9.4) \quad \begin{aligned} \text{per } i_2 = 0 & \quad L_1 \geq 0 \\ \text{per } i_1 = 0 & \quad L_2 \geq 0 \\ \text{per } i_2 = \pm i_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} ; \quad i_1 \neq 0 & \Rightarrow \mathcal{E}(t) = L_1 i_1^2 \pm M \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_1^2 \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1 L_2} \end{aligned}$$

Supponiamo quindi che siano soddisfatte le (I.9.2); facciamo vedere che l'elemento è passivo, cioè $\mathcal{E}(t) \geq 0$ per qualsiasi i_1 ed i_2 . In particolare, se $i_1 = 0$ oppure $i_2 = 0$, la verifica è immediata. Nel caso generale, riscriviamo $\mathcal{E}(t)$ come segue:

$$(I.9.5) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \left[1 + 2 \frac{M}{L_1} \frac{i_2}{i_1} + \frac{L_2}{L_1} \left(\frac{i_2}{i_1} \right)^2 \right]$$

La quantità entro parentesi vale al minimo, al variare di i_2/i_1 :

$$(I.9.6) \quad 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

e quindi è non-negativa per le (I.9.2), così come $1/2 L_1 i_1^2$, ciò che dimostra che $\mathcal{E}(t) \geq 0$.

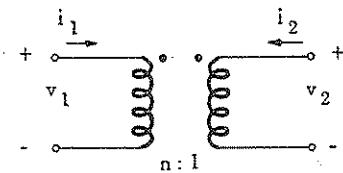
Gli induttori mutuamente accoppiati sono un elemento reciproco. La verifica di tale affermazione non può essere effettuata con la (I.5.2), in quanto si tratta di un elemento immagazzinatore di energia per il quale non vale la legge di reciprocità di Lorentz. La verifica potrà essere effettuata solo in un dominio trasformato, dove l'effetto dell'energia interna può essere disattivato.

Il trasformatore ideale è un elemento passivo due-porte, definito dalle seguenti relazioni costitutive:

$$(I.9.7) \quad \begin{aligned} v_1 &= n v_2 \\ i_1 &= -\frac{1}{n} i_2 \end{aligned}$$

in cui n prende il nome di rapporto di trasformazione. Il simbolo è riportato in fig.I.9.3. Si vede dalla figura che il simbolo usato è molto simile a quello degli induttori mutuamente accoppiati, tuttavia una differenza fondamentale è la presenza solo di n al posto delle tre costanti L_1 , L_2 , M .

Fig. I.9.3 - Simbolo usato per il trasformatore ideale.



Il trasformatore non assorbe o cede potenza e quindi energia; infatti:

$$(I.9.8) \quad p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = n v_2 \left(-\frac{1}{n} i_1 \right) + v_2 i_2 = 0$$

TABELLA I.9.1 - Variazione di livello degli elementi bipolarari ideali per effetto del trasformatore.

Resistore	 Resistore $n^2 R$	$v_1 = nv_2 = n(-Ri_2) = nRi_2 =$ $= nR(-n \cdot i_1) = n^2 Ri_1$
Induttore	 Induttore $n^2 L$	$v_1 = nv_2 = n \left(-L \frac{di_2}{dt} \right) = -nL \frac{di_2}{dt} =$ $= -nL \frac{d}{dt} (-ni_1) = n^2 L \frac{di_1}{dt}$
Condensatore	 Condensatore $\frac{1}{n^2 C}$	$i_1 = -i_2 = -\frac{1}{n} \left(-C \frac{dv_2}{dt} \right) = \frac{C}{n} \frac{dv_2}{dt} =$ $= \frac{C \cdot d}{n dt} \left(\frac{v_1}{n} \right) = \frac{C}{n^2} \frac{dv_1}{dt}$

Le sue proprietà tipiche sono:

- 1) la capacità di alterare le grandezze elettriche passando da una porta all'altra;
- 2) la capacità di alterare il livello degli elementi ideali bipolari, quando chiusi su una sua porta, come messo in evidenza in Tab.I.9.1.

Tali proprietà sono di fondamentale importanza nelle applicazioni del corrispondente componente reale.

E infine da mettere in evidenza, che, se ciò è comodo in qualche particolare applicazione, è possibile usare schemi del trasformatore ideale ottenuti con qualcuno degli elementi ideali due-ponte attivi. In particolare in fig.I.9.4 riportiamo lo schema ottenuto per un trasformatore sbilanciato, usando il nullore sbilanciato e la transammettenza.

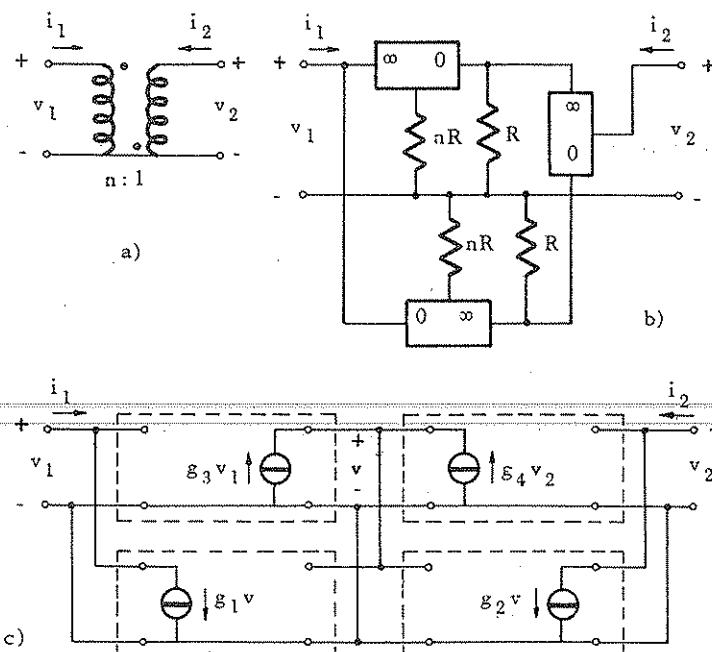


Fig.I.9.4 - Schemi del trasformatore ideale sbilanciato a) ottenuti con nullori sbilanciati in b) e con transammettenze sbilanciate in c). In quest'ultimo caso deve essere $g_4/g_3 = n$ e $g_2/g_1 = n$.

Il trasformatore ideale è un elemento reciproco. È facile verificare che esso soddisfa la (I.5.2).

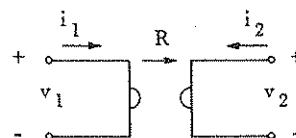
I.9.2 - Giratore.

Il giratore è l'unico elemento ideale due-porte passivo *non-reciproco* che si abbia a disposizione. Le sue relazioni costitutive sono, con riferimento a fig. I.9.5:

$$(I.9.9) \quad \begin{aligned} v_1 &= -R i_2 \\ v_2 &= R i_1 \end{aligned}$$

in cui R è la resistenza di girazione. Il simbolo comunemente usato è mostrato in fig. I.9.5.

Fig.I.9.5 - Simbolo per il giratore.



La passività del giratore è facilmente verificabile, utilizzando la (I.9.9). Precisamente, si ha, come per il trasformatore ideale:

$$(I.9.10) \quad p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = -R i_2 i_1 + R i_1 i_2 = 0$$

Perciò il giratore non assorbe né cede potenza e quindi energia.

Per quanto riguarda la reciprocità, è sufficiente controllare che esso non soddisfa la legge di reciprocità di Lorentz.

Infatti, applicando le (I.9.9) alla (I.5.2), si ha:

$$(I.9.11) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^2 v_k^{(1)} i_k^{(2)} &= -R i_2^{(1)} i_1^{(2)} + R i_1^{(1)} i_2^{(2)} \neq \\ \sum_{k=1}^2 i_k^{(1)} v_k^{(2)} &= -R i_1^{(1)} i_2^{(2)} + R i_2^{(2)} i_1^{(1)} \end{aligned}$$

È interessante ricordare che il nome di giratore dato a questo elemento deriva dalla sua caratteristica proprietà di scambiare tra loro la tensione e corrente, per cui tale elemento permette di trasformare un induttore in un condensatore e viceversa. In Tab.I.9.2 viene riassunto lo effetto del giratore sui bipoli ideali. Particolarmenete importante è la trasformazione di un condensatore in un induttore, che è la base dell'impiego del giratore nei microcircuiti, dove appunto è del tutto assente lo induttore reale tradizionale.

TABELLA I.9.2 - Effetto del giratore sui bipoli ideali.

Resistore	Resistore di resistenza $\frac{R^2}{R_u}$		$v_1 = R i_2 = R \left(-\frac{v_2}{R_u} \right)$ $= \frac{R}{R_u} v_2 = \frac{R}{R_u} R i_1 = \frac{R^2}{R_u} i_1$
Condensatore	Induttore di induttanza $R^2 C$		$v_1 = -R i_2 = R \left(-C \frac{dv_2}{dt} \right) =$ $= RC \frac{d}{dt} (R i_1) = R^2 C \frac{di_1}{dt}$
Induttore	Condensatore di capacità $\frac{L}{R^2}$		$i_1 = \frac{1}{R} v_2 = \frac{1}{R} \left(-L \frac{di_2}{dt} \right) =$ $= -\frac{L}{R} \frac{d}{dt} \left(-\frac{v_1}{R} \right) = \frac{L}{R^2} \frac{dv_1}{dt}$

È infine da mettere in evidenza, che, se ciò è comodo in qualche applicazione particolare, è possibile usare schemi del giratore ottenuti con qualcuno degli elementi ideali attivi. In particolare in fig. I.9.6 riportiamo lo schema di un giratore sbilanciato ottenuto mediante nullori sbilanciati e transammettenze.

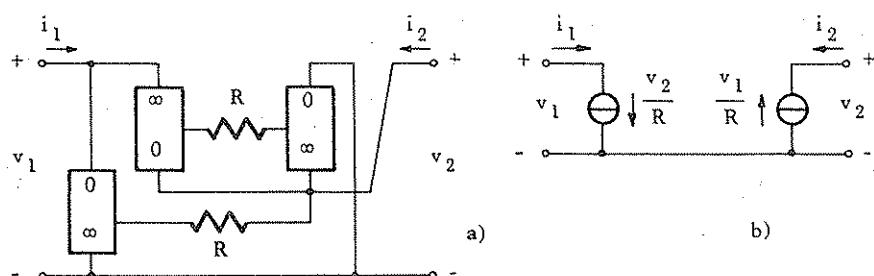


Fig.I.9.6 - Schemi del giratore sbilanciato ottenuti con nullori sbilanciati a) e con transammettenze b).

1.10 - Grafo di un circuito e sue proprietà topologiche.

Nell'ambito di validità delle ipotesi di linearità, permanenza e costanti concentrate, un circuito reale può essere rappresentato mediante la connessione di elementi ideali del tipo di quelli visti nei paragrafi precedenti. Tali elementi sono sempre riconducibili a due terminali mediante l'uso di un generatore controllato oppure del nullore, quando usato nella configurazione nullatore-noratore. Di conseguenza il generico circuito ideale è costituito da un insieme di elementi a due terminali, connessi in modo qualunque, caratterizzati da due grandezze elettriche (tensione e corrente).

Se R è il numero degli elementi a due terminali suddetti, le grandezze elettriche sono rispettivamente R tensioni ed R correnti. Queste $2R$ grandezze debbono soddisfare due gruppi di equazioni:

1) quelle che conseguono dalle relazioni costitutive. Si tratta di equazioni che legano tensione e corrente di un solo elemento nel caso che tale elemento rappresenti un componente a due terminali, come ad esempio il resistore, l'induttore, ecc. Sono invece equazioni che legano tensioni e correnti di due o più elementi nel caso che questi elementi rappresentino un componente a tre o più terminali, come ad esempio i generatori controllati, il nullore, il giratore, il trasformatore ecc.;

2) quelle che conseguono dalle due leggi di Kirchhoff.

In particolare, le equazioni del secondo gruppo sono omogenee e del tutto indipendenti dalla natura degli elementi. Ciò implica che l'insieme delle R correnti si può sempre suddividere in due sottoinsiemi di cui uno derivabile dall'altro direttamente. Il sottoinsieme da cui deriviamo le correnti di tutti gli elementi lo indicheremo nel seguito come «*sottoinsieme delle correnti indipendenti*». Esistono numerosi sottoinsiemi di questo tipo, come vedremo successivamente. In modo del tutto simile si può definire un «*sottoinsieme delle tensioni indipendenti*». La individuazione dei sottoinsiemi delle tensioni e delle correnti indipendenti è di importanza fondamentale per la soluzione del problema della analisi di un circuito. D'altra parte, tale individuazione è basata sulle leggi di Kirchhoff; quindi non dipende dalla natura degli elementi, ma solo dal numero degli elementi presenti e dal modo in cui sono connessi. Per questa ragione accanto al circuito conviene considerare il suo «grafo», intendendo per grafo ciò che si ottiene dal circuito sostituendo ciascun elemento con un segmento, come mostrato in fig. I.10.1 b).

Molto spesso il grafo viene orientato, nel senso che in ogni suo ramo si assume assegnato un verso. Tale verso coincide usualmente con

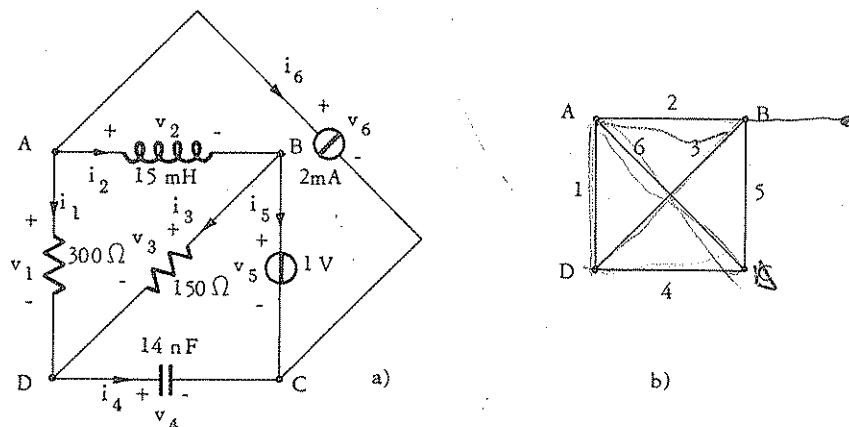


Fig. I.10.1 - Grafo di un circuito.

quello della corrente che percorre il corrispondente elemento e fornisce anche il verso positivo della tensione, se si suppone di usare versi positivi coordinati per le due grandezze elettriche di ciascun elemento. Ciò è mostrato in fig. I.10.2 per l'esempio già considerato.

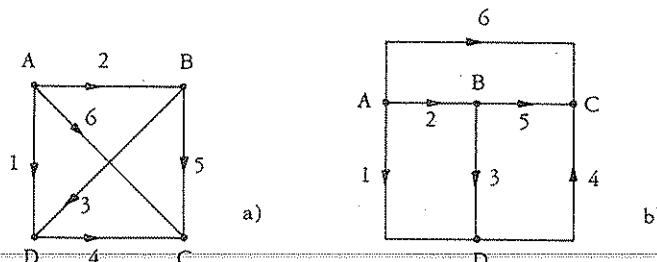


Fig. I.10.2 - Grafi orientati corrispondenti al circuito di fig. I.10.1 a).

Le proprietà del grafo che vengono usate nell'ambito delle leggi di Kirchhoff sono quelle topologiche, cioè quelle proprietà geometriche che non vengono alterate da una deformazione continua che trasformi la configurazione iniziale in un'altra configurazione riferibile alla prima mediante una corrispondenza biunivoca. Un esempio di deformazione di questo tipo è quella che fa passare dal grafo orientato di fig. I.10.2 a) a quello di fig. I.10.2 b), ambedue corrispondenti al circuito di fig. I.10.1 a).

I.10.1 - Nozioni topologiche fondamentali.

Le nozioni topologiche introdotte implicitamente fino a questo momento sono quelle di nodo e ramo, essendo il ramo il segmento che nel grafo corrisponde ad un elemento del circuito ed il nodo il punto del

grafo in cui sono attaccati due o più rami. Le nozioni successive sono quelle di maglia e taglio, che scaturiscono direttamente come ausilio alle leggi di Kirchhoff. Infatti nel caso della prima legge di Kirchhoff si considera l'equilibrio delle correnti che attraversano una superficie finita chiusa o più precisamente una linea finita chiusa, supponendo di rappresentare il circuito su un piano. Le linee chiuse che interessano sono quelle che intersecano ciascun elemento non più di una volta ed in corrispondenza ad un suo terminale. È evidente che a ciascuna di queste linee chiuse corrisponde un insieme di rami del grafo, cioè quelli che rappresentano gli elementi toccati dalla linea stessa. Questo insieme di rami prende il nome di «taglio». In particolare nel caso dei circuiti connessi, cioè dei circuiti in cui è possibile andare con continuità da un nodo a qualsiasi altro, il «taglio» è un insieme di rami tali che la loro eliminazione rende il grafo risultante non connesso». In fig.I.10.3 viene mostrata una linea chiusa ed il corrispondente taglio per il circuito connesso di fig.I.10.1.

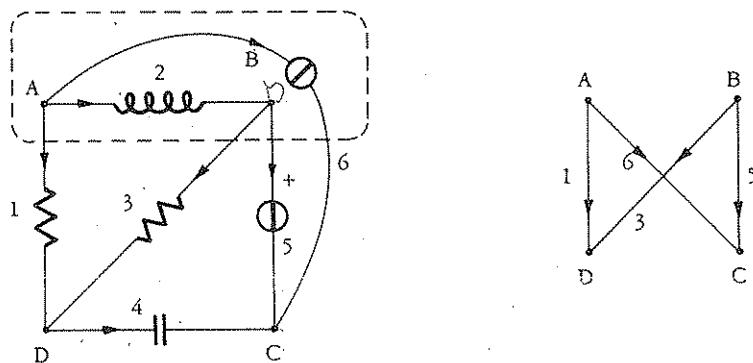


Fig.I.10.3 - Esempio di taglio.

Nel caso della seconda legge di Kirchhoff si considera nel circuito l'equilibrio delle tensioni lungo una linea chiusa e finita. Le linee che interessano sono quelle che intersecano gli elementi solo in corrispondenza ai loro morsetti (ambedue contemporaneamente). È evidente che a ciascuna di queste linee corrisponde un insieme di rami del grafo, cioè quelli che rappresentano gli elementi toccati dalla linea. Questo insieme di rami prende il nome di maglia. In fig.I.10.4 viene mostrata una linea chiusa e la corrispondente maglia per il circuito di fig.I.10.1.

Le nozioni di taglio e maglia sono fondamentali per esprimere le leggi di Kirchhoff per un circuito. Ciò risulta chiaro con riferimento agli esempi di fig.I.10.3 e I.10.4. Nel primo caso, infatti, l'equazione di equilibrio relativa alla prima legge di Kirchhoff è:

$$(I.10.1) \quad i_1 + i_6 + i_3 + i_5 = 0$$

e nel secondo caso, relativamente alla seconda legge di Kirchhoff, è:

$$(I.10.2) \quad v_1 - v_2 - v_3 = 0$$

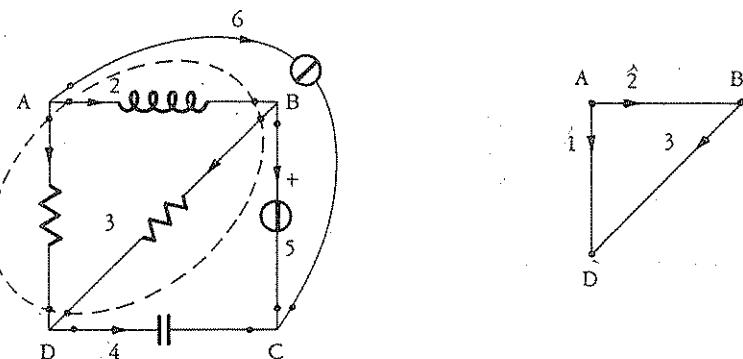


Fig.I.10.4 - Esempio di maglia.

È evidente che nel primo caso le correnti sono state considerate positive uscenti dalla linea chiusa e nel secondo caso il verso di percorrenza della linea chiusa è stato quello orario.

I.10.2 - Albero e co-albero.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che dalle leggi di Kirchhoff consegue che le tensioni e le correnti possono essere suddivise in due gruppi, da considerarsi dipendenti l'uno dall'altro. È evidente che ai fini della soluzione dei problemi di analisi interessa avere a disposizione metodi per individuare tali gruppi di variabili indipendenti. Questa individuazione è immediata se si fa uso delle nozioni topologiche di albero e co-albero.

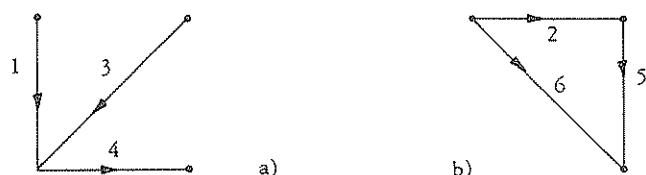


Fig.I.10.5 - a) Un albero del circuito di fig.I.10.1; b) co-albero corrispondente all'albero mostrato in a).

L'albero è un insieme connesso di rami che comprende tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi. In fig.I.10.5 riportiamo un esempio di albero per il circuito di fig.I.10.1. Esistono per uno stesso circuito numerosi alberi. La determinazione del loro numero e delle loro configurazioni è possibile; nel caso presente tale determinazione non verrà trattata in quanto non verranno sviluppati i metodi di analisi esclusivamente topologici che la richiedono, basati sulla terza e quarta legge di Kirchhoff.

Associata alla nozione di albero è quella di co-albero. Il co-albero è l'insieme dei rami del grafo non appartenenti all'albero.

E facile rendersi conto che se R sono i rami, N i nodi di un grafo connesso, allora $N - 1$ è il numero dei rami dell'albero e quindi $R + 1 - N$ quello dei rami del co-albero. Per vedere ciò supponiamo di costruire l'albero con i rami del grafo. Prendiamo a questo scopo un primo ramo; esso implica la considerazione contemporanea di due nodi, cioè quelli tra cui esso è attaccato. Il secondo ramo da considerare deve necessariamente esserlo uno di quelli attaccati ad uno qualunque dei due nodi precedenti, in quanto per definizione l'albero è connesso. D'altra parte tale ramo esiste in quanto per ipotesi anche il circuito è connesso. Procedendo così, si potrà ogni volta inserire un nuovo ramo, in modo da conservare la connessione dell'insieme di rami che si sta costituendo, aggiungendo sempre un nuovo nodo. Infatti ogni ramo aggiunto non può essere attaccato tra due nodi già facenti parti dell'insieme in questione, altrimenti tale aggiunta provocherebbe un percorso chiuso contro la definizione di albero. La costruzione precedente termina quando tutti i nodi del grafo sono stati inclusi. È evidente che ogni ramo inserito ha implicato l'aggiunta di un nodo, ad eccezione del primo che ne ha implicati due. Quindi il numero dei rami dell'albero è $N - 1$.

L'aggiunta di un ramo qualsiasi del co-albero all'albero provoca una maglia, come conseguenza della definizione di albero. Esistono perciò per un dato albero $R - N + 1$ maglie di questo tipo, a cui si dà il nome di maglie fondamentali associate all'albero. Per il circuito di figura I.10.1 e relativamente all'albero di fig.I.10.5, le maglie fondamentali sono quelle mostrate in fig.I.10.6. Per quanto detto una maglia fondamentale contiene uno ed un solo ramo del co-albero ed ogni ramo del co-albero compare in una ed una sola maglia fondamentale.

Togliendo un ramo dell'albero, questo viene suddiviso in due parti. Ciò implica che è possibile individuare un taglio costituito da quel ramo dell'albero e da altri rami appartenenti solo al co-albero. Un taglio di questo tipo prende il nome di taglio fondamentale; è evidente che, associati ad un albero, si hanno $N - 1$ tagli fondamentali, cioè tanti quanti sono i rami dell'albero.

$R = \text{Rami}$
 $N = \text{Nodi}$

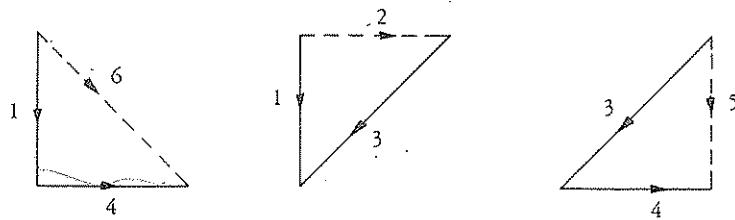


Fig.I.10.6 - Le maglie fondamentali associate all'albero di fig.I.10.5 per il circuito di fig.I.10.1.

In fig.I.10.7 sono mostrati i tagli fondamentali del circuito di figura I.10.1 relativi all'albero di fig.I.10.5. Per quanto detto *un taglio fondamentale contiene uno ed un solo ramo dell'albero ed ogni ramo dell'albero compare in uno ed un solo taglio fondamentale*.

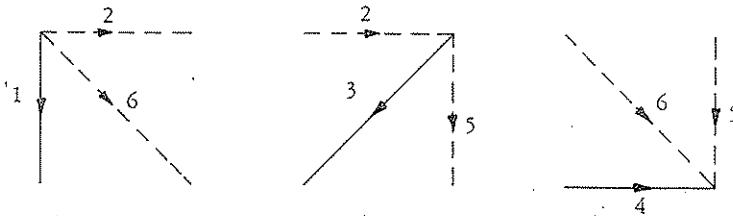


Fig.I.10.7 - I tagli fondamentali associati all'albero di fig.I.10.5 per il circuito di fig.I.10.1. Tratteggiati sono indicati i rami del co-albero.

E facile constatare che le tensioni dei rami dell'albero costituiscono un insieme di tensioni indipendenti. Basta far vedere che:

- 1) non esistono legami tra tali quantità;
- 2) le tensioni dei rami del co-albero sono esprimibili in funzione di esse.

Il punto 1) è conseguenza della definizione di albero, che implica l'assenza di maglie. Il punto 2) si deduce scrivendo le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali. Infatti tali equazioni contengono ciascuna una ed una sola tensione dei rami del co-albero e sono in numero uguale al numero di tali rami.

Per il circuito di fig.I.10.1 con l'albero di fig.I.10.5, si ha:

$$(I.10.3) \quad v_6 = v_1 + v_4 \quad ; \quad v_2 = v_1 - v_3 \quad ; \quad v_5 = v_3 + v_4$$

Le correnti dei rami del co-albero costituiscono un insieme di correnti indipendenti. Infatti non esistono legami tra tali quantità, poiché non vi può essere un taglio costituito solo dai rami del co-albero,

essendo l'albero un insieme connesso di rami. Inoltre, le correnti dei rami dell'albero sono direttamente esprimibili in funzione di quelle del co-albero, come si deduce considerando le equazioni di equilibrio dei tagli fondamentali. Tali equazioni contengono una ed una sola delle correnti dei rami dell'albero e sono in numero esattamente uguale al numero dei rami dell'albero. Per il circuito di fig.I.10.1 con l'albero di fig.I.10.5, si ha:

$$(I.10.4) \quad i_1 = -i_2 - i_6 \quad i_3 = i_2 - i_5 \quad i_4 = -i_5 - i_6$$

I tagli e le maglie fondamentali relative ad uno stesso albero godono di alcune proprietà che mettiamo in evidenza di seguito.

Proprietà I.10.1 - «La maglia fondamentale relativa ad un ramo del co-albero comprende tutti e soli i rami dell'albero i cui tagli fondamentali comprendono quel ramo».

Per verificare questa proprietà consideriamo la maglia fondamentale relativa ad un ramo del co-albero c_k . Siano a_1, a_2, \dots, a_{n_k} i rami dell'albero che fanno parte di questa maglia. Consideriamo quindi la linea chiusa che genera il taglio fondamentale relativo a ciascuno di questi rami. La linea interseca il ramo dell'albero in questione, penetra nell'interno della maglia fondamentale che si sta considerando, deve intersecare per uscire il ramo c_k , in quanto non può toccare gli altri rami della maglia, che appartengono tutti all'albero. Ciò dimostra la proprietà.

Proprietà I.10.2 - «Il taglio fondamentale relativo ad un ramo dell'albero comprende tutti e soli i rami del co-albero le cui maglie fondamentali comprendono quel ramo».

Per verificare questa proprietà consideriamo il taglio fondamentale relativo ad un ramo dell'albero a_i . Siano c_1, c_2, \dots, c_{n_i} i rami del co-albero che fanno parte di questo taglio. Consideriamo quindi la linea

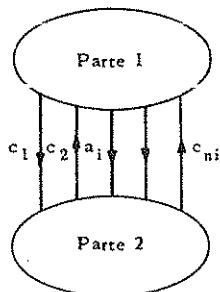


Fig.I.10.8 - Taglio fondamentale relativo al ramo dell'albero a_i .

chiusa che genera la maglia fondamentale relativa a ciascuno di questi rami. Con riferimento a fig. I. 10.8, si vede chiaramente che questa linea è costituita da una porzione coincidente con il ramo del co-albero d'interesse, da una porzione di albero inclusa nella parte 1, da una porzione di albero inclusa nella parte 2, e necessariamente dal ramo a_i , in quanto questo rappresenta l'unica parte di albero che collega le due parti 1 e 2 di figura. Ciò dimostra la proprietà.

Proprietà I.10.3 - «Siano a_i e c_j rispettivamente un ramo dell'albero e del co-albero tali che il taglio fondamentale relativo ad a_i comprenda c_j , allora il segno della corrente di c_j nell'equazione di equilibrio del taglio fondamentale relativo ad a_i è opposto a quello della tensione di a_i nell'equazione di equilibrio della maglia fondamentale relativa a c_j . Si suppone che le equazioni di equilibrio siano scritte in modo che la grandezza elettrica del ramo a cui si riferiscono appaia con il segno positivo».

La verifica di questa proprietà è immediata se facciamo riferimento a fig. I. 10.8, supponendo che c_j sia uno dei rami del co-albero che fanno parte del taglio fondamentale relativo ad a_i . Infatti, se c_j ed a_i sono concordi come verso nell'andare dalla parte 1 alla parte 2, allora la corrente di c_j ha segno positivo nell'equazione di equilibrio del taglio fondamentale di a_i . Contemporaneamente, nell'equazione di equilibrio della maglia fondamentale relativa a c_j , il segno della tensione di a_i è negativo, perché percorrendo la linea chiusa di questa maglia nel senso concorde con quello di c_j s'incontra in senso opposto il verso di a_i . Un discorso del tutto simile vale se i versi di c_j ed a_i sono discordi. Ciò dimostra la proprietà.

Dalle proprietà precedenti scaturisce come conseguenza più importante che, note le equazioni di equilibrio relative ai tagli fondamentali, si possono scrivere direttamente quelle relative alle maglie fondamentali e viceversa. Per vedere ciò, scriviamo le equazioni di equilibrio, relative ai tagli ed alle maglie fondamentali, come segue:

$$(I. 10.5) \quad [I_a] + [A][I_c] = 0$$

$$(I. 10.6) \quad [V_c] + [B][V_a] = 0$$

in cui: $[I_a]$ è il vettore la cui k -sima componente è la corrente del k -simo ramo dell'albero; $[V_a]$ è l'analogo su base tensioni; $[I_c]$ e $[V_c]$ sono definiti in modo simile per il co-albero; $[A]$ e $[B]$ si ottengono applicando direttamente le prime due leggi di Kirchhoff. Di conseguenza, queste matrici hanno come termini solo: $\pm 1,0$.

Come conseguenza delle prime due proprietà si deduce che se il termine $a_{ij} = 0$, allora $b_{ji} = 0$; analogamente se $a_{ij} \neq 0$, allora $b_{ji} \neq 0$. Inoltre, in base alla terza proprietà, risulta che $b_{ji} = -a_{ij}$. Ciò dimostra che:

$$(I.10.7) \quad [B] = -[A]^t$$

in cui t indica la trasposizione della matrice $[A]$.

La (I.10.7) può essere verificata direttamente sul circuito di figura I.10.1, relativamente all'albero di fig. I.10.5. Infatti, dalla (I.10.4) si ha:

$$(I.10.8) \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e dalla (I.10.3)

$$(I.10.9) \quad [B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

avendo scelto:

$$[I_a] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}; \quad [V_a] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; \quad [I_c] = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}; \quad [V_c] = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

I.10.3 - Le leggi di Kirchhoff non sono indipendenti: teorema del calore di Maxwell.

La relazione (I.10.7) mette in evidenza che le due leggi di Kirchhoff non sono indipendenti tra loro. Questa importante proprietà può essere ulteriormente approfondita, considerando un altro aspetto: quello della dissipazione di calore in un circuito costituito da resistori e generatori di tensione. Per tale circuito vale il teorema del calore di Maxwell, il cui enunciato è il seguente: «In un circuito costituito da resistori e generatori di tensione con grandezze impresse costanti, la potenza dissipata nei resistori all'equilibrio (calore prodotto nell'unità di tempo) è minima».

È interessante far vedere che, per il circuito precedente, supponendo valida solo la seconda legge di Kirchhoff, la condizione di minima dissipazione prevista dal teorema di Maxwell si verifica proprio in corrispondenza al soddisfacimento della prima legge di Kirchhoff.

A questo scopo, supponiamo il circuito costituito da resistori e generatori di tensione con grandezza impressa costante. Sceglieremo un albero tale che i generatori di tensione siano solo su di esso. Numeriamo i rami dell'albero in modo che i primi N_{ar} rami siano resistori ed i successivi N_{ag} siano generatori. Il calore sviluppato nell'unità di tempo nel circuito vale:

$$(I.10.10) \quad Q = \sum_{k=1}^{N_{ar}} \frac{1}{R_{ak}} v_{ak}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{R_{ci}} v_{ci}^2$$

in cui: R_{ak} è la resistenza del k -esimo ramo dell'albero, R_{ci} è la resistenza dell' i -esimo ramo del co-albero ($i = 1, \dots, N_c$).

La seconda legge di Kirchhoff, espressa tramite la (I.10.6), tenendo conto della (I.10.7), impone:

$$(I.10.11) \quad v_{ci} = \sum_{k=1}^{N_{ar}} a_{ki} v_{ak} + \sum_{j=1}^{N_{ag}} a_{Nar+j,i} v_{gj}$$

Il teorema di Maxwell impone che Q sia minima. Ciò si deve verificare sotto il vincolo della seconda legge di Kirchhoff, cioè sotto le (I.10.11). Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, occorre minimizzare rispetto alle v_{ak} , v_{ci} , e λ_i la funzione:

$$(I.10.12) \quad F = Q + \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i \left(v_{ci} - \sum_{k=1}^{N_{ar}} a_{ki} v_{ak} - \sum_{j=1}^{N_{ag}} a_{Nar+j,i} v_{gj} \right)^2$$

Annullando le derivate di F rispetto a v_{ak} , si ha:

$$(I.10.13) \quad \frac{v_{ak}}{R_{ak}} - \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i a_{ki} \left(v_{ci} - \sum_{r=1}^{N_{ar}} a_{ri} v_{ar} - \sum_{j=1}^{N_{ag}} a_{Nar+j,i} v_{gj} \right) = 0$$

e rispetto a v_{ci} :

$$(I.10.14) \quad \frac{v_{ci}}{R_{ci}} + \lambda_i \left(v_{ci} - \sum_{r=1}^{N_{ar}} a_{ri} v_{ar} - \sum_{j=1}^{N_{ag}} a_{Nar+j,i} v_{gj} \right) = 0$$

Unendo le due ultime espressioni, si ha:

$$(I.10.15) \quad \frac{v_{ak}}{R_{ak}} + \sum_{i=1}^{N_c} a_{ki} \frac{v_{ci}}{R_{ci}} = 0$$

che rappresenta la prima legge di Kirchhoff, espressa dalla (I.10.5) relativamente ai resistori dell'albero.

La proprietà espressa dal teorema di Maxwell chiarisce un aspetto importante dell'equilibrio di un circuito. L'equilibrio risulta guidato da questo obiettivo intrinseco di risparmio energetico. L'estensione del teorema a casi più complessi di circuiti dinamici non-lineari è la base dei circuiti ottimizzatori.

I.10.4 - Proprietà topologica fondamentale: ortogonalità dei vettori delle tensioni e delle correnti relativi ad un grafo.

La proprietà espressa dalla (I.10.7) ha una conseguenza assai interessante, cioè che «il sotto-spazio descritto dai vettori aventi come componenti le tensioni dei rami di un grafo è ortogonale al sotto-spazio descritto dai vettori aventi come componenti le relative correnti, prese con versi positivi coordinati». Infatti ordinando i due vettori in questione in modo che:

$$(I.10.16) \quad [I] = \begin{bmatrix} [I_a] \\ [I_c] \end{bmatrix} \quad ; \quad [V] = \begin{bmatrix} [V_a] \\ [V_c] \end{bmatrix}$$

si ha per il loro prodotto scalare:

$$(I.10.17) \quad [I]^t [V] = [I_a]^t [V_a] + [I_c]^t [V_c] = -[I_c]^t [A]^t [V_a] - \\ - [I_c]^t [B] [V_a] = -[I_c]^t [A]^t [V_a] + [I_c]^t [A]^t [V_a] = 0$$

L'ortogonalità dei due vettori sussiste anche se i due vettori si riferiscono a circuiti diversi, purché aventi lo stesso grafo.

La proprietà di ortogonalità dei vettori delle tensioni e delle correnti relativi ad un grafo costituisce una formulazione alternativa e più concisa delle leggi di Kirchhoff. In particolare la proprietà continua a sussistere quando sottoponiamo le grandezze suddette ad una trasformazione lineare. Per effetto di tale trasformazione, infatti, le tensioni e le correnti si modificano, continuando però a soddisfare le leggi di Kirchhoff e quindi la proprietà di ortogonalità.

I.10.5 - Prima conseguenza dell'ortogonalità: conservazione della potenza in un circuito.

Consideriamo un circuito avente un grafo costituito da R rami. Ogni ramo corrisponde o ad un elemento bipolare oppure ad una porta di un elemento multiporta. L'ortogonalità del vettore delle tensioni rispetto a quello delle correnti, cioè la (I.10.17), può essere riscritta in dettaglio sotto la forma:

$$(I.10.18) \quad \sum_{k=1}^R v_k(t) i_k(t) = 0$$

D'altra parte il prodotto $v_k(t) i_k(t)$ rappresenta la potenza entrante nell'elemento o porta k-sima. La (I.10.18) esprime quindi il principio della conservazione della potenza istantanea in un circuito. È interessante notare che tale importante principio fisico è implicito nelle leggi di Kirchhoff e può essere formulato come semplice proprietà topologica.

I.10.6 - Seconda conseguenza dell'ortogonalità: teorema di Tellegen.

L'ortogonalità dei vettori delle tensioni e delle correnti sussiste anche nel caso che i due vettori si riferiscano a circuiti diversi, purché aventi lo stesso grafo. Questa semplice osservazione è il teorema di Tellegen, di fondamentale importanza nel calcolo dell'effetto delle variazioni del valore degli elementi e nel progetto automatico dei circuiti, come vedremo nel Cap. VIII. L'enunciato del teorema è il seguente:

Teorema di Tellegen - «Per due circuiti aventi uno stesso grafo orientato, risulta:

$$(I.10.19) \quad [I_1]^t [V_2] = 0$$

$$[I_2]^t [V_1] = 0$$

avendo indicato con $[I_1]$, $[V_1]$ i vettori delle correnti e delle tensioni dei rami del primo circuito e con $[I_2]$ e $[V_2]$ gli analoghi vettori del secondo circuito».

Esempio I.10.1

Verificare la validità del teorema di Tellegen per i due circuiti di fig.I.10.9.

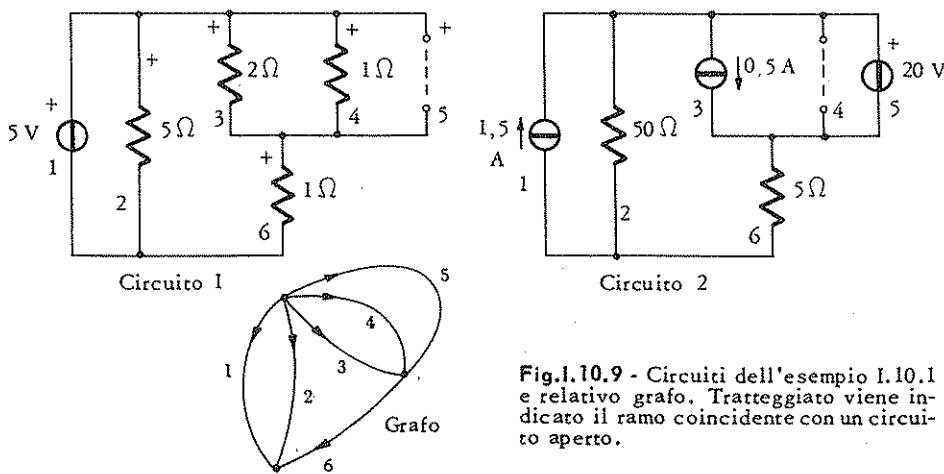


Fig.I.10.9 - Circuiti dell'esempio I.10.1 e relativo grafo. Tratteggiato viene indicato il ramo coincidente con un circuito aperto.

Determinando direttamente le tensioni e le correnti di questi due circuiti, si hanno i risultati seguenti (volt, ampère) .

	ramo 1 v i	ramo 2 v i	ramo 3 v i	ramo 4 v i	ramo 5 v i	ramo 6 v i
circuito 1	5 -4	5 1	2 1	2 2	2 0	3 3
circuito 2	25 -1,5	25 0,5	20 0,5	20 0	20 0,5	5 1

La prima delle (I.10.19) vale:

$$[I_1][V_2] = -100 + 25 + 20 + 40 + 15 = 0$$

La seconda della (I.10.19) vale:

$$[I_1][V_2] = -7,5 + 2,5 + 1 + 1 + 3 = 0$$

Dall'esame della figura si rileva che i due circuiti hanno elementi completamente diversi. In particolare, può accadere che uno di essi non abbia un ramo; in questo caso si sopperisce alla sua mancanza mediante un circuito aperto.

I.10.7 - Circuiti non connessi.

Il grafo di un circuito può risultare non-connesso quando il circuito è costituito di due o più parti distinte. È ovvio che se queste parti non si influenzano tra di loro è del tutto arbitrario considerare l'insieme come un circuito. Il caso che ha qualche interesse pratico è quello in cui le parti si influenzano per la presenza di elementi del tipo generatore controllato, trasformatore, ecc. con uno dei loro rami in una parte del circuito e l'altro ramo in una parte differente, come mostrato in figura I.10.10. La trattazione del grafo del circuito in questo caso è del

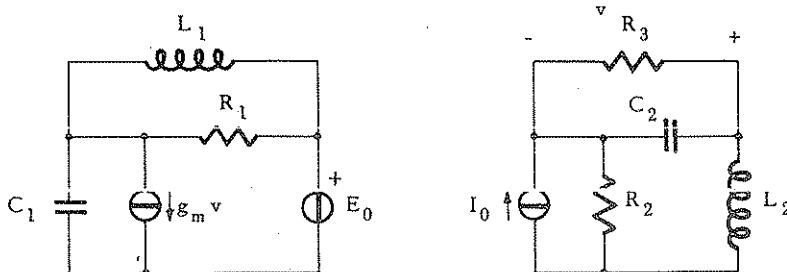


Fig.I.10.10 - Circuito costituito da due parti separate.

tutto simile a quanto fatto nel caso connesso; vale a dire l'albero è costituito dall'insieme di tanti alberi quante sono le parti separate. Gli insiemi indipendenti di grandezze elettriche sono quindi deducibili nella stessa maniera. Unica osservazione da tenere presente è che cambia il numero delle variabili indipendenti in relazione al numero dei rami e dei nodi del circuito. Infatti se R_k ed N_k è il numero dei rami e dei nodi della k-sima parte, per essa, essendo connessa, sappiamo che l'albero ha $N_k - 1$ rami ed il co-albero $R_k - N_k + 1$. Perciò l'albero dell'intero circuito, se P sono le parti separate che lo costituiscono, ha un numero di rami uguale a:

$$(I.10.20) \quad \sum_{k=1}^P (N_k - 1) = N - P$$

ed il co-albero complessivo del circuito ha quindi un numero di rami:

$$(I.10.21) \quad R - N + P$$

Il numero delle tensioni indipendenti del circuito con P parti è perciò dato dalla (I.10.20) e quello delle correnti indipendenti dalla (I.10.21).

I.11 - Dualità nei circuiti.

La dualità riguarda la possibilità di scambiare tra loro grandezze fisiche e topologiche in modo da trasformare relazioni e proprietà valide in un contesto in relazioni e proprietà diverse valide in un contesto diverso. Il caso tipico è quello della trasformazione di un circuito in un altro, che prende il nome di *circuito duale del primo*. Il vantaggio offerto dalla dualità è quello di estendere al contesto duale tutto ciò che è noto nel contesto iniziale mediante una semplice operazione di scambio. Le basi della dualità riguardano lo scambio tra tensione e corrente. Quindi le caratteristiche del contesto duale ed il suo legame con quello iniziale possono essere desunte esaminando le conseguenze dello scambio sulle relazioni costitutive degli elementi ideali e sulle leggi di Kirchhoff e le proprietà topologiche. Vediamo ciò in dettaglio.

I.11.1 - Relazioni costitutive.

Consideriamo i vari elementi, riportando con una freccia il modo in cui si trasforma la relazione costitutiva ed indicando con un apice le grandezze trasformate. Nel caso di generatori controllati, ne consideriamo uno solo a titolo esemplificativo.

1) Induttore di induttanza L :

$$v = L \frac{di}{dt} \rightarrow i' = L \frac{dv'}{dt}$$

Si ottiene un condensatore di capacità L .

2) Condensatore di capacità C :

$$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v' = C \frac{di'}{dt}$$

Si ottiene un induttore di induttanza C . Perciò il condensatore e l'induttore sono elementi duali.

3) Resistore di resistenza R :

$$v = Ri \rightarrow i' = Rv'$$

Si ottiene un resistore di conduttanza R .

4) Generatore indipendente di tensione di grandezza impressa \bar{v}_g :

$$v = v_g \rightarrow i' = v_g$$

Si ottiene un generatore indipendente di corrente di grandezza impressa v_g .

5) Generatore indipendente di corrente di grandezza impressa I_g :

$$i = I_g \rightarrow v' = I_g$$

Si ottiene un generatore indipendente di tensione di grandezza impressa I_g . Perciò, i due generatori indipendenti sono elementi duali.

6) Generatore di corrente controllato in tensione:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g_m v_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = 0 \\ v'_2 = g_m i'_1 \end{cases}$$

Si ottiene un generatore di tensione controllato in corrente.

7) Trasformatore di rapporto n :

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i'_1 = n i'_2 \\ v'_1 = -\frac{1}{n} v'_2 \end{cases}$$

Si ottiene un trasformatore di rapporto $-\frac{1}{n}$.

8) Nullore:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = 0 \\ i'_1 = 0 \end{cases}$$

Non subisce modifiche.

I.11.2 - Leggi di Kirchhoff e proprietà topologiche.

1) Prima legge di Kirchhoff relativa ad un taglio:

$$\sum_k i_k = 0 \rightarrow \sum_k v_k = 0$$

Si ottiene la seconda legge di Kirchhoff relativa ad una maglia.

2) Seconda legge di Kirchhoff relativa ad una maglia:

$$\sum_k v_k = 0 \rightarrow \sum_k i'_k = 0$$

Si ottiene la prima legge di Kirchhoff relativa ad un taglio. Perciò le due leggi di Kirchhoff sono duali e le nozioni di taglio e maglia sono duali.

3) Equazioni relative ai tagli ed alle maglie fondamentali (I.10.5) e (I.10.6):

$$\begin{cases} [I_a] + [A][I_c] = 0 \\ [V_c] + [B][V_a] = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [V'_c] + [A][V'_a] = 0 \\ [I'_a] + [B][I'_c] = 0 \end{cases}$$

Si ottiene lo scambio tra le matrici A e B. In conclusione, la dualità implica una trasformazione del grafo tale che le maglie divengano tagli e viceversa, l'albero divenga il co-albero e viceversa. Tale trasformazione non è sempre lecita; infatti la matrice B di un circuito non rappresenta sempre la matrice A di un altro circuito.

I.11.3 - Circuito duale.

La discussione precedente ha messo in evidenza le caratteristiche della dualità e dell'eventuale circuito duale. In particolare, quest'ultimo non sempre esiste in conseguenza della richiesta per esso di avere una matrice A coincidente con la matrice B del circuito

iniziale. Tale possibilità esiste in casi particolari. Tra questi è particolarmente importante quello dei circuiti planari, cioè dei circuiti costituiti da maglie non sovrapposte. Per tali circuiti esiste un procedimento molto semplice di costruzione del circuito duale. Il procedimento in questione consiste dei due seguenti passi:

- 1) disegnare il circuito orientando i suoi rami ed evidenziando le maglie non sovrapposte. Associare un nodo del circuito duale ad ogni maglia più uno all'esterno. Inserire un ramo tra due nodi se esiste un ramo comune alle due maglie corrispondenti. Per i rami contenuti in una sola maglia, inserire nel circuito duale un ramo tra il nodo associato alla maglia ed il nodo esterno;
- 2) il generico ramo del circuito duale viene caratterizzato in base al corrispondente ramo del circuito iniziale, utilizzando le trasformazioni previste nel § I.11.1. L'orientazione del ramo viene fissata in modo che il verso positivo esca dal nodo, che è associato alla maglia in cui l'orientazione del ramo corrispondente del circuito iniziale è vista in senso orario dal nodo stesso. Ciò vale per i rami comuni a due maglie. Per i rami contenuti in una sola maglia si fa riferimento per l'orientazione solo a questa, però prendendo il verso positivo sul ramo trasformato uscente dal relativo nodo se questo vede in senso antiorario l'orientazione del ramo da trasformare.

Esempio I.11.1

Consideriamo il circuito di fig.I.10.1 che ridisegniamo in fig.I.11.1 a) con evidenziate le maglie non sovrapposte ed i nodi associati. Applicando il procedimento precedente si ha il circuito duale di fig.I.11.1 b).

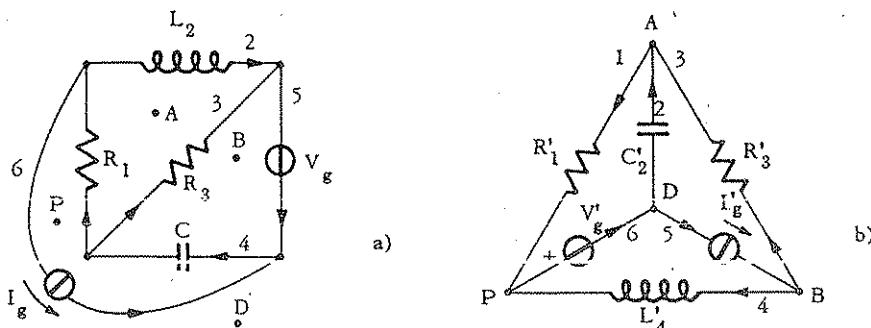


Fig.I.11.1 - Risulta:

$$R'^1 = \frac{1}{R_1} , \quad C'^2 = L_2 , \quad R'^3 = \frac{1}{R_3} , \quad L'^4 = C , \quad I'_g = V_g , \quad V'_g = I_g .$$

Il circuito di fig.I.11.1 a) con la scelta dell'albero riportata in fig.I.10.5 è caratterizzato dalla matrice B di (I.10.9). È facile verificare che la matrice A del circuito duale di fig.I.11.1 b) coincide con B , quando ci si riferisca all'albero costituito dai rami 2, 5, 6 e si considerino i rami dell'albero e del co-albero nel senso della numerazione crescente per formare i vettori delle tensioni e delle correnti.

* * *

CAPITOLO II.

ANALISI DI CIRCUITI SENZA MEMORIA IN PRESENZA DI ECCITAZIONI COSTANTI NEL TEMPO

II.1 - Il problema dell'analisi.

L'analisi di un circuito elettrico consiste nella determinazione del suo comportamento quando sono note le sue caratteristiche (cioè il tipo ed il valore dei componenti presenti ed il modo in cui sono interconnessi) e le sollecitazioni a cui è sottoposto (cioè l'andamento nel tempo delle eccitazioni presenti). È evidente che la complessità dei metodi da usare per analizzare un circuito elettrico dipende dal tipo dei componenti presenti e dall'andamento nel tempo delle funzioni di eccitazione. Una classe molto semplice di metodi è quella relativa ai circuiti contenenti componenti lineari caratterizzati da una relazione costitutiva in cui non compaiono legami integro-differenziali; per questi circuiti il valore assunto da ciascuna grandezza elettrica in un certo istante di tempo non dipende dai valori assunti in altri istanti. In tale caso il circuito viene detto *senza memoria* e la trattazione può essere limitata, senza perdita di generalità, ad eccitazioni costanti nel tempo.

I circuiti senza memoria, pur corrispondendo a strutture fisiche di scarsa importanza pratica, rivestono una grande importanza teorica in quanto ad essi è possibile ricondurre la maggior parte degli altri circuiti che interessano in pratica. Per questa ragione il presente capitolo verrà dedicato esclusivamente all'analisi di questi circuiti nell'ipotesi di eccitazioni costanti nel tempo.

La soluzione del problema dell'analisi richiede l'individuazione di tutte le grandezze elettriche presenti, utilizzando a questo scopo sia le relazioni costitutive dei componenti sia le equazioni di equilibrio associate alle leggi di Kirchhoff. L'utilizzazione razionale delle leggi di Kirchhoff richiede l'impiego delle nozioni topologiche sviluppate nel

§ I.10. Infatti, se non si ricorresse a tali nozioni e si scrivessero le equazioni di equilibrio senza un piano organizzato, si rischierebbe:

- 1) di arrivare ad un sistema di equazioni risolventi non valido, cioè tale da non ammettere soluzione;
- 2) di considerare un numero di incognite eccessivamente grande rispetto alla complessità del circuito da analizzare.

I vari metodi di analisi differiscono per il modo in cui vengono scelte le incognite (dette *variabili ausiliarie*) e vengono scritte le equazioni lineari del sistema risolvente. Nel presente capitolo la trattazione verrà limitata ai metodi più noti, importanti di per sé stessi ed in ogni caso propedeutici ai metodi più complessi richiesti nel caso dei circuiti di grandi dimensioni e speciali. Verranno considerati inizialmente circuiti contenenti solo componenti a due terminali e quindi si passerà al caso più generale.

II.2 - Analisi su base maglie.

Come messo in evidenza nel § I.10, le correnti dei rami di un co-albero costituiscono un insieme di quantità tra loro indipendenti e tale da permettere l'individuazione delle correnti dei rami rimanenti tramite la (I.10.5). Tale insieme si presta ad essere scelto direttamente come l'insieme delle incognite, quando è possibile dedurre la tensione dalla corrente per ciascun componente del circuito in esame. Questo è il caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di tensione, di cui ci occuperemo nel § II.2.1. Nel caso invece che siano presenti anche i generatori indipendenti di corrente, tale scelta non è più sufficiente ed occorre introdurre alcune modifiche, come verrà discusso nel § II.2.2.

Il caso in cui siano presenti generatori controllati e nullori verrà infine trattato nei §§ II.2.3 e II.2.4 rispettivamente.

II.2.1 - Caso in cui siano presenti solo resistori e generatori indipendenti di tensione.

Il metodo di analisi su base maglie, nel caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti solo di tensione, si basa sulla scelta delle correnti dei rami di un co-albero come incognite. Le equazioni del sistema risolvente si ottengono scrivendo le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali associate all'albero

scelto. Tale insieme di equazioni è valido in quanto, come vedremo di seguito:

- a) il numero di equazioni è pari al numero delle incognite;
- b) le equazioni sono indipendenti tra loro;
- c) le uniche incognite presenti sono le variabili ausiliarie scelte, cioè le correnti dei rami del co-albero.

Il punto a) è conseguenza del fatto che il numero delle equazioni coincide con il numero delle maglie fondamentali e quindi, come messo in evidenza nel § I.10, con il numero dei rami del co-albero. Tale numero è un indice della complessità del sistema risolvente ed è dato per un circuito costituito da R rami, N nodi e P parti separate dalla (I.10.21), cioè:

$$(II.2.1) \quad N_c = R - N + P$$

Il punto b) segue dall'osservazione che ciascuna equazione esprime l'equilibrio delle tensioni di una maglia fondamentale. Poichè in ogni maglia fondamentale è presente un ramo del co-albero non presente nelle altre, ne deriva che ciascuna equazione contiene dei termini sicuramente non presenti nelle altre. Ciò è sufficiente a garantire la loro indipendenza. Infine il punto c) è conseguenza del fatto che ciascuna tensione facente parte di un'equazione di equilibrio coincide o con un termine noto (se il ramo corrispondente è un generatore di tensione) oppure con una combinazione lineare delle variabili ausiliarie con coefficienti noti. Per dimostrare ciò introduciamo le seguenti matrici:

$[R_c]$: matrice diagonale di ordine pari al numero dei rami del co-albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo del co-albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde la relativa resistenza; ad un generatore di tensione corrisponde il valore zero;

$[R_a]$: matrice diagonale definita come la $[R_c]$, ma per i rami dell'albero;

$[V_{gc}]$: vettore colonna di ordine pari al numero dei rami del co-albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo del co-albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde il valore zero; ad un generatore di tensione corrisponde il valore della relativa tensione impressa.

$[V_{ga}]$: vettore colonna definito come il vettore $[V_{gc}]$, ma per i rami dell'albero.

Utilizzando le matrici precedenti e le relazioni costitutive, otteniamo le seguenti espressioni per le tensioni dei componenti:

$$(II.2.2) \quad \text{rami del co-albero} \quad [V_c] = [R_c][I_c] + [V_{gc}]$$

$$(II.2.3) \quad \text{rami dell'albero} \quad [V_a] = [R_a][I_a] + [V_{ga}]$$

La (II.2.3) diviene, tenendo conto della (I.10.5):

$$(II.2.4) \quad [V_a] = -[R_a][A][I_c] + [V_{ga}]$$

L'esame delle (II.2.2) e (II.2.4) dimostra il punto c).

Scriviamo il sistema risolvente, sviluppando le equazioni di equilibrio delle tensioni relative alle maglie fondamentali, cioè le (I.10.6), utilizzando le (II.2.2), (II.2.4) ed esprimendo la matrice $[A]$ in funzione della $[B]$ tramite la (I.10.7). Si ottiene:

$$(II.2.5) \quad [R_c][I_c] + [V_{gc}] + [B]\{[R_a][B]^t[I_c] + [V_{ga}]\} = 0$$

Mettendo in evidenza $[I_c]$ e portando a secondo membro i termini noti, si ha:

$$(II.2.6) \quad \{[R_c] + [B][R_a][B]^t\}[I_c] = -[V_{gc}] - [B][V_{ga}]$$

Detta $[R_M]$ la matrice dei coefficienti e $[V_M]$ il vettore dei termini noti del sistema (II.2.6), si ottiene il sistema risolvente nella sua forma finale:

$$(II.2.7) \quad [R_M][I_c] = [V_M]$$

Osservazione II.2.1

Dall'esame della matrice dei coefficienti $[R_M]$, quale risulta dalla (II.2.6), si deduce che essa è simmetrica. Infatti si ottiene che:

$$(II.2.8) \quad [R_M]^t = [R_c]^t + \{[B][R_a][B]^t\}^t = [R_c] + [B][R_a][B]^t = [R_M]$$

Di tale risultato, che riassumiamo di seguito sotto forma di una proprietà dei circuiti, va tenuto conto per introdurre semplificazioni nel procedimento di analisi.

Proprietà II.2.1 - «La matrice dei coefficienti del sistema di equazioni risolventi su base maglie per circuiti contenenti resistori e generatori di tensione è simmetrica».

Il sistema risolvente (II.2.7) può essere scritto direttamente per ispezione visiva, ricorrendo alla nozione di corrente di maglia. Precisamente, si suppone che le maglie fondamentali siano percorse da correnti e che le correnti dei rami siano determinate dalla combinazione delle correnti delle maglie fondamentali a cui essi appartengono. È ovvio che la nozione di corrente di maglia è fittizia, in quanto le uniche correnti che esistono fisicamente nel circuito sono quelle che percorrono i suoi rami. Tale nozione viene introdotta proprio per il vantaggio di poter scrivere le equazioni risolventi per ispezione visiva, attribuendo ai singoli termini un ben preciso significato fisico e riducendo così le cause di errore.

La giustificazione dell'introduzione delle correnti di maglia è legata all'interpretazione del sistema (II.2.7). Tale sistema esprime l'equilibrio delle tensioni nelle maglie fondamentali in funzione delle correnti dei rami del co-albero e delle tensioni dei generatori, considerando come verso positivo quello stabilito dalla corrente del ramo del co-albero. Facendo riferimento all'equazione relativa alla maglia k-esima notiamo che:

- 1) il contributo della corrente del ramo k-esimo del co-albero $I_c(k)$ è la caduta di tensione che essa provoca circolando sulla resistenza:

$$(II.2.9) \quad R_c(k) + \sum_i b_{ki}^2 R_a(i).$$

Poiché $b_{kj} \neq 0$ solo se il resistore $R_a(i)$ fa parte della maglia k-esima considerata, la (II.2.9) rappresenta la resistenza della maglia k-esima, cioè la somma delle resistenze di tutti i resistori presenti in essa. Perciò, questo primo contributo è lo stesso che si avrebbe se circolasse $I_c(k)$ nella maglia k-esima;

- 2) il contributo della corrente del ramo j del co-albero $I_c(j)$ è la caduta di tensione che essa provoca circolando sulla resistenza:

$$(II.2.10) \quad \sum_i b_{ki} b_{ji} R_a(i).$$

Questo termine è diverso da zero solo per quei rami dell'albero che fanno parte contemporaneamente delle maglie fondamentali k e j. Il contributo di uno di questi rami è positivo se le correnti $I_c(k)$ ed $I_c(j)$ sono concordi sul ramo. Perciò, è come se la maglia fondamentale j-esima fosse percorsa dalla corrente $I_c(j)$, che provoca una caduta di tensione nel ramo resistivo comune alla maglia k-esima con segno positivo se circola nello stesso senso di $I_c(k)$ sul ramo;

- 3) il contributo dei generatori è:

$$(II.2.11) \quad V_M(k) = -V_{gc}(k) - \sum_r b_{kr} V_{ga}(r).$$

Questo termine coincide con la combinazione delle tensioni impresse dai generatori presenti nella maglia k-esima. Il contributo di un generatore presente nella maglia è positivo se la corrente di maglia esce dal suo morsetto positivo.

Quanto detto giustifica il seguente procedimento di analisi, eseguibile per ispezione visiva del circuito.

Procedimento di analisi su base maglie di un circuito contenente solo resistori e generatori indipendenti di tensione.

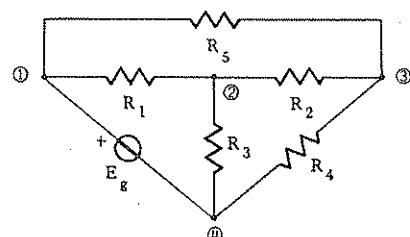
- 1) Scegliere un albero sul grafo del circuito⁽¹⁾.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le correnti di maglia, che risultano uguali a quelle dei rami del co-albero con le rispettive orientazioni.
- 3) Scrivere il sistema risolvente determinando la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti nel modo seguente:
 - a) il termine (k, k) della matrice dei coefficienti coincide con la somma delle resistenze dei rami resistivi della maglia k -sima⁽²⁾,
 - b) il termine (k, i) della matrice dei coefficienti coincide con la somma algebrica delle resistenze dei rami resistivi comuni alle maglie k ed i . Il segno da mettere dinanzi a ciascuna di queste resistenze è positivo o negativo a seconda che su quel ramo le correnti delle maglie k ed i siano concordi oppure discordi⁽²⁾;
 - c) la componente k -sima del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle tensioni dei generatori di tensione presenti nella maglia k -sima. Il segno con cui considerare ciascuna di queste tensioni è positivo o negativo a seconda che la corrente della maglia k -sima esca oppure entri dal morsetto positivo del generatore considerato.
- 4) Risolvere il sistema ottenuto al punto 3) e determinare le correnti di maglia.
- 5) Determinare le altre correnti e tensioni del circuito.

Esempio II.2.1

Applicare il procedimento di analisi su base maglie al circuito di fig. II.2.1, sviluppando in dettaglio i singoli passi.

Fig.II.2.1 - Circuito considerato nell'esempio II.2.1. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_4 = 2 \quad ; \quad R_2 = R_3 = R_5 = 1; \\ E_g = 2 (\Omega, V)$$



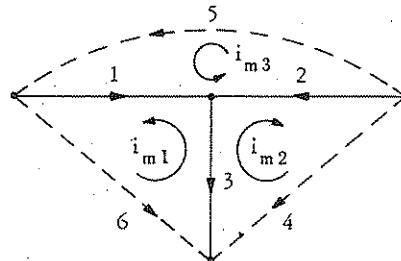
(1) - La scelta dell'albero è arbitraria. Si ottiene, tuttavia, una notevole economia di termini nelle equazioni risolventi se lo si sceglie in modo che le maglie si sovrappongano il meno possibile.

(2) - Per il modo in cui è stato ottenuto l'elemento (k, k) della matrice dei coefficienti viene anche detto *resistenza totale della maglia k -sima*, mentre l'elemento (k, i) viene detto *resistenza mutua tra le maglie k -sima ed i -sima*.

Passi 1 e 2: Scegliamo l'albero indicato a tratto pieno in fig.II.2.2, in cui i rami del co-albero sono indicati tratteggiati. Le variabili ausiliarie sono le correnti fittizie di maglia i_{m1}, i_{m2}, i_{m3} coincidenti con le correnti dei rami del co-albero. I versi riportati nel grafo servono per specificare le grandezze elettriche; il metodo delle maglie non richiede l'uso di un grafo orientato. Si ha rispettivamente:

$$i_{m1} = i_6 \quad ; \quad i_{m2} = i_4 \quad ; \quad i_{m3} = i_5$$

Fig. II.2.2 - Albero e co-albero
del circuito di fig. II.2.1.



Passo 3 : Scriviamo le equazioni di equilibrio delle tensioni su base maglie, si ha:

$$maglia\ 1 \quad (R_1 + R_3) i_{m1} + R_3 i_{m2} - R_1 i_{m3} = - E_g$$

$$maglia\ 2 \quad R_3 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4) i_{m2} + R_2 i_{m3} = 0$$

$$maglia\;3 \quad - R_1 i_{m1} + R_2 i_{m2} + (R_1 + R_2 + R_5) i_{m3} = 0$$

Sostituendo i valori numerici di fig.II.2.4, si ha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema di equazioni si ha:

$$i_{m1} = -\frac{10}{7}, \quad i_{m2} = \frac{4}{7}, \quad i_{m3} = -\frac{6}{7}$$

Passo 5: Le altre correnti del circuito valgono:

$$i_1 = -i_{m1} + i_{m3} = \frac{4}{7}, \quad i_2 = -i_{m2} - i_{m3} = \frac{2}{7}, \quad i_3 = -i_{m1} - i_{m2} = \frac{6}{7}$$

$$i_4 = i_{m2} = -\frac{4}{7}, \quad i_5 = i_{m3} = -\frac{6}{7}, \quad i_6 = i_{m1} = -\frac{10}{7} \quad (A)$$

Le tensioni dei rami resistivi si ottengono moltiplicando le correnti precedenti per le rispettive resistenze.

II.2.2 - Caso in cui siano presenti anche generatori indipendenti di corrente.

La presenza di generatori di corrente in un circuito rende impossibile l'applicazione diretta del metodo di analisi su base maglie, in quanto le variabili ausiliarie usate in questo caso, cioè le correnti del co-albero, non sono sufficienti ad esprimere le tensioni ai capi di ciascun generatore di corrente presente. Per tali componenti infatti la tensione ai capi è indipendente dalla corrente che li attraversa e quindi deve essere considerata come una grandezza incognita.

Pertanto, in tale caso devono considerarsi inizialmente come incognite sia le variabili ausiliarie precedenti sia le tensioni ai capi dei generatori di corrente; a tale aumento del numero delle incognite corrisponde tuttavia un uguale aumento del numero delle equazioni, in quanto ogni generatore di corrente introduce un vincolo fra le correnti del circuito e quindi una nuova equazione. Da quanto detto potrebbe sembrare che la presenza dei generatori di corrente dia luogo sempre a sistemi risolutivi di maggiore complessità; tale fatto è invece non vero nella maggioranza dei casi, se si ha l'accortezza di scegliere l'albero del circuito opportunamente, come verrà detto in seguito.

Il procedimento di analisi in presenza di generatori di corrente va modificato rispetto a quello considerato precedentemente, che può essere seguito fino al passo 3 b. Successivamente occorre introdurre le nuove incognite, coincidenti con le tensioni ai capi dei generatori indipendenti di corrente presenti e le ulteriori equazioni che esprimono i vincoli sulle correnti del circuito, dovuti a questi generatori. Precisamente per ogni generatore di corrente occorre scrivere un'equazione in cui compaiono le correnti incognite di maglia e come termine noto la sua corrente impressa.

Prima di procedere ulteriormente, applichiamo quanto detto al circuito di fig. II.2.3.

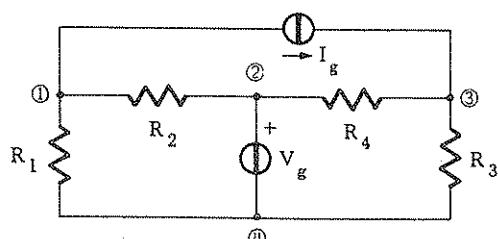
Esempio II.2.2

Analizzare con il procedimento abbozzato in precedenza il circuito di figura II.2.3.

Fig. II.2.3 - Circuito considerato nell'esempio II.2.2. I valori dei componenti sono:

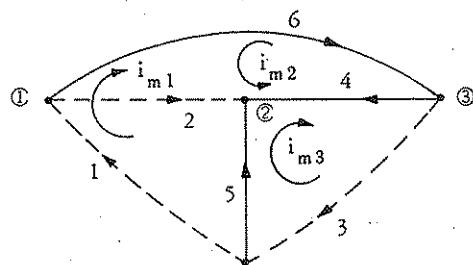
$$R_1 = R_4 = 2 ; \quad R_2 = R_3 = 1 ;$$

$$V_g = -1 ; \quad I_g = 2 \text{ } (\Omega, V, A) .$$



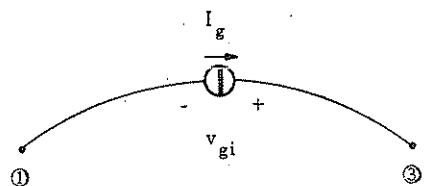
Passi 1 e 2 : Scegliamo l'albero indicato a tratto pieno in fig.II.2.4, in cui i rami del co-albero sono indicati tratteggiati. Le variabili ausiliarie sono le correnti di maglia

Fig.II.2.4 - Albero e co-albero del circuito di fig.II.2.3.



i_{m1}, i_{m2}, i_{m3} , mentre risulta anche incognita la tensione ai capi del generatore di corrente, che verrà rappresentata come mostrato in fig.II.2.5.

Fig.II.2.5 - Scelta del verso della tensione incognita del generatore di corrente del circuito di fig.II.2.3.



Passo 3 : Scriviamo il sistema di equazioni di equilibrio delle tensioni per le varie maglie, trattando il generatore di corrente come se fosse un generatore di tensione di valore v_gi ; si ha:

$$\text{maglia 1} \quad (R_1 + R_4)i_{m1} - R_4 i_{m2} - R_4 i_{m3} = v_{gi} - V_g$$

$$\text{maglia 2} \quad -R_4 i_{m1} + (R_2 + R_4)i_{m2} + R_4 i_{m3} = -v_{gi}$$

$$\text{maglia 3} \quad -R_4 i_{m1} + R_4 i_{m2} + (R_3 + R_4)i_{m3} = V_g$$

Scriviamo quindi l'equazione del vincolo imposto dal generatore di corrente; si ha:

Equazione del vincolo

$$i_{m1} - i_{m2} = I_g$$

Sostituendo ai coefficienti ed alle grandezze impresse nelle equazioni precedenti i valori riportati in fig.II.2.3, si ha:

$$\begin{bmatrix} +4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & +3 & +2 & +1 \\ -2 & +2 & +3 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \\ v_{gi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema precedente si ottiene:

$$i_{m1} = 1 \quad ; \quad i_{m2} = -1 \quad ; \quad i_{m3} = 1 \quad ; \quad v_{gi} = 3 \quad (\text{A, V})$$

Passo 5 : Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

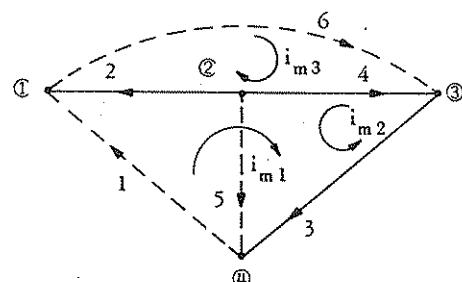
$$\begin{aligned} i_4 &= i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} = 1 & v_1 &= 2 & v_3 &= 1 \\ i_5 &= -i_{m1} + i_{m3} = 0 & v_2 &= -1 & v_4 &= 2 \end{aligned} \quad (\text{A, V})$$

Il sistema risolvente nell'esempio precedente è più complesso di quello che si avrebbe nel caso che i generatori fossero tutti di tensione, per la presenza di una nuova incognita (la tensione v_{gi}) e di una nuova equazione (l'equazione del vincolo). Si può però osservare che con un'opportuna scelta dell'albero, cioè scegliendo il generatore di corrente su un ramo del co-albero (invece che su un ramo dell'albero come fatto nello esempio), l'equazione del vincolo diviene un'identità, nella quale una variabile ausiliaria viene identificata con la corrente impressa del generatore. Con tale scelta si ha inoltre un secondo vantaggio: la tensione incognita v_{gi} compare in una sola delle equazioni risolventi (invece che in due, come nell'esempio visto). In conclusione il sistema si riduce da quattro equazioni in quattro incognite, ad un sistema di due equazioni in due incognite. Risolviamo perciò lo stesso circuito dell'esempio II.2.2 seguendo le osservazioni precedenti.

Esempio II.2.3

Per il circuito di fig.II.2.3 scegliamo l'albero come indicato a tratto pieno in fig.II.2.6, in modo tale che il generatore di corrente sia presente su un ramo del co-albero.

Fig.II.2.6 - Albero e co-albero del circuito di fig.II.2.3 considerati nell'esempio II.2.3.



Le variabili ausiliarie sono le correnti i_{m1} , i_{m2} , i_{m3} fra le quali i_{m3} è una quantità nota poichè si identifica con la corrente del generatore di corrente. L'ulteriore incognita v_{gi} è scelta con le stesse modalità indicate in fig.II.2.5.

Le equazioni risultanti sono le seguenti:

$$\text{maglia 1} \quad (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_{m1} - (R_3 + R_4)i_{m2} - (R_2 + R_4)i_{m3} = 0$$

$$\text{maglia 2} \quad -(R_3 + R_4)i_{m1} + (R_3 + R_4)i_{m2} + R_4 i_{m3} = -V_g$$

$$\text{maglia 3} \quad -(R_2 + R_4)i_{m1} + R_4 i_{m2} + (R_2 + R_4)i_{m3} = v_{gi}$$

Sostituendo i valori numerici riportati in fig.II.2.3, si ha:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ v_{gi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Le prime due equazioni del sistema precedente, corrispondenti alle maglie in cui non è presente il generatore di corrente, contengono solo le due incognite corrispondenti alle variabili ausiliarie i_{m1} ed i_{m2} , mentre la terza equazione è la sola a contenere l'incognita v_{gi} . Risolvendo il sistema costituito dalle prime due equazioni si ha:

$$i_{m1} = 1 \quad i_{m2} = 0 \quad (\text{A})$$

Quindi il valore di v_{gi} vale:

$$v_{gi} = 3 \text{ V}$$

Tale soluzione coincide con quella trovata nell'esempio II.2.2 risolvendo un sistema di quattro equazioni in quattro incognite.

Quanto detto permette di giustificare il seguente procedimento di analisi.

Procedimento di analisi su base maglie di un circuito contenente resistori e generatori indipendenti dei due tipi.

- 1) Scegliere, se possibile, un albero del circuito tale che i generatori di corrente presenti siano contenuti tutti nel co-albero (si veda l'osservazione II.2.2).
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le correnti di maglia, che risultano uguali a quelle del co-albero con le rispettive orientazioni. Tali variabili sono note per le maglie aventi un generatore di corrente come ramo di chiusura, per cui le incognite sono le rimanenti.
- 3) Introdurre come ulteriori incognite le tensioni ai capi dei generatori di corrente.
- 4) Scrivere il sistema risolvente secondo le modalità indicate al punto 3) del secondo procedimento di analisi su base maglie, con l'avvertenza che il punto c) diviene come segue:

- c) la componente k -sima del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle tensioni ai capi di tutti i generatori sia di tensione che di corrente presenti nella maglia k -sima. Il segno con cui considerare ciascuna di queste tensioni è positivo o negativo a seconda che la corrente della maglia k -sima esca oppure entri nel morsetto positivo del generatore considerato.
- 5) Scrivere le equazioni di vincolo per quei generatori di corrente che eventualmente si trovassero sui rami dell'albero (tale eventualità deve essere evitata in base al punto 1).
- 6) Risolvere il sistema di equazioni ottenute nel punto 4) e nel punto 5), le cui incognite sono:
- le correnti delle maglie nei cui rami di chiusura non sono presenti generatori di corrente;
 - le tensioni ai capi dei generatori di corrente.
- 7) Determinare le altre correnti e tensioni del circuito.

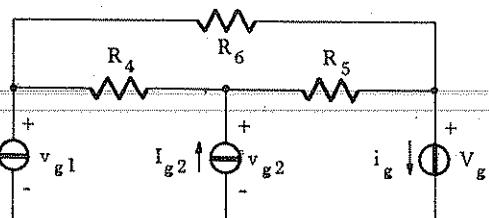
Esempio II.2.4

Risolvere con il metodo di analisi su base maglie il circuito di fig.II.2.7.

Fig.II.2.7 - Circuito considerato nell'esempio II.2.4. I valori dei componenti sono:

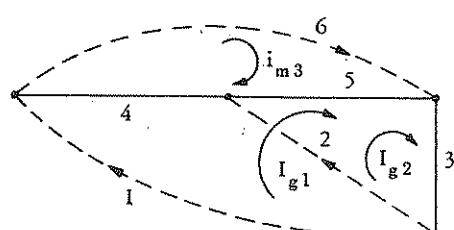
$$I_{g1} = 2, \quad I_{g2} = 1, \quad V_g = 1$$

$$R_4 = R_5 = 1, \quad R_6 = 2 \quad (\text{A}, \text{V}, \Omega)$$



- 1) Scegliamo un albero del circuito in modo che i generatori di corrente presenti siano sul co-albero (fig. II.2.8).

Fig. II.2.8 - A tratto pieno è indicato l'albero del circuito di fig.II.2.7.



2) Le variabili ausiliarie sono tre e precisamente: I_{g1} ed I_{g2} (correnti relative alle maglie 1 e 2), di valore noto; i_{m3} , corrente incognita della maglia 3.

3) Ulteriori incognite sono le tensioni ai capi dei due generatori di corrente. Indichiamo tali tensioni con v_{g1} e v_{g2} con il verso indicato in fig.II.2.7.

4) Scriviamo il sistema risolvente:

$$\text{maglia 1} \quad (R_4 + R_5) I_{g1} + R_5 I_{g2} - (R_4 + R_5) i_{m3} = v_{g1} - V_g$$

$$\text{maglia 2} \quad R_5 I_{g1} + R_5 I_{g2} - R_5 i_{m3} = v_{g2} - V_g$$

$$\text{maglia 3} \quad - (R_4 + R_5) I_{g1} - R_5 I_{g2} + (R_4 + R_5 + R_6) i_{m3} = 0$$

Sostituiamo i valori numerici alle grandezze note; si ha:

$$4 + 1 - 2 i_{m3} = v_{g1} - 1$$

$$2 + 1 - i_{m3} = v_{g2} - 1$$

$$- 4 - 1 + 4 i_{m3} = 0$$

5) Poichè tutti i generatori di corrente si trovano sul co-albero non occorre aggiungere alcuna equazione di vincolo e quindi il sistema precedente è il sistema risolvente completo per il circuito considerato.

6) La soluzione di tale sistema è molto semplice in quanto i_{m3} può essere calcolata direttamente dall'ultima equazione. Il valore ottenuto può essere quindi sostituito nelle prime due equazioni ottenendo le altre incognite, cioè:

$$i_{m3} = 5/4 \quad v_{g1} = 7/2 \quad v_{g2} = 11/4 \quad (\text{A, V})$$

7) le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$i_g = I_{g1} + I_{g2} = 3 \quad v_{R4} = R_4 i_{R4} = 3/4$$

$$i_{R4} = I_{g1} - i_{m3} = 3/4 \quad v_{R5} = R_5 i_{R5} = 7/4 \quad (\text{A, V})$$

$$i_{R5} = I_{g1} + I_{g2} - i_{m3} = 7/4 \quad v_{R6} = R_6 i_{R6} = 5/2$$

Osservazione II.2.2

Al punto 1) del metodo di analisi su base maglie è stata posta una riserva sulla possibilità di scegliere un albero del circuito tale che tutti i generatori di corrente presenti siano contenuti nel co-albero. Può infatti accadere che in qualche caso sia possibile scegliere un albero siffatto e che qualche generatore di corrente debba di conseguenza coincidere con un ramo dell'albero; in tal caso non

sarà possibile evitare di scrivere le equazioni aggiuntive di vincolo indicate al punto 5), con conseguente complicazione del sistema risolvente. I casi in cui non è possibile evitare tale situazione sono messi in evidenza dalla seguente proprietà:

Proprietà II.2.2 - «Non esiste un albero del circuito tale che tutti i generatori di corrente siano contenuti sul co-albero, se e solo se è presente nel circuito un taglio costituito da soli generatori di corrente.»

La proprietà precedente consegue dalle seguenti osservazioni. Se è presente nel circuito un taglio di soli generatori di corrente e questi fanno parte tutti del co-albero si ha l'assurdo che dalla loro eliminazione consegue la separazione del circuito in due parti. Sappiamo infatti che per separare in due parti un circuito occorre eliminare sempre almeno un ramo dell'albero (§ I.10). D'altra parte se non è presente un taglio di soli generatori di corrente è sempre possibile scegliere un albero che non contiene alcuno di essi. Un modo semplice per ottenere ciò è quello di eliminare preliminarmente tutti i generatori di corrente, ciò che non provoca la separazione in due parti del circuito, e quindi scegliere sul circuito rimanente l'albero.

I circuiti contenenti tagli costituiti da soli generatori di corrente sono anomali, in quanto le correnti impresse da tali generatori debbono soddisfare la prima legge di Kirchhoff. Perciò si possono avere due eventualità:

- a) Le correnti impresse non soddisfano la prima legge di Kirchhoff. In tal caso il circuito considerato non è valido e va riesaminato il procedimento di modellamento da cui è derivato dalla struttura fisica che vuol rappresentare.
- b) Le correnti impresse non soddisfano la prima legge di Kirchhoff. In tale caso il problema di analisi ha soluzione indeterminata, in quanto è possibile sostituire uno qualunque dei generatori di corrente considerati con un generatore di tensione di valore arbitrario, senza alterare il resto del circuito (la corrente nel generatore sudetto di tensione, per la legge di Kirchhoff delle correnti, è proprio uguale alla corrente del generatore di corrente sostituito, come è messo chiaramente in evidenza in fig. II.2.9).

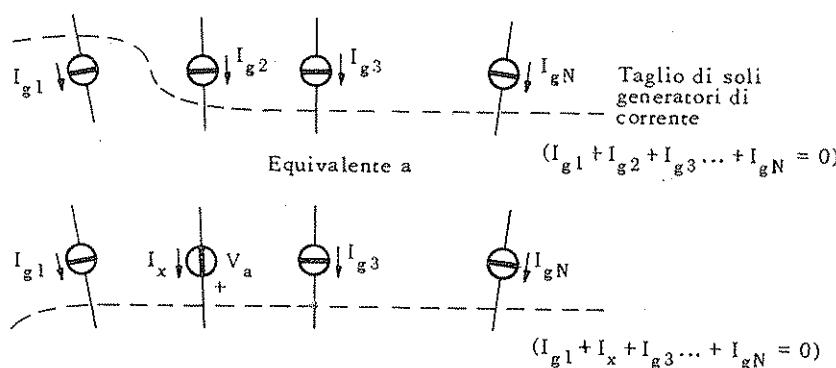


Fig. II.2.9 - Equivalenza di un generatore di tensione ad un generatore di corrente in un taglio di soli generatori di corrente.

Si può quindi concludere che, salvo i casi anomali indicati, la riserva effettuata al punto 1) del metodo di analisi su base maglie si può sciogliere in senso affermativo e quindi il punto 5) del suddetto procedimento può essere evitato.

Illustriamo quanto detto con un esempio.

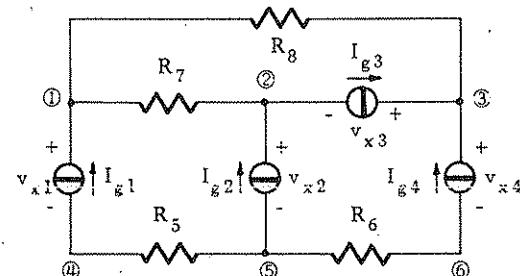
Esempio II.2.5

Risolvere con il metodo di analisi su base maglie il circuito di fig.II.2.10.

Fig.II.2.10 - Circuito considerato nell'esempio II.2.5. I valori dei componenti sono:

$$I_{g1} = -1, \quad I_{g2} = I_{g3} = 2, \quad I_{g4} = -1$$

$$R_5 = R_8 = 2, \quad R_6 = R_7 = 1 \quad (\text{A}, \Omega)$$

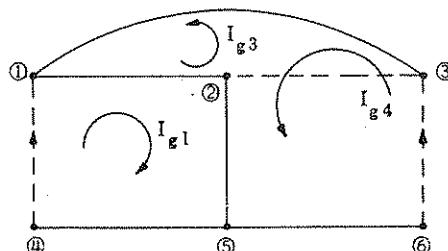


Il circuito in esame si trova nella situazione anomala b) considerata nell'osservazione II.2.2; infatti c'è un taglio di soli generatori di corrente (I_{g1}, I_{g2}, I_{g4}) e le relative correnti impresse soddisfano la prima legge di Kirchhoff.

Applichiamo il metodo di analisi passo per passo.

- 1) Non è possibile trovare un albero i cui rami non contengano i generatori di corrente. Scegliamolo allora come in fig.II.2.11, con il generatore I_{g2} presente.

Fig.II.2.11 - Albero (a tratto pieno) del circuito di figura II.2.10.



- 2) Le variabili ausiliarie sono tutte note e uguali a I_{g1}, I_{g3}, I_{g4} .
- 3) Sono incognite le tensioni ai capi dei generatori di corrente; indichiamole con $v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}, v_{x4}$ (fig.II.2.10).
- 4) Le equazioni di equilibrio delle tensioni per le tre maglie sono:

$$(R_5 + R_7) I_{g1} + R_7 I_{g3} + R_7 I_{g4} = v_{x1} - v_{x2}$$

$$R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x3}$$

$$R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_6 + R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x4} - v_{x2}$$

5) L'equazione aggiuntiva relativa al vincolo imposto dal generatore di corrente I_{g2} è:

$$I_{g1} + I_{g4} = -I_{g2}$$

6) Il sistema risolvente contiene le equazioni ottenute nei passi 4) e 5), cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_5 + R_7) I_{g1} + R_7 I_{g3} + R_7 I_{g4} = v_{x1} - v_{x2} \\ R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x3} \\ R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_6 + R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x4} - v_{x2} \\ I_{g1} + I_{g4} = -I_{g2} \end{array} \right.$$

Le incognite sono v_{xk} , $k = 1, 2, 3, 4$. Fino a questo punto del procedimento, il sistema contiene un numero di incognite uguale al numero di equazioni. Sostituendo ora i valori numerici; si ha:

$$\begin{aligned} -3 + 2 - 1 &= v_{x1} - v_{x2} \\ -1 + 6 - 3 &= v_{x3} \\ -1 + 6 - 4 &= v_{x4} - v_{x2} \\ -1 - 1 &= -2 \end{aligned}$$

Si vede che la quarta equazione è un'identità e quindi il sistema risolvente è indeterminato. Per renderlo determinato possiamo seguire l'accorgimento proposto nell'osservazione II.2.2 e sostituire un generatore di tensione di valore assegnato (in modo arbitrario) al posto di uno dei tre generatori di corrente I_{g1}, I_{g2}, I_{g4} . Ciò equivale ad assegnare un valore ad una delle tre tensioni v_{x1}, v_{x2}, v_{x4} . Ad esempio scegliendo $v_{x2} = 100$ Volt, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 = v_{x1} - 100 \\ 2 = v_{x3} \\ 1 = v_{x4} - 100 \end{array} \right.$$

Quindi risolvendo, risulta:

$$\begin{aligned} v_{x1} &= 98 & v_{x3} &= 2 & v_{x4} &= 101 \\ (v_{x2} &= 100) & & & & (V) \end{aligned}$$

Le altre grandezze elettriche del circuito possono essere facilmente individuate.

Osservazione II.2.3

Un modo molto semplice per ovviare all'inconveniente dovuto alla presenza dei generatori di corrente è quello di sostituire quest'ultimi con generatori di tensione tramite opportune trasformazioni. Si riduce in questo modo il circuito da analizzare ad uno avente solo resistori e generatori di tensione. Unico svantaggio è che il circuito ottenuto è diverso da quello assegnato, in corrispondenza ad alcuni suoi rami e perciò occorre sempre tenere presente tale fatto nella determinazione finale delle tensioni e correnti del circuito iniziale.

La trasformazione viene effettuata in due passi successivi. Dapprima si sostituisce al generico generatore di corrente un opportuno numero di generatori di corrente aventi in parallelo uno ed un solo ramo. Ciò si può sempre fare, considerando una maglia che comprende il generatore di corrente che si vuole eliminare, come indicato in fig.II.2.12 ed osservando che l'equilibrio delle correnti nei nodi A_k , $k = 1, 2, \dots, N+1$ rimane invariato. È ovvio che tale passo non è necessario se il generatore di corrente già si trova in parallelo o ad una resistenza o ad un generatore di tensione.

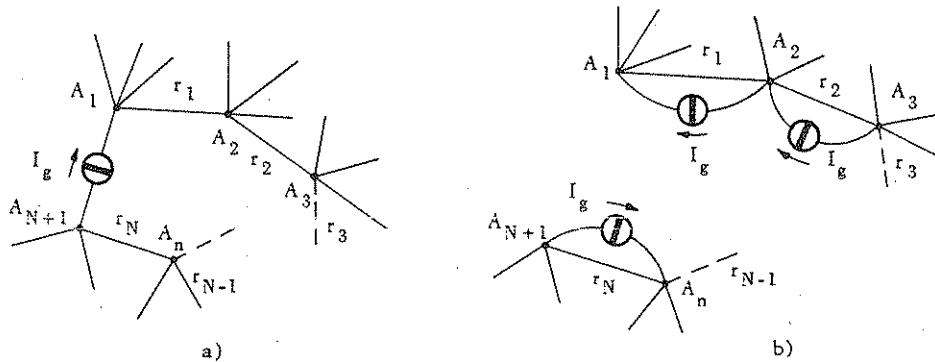


Fig.II.2.12 - a) Circuito in cui è messo in evidenza il generatore di corrente che si vuole eliminare. b) Circuito trasformato, in cui il generatore di corrente di partenza è stato sostituito da N generatori di corrente di ugual valore, essendo N il numero dei rami della maglia.

Successivamente si utilizzano le equivalenze di fig.II.2.13 per eliminare definitivamente i generatori di corrente introdotti, come indicato esplicitamente in fig.II.2.14. La trasformazione globale mostrata in fig.II.2.14, porta ad un circuito equivalente a quello di partenza dal punto di vista elettrico con l'esclusione della maglia interessata dalla trasformazione. È inoltre evidente che viene eliminato mediante essa un generatore di corrente alla volta; perciò, se è necessario, occorre applicarlo ripetutamente per eliminare tutti i generatori di corrente presenti.

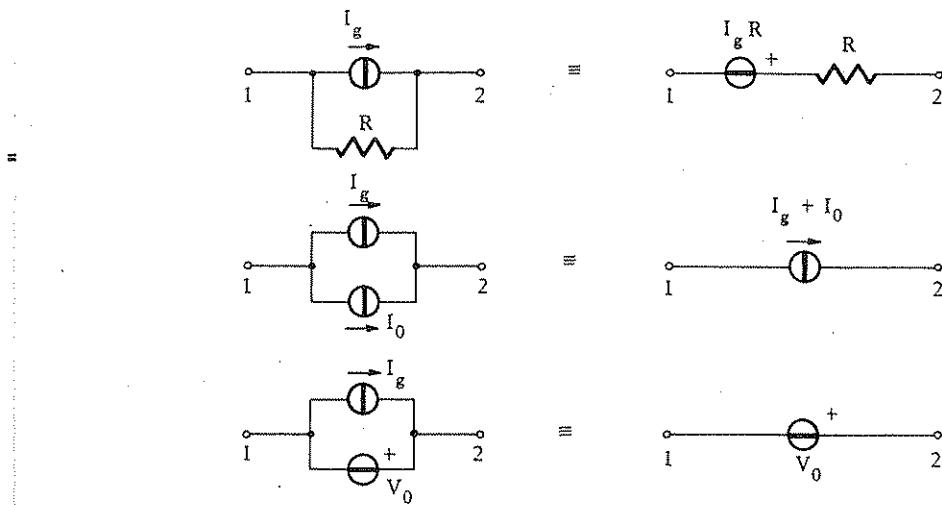


Fig. II.2.13 - Equivalenze che si utilizzano per eliminare un generatore di corrente I_g da un circuito. Le equivalenze sono valide solo dal punto di vista elettrico esterno ai nodi 1 e 2.

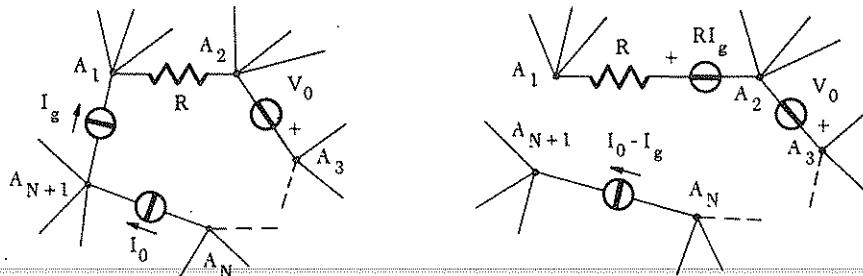


Fig. II.2.14 - Trasformazione finale per l'eliminazione del generatore di corrente I_g .

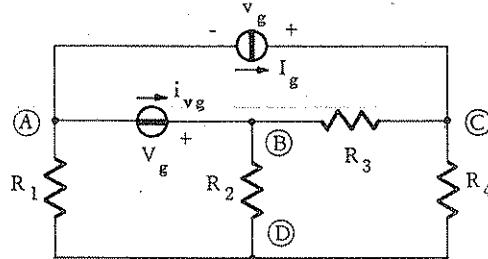
In conclusione con la trasformazione precedente possiamo sempre ricondurre un circuito assegnato, contenente generatori di corrente e tensione, ad uno contenente solo generatori di tensione equivalente a quello di partenza, fatta eccezione per alcune parti. Il problema dell'analisi, perciò, risolto su quest'ultimo va completato, individuando successivamente le tensioni e correnti dei rami del circuito di partenza, eliminati dalla trasformazione.

Esempio II.2.6

Applicare al circuito di fig. II.2.15 il procedimento descritto nell'Oss. II.2.3 e basato su trasformazioni circuitali.

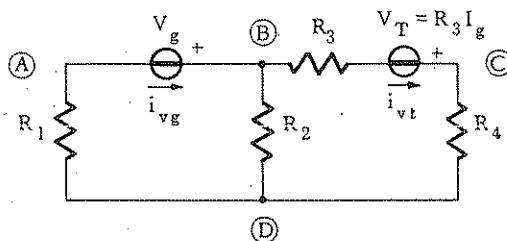
Fig.II.2.15 - Circuito considerato nell'esempio II.2.6. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_3 = 2, \quad R_2 = R_4 = 1, \\ I_g = 2, \quad V_g = 1 \quad (\Omega, A, V)$$



- 1) Il circuito assegnato contiene un solo generatore di corrente I_g , il quale fa parte di una maglia contenente due ulteriori rami: un generatore di tensione ed un resistore. Applicando le trasformazioni indicate nelle fig.II.2.12 e II.2.13 a tale maglia, si ottiene il circuito equivalente di fig.II.2.16 (circuito T).

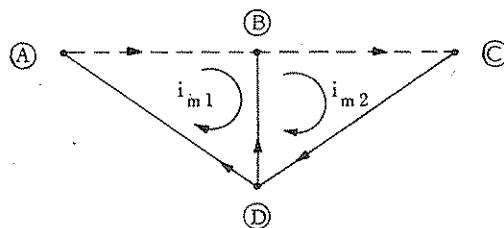
Fig.II.2.16 - Circuito trasformato dell'esempio II.2.6 (circuito T).



- 2) Analizziamo il circuito di fig.II.2.16 con il procedimento di analisi su base maglie senza trasformazioni, scegliendo l'albero indicato a tratto pieno in fig.II.2.17. Si ottiene:

$$(R_1 + R_2)i_{m1} - R_2 i_{m2} = V_g \\ - R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4)i_{m2} = R_3 I_g$$

Fig.II.2.17 - Albero (a tratto pieno) del circuito di figura II.2.16.



Sostituendo i valori numerici si ha:

$$5i_{m1} - i_{m2} = i \\ - i_{m1} + 4i_{m2} = 4$$

Da cui si ottiene:

$$i_{m1} = 8/11 \quad i_{m2} = 13/11 \quad (A)$$

In conclusione si ottengono i seguenti valori per le grandezze elettriche del circuito T:

$$\begin{aligned}
 i_{R1} &= i_{m1} = 8/11 & v_{R1} &= 16/11 \\
 i_{R2} &= i_{m2} - i_{m1} = 5/11 & v_{R2} &= 5/11 \\
 i_{R3} &= i_{m2} = 13/11 & v_{R3} &= 26/11 \\
 i_{R4} &= i_{m2} = 13/11 & v_{R4} &= 13/11 \\
 i_{vg} &= i_{m1} = 8/11 & & \\
 i_{vt} &= i_{m2} = 13/11 & &
 \end{aligned} \tag{A, V}$$

3) Ricaviamo le tensioni e le correnti dei rami del circuito di partenza. Le grandezze elettriche v_{R1} , i_{R1} , v_{R2} , i_{R2} , v_{R4} , i_{R4} sono uguali a quelle già calcolate, in quanto relative a rami non interessati dalle trasformazioni. Per quanto riguarda la corrente i_{vg} del generatore di tensione, si ha dalla fig.II.2.18:

$$i_{vg} + I_g = (i_{vg})_T$$

e quindi:

$$i_{vg} = \frac{8}{11} - 2 = -\frac{14}{11} \text{ A}$$

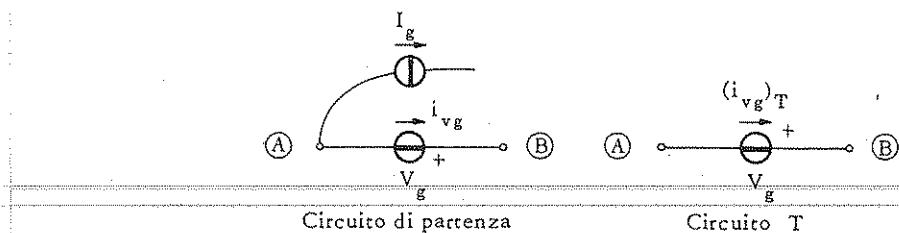


Fig.II.2.18 - Derivazione della corrente del generatore di tensione del circuito di fig.II.2.15.

Per quanto riguarda la corrente i_{R3} si ha dalla fig.II.2.19:

$$i_{R3} + I_g = (i_{R3})_T$$

e quindi:

$$i_{R3} = \frac{13}{11} - 2 = -\frac{9}{11} \text{ A}$$

$$v_{R3} = R_3 i_{R3} = -\frac{18}{11} \text{ V}$$

Infine la tensione di capi del generatore di corrente I_g risulta pari a:

$$v_g = v_{R4} + v_{R1} = \frac{13}{11} + \frac{16}{11} = \frac{29}{11} \text{ V}$$

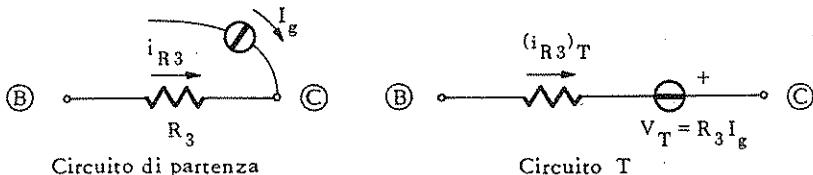


Fig.II.2.19 - Derivazione della corrente del resistore R_3 del circuito di fig.II.2.15.

II.2.3 - Caso in cui siano presenti anche generatori controllati.

L'aggiunta dei generatori controllati amplia notevolmente la classe e l'importanza dei circuiti che si possono considerare. Infatti, molti dispositivi elettronici ammettono sotto certe condizioni circuiti equivalenti contenenti tali componenti. Ciascuno dei generatori controllati è caratterizzato da un parametro di controllo, le cui dimensioni dipendono dal particolare tipo di generatore considerato. Tale parametro di controllo è una quantità reale indipendente dal tempo e quindi i circuiti che si stanno considerando sono «senza memoria».

Il metodo delle maglie può essere facilmente esteso con la seguente strategia:

- 1) Scrivere il sistema risolvente su base maglie considerando i generatori controllati come se fossero generatori indipendenti.

Tale ipotesi è del tutto provvisoria ed ha lo scopo di facilitare l'impostazione del problema. Infatti mentre un generatore indipendente è caratterizzato da una grandezza elettrica impressa fissa e quindi introduce un termine noto nelle equazioni risolventi, in un generatore controllato la grandezza elettrica impressa dipende da altre grandezze elettriche del circuito (e quindi dalle variabili ausiliarie scelte per l'analisi del circuito). Pertanto un generatore controllato non introduce termini noti, ma contribuisce alla matrice dei coefficienti del sistema. Si può quindi dire che, in generale, in presenza di generatori controllati non vale più la proprietà II.2.1 e che di conseguenza la matrice dei coefficienti non è più simmetrica.

- 2) Aggiungere per ogni generatore controllato un'equazione di vincolo. Per i generatori di tensione controllati, tale equazione assume la seguente forma:

$$(II.2.12) \quad V_{gc} = k f(i_m, V_{gi}, R_i)$$

in cui: V_{gc} è la tensione controllata; k è il parametro di controllo; $f(\cdot)$ è una funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo (tensione o corrente) in funzione delle correnti di maglia i_m , delle tensioni dei generatori indipendenti presenti V_{gi} e delle resistenze R_i dei resistori. Per i generatori di corrente controllati, tale equazione di vincolo assume la forma seguente:

$$(II.2.13) \quad f_1(i_m) = k f(i_m, V_{gi}, R_i)$$

in cui: la funzione lineare $f_1(\cdot)$ esprime la corrente controllata in funzione delle correnti di maglia i_m ; k è il parametro di controllo; la funzione lineare $f(\cdot)$ esprime la grandezza elettrica di controllo in modo analogo a quanto visto per l'espressione II.2.12.

3) Risolvere il sistema complessivo e determinare le grandezze elettriche desiderate. Se sono state usate le trasformazioni circuitali descritte nell'Oss. II.2.3, occorre effettuare le trasformazioni inverse.

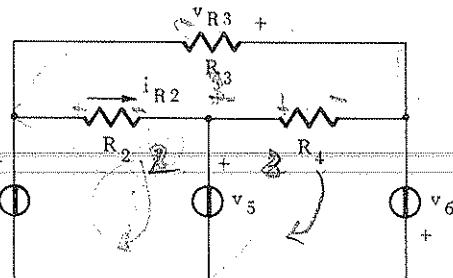
Esempio II.2.7

Applicare il metodo di analisi su base maglie al circuito di fig. II.2.20.

Fig. II.2.20 - Circuito considerato nell'esempio II.2.7. I valori dei componenti sono:

$$R_2 = R_4 = 1, \quad R_3 = 2, \quad V_1 = 3,$$

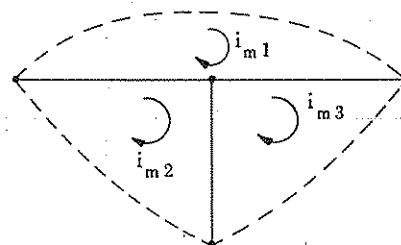
$$v_5 = 2 i_{R2}, \quad v_6 = 3 v_{R3} \quad (\Omega, V, A)$$



Passo 1: Scegliamo l'albero e quindi le maglie come indicato in fig. II.2.21. Scriviamo le equazioni di equilibrio delle tensioni di maglia, considerando i generatori controllati come se fossero indipendenti. Si ha:

$$\begin{aligned} (R_2 + R_3 + R_4) i_{m1} - R_2 i_{m2} - R_4 i_{m3} &= 0 \\ -R_2 i_{m1} + R_2 i_{m2} &= V_1 - v_5 \\ -R_4 i_{m1} + R_4 i_{m3} &= v_5 + v_6 \end{aligned}$$

Fig.II.2.21-Albero, co-albero e maglie del circuito di fig.II.2.20.



Passo 2: Le tensioni v_5 e v_6 non sono note, ma sono controllate da altre grandezze elettriche del circuito, come risulta dalle specifiche del circuito date in fig.II.2.20. Il generatore di tensione v_5 è controllato dalla corrente i_{R2} che scorre nel resistore R_2 ; esprimendo tale corrente in funzione delle correnti di maglia si ha:

$$v_5 = 2(i_{m2} - i_{m1})$$

che è la prima equazione di vincolo cercata.

Il generatore di tensione v_6 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_3 . Tale tensione si può esprimere a sua volta in funzione delle correnti di maglia e della resistenza R_3 . Si ha:

$$v_6 = 3(-R_3 i_{m1})$$

che è la seconda equazione di vincolo cercata.

Passo 3: Il sistema risolvente si ottiene considerando l'insieme delle equazioni ottenute nei passi 1 e 2. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{array}{lcl} 4i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} = 0 & v_5 = 2(i_{m2} - i_{m1}) \\ -i_{m1} + i_{m2} = 3 - v_5 & v_6 = -6i_{m1} \\ -i_{m1} + i_{m3} = v_5 + v_6 \end{array}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nelle prime tre si ha:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si vede da quest'ultimo sistema di equazioni che la presenza dei generatori controllati ha distrutto la simmetria della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni alle maglie. Risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{array}{ll} i_{m1} = 3/8 & v_5 = 2 \\ i_{m2} = 11/8 & v_6 = -9/4 \\ i_{m3} = 1/8 & \end{array} \quad (A, V)$$

Le altre grandezze elettriche del circuito possono essere facilmente determinate.

Esempio II.2.8

Analizzare con il metodo delle maglie il circuito di fig.II.2.22.

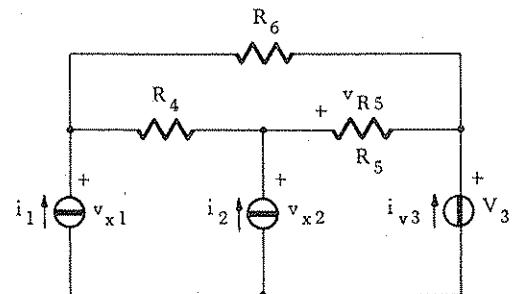


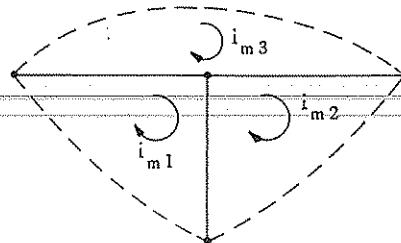
Fig.II.2.22 - Circuito considerato nell'esempio II.2.8. I valori dei componenti sono.

$$\begin{aligned} R_4 &= 2, \quad R_5 = R_6 = 1, \quad V_3 = 2, \\ i_1 &= 3i_{v3}, \quad i_2 = 2v_{R5} \quad (\Omega, V, A) \end{aligned}$$

Passo 1 : Scegliamo l'albero e le maglie come indicato in fig.II.2.23. Scriviamo le equazioni alle maglie considerando i generatori controllati come se fossero indipendenti. A tale scopo occorre introdurre le tensioni incognite ai loro capi, scelte come indicato in fig.II.2.22. Il sistema di equazioni di equilibrio delle tensioni di maglia è il seguente:

$$\begin{aligned} R_4 i_{m1} - R_4 i_{m3} &= v_{x1} - v_{x2} \\ R_5 i_{m2} - R_5 i_{m3} &= v_{x2} - V_3 \\ -R_4 i_{m1} + R_5 i_{m2} + (R_4 + R_5 + R_6) i_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Fig.II.2.23 - Albero, co-albero e maglie del circuito di fig.II.2.22.



Passo 2 : Occorre ora introdurre le equazioni di vincolo imposte dai generatori controllati. Il generatore di corrente i_1 è controllato dalla corrente che scorre nel generatore indipendente V_3 . Il vincolo che si ottiene, espresso in termini delle correnti di maglia, è il seguente:

$$i_{m1} = 3(-i_{m2})$$

Il generatore di corrente i_2 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_5 . Il vincolo in questo caso è il seguente:

$$i_{m2} - i_{m1} = 2R_5(i_{m2} - i_{m3})$$

Passo 3 : Sostituendo i valori numerici, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 2i_m 1 - 2i_m 3 &= v_{x1} - v_{x2} \\ i_m 2 - i_m 3 &= v_{x2} - 2 \\ -2i_m 1 - i_m 2 + 4i_m 3 &= 0 \\ i_m 1 &= -3i_m 2 \\ i_m 2 - i_m 1 &= 2(i_m 2 - i_m 3) \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, si ha:

$$\begin{array}{ll} i_m 1 = 0 & v_{x1} = 2 \\ i_m 2 = 0 & v_{x2} = 2 \\ i_m 3 = 0 & \end{array} \quad (A, V)$$

Le tensioni e le correnti dei rami resistivi sono tutte nulle.

II.2.4 - Caso in cui siano presenti nullori.

Nel § I.8.2 è stato introdotto l'elemento ideale «nullore». Tale elemento costituisce ciò che si ottiene idealizzando il comportamento di dispositivi quali il transistore, l'amplificatore operazionale, ecc. Perciò esso si presta ad un esame rapido dei circuiti che contengono tali dispositivi, quando venga sostituito ad essi direttamente. D'altra parte, è sempre possibile una rappresentazione accurata dei dispositivi stessi, inserendo accanto al nullore gli elementi ideali bipolari del tipo resistore e generatore indipendente. È da tenere presente che in quest'ultimo caso, i parametri caratteristici del dispositivo reale verranno a dipendere dai valori delle resistenze dei resistori del circuito equivalente e non dal nullore che non possiede parametri caratteristici e la cui caratterizzazione è puramente topologica.

Due sono pertanto i casi in cui interessano i circuiti contenenti nullori:

a) analisi approssimata di un circuito contenente amplificatori operazionali, transistori, ecc. In questo caso è possibile ottenere un procedimento estremamente rapido, efficace e semplice per avere immediatamente un'idea di massima del funzionamento del circuito stesso. Il procedimento si presta sia ad essere usato direttamente per ispezione visiva sia sul calcolatore;

b) analisi accurata di circuiti contenenti i suddetti dispositivi. In questo caso si utilizzano i circuiti equivalenti dei dispositivi, costituiti da

nullori ed altri elementi ideali bipolari. Come vedremo successivamente in questo paragrafo, la presenza dei nullori rende molto semplici ed eleganti le procedure di analisi che li contengono.

Come messo in evidenza nel § I.8.2, il comportamento del nullore in corrispondenza alle sue due porte d'ingresso è del tutto differente. Per questa ragione conviene scinderlo nei due componenti singolarmente anomali detti nullatore e noratore, secondo quanto indicato in figura I.8.7. In particolare il nullatore impone contemporaneamente tensione e corrente nulle ai suoi capi, mentre il noratore non dà alcuna indicazione sulla tensione e corrente da esso erogate. Si può inoltre osservare che ciascun nullatore può essere interpretato come un corto-circuito nel quale è stata imposta la condizione aggiuntiva di corrente nulla, ovvero un circuito aperto nel quale è stata imposta la condizione aggiuntiva di tensione nulla. D'altra parte il noratore può essere interpretato come un generatore di tensione, nel quale non è stata data alcuna indicazione della tensione impressa, ovvero un generatore di corrente nel quale non è stata data alcuna indicazione sulla corrente impressa.

Le considerazioni precedenti suggeriscono la possibilità di analizzare un circuito contenente nullori nel modo seguente:

- a) Sostituire a ciascun nullore la coppia di bipoli noratore e nullatore (se ciò non è già stato fatto nel circuito assegnato).
- b) Sostituire a ciascun nullatore un ramo in corto-circuito ovvero un circuito aperto (per i nullatori sostituiti da corti-circuiti è bene considerare distinti i nodi tra i quali il nullatore è inserito, anche dopo la sostituzione).
- c) Sostituire a ciascun noratore un generatore di tensione ovvero di corrente con grandezza impressa di valore incognito.
- d) Scrivere il sistema risolvente con uno qualunque dei metodi discussi nei paragrafi precedenti. Tale sistema non può essere risolto poiché contiene un numero di incognite superiore a quello delle equazioni, essendo presente una grandezza impressa incognita per ogni noratore presente.
- e) Scrivere per ogni nullatore presente un'equazione aggiuntiva di vincolo. Precisamente:
 - 1) se il nullatore è stato sostituito da un corto-circuito, impostare la condizione di corrente nulla attraverso di esso;
 - 2) se il nullatore è stato sostituito da un circuito aperto, impostare la condizione di tensione nulla ai suoi capi.

f) Risolvere il sistema di equazioni, che dopo l'aggiunta delle equazioni di vincolo, considerate nel punto e) precedente, ha un numero di di equazioni uguale al numero delle incognite⁽¹⁾.

Nel caso che si utilizzi il metodo delle maglie, quindi, occorre aggiungere in relazione ai nullori presenti i seguenti passi:

- 1) sostituire a ciascun nullore i due bipoli nullatore noratore;
- 2) sostituire a ciascun nullatore un corto-circuito, ed a ciascun noratore un generatore di tensione avente una tensione impressa incognita. Quindi per ogni nullore si introduce un'ulteriore incognita;
- 3) scrivere per ogni nullatore un'equazione, che esprima il fatto che la corrente in esso è uguale a zero. Tale equazione di vincolo ha la forma:

$$(II.2.14) \quad i_{nu} = f(i_m) = 0$$

dove $f(\cdot)$ rappresenta la combinazione lineare di correnti di maglia che coincide con la corrente del nullatore. Tale equazione diviene un'identità nel caso che il nullatore faccia parte del co-albero, con la conseguenza di una semplificazione del sistema risolvente.

Esempio II.2.9

Analizzare con il metodo delle maglie il circuito di fig.II.2.24.

I passi 1) e 2) aggiuntivi sono eseguiti nelle figg.II.2.25 e 26, rispettivamente. Applichiamo quindi il metodo delle maglie nella versione valida in assenza di nullori al circuito di fig.II.2.26; si ha il sistema seguente:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ -V_N \\ V_N \end{bmatrix}$$

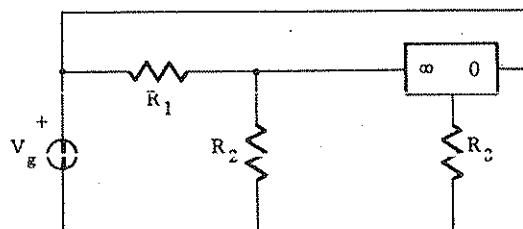


Fig.II.2.24 - Circuito considerato negli esempi II.2.9 e II.4.7:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 & R_2 &= 1/3 \\ R_3 &= 1/10 & V_g &= 2 \end{aligned} \quad (\Omega, V)$$

(1) - Ciò è sempre vero in quanto le equazioni mancanti in d) sono in numero uguale al numero dei noratori presenti e le equazioni aggiuntive in e) sono in numero uguale al numero dei nullatori. Infatti entrambi questi due numeri sono uguali al numero dei nullori presenti nel circuito che si sta considerando.

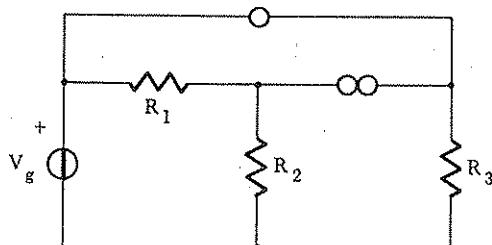


Fig.II.2.25 - Circuito ottenuto da quello di fig.II.2.24, sostituendo al nullore la coppia nullatore-noratore.

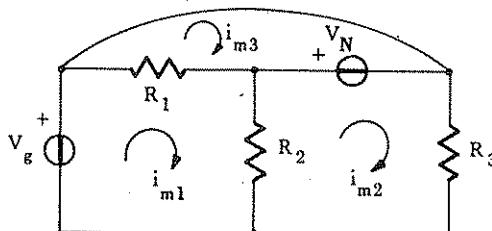


Fig.II.2.26 - Circuito ottenuto ponendo un corto circuito al posto del nullatore ed un generatore di tensione al posto del noratore nel circuito di fig.II.2.25.

A questo sistema associamo l'equazione di vincolo relativa al punto 3) aggiuntivo, cioè:

$$i_{m3} = 0$$

che è una semplice identità; infatti il nullatore si trova sul co-albero.

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 13/30 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -V_N \\ V_N \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ha:

$$V_N = \frac{13}{2} \quad , \quad i_{m1} = -\frac{13}{2} \quad , \quad i_{m2} = 20 \quad (\text{v, A})$$

Le altre grandezze elettriche del circuito si ricavano immediatamente. Ad esempio la tensione ai capi di R_3 vale:

$$R_3 i_{m2} = 2 \quad (\text{V})$$

II.3 - Analisi su base tagli.

L'analisi su base tagli può essere derivata da quella su base maglie, espressa in funzione delle correnti dei rami del co-albero, utilizzando la dualità discussa nel § I.11. Non è possibile, invece,

derivare il duale del metodo delle maglie espresso in funzione delle correnti fittizie di maglia. Per ottenere un procedimento di analisi analogo, basato sui tagli fondamentali, che si possa scrivere direttamente per ispezione visiva, occorre fare riferimento al circuito aumentato di quello che si sta analizzando. Ciò equivale ad un altro procedimento di analisi, che prende il nome di *metodo dei nodi*. Tale metodo è il più usato nelle applicazioni e verrà sviluppato nel § II.4.

Nel seguito riportiamo, a titolo di esempio, ciò che si ottiene con la dualità nel caso di circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di corrente, illustrando il caso più generale di presenza di ambedue i tipi di generatori nell'ambito dell'esempio II.4.1.

Procedimento di analisi su base tagli di un circuito costituito da resistori e generatori di corrente.

- 1) Scegliere un albero sul grafo orientato del circuito.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni dei rami dell'albero, con le rispettive orientazioni.
- 3) Scrivere le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali associati all'albero scelto.
- 4) Esprimere le correnti dei rami resistivi in funzione delle tensioni dei rami dell'albero, facendo uso delle conduttanze dei rami; assegnare alle correnti dei rami contenenti generatori di corrente il valore imposto dai generatori. È bene sottolineare che le conduttanze dei rami resistivi ed i valori delle correnti dei generatori sono quantità note.
- 5) Sostituire le espressioni ottenute al punto 4) nelle equazioni di equilibrio ottenute nel punto 3). Il sistema risultante deve avere come quantità incognite solo le variabili ausiliarie V_a .
- 6) Risolvere il sistema ottenuto nel punto 5) e determinare le tensioni V_a .
- 7) Determinare le altre grandezze elettriche del circuito. In particolare, le altre tensioni del circuito si ottengono mediante le (I.10.6) e (I.10.7) e le correnti mediante le relazioni costitutive dei componenti.

Applicando tale procedimento, si ottiene il sistema risolvente seguente:

$$(II.3.1) \quad [G_T] [V_a] = [I_T]$$

con:

$$(II.3.2) \quad [G_T] = [G_a] + [A][G_c][A]^t$$

$$[I_T] = -[I_{ga}] - [A][I_{gc}]$$

essendo:

$[G_a]$ matrice diagonale di ordine pari al numero dei rami dell'albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo dell'albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde la relativa conduttanza; ad un generatore di corrente corrisponde il valore zero;

$[G_c]$ matrice diagonale definita come la $[G_a]$, ma per i rami del co-albero;

$[I_{ga}]$ vettore colonna di ordine pari al numero dei rami dell'albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo dell'albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde il valore zero; ad un generatore di corrente corrisponde il valore della relativa corrente impressa.

$[I_{gc}]$ vettore colonna definito come il vettore $[I_{ga}]$, ma per i rami del co-albero.

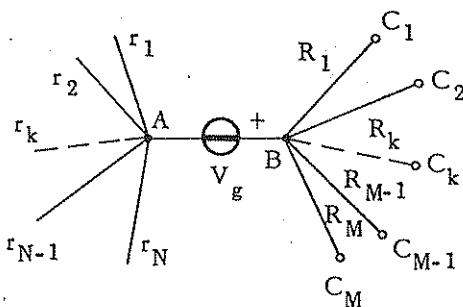
La matrice $[G_T]$ gode di una proprietà simile alla II.2.1, cioè:

Proprietà II.3.1 - «La matrice dei coefficienti del sistema di equazioni su base tagli per i circuiti costituiti da resistori e generatori di corrente è simmetrica».

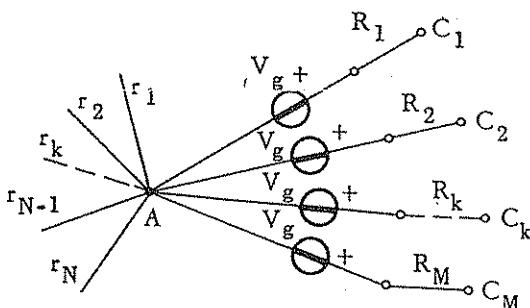
Nel caso che siano presenti anche generatori di tensione, si può procedere in due modi diversi, come accade nel caso del metodo delle maglie. Di seguito riportiamo il procedimento duale di quello proposto nell'osservazione II.2.3, in quanto basato su trasformazioni circuitali utili nelle applicazioni.

Osservazione II.3.1

Un modo molto semplice per ovviare all'inconveniente dovuto alla presenza dei generatori di tensione è quello di sostituire quest'ultimi con generatori di corrente tramite opportune trasformazioni. Si riduce in questo modo il circuito da analizzare ad uno avente solo resistori e generatori di corrente. Unico svantaggio è che tale circuito è diverso da quello assegnato, in corrispondenza ad alcuni suoi rami e perciò occorre sempre tenere presente tale fatto nella determinazione finale delle tensioni e correnti del circuito iniziale.



a) Circuito di partenza, in cui è isolato il generatore di tensione, che si vuole eliminare.



b) Eliminazione del nodo B e riduzione del generatore di partenza ad M generatori di tensione, ciascuno in serie ad un solo ramo.

Fig.II.3.1

La trasformazione di un circuito contenente generatori dei due tipi in uno contenente generatori solo di corrente può essere effettuata in due passi successivi. Dapprima si sostituisce al generico generatore di tensione tanti generatori di tensione quanti sono i rami che confluiscono in uno dei due nodi posti ai suoi estremi, come indicato in dettaglio in fig.II.3.1.

In questa fase si elimina uno dei nodi del circuito di partenza per ogni generatore di tensione e nei circuito risultante i generatori di tensione sono tutti collegati in serie ad un solo ramo.

Successivamente si utilizzano le equivalenze di fig.II.3.2 per eliminare definitivamente i generatori di tensione introdotti, come indicato in fig.II.3.3.

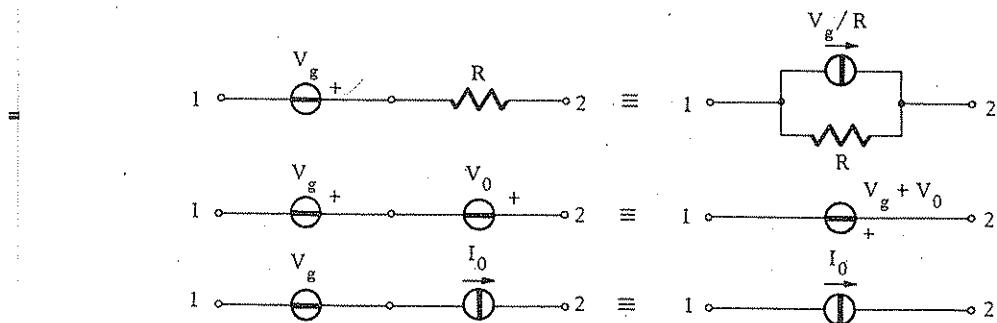


Fig. II.3.2 - Equivalenti che si utilizzano per eliminare un generatore di tensione V_g da un circuito. Le equivalenze sono valide solo dal punto di vista elettrico esterno ai nodi 1 e 2.

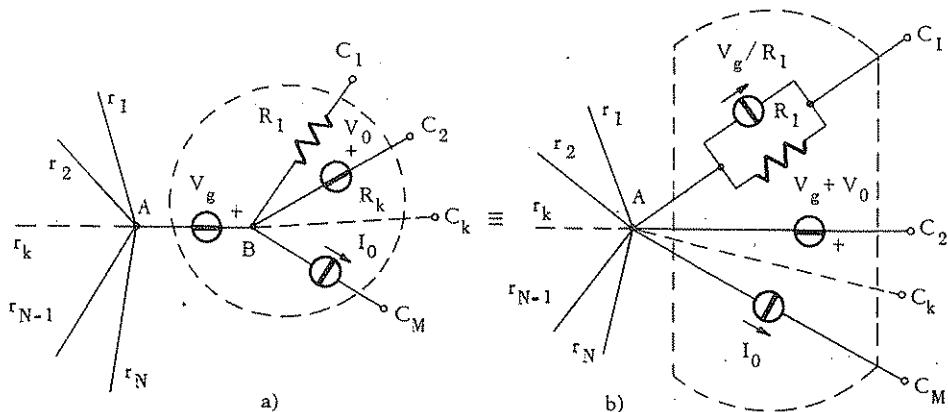


Fig. II.3.3 - Trasformazione finale per l'eliminazione del generatore di tensione V_g .

E' opportuno sottolineare che la trasformazione di fig. II.3.3 porta ad un circuito equivalente dal punto di vista elettrico a quello di partenza con l'esclusione della parte compresa tra i nodi A, C_1, C_2, \dots, C_M , cioè della parte racchiusa entro le zone tratteggiate. E' anche chiaro che la trasformazione elimina un generatore di tensione alla volta e perciò è necessario applicarla ripetutamente, se è il caso, per eliminare tutti i generatori di tensione presenti.

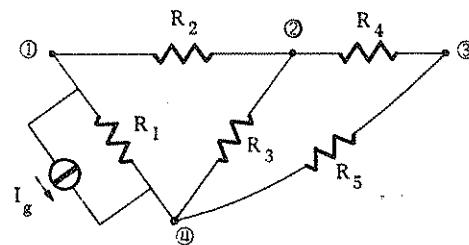
In conclusione con la trasformazione precedente possiamo sempre ricondurre un circuito assegnato, contenente generatori di tensione e corrente, ad uno contenente solo generatori di corrente, equivalente a quello di partenza, fatta eccezione per alcune parti. Il problema dell'analisi, perciò, risolto su quest'ultimo va completato, individuando successivamente le tensioni e correnti dei rami del circuito di partenza, eliminati dalla trasformazione.

Esempio II.3.1

Applicare il procedimento di analisi su base tagli al circuito di figura II.3.4.

Fig. II.3.4 - Circuito considerato nell'esempio II.3.1. I valori dei componenti sono:

$$I_g = 2 \quad R_1 = 0,5 \quad R_2 = R_4 = \\ = R_5 = 1 \quad R_3 = 1/3 \quad (\text{A}, \Omega)$$



Passi 1 e 2 : Scegliamo l'albero nel modo mostrato in fig. II.3.5. Le variabili ausiliarie sono v_2 , v_4 , v_5 orientate secondo i versi indicati in fig. II.3.5a.

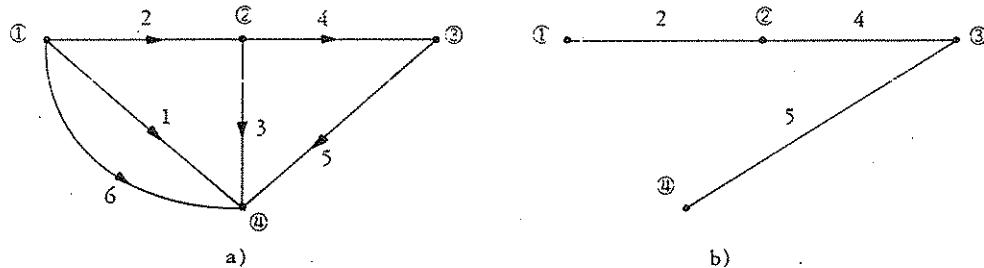


Fig. II.3.5 - a) Grafo orientato del circuito di fig. II.3.4; b) Albero scelto.

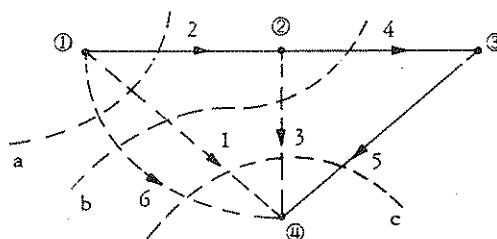
Passo 3 : Scriviamo le equazioni di equilibrio delle correnti per i tre tagli fondamentali, con la convenzione di supporre positivo il verso di attraversamento delle superfici di taglio stabilito dal relativo ramo dell'albero (fig. II.3.6):

$$\text{taglio } a \quad i_2 + i_1 + i_6 = 0$$

$$\text{taglio } b \quad i_4 + i_3 + i_1 + i_6 = 0$$

$$\text{taglio } c \quad i_5 + i_3 + i_1 + i_6 = 0$$

Fig. II.3.6 - Tagli fondamentali considerati nell'esempio II.3.1.



Passo 4 : Esprimiamo le correnti dei rami del circuito in funzione delle tensioni dei rami dell'albero v_2, v_4, v_5 e delle grandezze note (conduttanze e correnti impresse):

$$i_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5) \quad i_4 = G_4 v_4$$

$$i_2 = G_2 v_2 \quad i_5 = G_5 v_5$$

$$i_3 = G_3 (v_4 + v_5) \quad i_6 = I_g$$

Passo 5 : Sostituendo le espressioni ricavate nel passo 4 nelle equazioni di equilibrio, si ottiene il seguente sistema di equazioni risolventi:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ -I_g \\ -I_g \end{bmatrix}$$

Considerando i valori numerici dei componenti, si ha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Passo 6 : Risolvendo il sistema si ottengono i valori delle variabili ausiliarie:

$$v_2 = -\frac{14}{25} \quad v_4 = -\frac{2}{25} \quad v_5 = -\frac{2}{25} \quad (\text{V})$$

Passo 7 : Le tensioni dei rami del co-albero v_1 e v_3 si ottengono tramite le relazioni:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_4 + v_5 = -18/25 \\ v_3 = v_4 + v_5 = -4/25 \end{cases} \quad (\text{V})$$

Le correnti dei rami resistivi si ottengono moltiplicando le tensioni per le relative conduttanze:

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 = -36/25 \\ i_2 = G_2 v_2 = -14/25 \\ i_3 = G_3 v_3 = -12/25 \end{cases} \quad \begin{cases} i_4 = G_4 v_4 = -2/25 \\ i_5 = G_5 v_5 = -2/25 \end{cases} \quad (\text{A})$$

II.4 - Analisi su base nodi.

Il metodo di analisi su base nodi è il più usato nelle applicazioni, poiché usualmente permette un risparmio computazionale. Il metodo è una particolarizzazione di quello dei tagli in quanto deriva dall'applicazione di quest'ultimo al circuito aumentato di quello di interesse.

II.4.1 - Il circuito aumentato.

Quando si analizza un circuito su base tagli la scelta dell'albero è arbitraria, se si eccettuano le considerazioni che si possono fare, per dualità, nel caso della presenza dei generatori di tensione. Il sistema risolvente di equazioni è strettamente legato ad un albero del circuito. È possibile, tuttavia, evitare tale dipendenza, utilizzando la nozione di circuito aumentato. Introduciamo tale nozione in un esempio, considerando allo scopo il circuito di fig.II.4.1. In tale circuito si può notare che le coppie di nodi 1-3, 1-4, 2-4 e 3-5 non sono connesse direttamente fra loro con dei bipoli, a differenza di quanto accade per le altre coppie di nodi. Si può allora considerare un nuovo circuito in cui anche tali coppie di nodi sono collegate, utilizzando dei rami resistivi a conduttanza nulla. Tale nuovo circuito, mostrato in fig.II.4.2 viene detto *circuito aumentato* ed è equivalente al precedente dal punto di vista elettrico, poiché i rami a conduttanza nulla non contribuiscono agli equilibri di corrente.

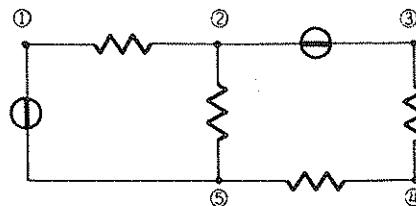


Fig.II.4.1 - Circuito considerato per l'introduzione della nozione di «circuito aumentato».

Il grafo del circuito aumentato, a differenza di quello del circuito originale, gode della proprietà che tutte le coppie di nodi sono fra loro connesse; un tale grafo si dice *a maglie complete*. Quanto detto nel caso del circuito di fig.II.4.1 può essere facilmente esteso al caso di un circuito qualsiasi. Vale quindi la seguente definizione:

Definizione II.4.1 - «Si definisce come circuito aumentato di uno assegnato, il circuito ottenuto da quello assegnato aggiungendo a questo tanti rami resistivi a conduttanza nulla quanti sono necessari per connettere direttamente tutti i suoi nodi».

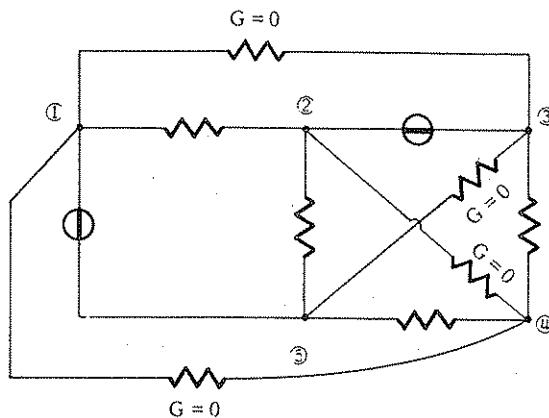


Fig. II.4.2 - Circuito aumentato di quello mostrato in fig. II.4.1.

E' importante osservare che:

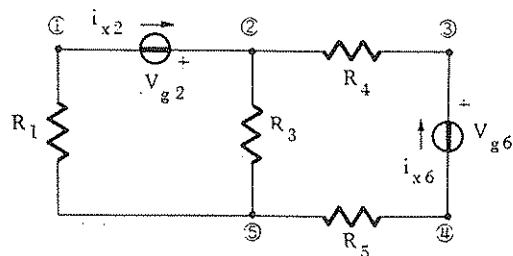
- a) nell'analisi del circuito aumentato si può ignorare il contributo dei rami fittizi aggiunti;
- b) la soluzione del problema dell'analisi per il circuito aumentato coincide con quella del circuito di partenza;
- c) il sistema risolvente ottenuto analizzando su base tagli il circuito aumentato può non coincidere con alcun sistema risolvente su base tagli per il circuito di partenza. Ciò accade quando l'albero scelto per il circuito aumentato non è un albero del circuito di partenza.

Esempio II.4.1

Applicare quanto detto all'analisi del circuito di fig. II.4.3.

Fig. II.4.3 - Circuito considerato nell'esempio II.4.1. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,5, \quad R_2 = R_3 = R_5 = 1, \\ R_4 &= 1/3, \quad V_{g2} = 2, \\ V_{g6} &= 1 \quad (\Omega, V) \end{aligned}$$



Consideriamo il grafo del circuito aumentato, nel quale i rami fittizi sono indicati tratteggiati (fig. II.4.4). Scegliamo per tale circuito l'albero di fig. II.4.5, formato dai rami 2, 3, 10 e 5.

Si può notare che l'albero scelto *non* è un albero del grafo del circuito di partenza, poiché in tale circuito non è presente il ramo 10. Per la stessa ragione l'insieme delle linee di taglio e quindi il corrispondente sistema di equazioni non avrebbe potuto essere scritto con riferimento al circuito originale.

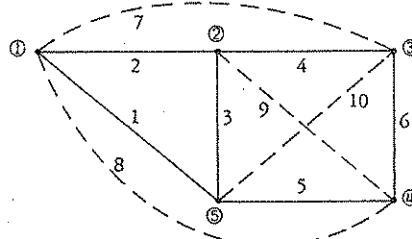


Fig. II.4.4 - Circuito aumentato di quello mostrato in fig. II.4.3.

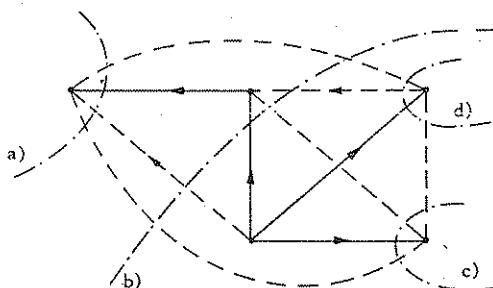


Fig. II.4.5 - Albero (a tratto pieno) e linee di taglio considerati per il circuito aumentato.

Applichiamo il procedimento di analisi su base tagli in presenza di generatori di tensione; tale procedimento è il duale di quello su base maglie descritto nel § II.2.2 per i circuiti costituiti da resistori e generatori dei due tipi. Le variabili ausiliarie sono V_{g2} , v_3 , v_5 e v_{10} . In particolare V_{g2} è nota per la presenza del generatore di tensione sul ramo 2 e v_{10} è la tensione del ramo fittizio 10, corrispondente alla differenza di potenziale fra i nodi 3 e 5 del circuito originale. Ulteriori incognite sono le correnti dei generatori di tensione i_{x2} e i_{x6} .

Il sistema, che si ottiene considerando le equazioni di equilibrio delle correnti attraverso le linee di taglio di fig. II.4.5 è:

$$G_1 V_{g2} + G_1 v_3 = i_{x2}$$

$$G_1 V_{g2} + (G_1 + G_3 + G_4)v_3 - G_4 v_{10} = 0$$

$$G_5 v_5 = i_{x6}$$

$$-G_4 v_3 + G_4 v_{10} = -i_{x6}$$

A tale sistema occorre aggiungere l'equazione del vincolo imposto dal generatore di tensione V_{g6} , che vale:

$$v_5 - v_{10} = V_{g6}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{aligned}4 + 2v_3 &= i_{x2} \\4 + 6v_3 - 3v_{10} &= 0 \\v_5 &= i_{x6} \\-3v_3 + 3v_{10} &= -i_{x6} \\v_5 - v_{10} &= 1\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\begin{aligned}v_3 &= -19/15 & v_{10} &= -6/5 & i_{x6} &= -1/5 \\v_5 &= -1/5 & i_{x2} &= 22/15 & &\end{aligned}\quad (\text{V, A})$$

Occorre notare che la tensione v_{10} non è una tensione di ramo del circuito originale, ma coincide con la tensione esistente fra una coppia di nodi. Tutte le altre grandezze elettriche del circuito possono essere ricavate facilmente:

$$\begin{aligned}v_1 &= V_{g2} + v_3 = 11/15 & i_1 &= G_1 v_1 = 22/15 & i_3 &= G_3 v_3 = -19/15 \\v_4 &= v_3 - v_{10} = -1/15 & i_4 &= G_4 v_4 = -1/5 & i_5 &= G_5 v_5 = -1/5\end{aligned}\quad (\text{V, A})$$

II.4.2 - Caso in cui siano presenti solo resistori e generatori indipendenti di corrente.

Il metodo di analisi su base nodi si può ottenere come caso particolare del metodo dei tagli applicato al circuito aumentato. Per ottenere tale metodo occorre scegliere in modo opportuno l'albero del circuito. Precisamente, posta l'attenzione su un generico nodo, detto nodo di riferimento, occorre scegliere l'albero formato dai rami che congiungono tale nodo con tutti gli altri del circuito. Considerando, ad esempio, il circuito di fig. II.4.6, si consideri l'albero mostrato in fig. II.4.7. Come nodo di riferimento è stato scelto il nodo 5 e come rami dell'albero i rami a, b, c, d, tutti connessi al nodo 5 (il nodo di riferimento è a volte contrassegnato con il simbolo di massa (fig. II.4.7)).

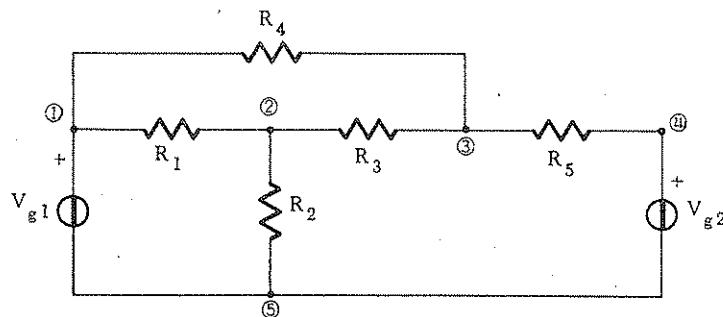


Fig. II.4.6 - Circuito considerato nell'introduzione al metodo dei nodi.

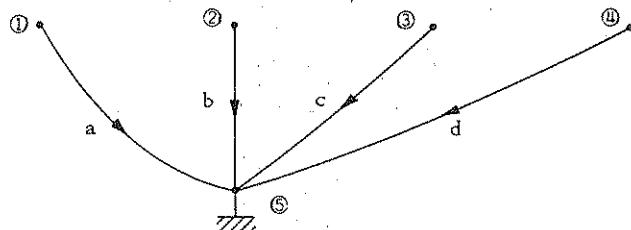


Fig. II.4.7 - Albero scelto sul circuito aumentato del circuito di fig. II.4.6.

Si vede dalle due precedenti figure che, mentre i rami a, b, d corrispondono a rami del circuito assegnato (rispettivamente il generatore V_{g_1} , il resistore R_2 ed il generatore V_{g_2}), il ramo c non corrisponde ad alcun ramo del circuito di fig. II.4.6; esso pertanto è stato ottenuto scegliendolo fra i rami del circuito aumentato.

Caratterizziamo ora l'insieme delle linee di taglio corrispondenti a tale particolare scelta dell'albero. Tali linee, nel caso dell'esempio di fig. II.4.6, sono indicate tratteggiate in fig. II.4.8. Si vede che esse rappresentano delle linee che racchiudono ciascun nodo del circuito, eccetto il nodo di riferimento. Ciò vale in generale. Pertanto se si sceglie la convenzione di orientare i rami dell'albero verso il nodo di riferimento, le equazioni di equilibrio che si utilizzano nel caso presente sono quelle delle correnti uscenti da ciascun nodo del circuito, eccetto il nodo di riferimento. Per tale motivo esse prendono il nome di equazioni ai nodi.

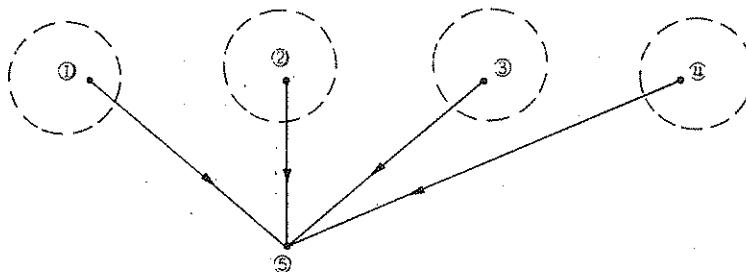


Fig. II.4.8 - Linee di taglio associate all'albero di fig. II.4.7.

Si può ancora notare che, per le equazioni ai nodi, le variabili auxiliarie risultano coincidenti con le tensioni dei nodi del circuito rispetto al nodo di riferimento, ciò vale in generale, sia che il nodo sia realmente connesso con un ramo al nodo di riferimento, sia che vi sia connesso con un ramo fittizio a conduttanza nulla. Inoltre, nello scrivere le equazioni risolventi è facile rendersi conto che: 1) i termini della diagonale principale della matrice dei coefficienti, del tipo (k, k), rappresentano la somma delle conduttanze dei rami resistivi connessi al nodo

k-simo; 2) i termini del tipo (k, i) coincidono con la somma delle conduttanze cambiate di segno dei rami resistivi che congiungono i nodi k ed i . Il cambiamento di segno è conseguenza del fatto che il ramo che congiunge due nodi, qualunque sia la sua orientazione, risulta uscente da un nodo ed entrante nell'altro; come messo in evidenza in fig.II.4.9; 3) il termine k -simo del vettore dei termini noti coincide con la somma delle correnti entranti nel nodo k -simo.

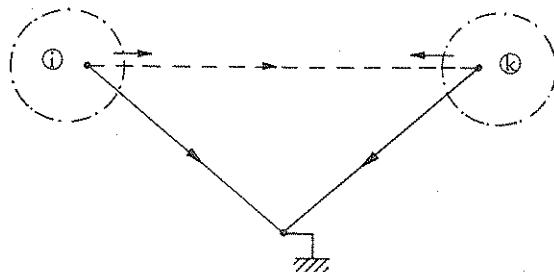


Fig.II.4.9 - Determinazione del segno del termine (k, i) della matrice dei coefficienti.

Quanto detto permette di formulare direttamente il seguente procedimento di analisi.

Procedimento di analisi su base nodi di circuiti contenenti solo resistori e generatori indipendenti di corrente.

- 1) Scegliere un nodo del circuito come nodo di riferimento.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni degli altri nodi E_1, E_2, \dots, E_{N-1} rispetto al nodo di riferimento.
- 3) Scrivere il sistema risolvente determinando la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti nel modo seguente:
 - a) il termine (k, k) della matrice dei coefficienti coincide con la somma delle conduttanze dei rami resistivi connessi al nodo k , per tutti i nodi salvo quello di riferimento;
 - b) il termine (k, i) della matrice dei coefficienti è pari alla somma cambiata di segno di tutte le conduttanze dei rami resistivi che congiungono i nodi k ed i (per tutte le coppie salvo quelle che contengono il nodo di riferimento);
 - c) il componente k -simo del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle correnti dei generatori di corrente entranti nel nodo k -simo (per tutti i nodi salvo quello di riferimento).
- 4) Risolvere il sistema ottenuto al punto 3) e determinare le tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento.

5) Determinare le tensioni degli altri rami del circuito come differenza fra le tensioni dei nodi a cui tali rami sono connessi. Determinare le correnti del circuito in base alle relazioni costitutive dei componenti.

Osservazione II.4.1

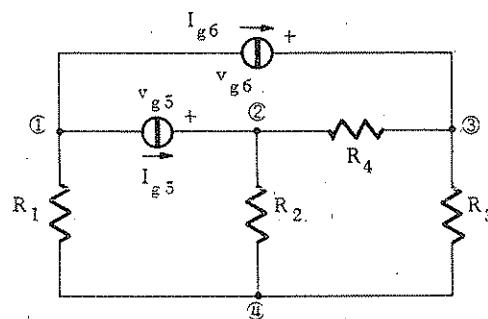
Si può notare che nel procedimento di analisi su base nodi le nozioni topologiche del circuito sono ridotte al minimo e sono inoltre molto facilitate le scelte dei segni dei coefficienti del sistema risolvente. Essendo ancora valida la proprietà II.3.1, la matrice dei coefficienti del sistema risolvente su base nodi è simmetrica; ciò può essere verificato anche direttamente, osservando che il termine (k, i) è sempre uguale al termine (i, k) della matrice dei coefficienti in conseguenza del punto 3b del procedimento precedente.

Esempio II.4.2

Analizzare con il procedimento di analisi su base nodi il circuito di fig.II.4.10.

Fig.II.4.10 - Circuito considerato nell'esempio II.4.2. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_3 = R_4 = 1, \quad R_2 = 1/3 \\ I_{g5} = 3, \quad I_{g6} = 2 \quad (\Omega, A)$$



Passo 1 e 2 : Scegliamo il nodo 4 come nodo di riferimento e prendiamo come variabili auxiliarie le tensioni E_1, E_2, E_3 dei nodi 1, 2, 3 rispetto al nodo 4. (Si può notare che in questo semplice caso non è stato necessario considerare alcun ramo fittizio per determinare l'albero, così che le tensioni E_1, E_2, E_3 sono anche tensioni ai capi di tre componenti del circuito).

Passo 3 : Scriviamo le tre equazioni ai nodi:

$$\text{nodo 1} \quad G_1 E_1 = -I_{g5} - I_{g6}$$

$$\text{nodo 2} \quad (G_2 + G_4) E_2 - G_4 E_3 = I_{g5}$$

$$\text{nodo 3} \quad -G_4 E_2 + (G_3 + G_4) E_3 = I_{g6}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$E_1 = -5$$

$$4 E_2 - E_3 = 3$$

$$- E_2 + 2 E_3 = 2$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema si ottiene:

$$E_1 = -5 \quad E_2 = 8/7 \quad E_3 = 11/7 \quad (\text{V})$$

Passo 5 : Le tre tensioni trovate nel passo precedente coincidono con le tensioni ai capi dei tre resistori R_1, R_2, R_3 ; le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$v_4 = E_2 - E_3 = -3/7 \quad i_4 = G_4 v_4 = -3/7$$

$$v_{g5} = E_2 - E_1 = 43/7 \quad i_3 = G_3 E_3 = 11/7$$

$$v_{g6} = E_3 - E_1 = 46/7 \quad i_2 = G_2 E_2 = 24/7$$

$$i_1 = G_1 E_1 = -5$$

(V, A)

II.4.3 - Caso in cui siano presenti anche generatori indipendenti di tensione:

La presenza di generatori indipendenti di tensione in un circuito rende impossibile l'applicazione del metodo dei nodi così com'è stato formulato in precedenza. Occorre o tenere conto come incognite aggiuntive delle correnti erogate dai generatori di tensione, oppure eliminare tali generatori mediante le trasformazioni riportate nell'Osservazione II.3.1. Nel primo caso bisogna aggiungere nuove equazioni, in quanto sono state introdotte come ulteriori incognite le correnti dei generatori di tensione. Tali equazioni sono i vincoli imposti dai generatori di tensione. In conclusione, il procedimento di analisi su base nodi diviene:

Procedimento di analisi su base nodi di un circuito contenente resistori e generatori indipendenti dei due tipi.

- 1) Scegliere un nodo del circuito come nodo di riferimento.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni degli altri nodi, rispetto al nodo di riferimento. Alcune di queste variabili ausiliarie sono note. Ciò accade per quei nodi collegati direttamente con il nodo di riferimento per mezzo di un generatore di tensione; la variabile ausiliaria re-

lativa ha il valore uguale alla tensione impressa dal generatore, se il relativo morsetto positivo coincide con il nodo considerato ovvero il valore con segno opposto se il morsetto positivo del generatore coincide con il nodo di riferimento.

- 3) Aggiungere, come ulteriori incognite, le correnti dei generatori di tensione.
- 4) Scrivere il sistema risolvente con le stesse modalità del punto 3 del procedimento di analisi su base nodi valido nel caso di presenza di resistori e soli generatori di corrente. Tenere presente che al punto c) occorre sommare ai termini noti le correnti incognite dei generatori di tensione.
- 5) Aggiungere le equazioni di vincolo per quei generatori di tensione che non sono connessi al nodo di riferimento. Tali equazioni esprimono il fatto che la differenza fra due variabili ausiliarie è pari al valore della tensione del generatore in questione.
- 6) Risolvere il sistema e determinare le grandezze incognite. Notare che le equazioni relative ai nodi direttamente connessi al nodo di riferimento da un generatore di tensione possono essere risolte dopo il resto del sistema, poiché ciascuna di esse ha il solo scopo di determinare la corrente nel suddetto generatore di tensione.
- 7) Determinare le rimanenti grandezze elettriche del circuito.

Esempio II.4.3

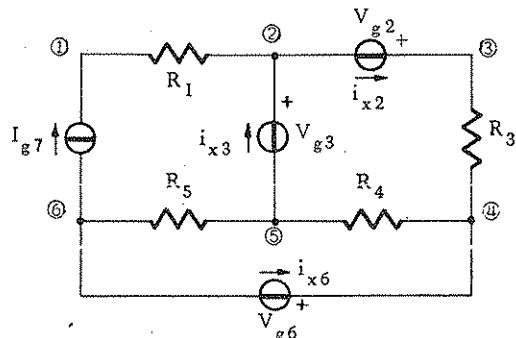
Analizzare con il metodo di analisi su base nodi il circuito di fig.II.4.11.

Fig.II.4.11 - Circuito considerato nell'esempio II.4.3. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_5 = 1 \quad , \quad R_3 = 1/2$$

$$R_4 = 1/3 \quad , \quad I_{g7} = 3 \quad , \quad V_{g2} = 1$$

$$V_{g3} = 2 \quad , \quad V_{g6} = 1 \quad (\text{I}, \text{A}, \text{V})$$



Passo 1 : Conviene scegliere come nodo di riferimento il nodo 2, a cui sono connessi due generatori di tensione.

Passo 2 : Le variabili ausiliarie sono E_1, E_3, E_4, E_5, E_6 , cioè le tensioni dei rimanenti nodi rispetto al nodo 2. Le tensioni E_3 ed E_5 sono già note poiché ai nodi 3 e 5 sono connessi due generatori di tensione con l'altro capo collegato al nodo 2. Risulta perciò:

$$E_3 = V_{g2} = 1 \quad E_5 = -V_{g3} = -2 \quad (\text{V})$$

Notare che le tensioni E_4 ed E_6 non corrispondono ad alcun ramo del circuito dato, ma a rami del circuito aumentato.

Passo 3 : Le ulteriori incognite sono le correnti che scorrono nei generatori di tensione, cioè i_{x2}, i_{x3}, i_{x6} .

Passo 4 : Scriviamo il sistema di equazioni su base nodi; si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{nodo 1} & G_1 E_1 = I_{g7} \\ \text{nodo 3} & G_3 E_3 - G_3 E_4 = i_{x2} \\ \text{nodo 4} & -G_3 E_3 + (G_3 + G_4) E_4 - G_4 E_5 = i_{x6} \\ \text{nodo 5} & -G_4 E_4 + (G_4 + G_5) E_5 - G_5 E_6 = -i_{x3} \\ \text{nodo 6} & -G_5 E_5 + G_5 E_6 = -i_{x6} - I_{g7} \end{array}$$

Passo 5 : Scriviamo l'equazione relativa al vincolo introdotto dal generatore V_{g6} . Si ha:

$$E_4 - E_6 = V_{g6}$$

Passo 6 : Il sistema risolvente si ottiene considerando l'insieme delle equazioni ottenute nei passi 4 e 5. Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{array}{ll} E_1 = 3 & -3 E_4 - 8 - E_6 = -i_{x3} \\ 2 - 2 E_4 = i_{x2} & 2 + E_6 = -i_{x6} - 3 \\ -2 + 5 E_4 + 6 = i_{x6} & E_4 - E_6 = 1 \end{array}$$

La seconda e quarta equazione possono essere inizialmente trascurate poiché sono le sole a contenere le incognite i_{x2} ed i_{x3} .

Risolviamo le altre equazioni. Si ottiene:

$$\begin{array}{ll} E_1 = 3 & E_6 = -7/3 \\ E_4 = -4/3 & i_{x6} = -8/3 \end{array} \quad (\text{V, A})$$

Sostituendo tali valori nella seconda e nella quarta equazione si ha:

$$i_{x2} = 14/3 \quad i_{x3} = 5/3 \quad (\text{A})$$

Passo 7 : Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$\begin{aligned}
 v_{R3} &= E_3 - E_4 = 7/3 & i_{R3} &= G_3 v_{R3} = 14/3 \\
 v_{R4} &= E_4 - E_5 = 2/3 & i_{R4} &= G_4 v_{R4} = 2 \\
 v_{R5} &= E_6 - E_5 = -1/3 & i_{R5} &= G_5 v_{R5} = -1/3 \\
 v_{g7} &= E_1 - E_6 = 16/3 & i_{R1} &= G_1 E_1 = 3
 \end{aligned}$$

Osservazione II.4.2

Come accennato, è possibile seguire un'altra via nel caso siano presenti generatori di tensione. Precisamente, si utilizzano le trasformazioni riportate nell'Osservazione II.3.1, fino ad ottenere un circuito contenente solo resistori e generatori di corrente. A tale circuito si applica il metodo dei nodi nella formulazione del §. II.4.2. Successivamente, vanno determinate le grandezze elettriche relative ai rami implicati nella trasformazione.

Esempio II.4.4

Analizzare con il metodo di analisi su base nodi il circuito di fig.II.4.12.

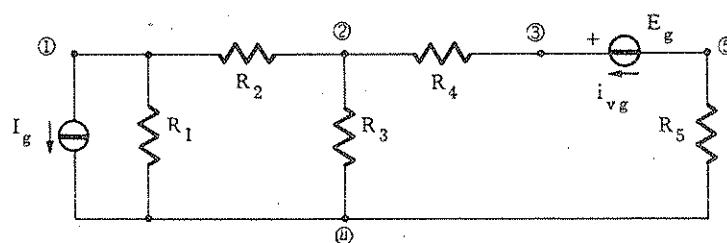


Fig.II.4.12 - Circuito considerato nell'esempio II.4.4. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 0,5, \quad R_2 = R_4 = R_5 = 1, \quad R_3 = 1/3, \quad I_g = 2, \quad E_g = 1 \quad (\Omega, A, V).$$

Passo 1 : Utilizzando le trasformazioni circuitali, otteniamo il nuovo circuito privo di generatori di tensione mostrato in fig.II.4.13 (circuito T).

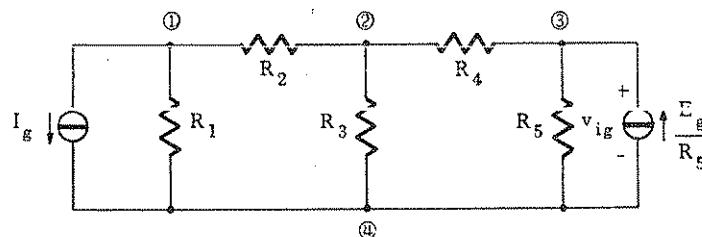


Fig.II.4.13 - Circuito trasformato ottenuto da quello di fig.II.4.12.

Passo 2 : Analizziamo il circuito di fig.II.4.13 con il primo procedimento di analisi su base nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 4. Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)E_1 - G_2 E_2 &= -I_g \\ -G_2 E_1 + (G_2 + G_3 + G_4)E_2 - G_4 E_3 &= 0 \\ -G_4 E_2 + (G_4 + G_5)E_3 &= E_g/R_5 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{aligned} 3E_1 - E_2 &= -2 \\ -E_1 + 5E_2 - E_3 &= 0 \\ -E_2 + 2E_3 &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione del sistema precedente è:

$$E_1 = -17/25 \quad E_2 = -1/25 \quad E_3 = 12/25 \quad (\text{V})$$

Le tensioni e le correnti del circuito T sono uguali alle tensioni e correnti del circuito assegnato, salvo che per i rami coincidenti con il resistore R_5 ed il generatore di tensione trasformato. Si ottiene per i primi:

$$\begin{aligned} v_{R2} &= E_1 - E_2 = -16/25 & i_{R2} &= G_2 v_{R2} = -16/25 & i_{R1} &= G_1 E_1 = -34/25 \\ v_{R4} &= E_2 - E_3 = -13/25 & i_{R4} &= G_4 v_{R4} = -13/25 & i_{R3} &= G_3 E_2 = -3/25 \end{aligned}$$

Per i rami trasformati, nell'ambito del circuito T, si ottiene:

$$\begin{aligned} (v_{R5})_T &= E_3 = 12/25 & (i_{R5})_T &= G_5 v_{R5} = 12/25 \\ (v_{ig})_T &= 12/25 & & & & (\text{V}, \text{A}) \end{aligned}$$

Passo 3 : Le grandezze elettriche dei rami del circuito originale implicati nelle trasformazioni valgono:

$$\begin{aligned} v_{R5} &= E_3 - E_g = -13/25 \\ i_{R5} &= G_5 v_{R5} = -13/25 & (\text{V}, \text{A}) \\ i_{vg} &= 13/25 \end{aligned}$$

II.4.4 - Caso in cui siano presenti anche generatori controllati.

Il metodo dei nodi può essere facilmente esteso al caso in cui siano presenti generatori controllati applicando il seguente procedimento:

- 1) Scrivere il sistema risolvente su base nodi considerando i generatori controllati come se fossero generatori indipendenti. Tale ipotesi viene introdotta per la stessa ragione esposta nel punto 1) del § II.2.3;

2) Aggiungere per ogni generatore controllato un'equazione di vincolo. Per i generatori di corrente controllati tale equazione assume la forma seguente:

$$(II.4.1) \quad I_{gc} = k f(E_i, I_{gi}, G_i)$$

in cui: I_{gc} è la corrente controllata; k è il parametro di controllo; $f(\cdot)$ è la funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo (tensione o corrente) in funzione delle tensioni di nodo, delle correnti dei generatori indipendenti e delle conduttanze dei resistori. Nel caso dei generatori di tensione controllati, tale equazione di vincolo assume la forma seguente:

$$(II.4.2) \quad f_v(E_i) = k f(E_i, I_{gi}, G_i)$$

in cui: $f_v(E_i)$ è la funzione lineare che esprime la tensione controllata in funzione delle tensioni di nodo; k è il parametro di controllo; $f(\cdot)$ è la funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo in modo analogo a quanto visto per la (II.4.1).

3) Risolvere il sistema e determinare le grandezze elettriche desiderate.

Esempio II.4.5

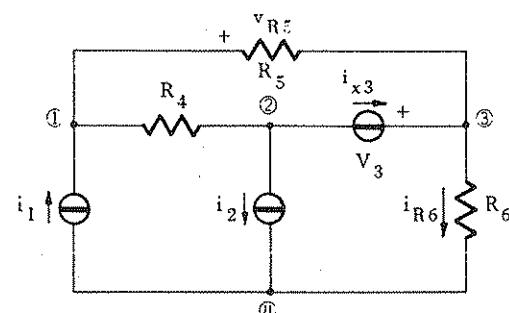
Analizzare con il metodo dei nodi il circuito di fig.II.4.14.

Fig.II.4.14 - Circuito considerato nell'esempio II.4.5. I valori dei componenti sono.

$$R_4 = 1, R_5 = 0,5, R_6 = 1/3,$$

$$V_3 = 1, i_1 = 2v_{R5},$$

$$i_2 = 3i_{R6} \quad (\Omega, V, A)$$



Passo 1: Scegliamo come nodo di riferimento il nodo 4; le variabili ausiliarie sono le tre tensioni E_1, E_2, E_3 . Scriviamo le equazioni ai nodi, considerando i generatori di corrente come se fossero indipendenti ed introducendo la corrente incognita che scorre nel generatore di tensione V_3 . Il sistema su base nodi risultante è il seguente:

$$\begin{aligned}
 (G_4 + G_5) E_1 - G_4 E_2 - G_5 E_3 &= i_1 \\
 - G_4 E_1 + G_4 E_2 &= -i_2 - i_{x3} \\
 - G_5 E_1 + (G_5 + G_6) E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= V_3
 \end{aligned}$$

Passo 2: Occorre ora introdurre le equazioni di vincolo imposte dai generatori controllati. Il generatore di corrente i_1 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_5 , con il verso indicato in fig.II.4.14. Il vincolo che si ottiene, espresso in termini di tensioni di nodo, è il seguente:

$$i_1 = 2(E_1 - E_3)$$

Il generatore di corrente i_2 è controllato dalla corrente del resistore R_6 con il verso indicato in fig.II.4.14. L'equazione di vincolo in questo caso assume la forma seguente:

$$i_2 = 3 G_6 E_3$$

Passo 3: Il sistema risolvente complessivo si ottiene considerando le equazioni ottenute nei passi 1 e 2. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3 E_1 - E_2 - 2 E_3 &= i_1 \\
 - E_1 + E_2 &= -i_2 - i_{x3} \\
 - 2 E_1 + 5 E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= 1 \\
 i_1 &= 2(E_1 - E_3) \\
 i_2 &= 9 E_3
 \end{aligned}$$

Per risolvere il sistema conviene sostituire subito le due ultime equazioni rispettivamente nella prima e nella seconda equazione. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3 E_1 - E_2 - 2 E_3 &= 2(E_1 - E_3) \\
 - E_1 + E_2 &= -9 E_3 - i_{x3} \\
 - 2 E_1 + 5 E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = -7/6 & i_{x3} = 3/2 \\
 E_2 = -7/6 & i_1 = -2 \\
 E_3 = 1/6 & i_2 = -3/2
 \end{array} \quad (\text{V, A})$$

Da queste grandezze elettriche si possono ricavare gli altri valori delle tensioni e delle correnti del circuito.

Esempio II.4.6

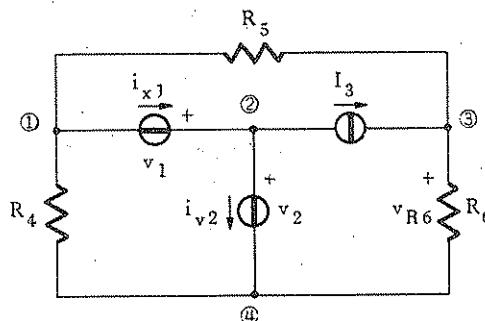
Analizzare con il metodo dei nodi il circuito di fig.II.4.15.

Fig.II.4.15 - Circuito considerato nell'esempio II.4.6. I valori dei componenti sono.

$$R_4 = 0,5, R_5 = 1, R_6 = 0,5,$$

$$I_3 = 2, v_1 = 3 i_{v2},$$

$$v_2 = 2 v_{R6} \quad (\Omega, A, V)$$



Passo 1 : Scegliamo come nodo di riferimento il nodo 4; le variabili ausiliarie sono le tensioni degli altri tre nodi. Ulteriori incognite sono le correnti che scorrono nei generatori di tensione. È opportuno notare che la variabile ausiliaria relativa al secondo nodo coincide con la tensione del generatore v_2 , mentre la corrente incognita i_{v2} è una grandezza di controllo.

Scriviamo le equazioni ai nodi, considerando tutti i generatori come se fossero indipendenti. Si ha:

$$(G_4 + G_5) E_1 - G_5 E_3 = - i_{x1}$$

$$0 = i_{x1} - i_{v2} - I_3$$

$$- G_5 E_1 + (G_5 + G_6) E_3 = I_3$$

Passo 2 : Scriviamo l'equazione di vincolo del generatore controllato v_1 ; si ha:

$$v_2 - E_1 = 3 i_{v2}$$

Per il secondo generatore controllato v_2 si ha:

$$v_2 = 2 E_3$$

Passo 3 : Sostituendo i valori numerici nel sistema complessivo si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$3 E_1 - E_3 = - i_{x1}$$

$$0 = i_{x1} - i_{v2} - 2$$

$$- E_1 + 3 E_3 = 2$$

$$v_2 - E_1 = 3 i_{v2}$$

$$v_2 = 2 E_3$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$E_1 = -16/23$$

$$i_{x1} = 58/23$$

$$E_2 = v_2 = 20/23$$

$$i_{v2} = 12/23$$

$$E_3 = 10/23$$

(V, A)

Dalle grandezze ottenute si possono calcolare tutte le altre tensioni e correnti del circuito.

II.4.5 - Caso in cui siano presenti anche nullori.

In questo caso valgono le considerazioni generali riportate nel § II.2.4, che permettono di modificare il metodo dei nodi semplicemente aggiungendo i seguenti passi:

- 1) sostituire a ciascun nullore i due bipoli nullatore e noratore;
- 2) sostituire a ciascun nullatore un circuito aperto ed a ciascun noratore un generatore di corrente avente una corrente impressa incognita;
- 3) scrivere per ogni nullatore un'equazione, che esprima il fatto che la tensione ad esso applicata è uguale a zero. Tale equazione di vincolo ha la forma:

$$(II.4.3) \quad E_i = E_j$$

se il nullatore è connesso tra i nodi i e j , ovvero:

$$(II.4.4) \quad E_i = 0$$

se esso è connesso tra il nodo i e quello di riferimento.

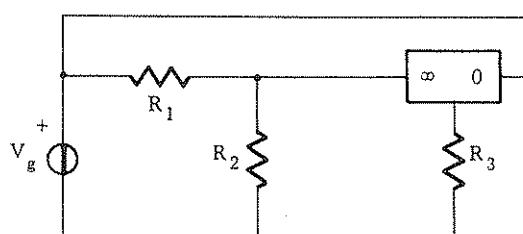
Esempio II.4.7

Analizzare con il procedimento di analisi su base nodi il circuito di fig.II.4.16.

Fig.II.4.16 - Circuito considerato nell'esempio II.4.7. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 1, R_2 = 1/3, R_3 = 1/10$$

$$V_g = 2 \quad (\Omega, V)$$



Passo 1 : Sostituiamo il nullore presente con la coppia nullatore - noratore. Si ottiene il circuito di fig.II.4.17.

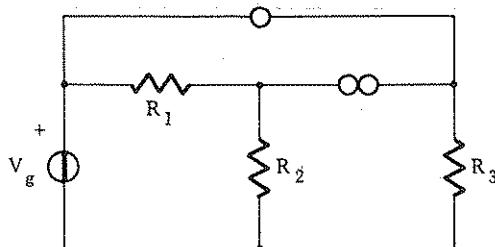


Fig.II.4.17 - Circuito ottenuto da quello di fig.II.4.16, sostituendo al nullore la coppia nuallatore-noratore.

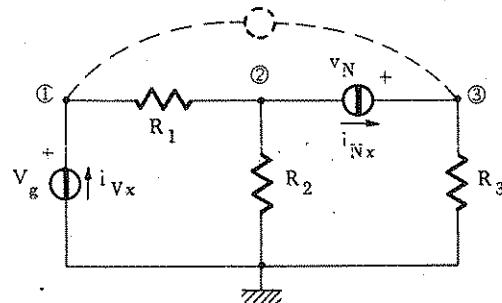


Fig.II.4.18 - Circuito ottenuto da quello di fig.II.4.17, ponendo al posto del nullatore e del noratore rispettivamente un circuito aperto ed un generatore di corrente.

Passo 2 : Sostituiamo al posto del nullatore un circuito aperto ed al posto del noratore un generatore di corrente di valore incognito i_{N_x} (fig.II.4.18); nella stessa figura è anche indicata la corrente incognita i_{Vx} , che scorre nel generatore di tensione.

Passo 3 : Scegliamo come nodo di riferimento quello indicato in fig.II.6.3; pertanto le tensioni dei nodi sono: V_g , E_2 , E_3 . Il sistema di equazioni ai nodi è il seguente:

$$\begin{aligned} G_1 V_g - G_1 E_2 &= i_{Vx} \\ -G_1 V_g + (G_1 + G_2) E_2 &= -i_{N_x} \\ G_3 E_3 &= i_{N_x} \end{aligned}$$

Nel sistema precedente le grandezze incognite sono: E_2 , E_3 , i_{Vx} ed i_{N_x} . Di conseguenza è necessaria un'ulteriore equazione.

Passo 4 : Scriviamo l'equazione di vincolo per il nullatore. Essa impone che sia nulla la differenza di tensione ai suoi estremi, cioè:

$$E_3 = V_g$$

Passo 5 : Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{aligned}2 - E_2 &= i_{Vx} \\-2 + 4E_2 &= -i_{Nx} \\10E_3 &= i_{Nx} \\E_3 &= 2\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}E_2 &= -9/2 & i_{Vx} &= 13/2 \\E_3 &= 2 & i_{Nx} &= 20\end{aligned}\quad (\text{V, A})$$

Le altre grandezze elettriche del circuito si ricavano immediatamente. Ad esempio la tensione ai capi del noratore vale:

$$v_N = E_3 - E_2 = 13/2 \text{ V}$$

* * *

CAPITOLO III

ANALISI DEI CIRCUITI CON MEMORIA

III.1 - La presenza della variabile tempo nell'analisi dei circuiti lineari e permanenti.

Nel capitolo secondo è stato affrontato il problema dell'analisi dei circuiti elettrici costituiti da componenti senza memoria, cioè da quei componenti nella cui relazione costitutiva non intervengono legami integro-differenziali. In tal caso è stato visto che il valore assunto da ciascuna grandezza elettrica (tensione o corrente) non dipende dai valori assunti in istanti precedenti dalla stessa o da altre grandezze elettriche del circuito. Come conseguenza di tale fatto accade che, dato un circuito lineare senza memoria, contenente una sola grandezza impressa il cui andamento nel tempo è descritto dalla funzione $f(t)$, tutte le altre grandezze elettriche avranno un andamento nel tempo del tipo $A f(t)$, in cui A è una costante reale che può essere determinata analizzando il circuito ed il cui valore non cambia, qualunque sia l'andamento della funzione di eccitazione $f(t)$. Illustriamo l'affermazione precedente con un esempio.

Esempio III.1.1

Analizzare il circuito di fig. III.1.1 nell'ipotesi che la tensione impressa del generatore abbia l'andamento di fig. III.1.2.

Riferendoci al grafo di fig. III.1.3, si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio delle tensioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ -v_3 + v_4 + v_5 = 0 \\ -v_4 - v_2 - v_6 = 0 \end{array} \right.$$

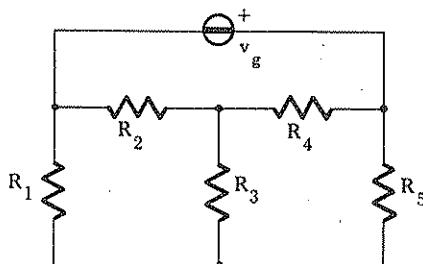


Fig.III.1.1 - Circuito considerato nell'esempio III.1.1. I valori dei componenti sono:
 $R_1 = R_4 = 2$, $R_2 = R_3 = R_5 = 1(\Omega)$.

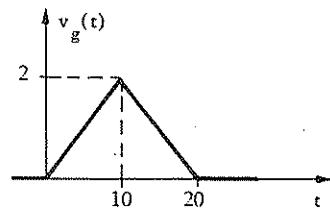


Fig.III.1.2 - Andamento nel tempo della tensione impressa del generatore del circuito di figura III.1.1 (V,S).

dove tutte le grandezze v_i sono funzioni del tempo⁽¹⁾.

Esprimendo quindi le tensioni dei rami del circuito in funzione delle correnti di maglia, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_1 i_{m1} \\ v_2 = R_2 (i_{m1} - i_{m3}) \\ v_3 = R_3 (i_{m1} - i_{m2}) \\ v_4 = R_4 (i_{m2} - i_{m3}) \\ v_5 = R_5 i_{m2} \\ v_6 = v_g(t) \end{array} \right.$$

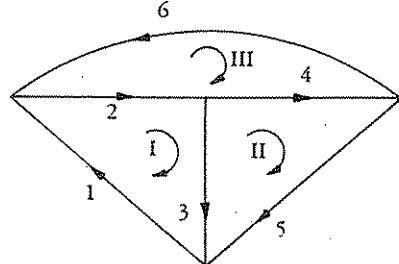


Fig.III.1.3 - Grafo del circuito di fig.III.1.1.

Sostituendo le espressioni precedenti nelle equazioni di equilibrio ed assegnando i valori numerici alle resistenze, si ricava il sistema risolvente su base maglie:

$$\begin{aligned} 4i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} &= 0 \\ -i_{m1} + 4i_{m2} - 2i_{m3} &= 0 \\ -i_{m1} - 2i_{m2} + 3i_{m3} &= v_g(t) \end{aligned}$$

(1) - Salvo avviso contrario, nel presente capitolo tutte le grandezze funzioni del tempo verranno indicate con le lettere minuscole.

La soluzione di questo sistema non presenta difficoltà e si ottiene:

$$i_{m1} = \frac{2}{7} v_g(t); \quad i_{m2} = \frac{3}{7} v_g(t); \quad i_{m3} = \frac{5}{7} v_g(t)$$

Pertanto considerando una qualsiasi tensione o corrente del circuito, essa avrà lo stesso andamento nel tempo della tensione $v_g(t)$, a meno di una costante moltiplicativa. Ad esempio la tensione ai capi del resistore R_3 vale:

$$v_{R3}(t) = R_3(i_{m1} - i_{m2}) = -\frac{1}{7} v_g(t) \quad (\text{V})$$

il cui andamento è indicato in fig.III.1.4.

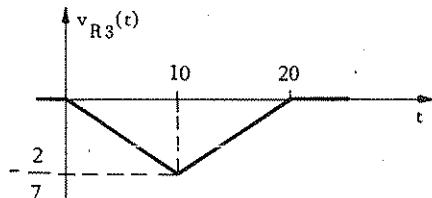


Fig.III.1.4 - Andamento della tensione ai capi del resistore R_3 (V, S).

Le considerazioni precedenti mostrano che per i circuiti senza memoria il problema dell'analisi in presenza di un'eccitazione, avente andamento qualsiasi in funzione del tempo, è equivalente al problema dell'analisi in presenza di eccitazioni costanti. Un risultato analogo vale quando sono presenti più eccitazioni variabili nel tempo. Infatti, in base al principio di sovrapposizione degli effetti, che vale per il circuito considerato in quanto per ipotesi è lineare, qualsiasi grandezza elettrica è la somma degli effetti delle singole eccitazioni considerate come se agissero da sole e non contemporaneamente. Perciò, se le eccitazioni presenti sono $e_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, la generica grandezza elettrica $u(t)$ avrà una espressione

$$(III.1.1) \quad u(t) = \sum_{i=1}^N A_i e_i(t)$$

dove le costanti A_i possono essere determinate come fatto nell'esempio III.1.1, supponendo presente un'eccitazione alla volta.

La presenza della variabile tempo modifica sostanzialmente il problema dell'analisi dei circuiti quando siano presenti componenti con memoria, cioè componenti che presentino nelle loro relazioni costitutive operazioni di derivazione ed integrazione rispetto al tempo. Tali componenti sono il condensatore ideale, l'induttore ideale e gli induttori mutuamente accoppiati.

La presenza di operazioni di derivazione rispetto al tempo fa sì che le grandezze elettriche dipendano non solo dai valori attuali delle eccitazioni ma anche dalla loro rapidità di variazione nel tempo. Analogamente le operazioni di integrazione estendono tale dipendenza anche a tutti gli istanti precedenti a quello attuale. È quindi evidente che se in un circuito con memoria è presente una funzione di eccitazione $f(t)$, qualunque altra grandezza del circuito avrà un andamento nel tempo che, salvo casi molto particolari, è del tutto differente rispetto a $f(t)$. Viene perciò a cadere la semplice proprietà, valida per i circuiti senza memoria, che ogni grandezza elettrica del circuito è proporzionale ad $f(t)$.

Quanto detto in precedenza si può esprimere analiticamente, affermando che, mentre per un circuito senza memoria il sistema risolutivo è di tipo algebrico, nel caso dei circuiti con memoria il sistema risolutivo è di tipo integro-differenziale. L'analisi di un circuito con memoria richiede quindi l'esecuzione dei due seguenti passi:

- a) individuazione del sistema integro-differenziale risolvente;
- b) risoluzione del sistema integro-differenziale.

Esamineremo separatamente i due punti precedenti.

Punto a: individuazione del sistema integro-differenziale risolvente.

Il sistema risolvente può essere individuato impiegando i metodi visti nel cap. II con semplici modifiche. Ricordiamo che tutti i suddetti metodi comprendono le due seguenti fasi:

- 1) scelta delle grandezze elettriche incognite e scrittura delle equazioni di equilibrio in base alla prima od alla seconda legge di Kirchhoff, applicate ad opportune linee chiuse;
- 2) esplicitazione delle grandezze elettriche note ed incognite nelle equazioni di equilibrio precedenti, utilizzando le relazioni costitutive dei componenti.

La prima fase può essere applicata senza modifiche nel caso presente, in quanto basata sulle leggi di Kirchhoff che sono indipendenti dalla natura dei componenti. La seconda fase va opportunamente modificata per tenere conto del carattere integro-differenziale delle relazioni costitutive dei componenti. Tale modifica risulta del tutto intuitiva, come è chiaramente messo in evidenza dal seguente esempio.

Esempio III.1.2.

Determinare il sistema risolvente del circuito di fig.III.1.5, dove la tensione impressa dal generatore ha l'andamento di fig.III.1.6.

Fig.III.1.5 - Circuito considerato nell'esempio III.1.2. I valori dei componenti sono: $R_1 = 2$, $R_5 = 1$, $L_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = 2$ (Ω , H, F).

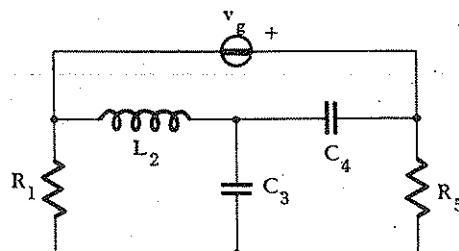
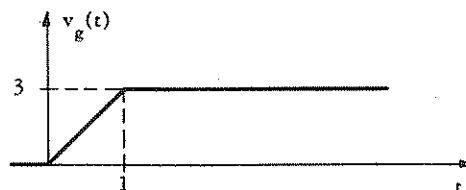


Fig.III.1.6 - Andamento nel tempo della tensione impressa dal generatore del circuito di fig.III.1.5 (V, S).



Riferendoci al grafo di fig. III.1.7, si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio delle tensioni:

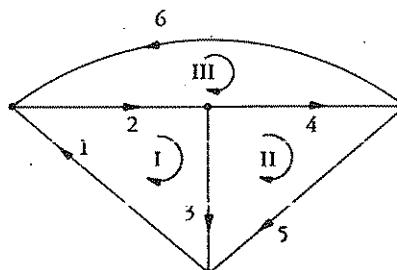
$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

$$-v_4 - v_2 - v_6 = 0$$

ove tutte le tensioni indicate devono essere considerate funzioni del tempo. Si può notare che fino a questo punto il procedimento è identico a quello seguito nell'esempio III.1.1, relativo ad un circuito senza memoria, avente lo stesso grafo del circuito qui considerato.

Fig.III.1.7 - Grafo del circuito di fig.III.1.5.



Esprimiamo ora le tensioni dei rami del circuito in funzione delle correnti di maglia; si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_1 i_{m1} \\ v_2 = L_2 \frac{d}{dt} [i_{m1} - i_{m3}] \\ v_3 = \frac{1}{C_3} \int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau + v_{c3}(0) \\ v_4 = \frac{1}{C_4} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau + v_{c4}(0) \\ v_5 = R_5 i_{m2} ; \quad v_6 = v_g(t) \end{array} \right.$$

Sostituendo le equazioni precedenti nelle equazioni di equilibrio ed i valori numerici ai componenti, si ottiene il sistema risolvente su base maglie:

$$2i_{m1} + \frac{d}{dt} (i_{m1} - i_{m3}) + \int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau + v_{c3}(0) = 0$$

$$- \int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau - v_{c3}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau + v_{c4}(0) + i_{m2} = 0$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau - v_{c4}(0) - \frac{d}{dt} (i_{m1} - i_{m3}) = v_g(t)$$

In tale sistema sono incognite le funzioni del tempo i_{m1} , i_{m2} ed i_{m3} , mentre sono note le quantità $v_{c3}(0)$ e $v_{c4}(0)$, che rappresentano i valori delle tensioni ai capi dei condensatori all'istante $t=0$.

Punto b: risoluzione del sistema integro-differenziale.

Il sistema integro-differenziale a cui si giunge nell'analisi dei circuiti lineari permanenti a costanti concentrate, che stiamo considerando, gode delle seguenti proprietà:

1) l'unica variabile presente è il tempo e quindi tutte le derivate presenti sono derivate totali. Ciò è conseguenza dell'ipotesi «costanti concentrate», che permette di escludere dalla trattazione del circuito ogni variabile spaziale ed ogni dimensione;

2) il sistema è lineare, nel senso che le funzioni incognite compaiono sempre alla prima potenza ed i coefficienti non dipendono da tali incognite. Ciò è conseguenza del carattere lineare del circuito;

3) i coefficienti delle equazioni che compongono il sistema sono indipendenti dal tempo; quindi essi sono costanti e reali. Ciò è conseguenza del carattere permanente (o tempo-invariante) del circuito.

La complessità del sistema risolvente dipende da due fattori: 1) il numero delle funzioni incognite e quindi delle equazioni disponibili. Tale numero è legato alla complessità topologica del circuito, cioè al numero dei rami dell'albero e del co-albero; 2) l'ordine del sistema differenziale, definito come la somma degli ordini di derivazione rispetto alle singole incognite, dopo aver eliminato le operazioni di integrazione (derivando le equazioni che le contengono) e tutte le relazioni istantanee che sussistono fra le incognite (effettuando le opportune sostituzioni). L'importanza di questo fattore è conseguenza delle seguenti proprietà, per la cui dimostrazione si rimanda alla teoria dei sistemi differenziali ordinari:

- a) la soluzione di un sistema differenziale di ordine n può essere ricondotta alla risoluzione di una singola equazione differenziale dello stesso ordine;
- b) la soluzione di un sistema differenziale di ordine n (integrale generale) dipende da n costanti arbitrarie.

È importante mettere in evidenza che l'ordine del sistema differenziale risolvente non è mai superiore al numero degli elementi con memoria presenti nel circuito. Infatti il sistema risolvente può essere sempre scritto come un insieme di equazioni algebriche (relative alle leggi di Kirchhoff ed ai componenti senza memoria) più n equazioni differenziali del primo ordine, relative ciascuna ad un singolo componente con memoria. L'ordine è inferiore ad n solo se il circuito presenta una configurazione particolare dei componenti con memoria, come discusso in dettaglio nel capitolo nono, a cui si rimanda.

Per una trattazione in generale della risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali ordinari si rimanda ai testi di analisi matematica. Nel seguito del presente paragrafo tale problema verrà trattato con riferimento ad alcuni esempi tipici di particolare importanza e semplicità.

III.1.1 - Esempi del primo ordine.

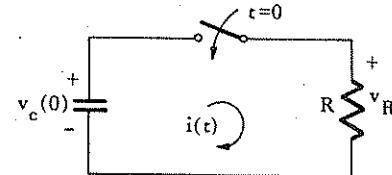
Il caso più semplice da trattare è quello in cui il sistema risolvente è costituito da un'unica equazione del primo ordine. Tale situazione si ha ad esempio per un circuito composto da un resistore, un condensatore ed un generatore di tensione. Tratteremo in dettaglio questo tipo di circuito, iniziando dal caso in cui il generatore di tensione è disattivato⁽¹⁾.

(1) - È importante notare che nei circuiti con memoria ha senso considerare anche il ca-
(segue)

Esempio III.1.3.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.8 supponendo che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ ed il condensatore sia carico ad una certa tensione $v_c(0)$.

Fig.III.1.8 - Circuito considerato nell'esempio III.1.3.



Il comportamento elettrico del circuito considerato può essere facilmente previsto analizzando il problema dal punto di vista fisico. All'atto della chiusura dell'interruttore, la tensione $v_c(0)$ presente ai capi del condensatore provoca un passaggio di corrente attraverso il resistore; tale corrente a sua volta provoca una diminuzione della carica del condensatore e quindi della sua tensione. Perciò, al passare del tempo, la carica del condensatore tenderà a zero, così come la tensione ai suoi capi e la corrente nel circuito. Il fenomeno si esaurisce in un tempo infinito quando tutta l'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore è stata dissipata nel resistore.

Effettuiamo ora l'analisi del circuito operando con il metodo delle equazioni differenziali. Il circuito si compone di una sola maglia, per cui si ottiene la seguente equazione di equilibrio delle tensioni:

$$(III.1.2) \quad -v_c(t) + v_R(t) = 0$$

Le relazioni costitutive dei componenti sono:

$$(III.1.3) \quad v_R(t) = R i(t) ; \quad v_c(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0).$$

in cui il segno negativo nella (III.1.3) è dovuto al fatto che la corrente $i(t)$ esce dal morsetto positivo del condensatore. Sostituendo le relazioni costitutive nell'equazione di equilibrio, si ha:

$$(III.1.4) \quad \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0) + R i(t) = 0$$

so in cui sono assenti le eccitazioni, a differenza dei circuiti senza memoria, in cui una tale situazione corrisponde alla soluzione banale di avere tutte le grandezze elettriche nulle.

L'equazione precedente, a causa della presenza dell'interruttore, descrive il circuito in esame solo per gli istanti $t \geq 0$ ⁽¹⁾.

Derivando la (III.1.4) rispetto al tempo e ricordando che la quantità $v_c(0)$ è una costante, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$(III.1.5) \quad RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad t \geq 0$$

Osserviamo che la (III.1.5) è lineare, a coefficienti costanti, del primo ordine ed omogenea, non essendo presente nel circuito alcuna eccitazione. Per risolvere la (III.1.5) occorre determinare l'integrale generale, che è del tipo seguente:

$$(III.1.6) \quad i(t) = A e^{\alpha t}$$

ove la quantità A è una costante arbitraria dipendente dalle condizioni iniziali ed α si determina risolvendo la seguente equazione caratteristica associata all'equazione (III.1.5)⁽²⁾:

$$(III.1.7) \quad RC\alpha + 1 = 0$$

Si ottiene:

$$(III.1.8) \quad \alpha = -\frac{1}{RC}$$

Per quanto riguarda la quantità A , occorre ricordare che per $t=0$, essendo il condensatore carico alla tensione $v_c(0)$, la corrente risulta pari a:

$$(III.1.9) \quad i(0) = \frac{v_c(0)}{R}$$

Confrontando la (III.1.9) con la (III.1.6) si ha:

$$(III.1.10) \quad i(0) = A = \frac{v_c(0)}{R}$$

(1) - Per $t < 0$, essendo aperto l'interruttore si ha ovviamente $i(t) = 0$.

(2) - L'equazione caratteristica si ottiene sostituendo l'integrale generale (III.1.6) nell'equazione omogenea (III.1.5), cioè:

$$RC\alpha A e^{\alpha t} + A e^{\alpha t} = 0$$

ed osservando che tale relazione deve essere valida per ogni t .

Quindi la soluzione dell'equazione differenziale (III.1.5) diviene:

$$(III.1.11) \quad i(t) = \frac{v_c(0)}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

Dalla (III.1.11) appare chiaramente che la corrente di scarica di un condensatore attraverso un resistore R ha un andamento esponenziale (fig.III.1.9). Un andamento simile (fig.III.1.10) ha la tensione ai capi del condensatore, data da:

$$(III.1.12) \quad v_c(t) = R i(t) = v_c(0) e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

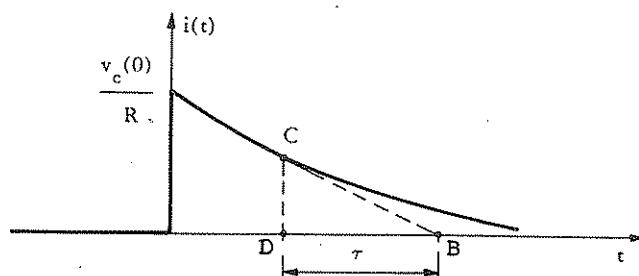


Fig.III.1.9 - Andamento della corrente nel circuito di fig.III.1.8. Il segmento BD è uguale alla costante di tempo del circuito e CB è tangente in C alla curva.

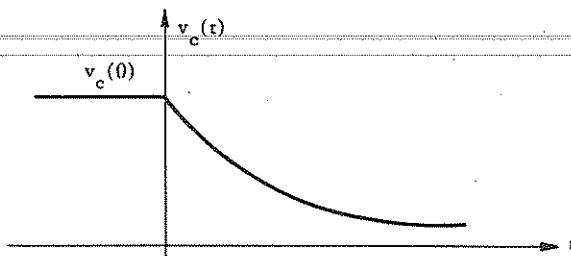


Fig.III.1.10 - Andamento della tensione ai capi del condensatore del circuito di fig.III.1.8.

Osservazione III.1.1.

La quantità RC che compare nelle espressioni (III.1.11) e (III.1.12) ha le dimensioni di un tempo; essa è chiamata la «costante di tempo» del circuito e viene comunemente indicata con la lettera τ .

Dalla (III.1.12) vediamo che:

$$(III.1.13) \quad v_c(\tau) = v_c(0) \cdot \frac{1}{e^{\tau}}$$

quindi la costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario per ridurre la tensione ad $1/e$ del suo valore iniziale. Il valore della costante di tempo è facilmente deducibile per via grafica, disegnando la retta tangente in un punto qualsiasi alla curva della corrente o della tensione e poi considerando il segmento intercettato sull'asse delle ascisse, come mostrato in fig.III.1.9.

Esempio III.1.4.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.11, supponendo che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ e che il condensatore sia scarico.

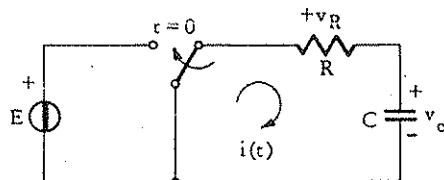


Fig.III.1.11 - Circuito considerato nell'esempio III.1.4.

Il comportamento del circuito di fig.III.1.11 può essere facilmente analizzato da un punto di vista fisico. All'istante iniziale, essendo il condensatore scarico, la corrente che scorre nel circuito è pari ad E/R . Tale corrente provoca la carica del condensatore e conseguentemente dà luogo ad una tensione v_c che si oppone alla tensione del generatore. Pertanto la corrente diminuisce con il passare del tempo, tendendo a zero. Dopo un tempo infinito non scorre più corrente e la tensione del condensatore risulta pari ad E .

Effettuiamo ora l'analisi del circuito operando con il metodo delle equazioni differenziali. Il circuito si compone di una sola maglia, per cui si ottiene la seguente equazione di equilibrio delle tensioni:

$$(III.1.14) \quad v_g(t) = v_R(t) + v_c(t)$$

avendo indicato con $v_g(t)$ la tensione del generatore.

Sostituendo nella (III.1.14) le relazioni costitutive dei componenti, si ottiene la seguente equazione differenziale lineare, del primo ordine, con coefficienti costanti:

$$(III.1.15) \quad RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = E \quad t \geq 0$$

L'equazione (III.1.15) non è omogenea, per la presenza a secondo membro della tensione di eccitazione, che nel caso presente è supposta costante nel tempo. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione (III.1.15), che verrà poi particolarizzato imponendo la seguente condizione iniziale:

$$(III.1.16) \quad v_c(0) = 0$$

L'integrale generale dell'equazione (III.1.15) si può determinare con il seguente procedimento, valido per ogni equazione differenziale lineare ordinaria non omogenea:

- a) si considera l'integrale generale $v_0(t)$ dell'equazione omogenea associata, ottenuta dall'equazione data ponendo a zero l'eccitazione;
- b) si somma a $v_0(t)$ un integrale particolare $v_p(t)$ che soddisfi l'equazione data.

Nel nostro caso l'equazione omogenea associata ha l'espressione seguente:

$$(III.1.17) \quad RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

L'integrale generale $v_0(t)$ della (III.1.17) è il seguente:

$$(III.1.18) \quad v_0(t) = A e^{\alpha t}$$

$$\text{con } \alpha = -\frac{1}{RC}$$

Occorre ora determinare un integrale particolare dell'equazione (III.1.15). Tale determinazione risulta in generale più o meno complicata a seconda della funzione di eccitazione⁽¹⁾. Essendo nel nostro caso costante, si vede facilmente che la funzione:

$$(III.1.19) \quad v_p(t) = E$$

soddisfa l'equazione data e costituisce quindi l'integrale particolare cercato.

In conclusione l'integrale generale dell'equazione (III.1.15) è:

$$(III.1.20) \quad v_c(t) = v_0(t) + v_p(t) = A e^{-t/RC} + E$$

(1) - Un metodo che può essere seguito in ogni caso è quello del nucleo risolvente, per il quale si rimanda ai testi di analisi matematica.

Per particolarizzare l'integrale generale al circuito in esame, occorre conoscere come ulteriore dato del problema la tensione del condensatore in un certo istante di tempo. Nel caso presente sappiamo che $v_c(0) = 0$; quindi si ha:

$$(III.1.21) \quad v_c(0) = A + E = 0$$

da cui si ricava:

$$(III.1.22) \quad A = -E$$

La tensione del condensatore risulta uguale a (fig.III.1.12):

$$(III.1.23) \quad v_c(t) = E(1 - e^{-t/RC}) \quad t \geq 0$$

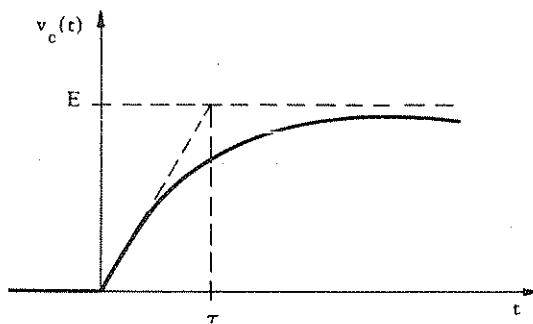


Fig.III.1.12 - Andamento della tensione ai capi del condensatore del circuito di fig.III.1.11.

Da questa espressione si ricava la corrente che scorre nel condensatore tramite la:

$$(III.1.24) \quad i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

il cui andamento nel tempo è mostrato in fig.III.1.13.

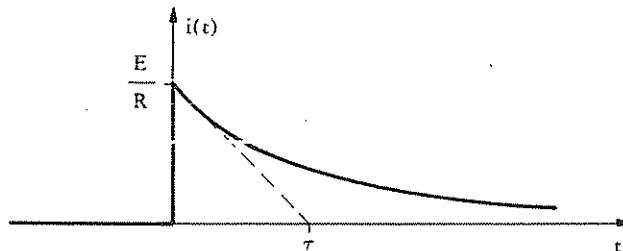


Fig.III.1.13 - Andamento della corrente che scorre nel condensatore del circuito di fig.III.1.11.

III.1.2 - Esempi del secondo ordine.

Esaminiamo nel seguente paragrafo il caso dei circuiti caratterizzati da un'equazione risolvente del secondo ordine. Tale situazione si ha ad esempio per un circuito composto da un resistore, un condensatore, un induttore ed un generatore di tensione. Questo circuito tipico, mostrato in fig.III.1.14, verrà analizzato in dettaglio di seguito nell'ipotesi che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ e che la tensione impressa sia costante.

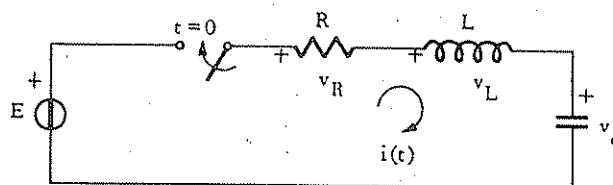


Fig.III.1.14 - Circuito considerato nel § III.1.2.

Analizziamo il circuito su base maglie; l'equazione di equilibrio delle tensioni per l'unica maglia presente è:

$$(III.1.25) \quad v_c + v_L + v_R = E$$

È da notare che tale equazione vale solo per $t > 0$, cioè quando è chiuso l'interruttore.

Le relazioni costitutive dei componenti sono, tenendo conto che sono percorsi dalla stessa corrente $i(t)$:

$$(III.1.26) \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0)$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} ; \quad v_R = Ri$$

Sostituendo le (III.1.26) nella (III.1.25), si ottiene la seguente equazione integro-differenziale:

$$(III.1.27) \quad \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0) + L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad t > 0$$

Derivando tale equazione rispetto al tempo, tenendo conto che $v_c(0)$ ed E sono quantità costanti, si ha:

$$(III.1.28) \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad t > 0$$

Per gli istanti $t < 0$, essendo aperto l'interruttore, l'equazione (III.1.28) non è più valida e deve essere sostituita con la seguente:

$$(III.1.29) \quad i(t) = 0 \quad t < 0$$

Determiniamo ora l'integrale generale della (III.1.28). L'equazione caratteristica associata è:

$$(III.1.30) \quad \alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

Le due radici di tale equazione valgono:

$$(III.1.31) \quad \alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Nell'ipotesi in cui le due radici α_1 ed α_2 siano fra loro distinte, cioè quando:

$$(III.1.32) \quad \frac{R^2}{4L^2} \neq \frac{1}{LC}$$

l'integrale generale dell'equazione (III.1.28) assume la forma:

$$(III.1.33) \quad i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

in cui A_1 ed A_2 sono due costanti arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Nel caso invece di radici coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -R/2L$, cioè quando:

$$(III.1.34) \quad \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

L'integrale generale dell'equazione (III.1.28) assume la forma:

$$(III.1.35) \quad i(t) = A_1 e^{at} + A_2 t e^{at}$$

Tale integrale dipende anch'esso da due costanti arbitrarie⁽¹⁾.

Si può osservare che l'espressione della soluzione considerata fino a questo punto è del tutto generale; a prescindere da qualsiasi ipotesi sulle condizioni iniziali nelle quali si trovi il circuito all'istante $t=0$. Tali condizioni dipendono dall'azione di eventuali eccitazioni agenti nel periodo di tempo $t < 0$, in conseguenza delle quali si ha un immagazzinamento di energia negli elementi con memoria e cioè nel condensatore e nell'induttore prima dell'istante $t=0$. Come è stato messo in evidenza nei §§ I.6.2 e I.6.3, l'energia immagazzinata in un condensatore è legata direttamente alla tensione presente ai suoi capi, mentre l'energia immagazzinata in un induttore è legata direttamente alla corrente che lo percorre. Perciò lo stato iniziale del circuito è individuato fisicamente dalle due seguenti quantità:

$$(III.1.36) \quad v_c(0) \quad i_L(0)$$

che devono essere considerate come dati del problema⁽²⁾.

(1) - La presenza di due costanti arbitrarie nell'integrale generale è conseguenza del fatto che l'equazione differenziale che si sta considerando è del secondo ordine.

(2) - Occorre fare attenzione al fatto che le grandezze elettriche (III.1.36) sono presenti nel circuito per cause che esulano dal fenomeno elettrico in esame e quindi dal compimento del circuito di fig.III.1.14 dopo la chiusura dell'interruttore. Esse possono essere assegnate in modo arbitrario, come è stato precisato; tuttavia i loro valori devono soddisfare le leggi di Kirchhoff. Si può ad esempio osservare che la quantità $i_L(t)$ per $t < 0$ deve essere nulla nel circuito considerato, essendo l'interruttore aperto. Di conseguenza deve essere $i_L(0) = 0$. Valori di $i_L(0)$ diversi da zero possono tuttavia essere ancora giustificati nei due modi seguenti:

- a) si può supporre l'esistenza di una causa esterna che carica istantaneamente l'induttore proprio quando l'interruttore viene chiuso;
- b) si suppone $i_L(t) \neq 0$ per $t < 0$, sostituendo al circuito in esame quello di fig.III.1.15, in cui è presente un secondo interruttore che commuta all'istante $t=0$. Per $t > 0$ il nuovo circuito coincide con quello di fig. III.1.14.

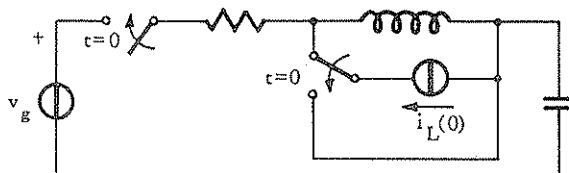


Fig.III.1.15 - Circuito che permette la circolazione di corrente nell'induttore per $t < 0$.

Le quantità (III.1.36) permettono di determinare le costanti arbitrarie A_1 ed A_2 tramite le seguenti operazioni:

a) a partire dalle grandezze elettriche iniziali (III.1.36), determinare i valori iniziali di Cauchy associati all'equazione differenziale (III.1.28). Per un'equazione differenziale di ordine n , detti valori sono rappresentati dalla variabile e dalle sue prime $n-1$ derivate, calcolate nel punto $t=0$. Nel caso presente i valori iniziali di Cauchy sono le seguenti quantità:

$$(III.1.37) \quad i(0); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+}$$

avendo indicato con 0^+ il valore della derivata all'istante $t = 0$, come limite destro. Ritorneremo in dettaglio su questo punto nel § III.3.

b) risolvere il problema delle condizioni iniziali di Cauchy, cioè con riferimento al caso generico di un'equazione di ordine n , determinare le n costanti arbitrarie in funzione dei valori iniziali di Cauchy.

Applichiamo le operazioni precedenti al caso in esame. In relazione al passo a) otteniamo il seguente sistema di equazioni, in cui sono incognite le quantità (III.1.37):

$$(III.1.38) \quad i(0) = i_L(0); \quad \left. L \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} + R i(0) + v_c(0) = E$$

Risolvendo le (III.1.38), si ottiene:

$$(III.1.39) \quad i(0) = i_L(0); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} \{ E - R i_L(0) - v_c(0) \}$$

In relazione al passo b) le equazioni che si ottengono dipendono dalla natura delle radici α_1 ed α_2 dell'equazione caratteristica (III.1.30). È necessario perciò a questo punto distinguere tre casi.

1) Radici α_1 ed α_2 reali e distinte.

Tale caso si verifica quando:

$$(III.1.40) \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$$

e quindi l'integrale generale della (III.1.28) ha la forma (III.1.33).

Gli esponenti delle funzioni che compongono tale integrale sono negativi quando le due radici sono negative, ciò che si verifica sempre, in base alla regola di Cartesio applicata all'equazione di secondo grado (III.1.30), quando il circuito considerato è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$). In questo caso la funzione risultante ha un andamento decrescente nel tempo.

La risoluzione del problema di Cauchy porta alle seguenti relazioni, deducibili direttamente dalla (III.1.33):

$$A_1 + A_2 = i(0)$$

$$(III.1.41) \quad \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+}$$

Dal sistema precedente si possono ricavare le incognite A_1 ed A_2 e quindi la soluzione.

Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.5.

Effettuare l'analisi del circuito di fig. III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 10 \quad ; \quad L = 1/2 \quad ; \quad C = 2/91 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed iniziali valgano:

$$E = 2 \quad ; \quad v_c(0) = 1 \quad ; \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Dalle (III.1.31) si ottiene:

$$\alpha_1 = -10 + \sqrt{100 - 91} = -7 \quad ; \quad \alpha_2 = -10 - 3 = -13 \quad (S^{-1})$$

Dalle (III.1.39) si hanno i seguenti valori iniziali di Cauchy:

$$i(0) = i_L(0) = 0 \quad ; \quad \frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+} = 2(2 - 1) = 2$$

Dalla (III.1.41) si ottiene:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -7 A_1 - 13 A_2 = 2 \end{cases}$$

da cui deriva:

$$A_1 = \frac{1}{3} ; \quad A_2 = -\frac{1}{3}$$

L'andamento nel tempo della corrente $i(t)$ che scorre nel circuito di fig.III.1.14 nel caso qui considerato, assume la seguente espressione (fig.III.1.16):

$$i(t) = \frac{1}{3} (e^{-7t} - e^{-13t}) \quad (\text{A})$$

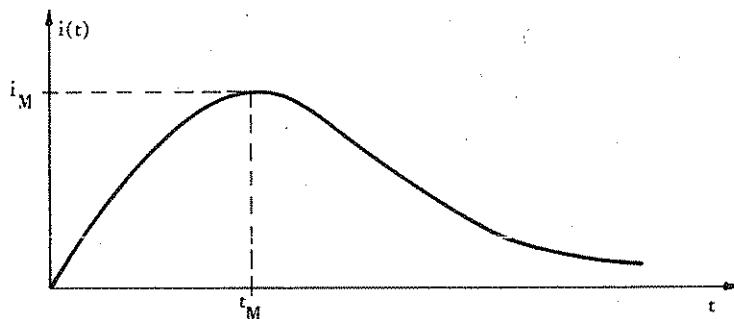


Fig.III.1.16 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso che i valori dei componenti siano quelli previsti nell'esempio III.1.5.

L'andamento nel tempo di ogni altra grandezza elettrica del circuito può essere facilmente determinato. Ad esempio la tensione ai capi dell'induttore vale (fig.III.1.17):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{7}{6} e^{-7t} + \frac{13}{6} e^{-13t} \quad (\text{V})$$

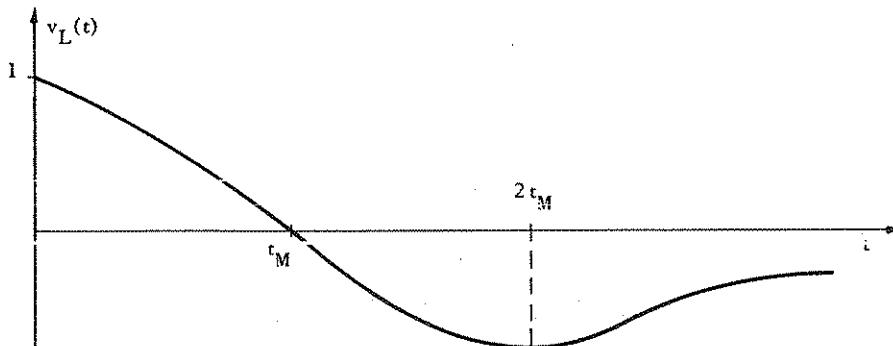


Fig.III.1.17 - Andamento della tensione $v_L(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.5.

2) Radici α_1 ed α_2 coincidenti.

Tale caso si verifica quando è soddisfatta la condizione (III.1.34); $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ vale:

$$(III.1.42) \quad \alpha = -\frac{R}{2L}$$

ed è reale negativa quando il circuito è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$).

La forma dell'integrale generale nel presente caso è la (III.1.35), che porta alle seguenti relazioni per quanto riguarda il problema di Cauchy:

$$(III.1.43) \quad \begin{cases} A_1 = i(0) \\ \alpha A_1 + A_2 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} \end{cases}$$

Dal sistema (III.1.43) si possono ricavare le quantità incognite A_1 ed A_2 e determinare quindi l'integrale particolare.

Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.6.

Effettuare l'analisi del circuito di fig. III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 4, \quad L = 1/2, \quad C = 1/8 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed iniziali valgano:

$$E = 2, \quad v_c(0) = 1, \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Essendo:

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} = 16, \quad \text{si ottiene dalle (III.1.42)}$$

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = -4$$

I valori iniziali di Cauchy sono gli stessi ottenuti nell'esempio III.1.5 e cioè:

$$i(0) = 0; \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = 2$$

Utilizzando le equazioni (III.1.43), si ottiene:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 2$$

La corrente $i(t)$, la cui espressione è del tipo III.1.35, vale (fig.III.1.18):

$$i(t) = 2t e^{-4t} \quad (\text{A})$$

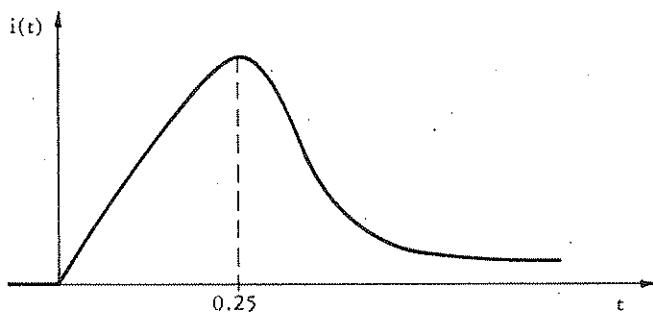


Fig.III.1.18 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso che i valori dei componenti siano quelli previsti nell'esempio III.1.6.

Determiniamo anche in questo caso, a titolo di esempio, la tensione ai capi dell'induttore. Essa vale (fig.III.1.19):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = e^{-4t} - 4te^{-4t} \quad (\text{V})$$

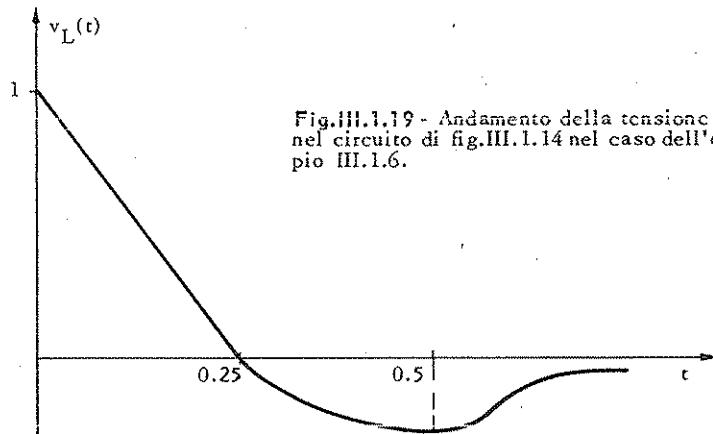


Fig.III.1.19 - Andamento della tensione $v_L(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.6.

3) Radici α_1 ed α_2 complesse coniugate.

Tale caso si verifica quando è soddisfatta la condizione:

$$(III.1.44) \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

La forma dell'integrale generale è la (III.1.33), con i valori di α_1 ed α_2 dati dalle (III.1.31), cioè:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

(III.1.45)

$$\alpha_2 = \alpha_1^* = -\frac{R}{2L} - j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

ove j è l'unità immaginaria ($j^2 = -1$) e l'asterisco indica il complesso coniugato.

La risoluzione del problema di Cauchy porta in questo caso alle seguenti relazioni, deducibili direttamente dalle (III.1.33):

$$(III.1.46) \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = i(0) \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_1^* A_2 = \frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+} \end{cases}$$

Il sistema (III.1.46) gode di una proprietà fondamentale: i valori delle incognite A_1 ed A_2 sono fra loro complessi coniugati. Infatti occorre innanzi tutto osservare che i valori iniziali di Cauchy sono nel nostro caso delle quantità reali; ciò vale in generale, poiché per motivi fisici sono evidentemente possibili solo valori reali per le condizioni iniziali di un circuito elettrico. D'altra parte dalle (III.1.46), prendendo i complessi coniugati di entrambi i membri si ottiene:

$$(III.1.47) \quad \begin{cases} A_2^* + A_1^* = i(0) \\ \alpha_1 A_2^* + \alpha_1^* A_1^* = \frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+} \end{cases}$$

Questo nuovo sistema coincide con il (III.1.46) salvo la sostituzione di A_1 con A_2^* ed A_2 con A_1^* . Perciò deve essere:

$$(III.1.48) \quad A_1 = A_2^*$$

In conseguenza della (III.1.48), l'integrale generale assume la forma:

$$(III.1.49) \quad i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_1^* e^{\alpha_1^* t}$$

ove ponendo:

$$(III.1.50) \quad A_1 = A_M e^{j\varphi_A}$$

$$\alpha_1 = \alpha_r + j\alpha_i$$

diviene:

$$(III.1.51)$$

$$i(t) = 2 \operatorname{Re} [A_1 e^{\alpha_1 t}] = 2 \operatorname{Re} [A_M e^{\alpha_r t} e^{j(\alpha_i t + \varphi_A)}] = 2 A_M e^{\alpha_r t} \cos(\alpha_i t + \varphi_A)$$

avendo indicato con $\operatorname{Re} [\dots]$ l'operatore che dà la parte reale di un numero complesso.

L'espressione (III.1.51) mette in evidenza in termini esplicativi il carattere reale della corrente $i(t)$, cioè che corrisponde ad un'esigenza inderogabile fisica, essendo assurda una corrente istantanea di valore complesso. La quantità α_i risulta di segno negativo, in base alla (III.1.45) quando il circuito è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$); in tale caso l'andamento della (III.1.51) è smorzato al crescere del tempo.

Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.7.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 8, \quad L = 1, \quad C = 1/25 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed i valori iniziali valgano:

$$E = 3; \quad v_c(0) = 1; \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Si ottengono i seguenti valori di α_1 ed α_2 :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -4 + j3 \\ \alpha_2 = -4 - j3 \end{cases}$$

Dalle (III.1.39) si ottengono i seguenti valori iniziali di Cauchy:

$$i(0) = 0$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = 2$$

I valori di A_1 ed A_2 si ottengono dal sistema (III.1.46), che diviene in questo caso:

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$(-4 + j3)A_1 + (-4 - j3)A_2 = 2$$

Si ottiene:

$$A_1 = -j/3 ; \quad A_2 = A_1^* = j/3$$

Le quantità definite nella (III.1.50) valgono:

$$\begin{cases} \alpha_r = -4 \\ \alpha_j = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_M = 1/3 \\ \varphi_A = -\pi/2 \end{cases}$$

Quindi dalla (III.1.51) si ottiene (fig.III.1.20):

$$i(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} \cos \left(3t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{3} e^{-4t} \sin 3t \quad (\text{A})$$

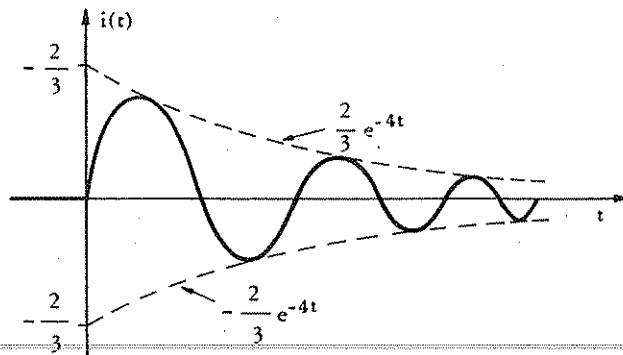


Fig.III.1.20 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.7.

Calcoliamo l'andamento della tensione $v_L(t)$ ai capi dell'induttore; si ottiene (fig.III.1.21):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = e^{-4t} \left(2 \cos 3t - \frac{8}{3} \sin 3t \right)$$

Osservazione III.1.2.

Si può osservare che gli andamenti nel tempo che si ottengono nell'ultimo caso considerato sono sostanzialmente differenti da quelli visti nei primi due casi. Comunemente si ricorda tale fatto dicendo che nel primo caso la funzione è di tipo sovrasmorzato, mentre nel terzo caso è di tipo sottosmorzato. Il caso numero due, relativo alla coincidenza delle radici, si può considerare intermedio fra i due e viene detto a smorzamento critico.

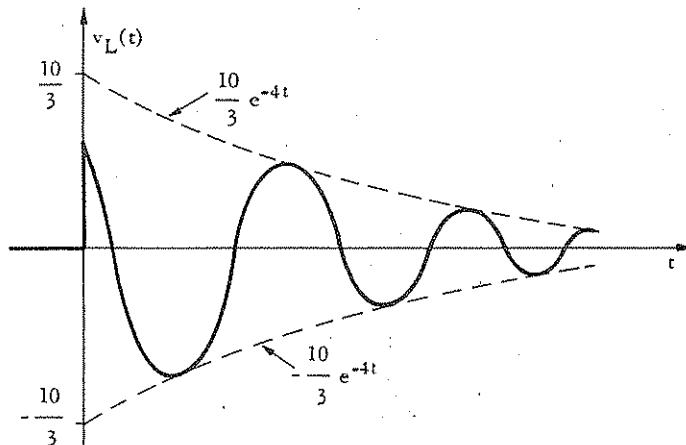


Fig. III.1.21 - Andamento della tensione ai capi dell'induttore nel circuito di fig. III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.7.

In tab. III.1.1 viene mostrato in modo riassuntivo il tipo di smorzamento in relazione alla posizione delle radici α_1 ed α_2 dell'equazione caratteristica nel piano complesso.

Tabella III.1.1 - Andamenti nel tempo delle grandezze elettriche in un circuito del secondo ordine.

Tipi di andamento	Diagramma	Tipo delle radici	Posizione nel piano complesso delle radici
Sovrasmorzato	grand. elettr. 	Reali distinte	asse immaginario
Sovrasmorzato critico	grand. elettr. 	Reali coincidenti	asse immaginario
Sottosmorzato	grand. elettr. 	Complesse coniugate	asse immaginario

Osservazione III.1.3.

È opportuno considerare attentamente i passaggi analitici effettuati per ricavare l'andamento nel tempo nel terzo caso (sottosmorzato). In tal caso è risultato opportuno ottenere l'andamento reale della corrente incognita effettuando dei calcoli intermedi nel campo complesso. Tale modo di procedere si presenta molte volte nel campo dell'elettrotecnica, tipicamente in presenza di funzioni trigonometriche. La procedura in questione non è strettamente necessaria; infatti anche nel caso considerato si sarebbe potuto ottenere l'integrale generale direttamente in termini di funzioni trigonometriche; in tal modo tuttavia si sarebbero dovuti utilizzare sviluppi analitici molto più complessi e soprattutto non si sarebbero più potuti trattare in maniera unificata i tre casi che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica. È necessario ricordare infatti che solo nel campo complesso si ottiene l'unificazione delle funzioni trigonometriche e di quelle esponenziali.

Osservazione III.1.4

Gli esempi del primo e del secondo ordine considerati nel presente paragrafo non presentano particolari difficoltà per la determinazione delle condizioni iniziali presenti per $t = 0^+$. Infatti le tensioni iniziali dei condensatori e le correnti iniziali degli induttori, assegnate all'istante $t = 0^-$, prima della chiusura degli interruttori, sono rimaste le stesse anche per $t = 0^+$, istante appartenente all'intervallo $t > 0$ in cui sono valide le equazioni differenziali risolventi. Tale assenza di discontinuità delle condizioni iniziali per $t = 0$ non vale in generale. In particolare può accadere che le condizioni iniziali, che soddisfano le leggi di Kirchhoff per $t = 0^-$, non possano più soddisfare tali leggi per effetto della chiusura degli interruttori in circuiti in cui la topologia venga sostanzialmente alterata. In questi casi è necessaria un'ulteriore fase di calcolo per determinare le nuove condizioni iniziali, valide per $t = 0^+$, a partire da quelle assegnate per $t=0^-$. La soluzione di tale problema può essere effettuata con il metodo indicato nel paragrafo III.3.

È tuttavia opportuno osservare che, anche quando il problema precedente non si presenta e cioè in assenza di discontinuità sulle tensioni dei condensatori e sulle correnti degli induttori per $t = 0$, possono risultare discontinue in detto istante le condizioni iniziali secondo Cauchy. Per esempio, nel caso del circuito del secondo ordine, pur risultando $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, la derivata $i'_L(t)$, calcolata per $t = 0^+$ nella equazione (III.1.39), è discontinua per $t=0$, in quanto il valore $i'_L(0^-)$ può differire da $i'_L(0^+)$. In effetti $i'_L(0^-)$ dipende dall'effettivo circuito ipotizzato per $t < 0$. Ad esempio nel caso del circuito di fig. III.1.15 risulta $i'_L(0^-) = 0$.

III.2 - Andamenti tipici delle grandezze impresse nei circuiti con memoria.

Quando sono stati introdotti i generatori indipendenti di tensione e di corrente è stato detto che le grandezze elettriche da essi impresse potevano assumere un andamento qualsiasi. D'altra parte nel paragrafo precedente, introducendo l'argomento dell'analisi dei circuiti con memoria, è stato notato come la risposta di un circuito sia strettamente legata alle funzioni di eccitazione e come la difficoltà dei metodi di analisi dipenda dalla classe delle funzioni di eccitazione considerate.

I tipi di eccitazione che si utilizzano usualmente sono scelti in base: 1) a motivi di ordine tecnico, nel qual caso la funzione introdotta approssima in modo più o meno soddisfacente l'andamento nel tempo della grandezza impressa in un generatore reale; 2) a motivi di ordine teorico: le funzioni introdotte sono scelte con lo scopo di mettere in evidenza qualche proprietà del circuito, anche se non possono essere approssimate in modo completamente soddisfacente dai dispositivi reali. In questo ambito vengono spesso utilizzate funzioni che non sono continue nel tempo e presentano delle discontinuità.

Le funzioni di eccitazione possono essere completamente determinate oppure possono essere note tramite le loro proprietà statistiche. È evidente che la trattazione del problema dell'analisi di un circuito si modifica sostanzialmente a seconda che le funzioni di eccitazione siano del primo o del secondo tipo.

Nel presente paragrafo limiteremo l'attenzione alle eccitazioni del primo tipo. Le funzioni di eccitazione che vengono prese in considerazione di seguito sono quelle più usate in pratica; tuttavia, molte altre sono riportate nell'App. III.A,

III.2.1 - Funzione gradino unitario.

La funzione gradino unitario, indicata con il simbolo $u_{-1}(t)$, è mostrata in fig. III.2.1. Essa presenta una discontinuità in corrispondenza all'istante $t=0$, dove il suo valore passa da zero ad uno. Analiticamente viene definita con:

$$(III.2.1) \quad \begin{aligned} u_{-1}(t) &= 0 & t < 0 \\ u_{-1}(t) &= 1 & t > 0 \end{aligned}$$

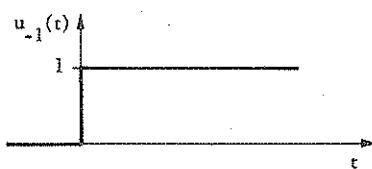


Fig. III.2.1 - Andamento della funzione gradino unitario.

Dal punto di vista fisico la sua interpretazione è immediata: essa corrisponde all'inserzione di un generatore di valore unitario all'istante $t=0$.

Nelle applicazioni è spesso necessario fare riferimento ad un generatore di ampiezza qualsiasi che inizia ad agire su un circuito elettrico all'istante $t=t_0$. In tal caso si può considerare la funzione seguente:

$$(III.2.2) \quad f(t) = a \cdot u_{-1}(t-t_0)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.2.2. Più in generale, supponendo che la funzione impressa dal generatore sia $g(t)$ e che essa cominci ad agire nel circuito all'istante t_0 , si ha:

$$(III.2.3) \quad f(t) = g(t) \cdot u_{-1}(t-t_0)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.2.3.

Fig.III.2.2 - Eccitazione costante impressa all'istante t_0 .

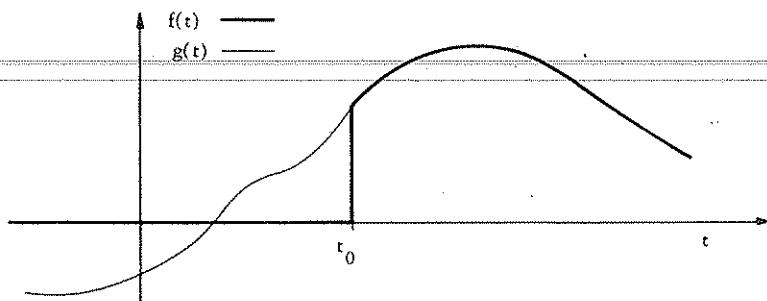
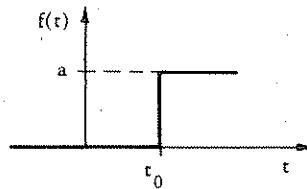


Fig.III.2.3 - Eccitazione variabile impressa all'istante t_0 .

Dal punto di vista circuitale l'inserzione di un generatore può essere ottenuta per mezzo di un opportuno interruttore o commutatore. Si può ottenere in tal modo un'interpretazione circuitale immediata per la funzione a gradino, che trova riscontro in moltissimi casi reali; tale interpretazione è mostrata nella fig.III.2.4 per il generatore di tensione e nella fig.III.2.5 per il generatore di corrente. In entrambi i casi nello sche-

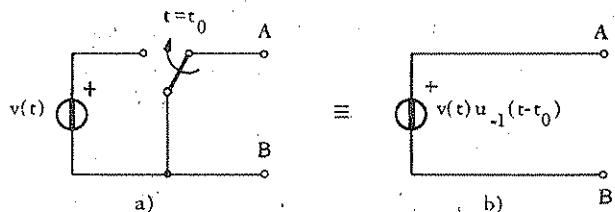


Fig.III.2.4 - Interpretazione circuitale dell'inserzione all'istante t_0 di un generatore di tensione.

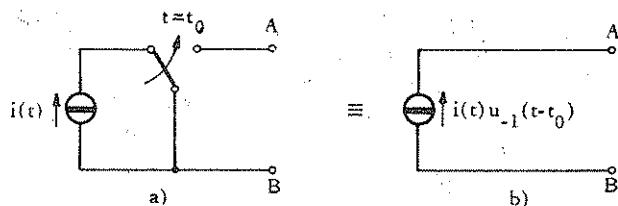


Fig.III.2.5 - Interpretazione circuitale dell'inserzione all'istante t_0 di un generatore di corrente.

ma a) è presente un interruttore o commutatore ideale che si trova nella posizione indicata per $t < t_0$, mentre viene spostato istantaneamente all'istante $t = t_0$. Negli schemi b) la presenza del commutatore o dell'interruttore non è più necessaria, essendo la sua funzione svolta implicitamente dalla funzione a gradino.

Dalle (III.2.1) si deduce il carattere discontinuo della funzione gradino unitario, per cui essa non risulta definita in $t=0$. A volte può risultare conveniente, dal punto di vista analitico, utilizzare altre definizioni, che coincidono con quella data (a meno del punto $t=0$) e che pongono la funzione $u_{-1}(t)$ come limite di una classe di funzioni continue. Fra le molte definizioni che è possibile dare, ne ricordiamo due:

a) Sia $u_{-1,\epsilon}(t)$ la funzione definita come segue:

$$(III.2.4) \quad \begin{cases} u_{-1,\epsilon}(t) = 0 & \text{per } t \leq 0 \\ u_{-1,\epsilon}(t) = \frac{t}{\epsilon} & \text{per } 0 \leq t \leq \epsilon \\ u_{-1,\epsilon}(t) = 1 & \text{per } t \geq \epsilon \end{cases}$$

Allora il gradino unitario si può definire come:

$$(III.2.5) \quad u_{-1}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{-1,\epsilon}(t)$$

Nella fig.III.2.6 è riportato l'andamento della funzione $u_{-1,\epsilon}(t)$; si vede chiaramente che per ϵ che tende a zero, la funzione data tende al gradino unitario, eccetto che nel punto $t=0$, ove la nuova funzione è nulla. Notare che, per ogni ϵ , la funzione $u_{-1,\epsilon}(t)$ è continua per ogni t ;

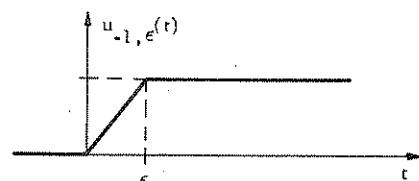


Fig.III.2.6 - Prima funzione considerata per una definizione alternativa di $u_{-1}(t)$.

b) Sia $u_{-1,\epsilon}(t)$ la funzione definita come segue:

$$(III.2.6) \quad \begin{aligned} u_{-1,\epsilon}(t) &= 0 && \text{per } t \leq 0 \\ u_{-1,\epsilon}(t) &= 1 - e^{-t/\epsilon} && \text{per } t \geq 0 \end{aligned}$$

Allora il gradino unitario $u_{-1}(t)$ si può definire come:

$$(III.2.7) \quad u_{-1}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{-1,\epsilon}(t)$$

Nella fig.III.2.7 è riportato l'andamento della nuova funzione; per essa valgono le stesse considerazioni fatte nel caso a).

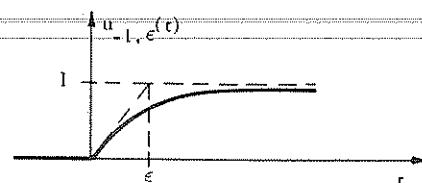


Fig.III.2.7 - Seconda funzione considerata per una definizione alternativa di $u_{-1}(t)$.

III.2.2 - Funzione impulso unitario.

La funzione impulso unitario, indicata con il simbolo $u_0(t)$, è molto meno intuitiva della funzione gradino unitario; per di più, come verrà accennato in seguito, in questo caso la stessa parola «funzione» è usata in modo improprio, trattandosi di un ente matematico diverso e cioè di una *distribuzione*. È tuttavia opportuno caratterizzare dapprima intuitivamente la funzione impulso unitario a partire da funzioni note e facilmente descrivibili. Considereremo due casi differenti.

a) Si consideri la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ definita nel modo seguente:

$$(III.2.8) \quad u_{0,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-\epsilon)]$$

Tale funzione è costituita dalla differenza di due gradini di ampiezza $1/\epsilon$, il secondo dei quali è traslato rispetto al primo del tempo ϵ . Si vede facilmente che la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ è nulla per $t < 0$ (essendo tutti e due i gradini nulli) e per $t > \epsilon$ (poiché il secondo gradino annulla il primo), mentre vale $1/\epsilon$ per $0 < t < \epsilon$ (poiché il primo gradino vale uno ed il secondo zero in detto intervallo).

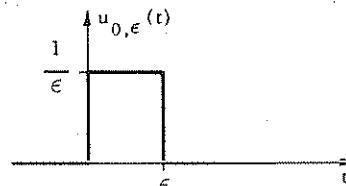


Fig.III.2.8 - Prima funzione considerata per definire $u_0(t)$.

L'andamento della funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ è quello di fig.III.2.8. Occorre notare che al variare di ϵ , la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ possiede una proprietà invariante: il suo integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ è indipendente da ϵ . Infatti:

$$(III.2.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt = 1$$

b) Si consideri ora un'altra funzione $u_{0,\epsilon}(t)$, definita nel modo seguente:

$$(III.2.10) \quad \begin{cases} u_{0,\epsilon}(t) = 0 & \text{per } t \leq 0 \\ u_{0,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} e^{-t/\epsilon} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

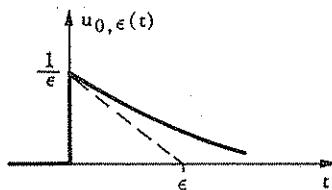
L'andamento di questa funzione è riportato in fig.III.2.9.

È facile verificare che anche questa nuova funzione possiede un invariante dato dall'integrale (III.2.9). Infatti per ogni ϵ si ha:

$$(III.2.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon} e^{-t/\epsilon} dt = \frac{1}{\epsilon} [-\epsilon e^{-t/\epsilon}]_0^{\infty} = 1$$

È abbastanza facile intuire che, al diminuire di ϵ , le due funzioni $u_{0,\epsilon}(t)$ assumono caratteristiche molto simili e tendono ad una funzione ovunque nulla, tranne che in un intorno del punto $t=0$. Tali funzioni sono quelle che ci servono per caratterizzare fenomeni che si esplicano in intervalli di tempo molto brevi con valore finito del loro integrale.

Fig.III.2.9 - Seconda funzione considerata per la definizione di $u_0(t)$.



Sorge immediato il problema di scegliere un valore di ϵ sufficientemente piccolo. In particolare è evidente che si avrebbe una notevole semplificazione analitica, se si potesse scegliere proprio il limite per $\epsilon \rightarrow 0$. Tuttavia è facile vedere che tale passaggio al limite non è possibile, in quanto si distrugge la proprietà fondamentale dell'invarianza degli integrali (III.2.9) e (III.2.11). Infatti pur rimanendo unitario il limite dell'integrale:

$$(III.2.12) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt \right] = 1$$

risulta nullo l'integrale del limite:

$$(III.2.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{0,\epsilon}(t)] dt = 0$$

Il problema non può venire risolto nell'ambito della teoria classica delle funzioni; occorre ricorrere a quella delle distribuzioni. Nello ambito di tale teoria si dimostra che è possibile introdurre un ente $u_0(t)$, che viene detto *distribuzione impulsiva unitaria*, o di *Dirac*, tale per cui l'integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ è unitario e più precisamente:

$$(III.2.14) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^T u_0(t) dt = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T u_0(t) dt = 1 & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

Più in generale si dimostra che per ogni funzione continua⁽¹⁾ $f(t)$ si ha:

$$(III.2.15) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^T u_0(t) \cdot f(t) dt = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T u_0(t) \cdot f(t) dt = f(0) & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

Nella letteratura tecnica viene usualmente indicata la $u_0(t)$ con la denominazione di «funzione impulsiva di Dirac»; anche nel presente testo tale denominazione verrà usata, malgrado che sia impropria per quanto detto. Graficamente la funzione $u_0(t)$ viene rappresentata come in fig.III.2.10.

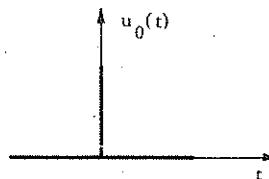


Fig.III.2.10 - Rappresentazione simbolica dell'impulso unitario.

Il concetto di funzione impulsiva unitaria può essere esteso al caso di impulsi non unitari e posizionati in istanti differenti dall'origine dei tempi. Ad esempio la funzione :

$$(III.2.16) \quad A u_0(t - t_0)$$

corrisponde ad un impulso di ampiezza A (intendendo con tale locuzione il fatto che il suo valore integrale definito fra $-\infty$ e $+\infty$ è uguale ad A) e posizionato nell'istante t_0 .

I motivi che stanno alla base dell'introduzione delle funzioni impulsive precedenti sono di ordine pratico e teorico. Rimandando la discussione per questi ultimi al quarto capitolo, accenneremo di seguito ai primi.

Un'eccitazione impulsiva corrisponde all'inserzione nel circuito di un generatore per un intervallo di tempo molto breve rispetto a tutti i tempi di risposta del circuito stesso⁽²⁾. Sotto questa ipotesi si può dimostrare che l'effetto dell'eccitazione sul circuito ri-

(1) - Nel caso che la $f(t)$ sia discontinua in $t = 0$, occorre sostituire nella (III.2.15), al posto di $f(0)$, il valore medio per $t = 0$. Ad esempio se $f(t) = u_{-1}(t)$, si ha:

$$\int_{-\infty}^t u_0(\tau) u_{-1}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} u_{-1}(t)$$

Tale risultato verrà utilizzato nella formula (III.B.1).

(2) - Ad esempio, se si considera il circuito di fig.III.1.11 è sufficiente che la durata dell'inserzione del generatore sia molto più piccola della costante di tempo τ .

sulta poco dipendente dalla forma della funzione di eccitazione, che può quindi essere assimilata ad una funzione impulsiva. Essa non è unitaria, ma ha un'ampiezza uguale all'area della funzione rappresentante l'eccitazione considerata. Ad esempio in figura III.2.11 è rappresentata una tensione di tipo impulsivo di ampiezza uguale a 3 Vusec.

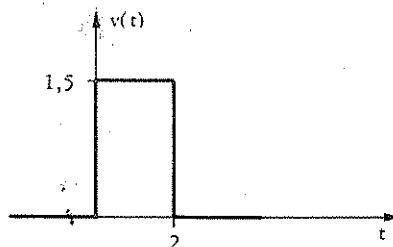


Fig.III.2.11 - Impulso di tensione (V, usec).

Confrontando la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ rappresentata in fig.III.2.9 con l'andamento della corrente $i(t)$ di fig.III.1.13, si vede che esse rappresentano la stessa funzione. Si vede inoltre che la $i(t)$ possiede un integrale definito fra $-\infty$ e $+\infty$, indipendente da R e pari ad EC . Infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{E}{R} e^{-t/RC} dt = \frac{E}{R} [-RC e^{-t/RC}]_0^{\infty} = EC$$

Quindi al tendere di R a zero, la corrente $i(t)$ tende all'impulso di ampiezza EC (ossia di ampiezza pari alla carica elettrica totale immagazzinata nel condensatore dopo il processo di carica); si ha perciò una corrente impulsiva durante la carica a tensione costante di un condensatore in assenza del resistore in serie al generatore.

Osservazione III.2.1.

Confrontando le definizioni delle funzioni $u_0(t)$ e $u_{-1}(t)$, come limite di una classe di funzioni, si nota che $u_{-1}(t)$ costituisce l'integrale della prima. Infatti si ha per ogni ϵ :

$$(III.2.17) \quad u_{-1,\epsilon}(t) = \int_{-\infty}^t u_{0,\epsilon}(\tau) d\tau$$

sia che si faccia riferimento alle definizioni (a), basate sulle espressioni (III.2.4) e (III.2.8), sia che si faccia riferimento alle definizioni (b), basate sulle espressioni (III.2.6) e (III.2.10). Si può quindi affermare che:

$$(III.2.18) \quad u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_0(\tau) d\tau$$

Quest'ultima proprietà si può d'altra parte ricavare direttamente dalla definizione (III.2.14), interpretando l'integrale come funzione del limite di integrazione superiore. Non è invece possibile affermare il fatto opposto e cioè che la funzione $u_0(t)$ è la derivata di $u_{-1}(t)$, non essendo tale funzione derivabile. Tale difficoltà può essere superata in senso positivo solo nell'ambito della teoria delle distribuzioni, a cui si rimanda.

Osservazione III.2.2.

Le funzioni impulso unitario $u_0(t)$ e gradini unitario $u_{-1}(t)$ fanno parte di una classe numerabile di funzioni dette funzioni *singolari*. Un cenno a tali funzioni verrà dato nell'appendice A, dove verranno indicate anche le ragioni (soprattutto teoriche) della loro introduzione. Qui è sufficiente ricordare che la i -sima funzione di tale classe è indicata con il simbolo $u_i(t)$ ed è legata alla successiva tramite la relazione:

$$(III.2.19) \quad u_i(t) = \int_{-\infty}^t u_{i+1}(\tau) d\tau$$

III.2.3 - Funzioni sinusoidali.

Un tipo di funzione di eccitazione molto importante nelle applicazioni è quella sinusoidale (fig.III.2.12), definita come segue:

$$(III.2.20) \quad e(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

e caratterizzata dai parametri A , ω , φ , aventi ciascuno un nome appropriato, di grande uso pratico.

La quantità A viene chiamata *ampiezza* della funzione $e(t)$, di cui conserva le dimensioni fisiche. Essa è un numero reale e positivo (il segno di $e(t)$ influenza solo su φ).

La quantità ω viene detta *pulsazione* della funzione $e(t)$ e si misura in radianti/secondo. Essa è legata ad un'altra grandezza che interessa le funzioni del tipo (III.2.20), che viene detta *frequenza*, nel modo seguente:

$$(III.2.21) \quad \omega = 2\pi f$$

La frequenza f si misura in *Hertz* (cicli al secondo) ed ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

La quantità φ viene detta *fase iniziale* della funzione $e(t)$ e si misura in radianti, mentre il termine *fase istantanea* si riferisce a tutto l'argomento del coseno, cioè alla quantità $\omega t + \varphi$.

L'intervallo di tempo che intercorre tra due istanti successivi aventi la stessa fase istantanea prende il nome di *periodo* T della funzione $e(t)$ e si misura in secondi. Tale quantità si può ottenere immediatamente nel modo seguente:

$$(III.2.22) \quad \omega(t+T) + \varphi = \omega t + 2\pi + \varphi$$

da cui si ha:

$$(III.2.23) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

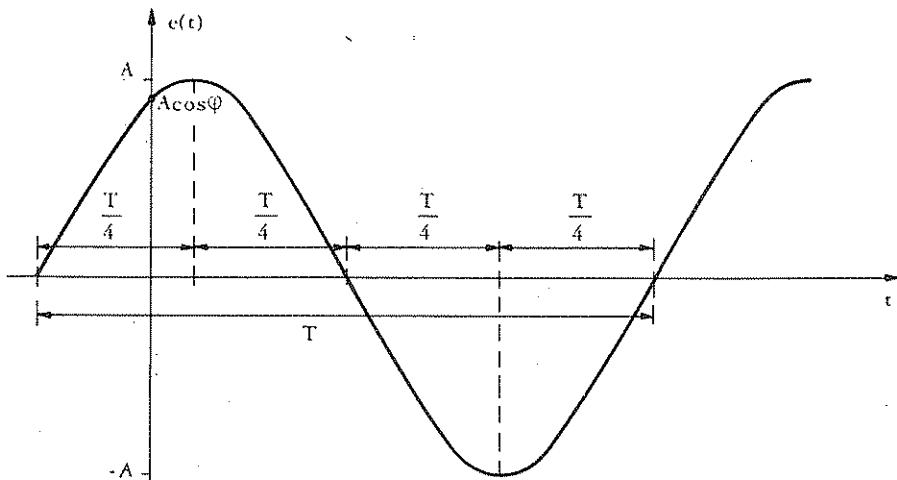


Fig.III.2.12—Andamento della funzione sinusoidale.

L'importanza delle eccitazioni di tipo sinusoidale è sia pratico che teorico. Dal punto di vista pratico, è sufficiente ricordare che hanno un andamento sinusoidale le grandezze elettriche applicate ai circuiti di potenza. L'importanza teorica è conseguenza del fatto che qualsiasi funzione del tempo periodica è sviluppabile in una serie di funzioni del tipo (III.2.20) di pulsazione $k\omega$, $k=0, 1, 2, \dots$ (sviluppo in serie di Fourier) e che per un circuito lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti, in base al quale l'effetto di una somma di eccitazioni è uguale alla somma degli effetti delle singole eccitazioni, considerate come se agissero da sole.

II.2.4 - Funzioni sinusoidali isofrequenziali.

Nelle applicazioni, come vedremo nel Cap. V, si ha spesso a che fare con grandezze elettriche aventi un andamento nel tempo sinusoidale con una pulsazione ω uguale ad un valore tipico ω_0 .

Quando si ha a che fare con funzioni di questo tipo, si parla di classe di *funzioni sinusoidali isofrequenziali*. Considerando A e φ come le coordinate polari di un punto di un piano, è evidente che esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni della suddetta classe ed i suoi punti. A tale piano si dà il nome di «*piano dei fasori*» definendo come *fasore*⁽¹⁾ associato alla funzione (III.2.20) la quantità complessa:

$$(III.2.24) \quad \mathbf{E} = A e^{j\varphi}$$

rappresentante un punto del piano in coordinate polari.

Il passaggio dalla generica funzione $e(t)$, al corrispondente fasore \mathbf{E} , e viceversa, è immediato, come risulta dall'esame delle (III.2.20) e (III.2.24) e dagli esempi seguenti.

Esempio III.2.1

Dato la seguente funzione sinusoidale:

$$e(t) = 5 \sin t$$

determinare il fasore corrispondente.

Occorre dapprima esprimere la $e(t)$ nella forma (III.2.20); si ha:

$$e(t) = 5 \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{E} = 5 e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j5$$

Esempio III.2.2

Dato il seguente fasore:

$$\mathbf{E} = 3 + j2$$

ottenere la corrispondente funzione sinusoidale.

Mettiamo dapprima \mathbf{E} sotto forma polare, cioè:

$$\mathbf{E} = \sqrt{13} e^{j \arctan \frac{2}{3}}$$

(1) - Per indicare il fasore a volte sono usati altri nomi, come «*vettore simbolico*» e «*sinore*».

da cui si ricava:

$$e(t) = \sqrt{13} \cos \left(\omega_0 t + \arctan \frac{2}{3} \right)$$

È necessario fare attenzione al calcolo della fase tramite l'arcotangente del rapporto tra parte immaginaria e reale del fasore. Infatti l'arcotangente fornisce due valori che differiscono di π ; la scelta dell'unico valore esatto deve essere fatto in base al segno della parte reale.

Il valore di ω_0 deve essere assegnato separatamente, in quanto non è deducibile dal fasore.

È possibile determinare un legame diretto fra la funzione $e(t)$ ed il corrispondente fasore E , esprimendo la prima nel campo complesso. Precisamente si ha:

$$(III.2.25) \quad e(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}}{2}$$

Confrontando la (III.25) con la (III.24) si ottiene:

$$(III.2.26) \quad e(t) = \frac{E e^{j\omega_0 t} + E^* e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

dove E^* rappresenta il complesso coniugato del fasore E . Osservando inoltre che la (III.2.26) esprime la funzione $e(t)$ come semisomma di due numeri complessi coniugati, si ottiene:

$$(III.2.27) \quad e(t) = \operatorname{Re}[E e^{j\omega_0 t}]$$

Le espressioni (III.2.26) e (III.2.27) sono i legami cercati fra il fasore E e la grandezza $e(t)$. Tali legami hanno importanza fondamentale e verranno largamente utilizzati nel seguito insieme ad altre proprietà e nozioni, che verranno introdotte successivamente⁽¹⁾.

Interpretazione grafica del legame tra le grandezze nel tempo ed i fasori.

Le relazioni (III.2.26) e (III.2.27), che rappresentano il legame tra un fasore E e la corrispondente grandezza $e(t)$, possono essere facilmente interpretate per via grafica.

(1) - La relazione (III.2.27) permette anche di stabilire le dimensioni fisiche che si possono associare al fasore di una grandezza sinusoidale. In particolare si deduce che ogni fasore possiede le dimensioni fisiche della grandezza corrispondente nel dominio del tempo.

Consideriamo dapprima la relazione (III.2.27), che riportiamo di seguito per comodità:

$$(III.2.28) \quad e(t) = \operatorname{Re} [E e^{j\omega_0 t}]$$

L'espressione (III.2.28) implica due passi: il primo consiste nella moltiplicazione del fasore E per la quantità $e^{j\omega_0 t}$; il secondo nell'operatore «parte reale». Effettuando il primo passo si ottiene un nuovo vettore F , definito come segue:

$$(III.2.29) \quad F = E e^{j\omega_0 t}$$

Il vettore F prende il nome di *vettore rotante* associato alla grandezza $e(t)$. Graficamente tale vettore si può rappresentare nel modo indicato nella fig. III.2.13 nel piano dei fasori.

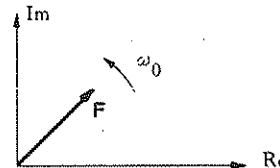


Fig. III.2.13 - Rappresentazione grafica del vettore $F = E e^{j\omega_0 t}$.

Infatti F , che risulta dipendente dal tempo, è un vettore che ruota in senso antiorario al crescere del tempo t con velocità angolare ω_0 . Esso mantiene il modulo costante e coincide con il fasore E all'istante $t = 0$.

Effettuando successivamente l'operazione «parte reale» sul vettore rotante F , si ottiene, in base alla (III.2.28), la grandezza sinusoidale. Vale perciò la seguente interpretazione grafica di detta relazione

Proprietà III.2.1 - «La grandezza sinusoidale $e(t)$ è uguale alla proiezione sull'asse reale del vettore rotante associato al fasore della grandezza stessa».

La proprietà III.2.1 è illustrata nella fig. III.2.14.

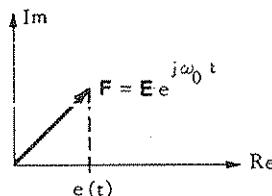


Fig. III.2.14 - Rappresentazione grafica della proprietà III.2.1.

In alcuni casi è utile interpretare graficamente anche l'espressione (III.2.26), che riportiamo per comodità:

$$(III.2.30) \quad e(t) = \frac{1}{2} [E e^{j\omega_0 t} + E^* e^{-j\omega_0 t}]$$

In base alla relazione (III.2.30), la tensione $e(t)$ è uguale alla semisomma di due vettori coniugati. Il primo è il vettore rotante F ; il secondo è il vettore coniugato F^* . Quest'ultimo vettore può essere interpretato come un vettore che ruota in senso orario (opposto a quello di F) al crescere del tempo.

Queste considerazioni sono interpretate graficamente nella figura III.2.15.

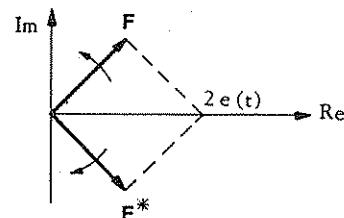


Fig. III.2.15 - Interpretazione grafica della relazione (III.2.30).

III.3 - Applicazione della trasformazione di Laplace all'analisi dei circuiti con memoria.

III.3.1 - Introduzione.

Il procedimento di analisi dei circuiti con memoria che è stato usato nei paragrafi precedenti prevede due fasi, di cui la prima consiste nella scelta delle grandezze elettriche incognite e nella determinazione delle equazioni risolventi. Tale fase, presente anche nel caso dei circuiti senza memoria, porta ad un sistema risolvente di tipo integro-differenziale invece che algebrico, come nel caso dei circuiti senza memoria. La seconda fase del procedimento prevede i seguenti passi:

- a) dopo aver individuato il sistema integro-differenziale risolvente, occorre ricondurre la sua risoluzione a quella di un'equazione differenziale ordinaria in cui compaia una sola funzione incognita;
- b) occorre determinare le condizioni iniziali di Cauchy relativamente alla funzione incognita prescelta, a partire dalle condizioni iniziali assegnate nel circuito (tensioni iniziali dei condensatori e correnti iniziali degli induttori);
- c) occorre integrare l'equazione differenziale in corrispondenza alle condizioni iniziali di Cauchy. In presenza di funzioni di eccitazioni generiche, per la ricerca dell'integrale particolare, può essere necessario ricorrere al metodo del nucleo risolvente.

Il procedimento di analisi, che risulta dalla descrizione precedente, prende il nome di «*analisi nel dominio del tempo*», in quanto le grandezze elettriche vengono costantemente considerate funzioni del tempo. Le difficoltà di applicazione di tale procedimento sono chiaramente connesse alle sue due fasi: quelle topologiche sono analoghe a quelle che s'incontrano nei circuiti senza memoria; le altre sono relative all'esecuzione dei tre passi precedenti. È importante notare che il superamento di queste ultime può divenire estremamente oneroso, come si può intuire anche dai semplici esempi sviluppati nei paragrafi precedenti.

Una semplificazione notevole di questa parte del procedimento può essere ottenuta utilizzando una particolare operazione detta «*trasformazione di Laplace*», che permette di trasformare sistemi di equazioni integro-differenziali nel tempo in sistemi algebrici nel dominio di una nuova variabile s detta «*variabile di Laplace*».

Un modo intuitivo per comprendere l'azione di questa trasformazione è quello di confrontarla con l'azione dell'operazione «*logaritmo*» nel campo dei numeri reali. Tramite l'operatore logaritmo passiamo in un dominio trasformato ove le equivalenti delle operazioni di moltiplicazione e divisione sono le operazioni di somma e differenza. Nel caso della trasformazione di Laplace l'equivalente di un'equazione integro-differenziale nel tempo è un'equazione algebrica. In ambedue i casi la parte onerosa della trasformazione, in fase di applicazione, è l'operazione di individuazione dell'immagine della quantità usata e l'operazione inversa di ritorno dall'immagine alla quantità non trasformata. Tale parte onerosa, tuttavia, viene completamente eliminata mediante l'uso di opportune tabelle, già predisposte per questo scopo.

L'operazione di trasformazione secondo Laplace di una funzione del tempo $f(t)$ consiste nella seguente espressione⁽¹⁾:

$$(III.3.1) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

La funzione $F(s)$ viene detta «*trasformata di Laplace*» della funzione $f(t)$, mentre s è una quantità complessa detta «*variabile di Laplace*»⁽²⁾. L'espressione (III.3.1) può essere considerata come un operatore che permette di passare dalla funzione $f(t)$ alla funzione $F(s)$. Per brevità tale operatore viene indicato nel modo seguente:

$$(III.3.2) \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

(1) - La trasformata in questione è quella unilatera di Laplace.

(2) - È utile ricordare che nella letteratura tecnica viene usata molto spesso al posto di s la lettera p .

L'operazione inversa, che permette di passare da $F(s)$ ad $f(t)$, si può effettuare in modo univoco e prende il nome di «*antitrasformazione di Laplace*». Detta operazione viene indicata simbolicamente con:

$$(III.3.3) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Le operazioni di trasformazione ed antitrasformazione secondo Laplace sono possibili solo se le funzioni considerate soddisfano opportune condizioni. Accenniamo di seguito a quelle più importanti:

- 1) Si dicono \mathcal{L} -trasformabili le funzioni $f(t)$ per le quali esiste finito il limite indicato nell'espressione (III.3.1) per almeno un valore della variabile s ;
- 2) L'insieme dei valori della variabile s per i quali esiste finito il limite indicato nell'espressione (III.3.1) viene denominato dominio di convergenza.

Le proprietà fondamentali della trasformazione di Laplace sono le seguenti⁽¹⁾.

Proprietà I - Linearità.

Assegnate due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, \mathcal{L} -trasformabili, per le quali sia:

$$(III.3.4) \quad \begin{aligned} F_1(s) &= \mathcal{L}[f_1(t)] \\ F_2(s) &= \mathcal{L}[f_2(t)] \end{aligned}$$

la trasformata di Laplace di una loro combinazione lineare:

$$(III.3.5) \quad f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

è pari alla combinazione lineare delle corrispondenti trasformate con gli stessi coefficienti, cioè:

$$(III.3.6) \quad F(s) = \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Proprietà II - Trasformazione della derivazione rispetto al tempo.

Assegnata la funzione $f(t)$, \mathcal{L} -trasformabile, per la quale sia:

$$(III.3.7) \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

(1) - Ulteriori proprietà verranno descritte nell'appendice III.A.

si ha:

$$(III.3.8) \quad \mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0)$$

dove $f(0)$ è il valore assunto dalla funzione $f(t)$ per $t=0$.

Proprietà III - Trasformazione dell'integrazione rispetto al tempo.

Assegnata la funzione $f(t)$, \mathcal{L} -trasformabile, cioè per la quale sia:

$$(III.3.9) \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

si ha:

$$(III.3.10) \quad \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Osservazione III.3.1

La trasformazione di Laplace può essere definita nell'ambito della teoria delle funzioni. La definizione può essere anche facilmente estesa all'ambito della teoria delle distribuzioni. Tale estensione comporta lievi ma sostanziali differenze. Esaminiamo brevemente il primo e il secondo caso.

a) Caso della teoria delle funzioni.

In tal caso l'integrale presente nella definizione della trasformazione di Laplace (III.3.1) è calcolato secondo Lebesgue e l'intervallo di integrazione è per $t > 0$. Pertanto nel teorema della derivazione, il valore iniziale $f(0)$ che compare nella (III.3.8) deve essere inteso come $f(0^+)$, mentre la derivata df/dt è calcolata ovviamente nell'intervallo $t > 0$ (zero escluso). Eventuali discontinuità di $f(t)$ per $t = 0$ non sono considerate.

b) Caso della teoria delle distribuzioni

L'intergrale (III.3.1) è calcolato nell'ambito della teoria delle distribuzioni. Per includere nella trasformata anche il contributo di eventuali distribuzioni singolari nell'origine, l'estremo inferiore di integrazione è preso pari a $t = 0^-$. Nel caso del teorema della deriva-

zione, l'inclusione dell'istante $t = 0$ nel calcolo della trasformata è essenziale, poiché eventuali discontinuità nell'origine di $f(t)$ danno luogo a distribuzioni singolari nell'origine per la derivata df/dt . Per tenere conto di tali possibili discontinuità, il valore iniziale che appare nella (III.3.8) deve essere in tal caso preso come $f(0^+)$. Nella (III.3.10), l'integrale deve essere effettuato nel senso delle distribuzioni con estremo inferiore pari a $t = 0^+$.

Nella maggior parte dei casi l'estensione della trasformazione di Laplace all'ambito delle distribuzioni non dà luogo a risultati differenti. In particolare, funzioni $f(t)$ prive di singolarità per $t \geq 0$, possono essere trattate sia effettuando i calcoli nel caso a) o nel caso b). Se tuttavia occorre utilizzare il teorema della derivazione, potrebbero presentarsi singolarità non presenti in $f(t)$. Se inoltre si considera l'insieme di tutte le trasformate di Laplace $F(s)$, si vede che tale insieme è molto più limitato nel caso delle funzioni rispetto al caso delle distribuzioni. In particolare molte semplicissime funzioni $F(s)$ non possono essere considerate trasformate di Laplace, se la definizione di tale trasformata è limitata all'ambito delle funzioni.

La trasformazione delle operazioni di derivazione ed integrazione nel tempo in operazioni algebriche nel dominio della variabile di Laplace rende ragione dell'affermazione iniziale, fatta in questo paragrafo, sulla possibilità di eliminare il passo oneroso del procedimento di analisi dei circuiti con memoria, riguardante la soluzione di un sistema risolvente di equazioni integro-differenziale. Infatti, passando nel dominio della variabile di Laplace, tali sistemi divengono algebrici. Illustriamo questo aspetto con un esempio.

Esempio III.3.1.

Consideriamo l'equazione differenziale (III.1.28) relativa al circuito del secondo ordine considerato nel § III.1.2. Tale equazione è la seguente:

$$(III.3.11) \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad \text{per } t > 0 .$$

Scriviamo l'equazione corrispondente alla (III.3.11) nel dominio della variabile di Laplace. Indichiamo con⁽¹⁾:

$$(III.3.12) \quad I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$$

(1) - Seguendo una convenzione che verrà usata anche nel seguito di questo capitolo, indichiamo con le lettere minuscole le grandezze nel tempo e con le lettere maiuscole le loro trasformate.

la trasformata di Laplace della funzione incognita $i(t)$, calcolata nell'ambito della teoria delle funzioni. Infatti l'equazione risolvente (III.3.11) è valida nell'intervallo $t > 0$ in cui si può ipotizzare l'assenza di discontinuità impulsive per la funzione $i(t)$ e per le sue derivate. Applicando la proprietà della derivazione, si ha:

$$(III.3.13) \quad \mathcal{L} \left[\frac{di}{dt} \right] = s I(s) - i(0^+)$$

Applicando nuovamente la proprietà della derivazione, si ha:

$$(III.3.14) \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^2i}{dt^2} \right] = s [s I(s) - i(0^+)] - i'(0^+)$$

dove con $i'(0^+)$ è stata indicata la quantità $\frac{di}{dt} \Big|_{t=0^+}$.

Effettuiamo ora la trasformata di Laplace di ambo i membri dell'equazione (III.3.11). Per il primo membro si ha, utilizzando la proprietà di linearità e le espressioni (III.3.13) e (III.3.14):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i \right] &= \mathcal{L} \left[\frac{d^2i}{dt^2} \right] + \frac{R}{L} \mathcal{L} \left[\frac{di}{dt} \right] + \frac{1}{LC} \mathcal{L} [i] = \\ (III.3.15) \quad &= s [s I(s) - i(0^+)] - i'(0^+) + \frac{R}{L} [s I(s) - i(0^+)] + \frac{1}{LC} I(s) = \\ &= s^2 I(s) + \frac{R}{L} s I(s) + \frac{1}{LC} I(s) - \left(s + \frac{R}{L} \right) i(0^+) - i'(0^+) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo membro della (III.3.11) è facile vedere che ad esso corrisponde la funzione identicamente nulla. Perciò, ricordando anche la proprietà dell'unicità della trasformazione secondo Laplace, si ottiene la seguente equazione che rappresenta la traduzione nel dominio di s dell'equazione data:

$$(III.3.16) \quad s^2 I(s) + s \frac{R}{L} I(s) + \frac{1}{LC} I(s) = \left(s + \frac{R}{L} \right) i(0^+) + i'(0^+)$$

Si può notare che nell'equazione (III.3.16) non è più presente alcuna operazione di tipo integro-differenziale e che in essa sono presenti le quantità $i(0^+)$ ed $i'(0^+)$ che sono le condizioni iniziali secondo Cauchy dell'equazione (III.3.11). Nella (III.3.16) figura come incognita la funzione $I(s)$ [l'incognita nella (III.3.11) era infatti $i(t)$]; tale incognita può essere ricavata in modo immediato a causa del carattere algebrico dell'equazione (III.3.16). Si ha:

$$(III.3.17) \quad I(s) = \frac{\left(s + \frac{R}{L} \right) i(0^+) + i'(0^+)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Si può notare che la funzione $I(s)$ è di tipo razionale a coefficienti reali. Ricordando l'espressione (III.3.12), in base alla proprietà di unicità della antitrasformazione di Laplace, si ottiene:

$$(III.3.18) \quad i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s + \frac{R}{L} \right) i(0^+) + i'(0^+)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right]$$

Si può dimostrare che l'antitrasformata (III.3.18) esiste e può essere calcolata nell'ambito delle funzioni. Ciò dimostra la validità del metodo seguito e conferma l'assenza di distribuzioni singolari nella espressione di $i(t)$.

Per ottenere esplicitamente l'andamento nel tempo della funzione $i(t)$, sarebbe ora necessario eseguire l'operazione di antitrasformazione indicata nella (III.3.18). Il metodo da seguire è riportato nell'appendice III.A, a cui si rimanda.

Il procedimento seguito nell'esempio III.3.1 vale in generale, per ogni sistema integro-differenziale. Esso consiste nei seguenti passi:

- 1) Trasformare il sistema differenziale assegnato nel dominio del tempo in un sistema nel dominio di s , utilizzando le proprietà di linearità, di derivazione e di integrazione. Per effettuare tale passo è necessario in generale determinare le trasformate delle grandezze impresse dai generatori indipendenti;
- 2) il sistema ottenuto nel dominio di s è di tipo algebrico, contenendo come incognite le trasformate di Laplace delle funzioni incognite. Risolvere tale sistema, ottenendo l'espressione esplicita in s delle grandezze incognite;
- 3) effettuare le operazioni di antitrasformazione, ottenendo le grandezze nel dominio del tempo.

Nei problemi di analisi dei circuiti con memoria, la trasformata di Laplace è utilizzata secondo le seguenti modalità.

a) I calcoli sono sempre effettuati nell'ambito della teoria delle distribuzioni, in modo da includere l'eventuale presenza di distribuzione singolare nell'origine o per $t > 0$.

b) Le condizioni iniziali utilizzate sono direttamente le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori, in modo da evitare l'uso di

grandezze derivate, quali quelle relative alle condizioni iniziali secondo Cauchy. Le condizioni iniziali sono sempre assegnate per $t=0^-$. In tal modo il metodo di Laplace permette di risolvere un eventuale problema circuitale per $t = 0$ che sorge se, per effetto della chiusura degli interruttori, i valori delle condizioni iniziali per $t = 0^+$ differiscono da quelli per $t = 0^-$. Il metodo stesso permette di determinare in ogni caso i valori di tutte le grandezze elettriche del circuiti per $t = 0^+$.

c) L'opportunità di effettuare i calcoli nell'ambito della teoria delle distribuzioni è anche legata al fatto che tutte le funzioni $F(s)$ così calcolate possono essere antitrasformate.

Essendo scontata la convenienza della risoluzione del sistema algebrico in s , rispetto alla soluzione diretta del sistema differenziale in t , la convenienza globale del procedimento è legata alla facilità di eseguire le operazioni di trasformazione ed antitrasformazione. A tale proposito occorre notare che non è quasi mai necessario ricorrere alla definizione della trasformata di Laplace, essendo disponibili a tale scopo delle tabelle molto estese di funzioni e relative trasformate. Alcune di queste tabelle sono riportate nell'appendice III.A, dove viene anche descritto il procedimento per eseguire l'operazione di antitrasformazione nel caso, più comune per i circuiti a costanti concentrate, di una funzione razionale reale della variabile s .

L'applicazione del metodo della trasformazione di Laplace nell'analisi di un circuito con memoria rappresenta un caso particolare dell'applicazione di tale metodo ai sistemi integro-differenziali. Tuttavia i vantaggi che si hanno in tale caso sono ancora più evidenti, non essendo necessario applicare il metodo di Laplace dopo aver ricavato il sistema risolvente. È infatti possibile la sua applicazione ad un livello molto più elementare, ricordando che il sistema risolvente si ottiene esprimendo un opportuno insieme di equilibri conseguenti alle leggi di Kirchhoff, in aggiunta alle relazioni costitutive dei componenti. Il metodo di Laplace può essere applicato esprimendo direttamente ciascuna di tali equazioni nel dominio della variabile s .

III.3.2 - Trasformazioni delle relazioni costitutive dei componenti e loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace.

Individuiamo le relazioni costitutive nel dominio della variabile s per i vari componenti che costituiscono un circuito a costanti concentrate, distinguendoli in tre categorie: generatori indipendenti, componenti senza memoria, componenti con memoria.

- *Generatori indipendenti.*

Tali componenti sono il generatore indipendente di corrente e di tensione, caratterizzati dall'avere una delle due grandezze elettriche (la grandezza impressa) coincidente con una funzione assegnata $f(t)$. Supponendo che $f(t)$ sia una funzione \mathcal{L} -trasformabile, nel dominio della variabile s la grandezza impressa diviene $\mathcal{L}[f(t)]$. In termini circuituali l'operazione che si fa è quella indicata in fig.III.3.1 per il generatore di tensione ed in fig.III.3.2 per il generatore di corrente.

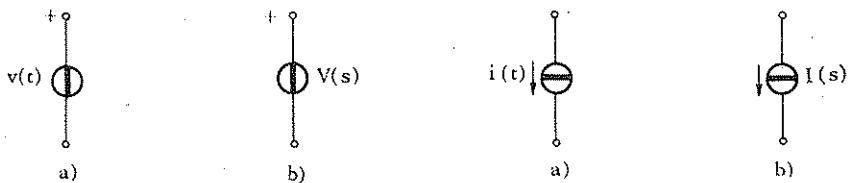


Fig.III.3.1 - Trasformazione nel dominio di Laplace del generatore indipendente di tensione. Le dimensioni di $v(t)$ sono Volt e di $V(s)$ sono Volt × secondo.

Fig.III.3.2 - Trasformazione nel dominio di Laplace del generatore indipendente di corrente. Le dimensioni di $i(t)$ sono Ampère e di $I(s)$ sono Ampère × secondo.

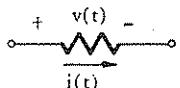
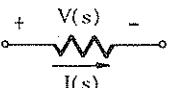
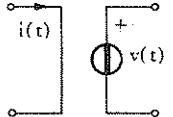
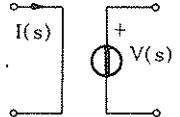
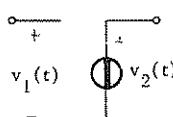
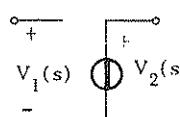
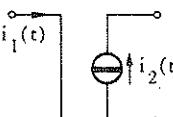
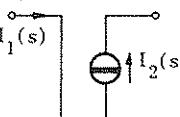
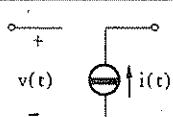
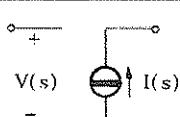
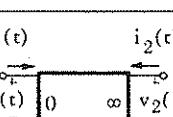
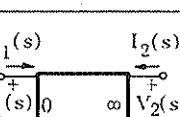
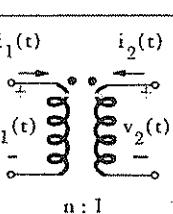
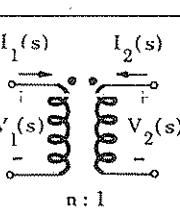
È opportuno notare che nei casi (a) di tali figure si hanno generatori che imprimono al circuito delle grandezze funzioni del tempo (come avviene fisicamente), nei casi (b) le grandezze impresse sono funzioni della variabile s (e quindi fintizie, essendo ottenute tramite una trasformazione da quelle reali). Le dimensioni fisiche sono differenti, poiché, in base alla (III.3.1), si ricava che una trasformata ha le dimensioni della grandezza originaria moltiplicata per un tempo.

- *Componenti senza memoria.*

Tali componenti sono quelli considerati nel primo capitolo. Le relazioni costitutive di tali componenti non contengono legami di tipo integro-differenziale. È immediato verificare che tutte le loro relazioni costitutive possono essere trasferite nel dominio della variabile s senza alcuna modifica, sotto l'ipotesi di *linearità e permanenza*. In tabella III.3.1 tali trasformazioni sono riportate per il resistore, per i generatori controllati, per il nullo e per il trasformatore ideale.

Gli elementi nel dominio della variabile s non hanno un significato fisico immediato, in quanto sono percorsi dalla corrente trasformata $I(s)$ e sono sottoposti alla tensione trasformata $V(s)$. Tali grandezze elettriche fintizie hanno dimensioni fisiche differenti da quelle delle grandezze reali corrispondenti. Tuttavia è facile vedere che i parametri relativi ai componenti mantengono le dimensioni originarie. Ad esempio nel caso del resistore, il parametro $R = V(s)/I(s)$ ha non solo lo stesso valore (per la proprietà di linearità), ma anche la stessa dimensione della

Tavella III.3.1 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per i componenti senza memoria.

Componente	Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della var. s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
Resistore	$v(t) = R i(t)$		$V(s) = R I(s)$	
Generatore di tensione controllato in corrente	$v(t) = r i(t)$		$V(s) = r I(s)$	
Generatore di tensione controllato in tensione	$v_2(t) = A v_1(t)$		$V_2(s) = A V_1(s)$	
Generatore di corrente controllato in corrente	$i_2(t) = K i_1(t)$		$I_2(s) = K I_1(s)$	
Generatore di corrente controllato in tensione	$i(t) = g v(t)$		$I(s) = g V(s)$	
Nullore	$v_1(t) = 0$ $i_1(t) = 0$		$V_1(s) = 0$ $I_1(s) = 0$	
Trasformatore ideale	$v_1(t) = n v_2(t)$ $i_1(t) = \frac{1}{n} i_2(t)$		$V_1(s) = n V_2(s)$ $I_1(s) = \frac{1}{n} I_2(s)$	

resistenza elettrica. Tuttavia, per ricordare che non si tratta più di un rapporto fra grandezze nel tempo, ma nel dominio della trasformata di Laplace, vengono utilizzate delle denominazioni differenti.

Precisamente nel caso del rapporto fra tensione e corrente si parla di *impedenza* (in luogo di resistenza); nel caso del rapporto fra corrente e tensione si parla di *ammittenza* (in luogo di conduttanza).

- Componenti con memoria.

Tali componenti sono caratterizzati da relazioni costitutive di tipo integro-differenziale; per quanto è stato detto precedentemente, lo uso della trasformata di Laplace permette di ridurre tali relazioni a semplici relazioni algebriche.

Condensatore: La relazione costitutiva del condensatore nel dominio del tempo è la seguente:

$$(III.3.19) \quad i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

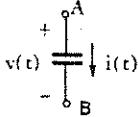
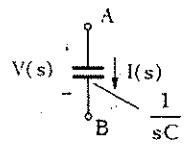
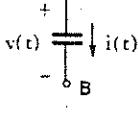
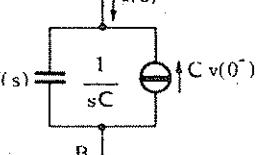
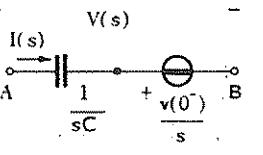
Trasformando secondo Laplace ambo i membri della relazione (III.3.19) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di *condensatore lineare e permanente*, si ha:

$$(III.3.20) \quad I(s) = sC V(s) - C v(0^+)$$

dove $v(0^+)$ rappresenta il valore iniziale della tensione ai capi del condensatore. La relazione algebrica (III.3.20) è la traduzione, nel dominio della variabile s , della relazione differenziale (III.3.19). Si può osservare che l'espressione (III.3.20) è di tipo non omogeneo per la presenza di un termine noto relativo alla condizione iniziale. Dal punto di vista circuitale l'espressione (III.3.20) dà luogo alle equivalenze circuitali mostrate in tab. III.3.2, la prima delle quali si riferisce al caso in cui $v(0^+) = 0$. Da questa tabella si vede che un condensatore scarico all'istante iniziale si comporta nel dominio di s come un bipolo avente impedenza pari ad $1/sC$ (ovvero ammettenza pari ad sC). Nel caso di un condensatore carico, occorre considerare la presenza di un opportuno generatore che tenga conto della condizione iniziale; tale generatore può essere di corrente ovvero di tensione⁽¹⁾. In quest'ultimo caso si ha quindi l'equivalenza fra il condensatore carico nel dominio del tempo e l'insieme di due componenti bipolarari opportunamente connessi nel dominio della variabile s .

(1) - La corrente impressa $I_g = Cv(0^+)$ è una grandezza trasformata. Essa ha infatti dimensioni fisiche di $[\text{Farad}]^g \cdot [\text{Volt}] \equiv [\text{Ampere}] \cdot [\text{sec}]$. Analogamente la tensione impressa $V_g = v(0^+)/s$ è una grandezza trasformata. Poiché le dimensioni di s sono $[\text{sec}]^{-1}$, le dimensioni di V_g sono $[\text{Volt}] \cdot [\text{sec}]$.

Tabella III.3.2 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per il condensatore.

Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della variabile s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
$i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(0^-) = 0$		$I(s) = sC V(s)$ $V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	
$i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(0^-) \neq 0$		$I(s) = sCV(s) - C v(0^-)$	
		$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$	

Induttore: La relazione costitutiva dell'induttore nel dominio del tempo è la seguente:

$$(III.3.21) \quad v(t) = L \frac{di}{dt}$$

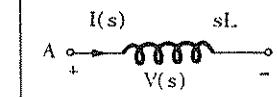
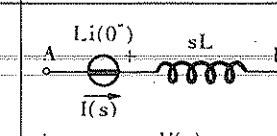
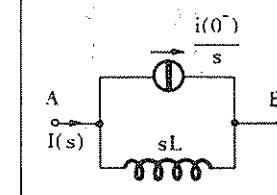
Trasformando secondo Laplace ambo i membri della relazione (III.3.21) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di induttore lineare e permanente, si ha:

$$(III.3.22) \quad \tilde{V}(s) = sL I(s) - L i(0^-)$$

dove $i(0^-)$ rappresenta il valore della corrente che percorre l'induttore all'istante iniziale. La relazione algebrica (III.3.22) è la traduzione nel dominio della variabile s della relazione differenziale (III.3.21). Si può

osservare che la relazione (III.3.22) è di tipo non omogeneo per la presenza di un termine noto relativo alla condizione iniziale. Dal punto di vista circuitale l'espressione (III.3.22) dà luogo alle equivalenze mostrate nella tab. III.3.3, la prima delle quali si riferisce al caso in cui $i(0^-) = 0$. Da questa tabella si vede che l'induttore non percorso da corrente all'istante iniziale si comporta nel dominio della variabile s come un bipolo di impedenza sL (ovvero ammettenza pari ad $1/sL$). Nel caso invece di un induttore percorso da una corrente iniziale, occorre considerare la presenza di un opportuno generatore che tenga conto della condizione iniziale; tale generatore può essere di tensione ovvero di corrente⁽¹⁾. In quest'ultimo caso si ha quindi l'equivalenza fra l'induttore carico all'istante iniziale nel dominio del tempo e l'insieme di due componenti bipolarie opportunamente connessi nel dominio della variabile s .

Tabella III.3.3 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per l'induttore.

Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della variabile s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
$v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(0^-) = 0$		$V(s) = sL I(s)$ $I(s) = \frac{1}{sL} V(s)$	
$v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(0^-) \neq 0$		$V(s) = sL I(s) + L i(0^-)$	
		$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$	

(1) - La tensione impressa $V_g = L i(0^-)$ è una grandezza trasformata; essa perciò ha le dimensioni di [Volt] · [sec]. Analogamente la corrente impressa $I_g = i(0^-)/s$ è una grandezza trasformata avente le dimensioni di [Ampere] · [sec].

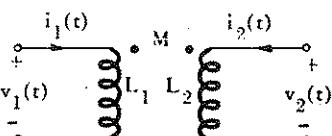
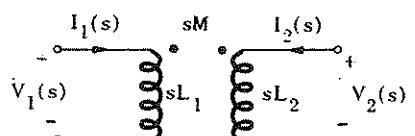
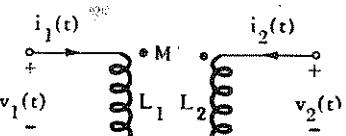
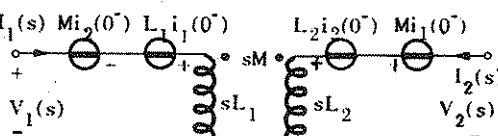
Induttori mutuamente accoppiati: Le relazioni costitutive degli induttori mutuamente accoppiati nel dominio del tempo sono le seguenti:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

(III.3.23)

$$v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Tabella III.3.4 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s degli induttori mutuamente accoppiati.

Relazione costitutiva e circuito nel tempo	Relazione costitutiva e circuito equivalente nel dominio della variabile s
 $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & i_1(0^-) = 0 \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} & i_2(0^-) = 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) \\ V_2(s) = sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) \end{cases}$
 $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & i_1(0^-) \neq 0 \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} & i_2(0^-) \neq 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - L_1 i_1(0^-) - M i_2(0^-) \\ V_2(s) = sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) - M i_1(0^-) - L_2 i_2(0^-) \end{cases}$

Trasformando secondo Laplace ambo i membri delle relazioni (III.3.23) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di induttori mutuamente accoppiati lineari e permanenti, si ottiene:

$$(III.3.24) \quad \begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - L_1 i_1(0^+) - M i_2(0^+) \\ V_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - M i_1(0^+) - L_2 i_2(0^+) \end{cases}$$

Le relazioni trasformate (III.3.24) sono di tipo algebrico; esse non sono omogenee per la presenza dei termini relativi alle condizioni iniziali. Dal punto di vista circuitale, tali relazioni danno luogo alle equivalenze mostrate nella tab.III.3.4.

III.3.3 - Trasformazione delle leggi di Kirchhoff nel dominio della trasformata di Laplace.

Nel paragrafo precedente è stato visto che, utilizzando le trasformate di Laplace delle grandezze elettriche al posto delle loro espressioni in funzione del tempo, è possibile ottenere dei componenti elettrici fintizi in corrispondenza a ciascun componente ideale a costanti concentrate. Le relazioni costitutive di tali componenti fintizi si ottengono trasformando (secondo Laplace) le relazioni costitutive dei componenti nel dominio del tempo. Nell'effettuare queste trasformazioni spariscono tutte le operazioni di derivazione e di integrazione; perciò i componenti fintizi si comportano nel dominio della s come se fossero senza memoria.

Nel presente paragrafo viene dimostrato che non solo i singoli componenti possono essere trasformati in componenti fintizi senza memoria nel dominio di s , ma che tale operazione è possibile anche per l'intero circuito a costanti concentrate, ottenendo in tal modo nel dominio di s un circuito fintizio senza memoria. Per far vedere ciò è sufficiente accertare che una qualunque legge fisica che caratterizza il circuito reale (nel dominio del tempo) è soddisfatta anche dalle grandezze elettriche trasformate, relative al circuito equivalente nel dominio di s . Le leggi fisiche che interessano nel caso dei circuiti sono quelle di Kirchhoff, che riguardano equilibri di correnti attraverso tagli ed equilibri di tensioni lungo maglie. Accertiamo di seguito su un esempio la validità di tali leggi per le grandezze elettriche trasformate.

Consideriamo a questo scopo la maglia composta dai bipoli 4, 5, 6 7 del circuito di fig.III.3.3. Per tale maglia si ha in base alla seconda legge di Kirchhoff:

$$(III.3.25) \quad -v_4(t) + v_5(t) + v_6(t) - v_7(t) = 0$$

Applichiamo la trasformazione di Laplace ad ambo i membri della (III.3.25). Tenendo conto della proprietà di linearità, si ha:

$$(III.3.26) \quad \mathcal{L}[-v_4(t) + v_5(t) + v_6(t) - v_7(t)] = -V_4(s) + V_5(s) + V_6(s) - V_7(s) = 0$$

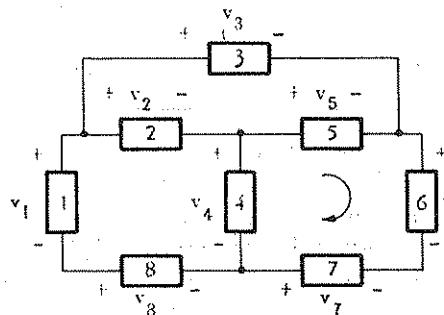


Fig.III.3.3 - Circuito considerato per la verifica delle leggi di Kirchhoff nel dominio di Laplace.

La (III.3.26) dimostra che le trasformate delle tensioni dei bipoli del circuito di fig.III.3.3 soddisfano la seconda legge di Kirchhoff per la maglia considerata. Poiché è possibile operare nello stesso modo per ogni maglia e per ogni taglio del circuito di fig.III.3.3, si può concludere che la struttura che si ottiene, sostituendo in tale circuito a ciascun bipolo un nuovo bipolo, caratterizzato invece che dalla corrente e tensione dalle relative trasformate di Laplace, è un circuito a costanti concentrate.

Il ragionamento precedente può essere esteso ad ogni circuito. Infatti per ogni maglia di un circuito si ha, in base alla seconda legge di Kirchhoff:

$$(III.3.27) \quad \sum_{k=1}^N \pm v_k(t) = 0$$

dove N è il numero dei rami facenti parte della maglia ed il segno positivo o negativo dipende dall'orientazione di ciascun ramo nella maglia. Applicando la trasformata di Laplace ai due membri della (III.3.27), si ottiene:

$$(III.3.28) \quad \mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^N \pm v_k(t) \right] = \sum_{k=1}^N \pm \mathcal{L}[v_k(t)] = \sum_{k=1}^N \pm V_k(s) = 0$$

Ciò è valido anche per le equazioni di equilibrio delle correnti nei tagli e perciò rimane dimostrato in generale che *il circuito fittizio che si ottiene, sostituendo ad ogni componente il relativo componente o circuito equivalente nel dominio di Laplace, secondo quanto visto nel § III.3.2, si comporta come un circuito fisico nel senso che soddisfa le leggi fondamentali dei circuiti a costanti concentrate, cioè le leggi di Kirchhoff.*

III.4 - Analisi nel dominio di Laplace di un circuito lineare e permanente.

Come visto nel paragrafo precedente la struttura che si ottiene sostituendo a ciascun componente il relativo schema equivalente nel dominio della trasformata di Laplace è un circuito a costanti concentrate

senza memoria. Tale circuito è fittizio e si differenzia profondamente dai circuiti senza memoria considerati nel secondo capitolo per la presenza della variabile di Laplace s nelle relazioni costitutive dei componenti e per il fatto che invece delle grandezze elettriche sono presenti le relative trasformate. Applicando a tale circuito fittizio i metodi di analisi sviluppati nel secondo capitolo, si ottengono le trasformate delle grandezze elettriche incognite. Tale modo di procedere, riassunto nella tabella III.4.1 prende il nome di «*metodo simbolico di analisi nel dominio della variabile s*» ed è valido solo se:

- a) le grandezze impresse dai generatori indipendenti sono funzioni \mathcal{L} -trasformabili;
- b) il circuito è lineare e permanente.

Tabella III.4.1 - Metodo simbolico di analisi nel dominio di Laplace.

Passo	Operazione da eseguire
1	Trasformare i generatori indipendenti come indicato nelle figg. III.3.1 e III.3.2.
2	Trasformare i componenti senza memoria come indicato nella tab. III.3.1.
3	Trasformare i componenti con memoria come indicato nelle tab. III.3.2, III.3.3 e III.3.4.
4	Applicare al circuito fittizio senza memoria risultante dai primi tre passi del procedimento di analisi, uno qualsiasi dei metodi di analisi sviluppati nel secondo capitolo. <i>Avvertenza: i coefficienti del sistema risolvente algebrico sono funzioni razionali reali della variabile s.</i>
5	Antitrasformare le funzioni della variabile s ottenute nel passo 4, ricavando le grandezze elettriche richieste in funzione del tempo, con i procedimenti sviluppati nell'appendice III.A.

L'applicazione del metodo simbolico di analisi richiede alcune precisazioni in relazione all'istante $t=0$. Infatti nella definizione della trasformata di Laplace (III.3.1) viene preso in considerazione solo l'intervallo di tempo $t \geq 0$. D'altra parte l'istante iniziale viene fissato arbitrariamente da chi effettua l'analisi del circuito. In particolare è sempre possibile nelle applicazioni scegliere tale istante iniziale in modo che per $t \leq 0$ tutte le grandezze elettriche del circuito siano identicamente nulle, cioè in modo che il circuito per $t \leq 0$ sia «a riposo». Tale scelta, però, non è obbligatoria.

Nel caso che il circuito non sia a riposo per $t \leq 0$, occorre tenere conto mediante le condizioni iniziali dei fenomeni elettrici che hanno preceduto l'istante preso come iniziale. Ciò avviene automaticamente, quando sostituiamo ai componenti con memoria i loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace. Infatti in tali circuiti equivalenti sono presenti dei generatori indipendenti la cui grandezza impressa è proporzionale o alla tensione iniziale dei condensatori o alla corrente iniziale degli induttori.

Questi generatori indipendenti fittizi costituiscono il legame del circuito trasformato nel dominio di Laplace con il passato, in contrapposizione agli altri generatori indipendenti presenti che costituiscono il legame con la realtà esterna al circuito.

La scelta dell'istante iniziale può essere tale che in corrispondenza ad esso si abbiano delle discontinuità delle grandezze elettriche. Per tenere conto di tali discontinuità, occorre considerare nella definizione (III.3.1) al posto dell'istante $t=0$, un istante infinitamente vicino posto alla sua sinistra, indicato correntemente con il simbolo 0^+ .

Quando nel circuito agiscono più eccitazioni e_1, e_2, \dots, e_n , è usuale fornire per esse l'andamento nel tempo riferito ad istanti iniziali diversi, che corrispondono spesso al momento d'inizio delle eccitazioni stesse. In questa situazione conviene scegliere l'origine dei tempi coincidente con il valore più piccolo tra questi istanti e quindi traslare di esso tutte le eccitazioni. Il calcolo delle trasformate delle eccitazioni dopo la traslazione suddetta può essere effettuato facilmente mediante l'applicazione della proprietà IV riportata nell'appendice III.A.

Di seguito riportiamo un primo insieme di esempi di applicazione del metodo simbolico riassunto in tab. III.4.1⁽¹⁾. Tali esempi riguardano semplici circuiti del primo o del secondo ordine, simili a quelli analizzati precedentemente nel dominio del tempo. Ulteriori esempi più complessi verranno sviluppati nell'appendice III.B.

Esempio III.4.1.

Nel circuito di fig.III.4.1 calcolare la corrente che percorre il condensatore nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

Dopo aver modificato il circuito come mostrato in fig.III.4.2, in modo da inglobare l'azione dell'interruttore nella funzione di eccitazione, applichiamo passo per passo il procedimento di tab.III.4.1.

⁽¹⁾ - Per una completa comprensione di tutti i passaggi analitici sviluppati negli esempi, si consiglia di leggere preventivamente l'appendice III.A.

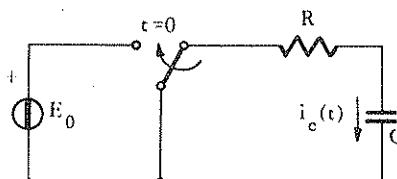


Fig.III.4.1 - Circuito considerato nell'esempio III.4.1.

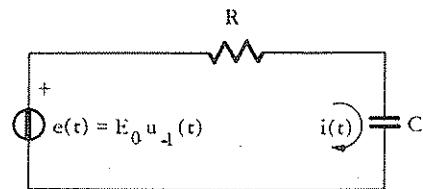


Fig.III.4.2 - Circuito ottenuto da quello di fig.III.4.1 eliminando l'interruttore.

Passo 1. Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione di eccitazione. Utilizzando l'appendice III.A, si ha:

$$E(s) = \mathcal{L}[E_0 u_{-1}(t)] = \frac{E_0}{s}$$

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio della variabile s è quello di fig.III.4.3.

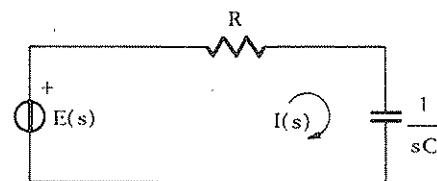


Fig.III.4.3 - Circuito fittizio nel dominio della variabile s , equivalente a quello di fig.III.4.2.

Passo 4. Analizziamo il circuito fittizio su base maglie; si ottiene:

$$\left(R + \frac{1}{sC} \right) I(s) = E(s)$$

Risolvendo rispetto ad $I(s)$, si ha:

$$I(s) = \frac{E_0}{s} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E_0 C}{sRC + 1}$$

Passo 5. Antitrasformiamo l'espressione di $I(s)$:

$$I(s) = \frac{E_0 / R}{s + 1/RC}$$

in base alla formula ricavata nel § III.A.5:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] = e^{-at} u_{-1}(t)$$

Si ottiene per la proprietà della linearità della trasformata di Laplace:

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} u_{-1}(t)$$

Tale espressione coincide con la (III.1.24) del § III.1, dove lo stesso circuito qui considerato è stato risolto con il metodo di analisi nel dominio del tempo.

Esempio III.4.2.

Nel circuito di fig.III.4.4 determinare l'andamento della tensione ai capi del condensatore, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle,

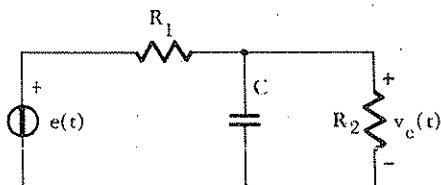


Fig.III.4.4 - Circuito considerato nell'esempio III.4.2. I valori dei componenti sono: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C = 1$, $e(t) = u_0(t)$ (1, F, V).

Passo 1. La trasformata della tensione impressa dal generatore è, come risulta dal paragrafo III.A.2:

$$\mathcal{L}[u_0(t)] = 1$$

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio della variabile s è quello indicato in figura III.4.5.

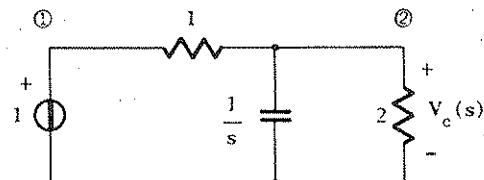


Fig.III.4.5 - Circuito fittizio nel dominio di s , equivalente a quello di fig.III.4.4.

Passo 4. Analizziamo il circuito di fig.III.4.5 su base nodi, prendendo come incognita la tensione $V_c(s)$ ai capi del condensatore. Si ha per il nodo 2:

$$\left(s + 1 + \frac{1}{2} \right) V_c(s) - 1 = 0$$

L'equazione di equilibrio del primo nodo non è necessaria, in quanto non è richiesta la corrente erogata dal generatore. Dall'equazione precedente, si ha:

$$V_c(s) = \frac{1}{s + 3/2}$$

Passo 5. Antitrasformando l'espressione della tensione incognita, ottenuta nel passo 4, si ha:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1,5} \right] = e^{-1,5t} u_{-1}(t)$$

Esempio III.4.3.

Nel circuito di fig.III.4.6 determinare l'andamento della corrente che percorre l'induttore, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

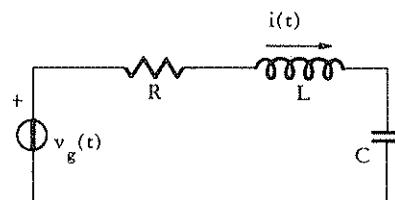
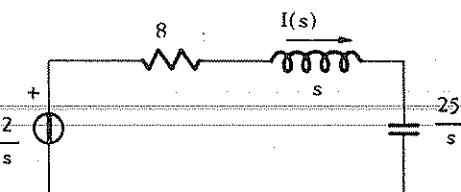


Fig.III.4.6 - Circuito considerato nell'esempio III.4.3. I valori dei componenti sono: $R=8$, $L=1$, $C=1/25$, $v_g(t)=2u_{-1}(t)$, (Ω , H , F , V).

Passo 1. In base al § III.A.2, la trasformata della tensione impressa è:

$$\mathcal{L}[2u_{-1}(t)] = \frac{2}{s}$$

Passo 2,3. Il circuito equivalente nel dominio di s è quello indicato in fig.III.4.7 (accanto ai bipoli R , L , C è indicata la relativa impedenza).



Passo 4. Analizzando il circuito fittizio su base maglie, si ha:

$$\left(8 + s + \frac{25}{s} \right) I(s) = \frac{2}{s}$$

da cui si ottiene:

$$I(s) = \frac{2}{s^2 + 8s + 25}$$

Passo 5. Per antitrasformare la corrente $I(s)$, occorre effettuare lo sviluppo in frazioni parziali (cfr. § III.A.4). Si ottiene:

$$s^2 + 8s + 25 = (s + s_0)(s + s_0^*)$$

con:

$$s_0 = 4 - j3$$

$$s_0^* = 4 + j3$$

Quindi si ha:

$$I(s) = \frac{A}{s + s_0} + \frac{A^*}{s + s_0^*}$$

dove:

$$A = I(s) \cdot (s + s_0) \Big|_{s=s_0} = \frac{2}{s + s_0^*} \Big|_{s=s_0} = \frac{2}{-4 + j3 + 4 + j3} = \frac{2}{j6} = -\frac{j}{3}$$

In conclusione risulta:

$$I(s) = \frac{-j/3}{s + 4 - j3} + \frac{j/3}{s + 4 + j3}$$

L'espressione precedente può essere facilmente antitrasformata, come segue:

$$i(t) = -\frac{j}{3} e^{(-4+j3)t} u_{-1}(t) + \frac{j}{3} e^{(-4-j3)t} u_{-1}(t)$$

È importante mettere in evidenza che la corrente $i(t)$ deve essere una quantità reale, sia per ragioni fisiche, sia perché è l'antitrasformata di una funzione $I(s)$ razionale a coefficienti reali (cfr. § III.A.5). Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{3} e^{-4t} (-j e^{j3t} + j e^{-j3t}) u_{-1}(t) = \\ &= \frac{2}{3} e^{-4t} \frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j} u_{-1}(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} \sin 3t u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Esempio III.4.4.

Nel circuito di fig.III.4.8, determinare l'andamento della tensione ai capi del condensatore per $t \geq 0$.

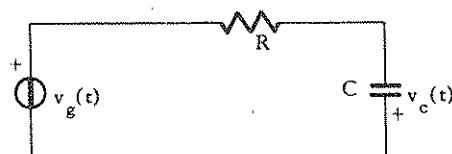


Fig.III.4.8 - Circuito considerato nell'esempio III.4.4. I valori dei componenti sono: $R=2$, $C=1$, $v_g(t)=u_{-1}(t)$, $v_c(0)=2$ (Ω , F, V).

Passo 1. Si ha:

$$V_g(s) = \mathcal{L}[v_g(t)] = \frac{1}{s}$$

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio di s è indicato in fig.III.4.9. Occorre fare attenzione al fatto che tutto il bipolo connesso tra i nodi A e B è compreso entro la linea tratteggiata, corrisponde al condensatore C carico nel dominio del tempo (non vi è perciò corrispondenza in questo caso fra il condensatore ed il bipolo di impedenza $1/s$).

Passo 4. Analizzando il circuito di fig.III.4.9 su base maglie, si ha:

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right)I(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s}$$

da cui:

$$I(s) = \frac{\frac{3}{s}}{2 + \frac{1}{s}} = \frac{3}{2s+1}$$

ed inoltre:

$$V_c(s) = V_{BA}(s) = -\frac{1}{s} I(s) + \frac{2}{s} = -\frac{3}{s(2s+1)} + \frac{2}{s}$$

Passo 5. Per antitrasformare l'espressione di $V_c(s)$, occorre effettuarne lo sviluppo in frazioni parziali (cfr. § III.A.4). Si ottiene:

$$V_c(s) = -\frac{3}{s(2s+1)} + \frac{2}{s} = -\frac{3/2}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/2} + \frac{2}{s}$$

dove:

$$A = -\frac{\frac{3}{2}}{s+\frac{1}{2}} \Big|_{s=0} = -3 ; \quad B = -\frac{\frac{3}{2}}{s} \Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 3$$

Si ha quindi:

$$V_c(s) = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s} = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s+1}$$

da cui si ottiene:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_c(s)] = -u_{-1}(t) + 3e^{-0.5t}u_{-1}(t)$$

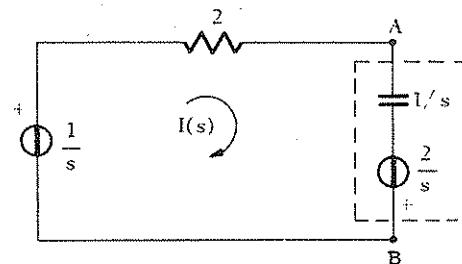


Fig.III.4.9 - Circuito fittizio nel dominio di s , equivalente a quello considerato in fig.III.4.8.

Osservazione III.4.1.

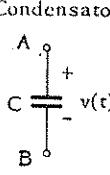
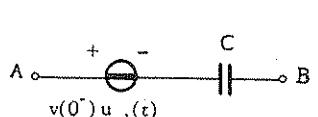
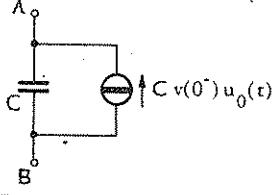
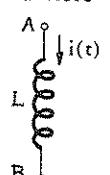
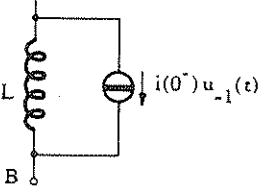
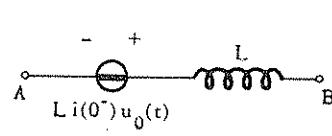
Come detto in precedenza, le eccitazioni presenti nel circuito fittizio, che si ottiene applicando il metodo simbolico di analisi, sono di due tipi:

- a) eccitazioni derivanti da \mathcal{L} -trasformate di generatori effettivamente presenti nel circuito nel dominio del tempo;
- b) eccitazioni derivanti dalla presenza delle condizioni iniziali; queste ultime eccitazioni non corrispondono a generatori presenti nel dominio del tempo.

Per quanto riguarda l'analisi del circuito non vi è alcuna differenza fra le eccitazioni del tipo a) e del tipo b). Ciò rappresenta un importante vantaggio del metodo simbolico sul metodo integro-differenziale, in quanto, come si è visto nel § III.1, risulta complesso tenere conto delle condizioni iniziali nell'applicazione di quest'ultimo. Tuttavia, tale vantaggio può essere esteso anche al metodo integro-differenziale facendo in modo che i generatori del tipo b) siano esplicitamente rappresentati nel dominio del tempo. Per raggiungere questo scopo occorre ricavare dei circuiti equivalenti nel dominio del tempo per i componenti reattivi del tipo di quelli considerati nelle tabelle III.3.2, III.3.3 e III.3.4. Già è stato fatto, limitatamente all'induttore ed al condensatore, nella tab.III.4.2, tenendo conto delle funzioni del tempo che corrispondono alle funzioni della variabile s , presenti come grandezze impresse nei circuiti equivalenti delle tabelle del § III.3, e dei risultati riportati nel § III.A.5.

Nei circuiti equivalenti della tabella III.4.2 sono presenti degli induttori e condensatori, che debbono essere considerati scarichi all'istante $t=0^+$. La condizione i-

Tabella III.4.2 - Circuiti equivalenti nel dominio del tempo dell'induttore e del condensatore nel caso di condizioni iniziali non nulle.

Componente	Circuito equivalente con grandezza impressa a gradino	Circuito equivalente con grandezza impressa impulsiva
Condensatore 		
Induttore 		

niziale è simulata dalla presenza di un opportuno generatore che può essere di tipo impulsivo o di tipo a gradino. I due tipi di generatori hanno un comportamento differente nel circuito equivalente in cui sono contenuti. Infatti nel caso dei circuiti in cui è presente un generatore di tipo impulsivo ed un componente scarico, si ha il seguente comportamento (illustrato per il condensatore in fig.III.4.10):

- 1) il generatore esplica istantaneamente la propria azione per $t=0$, mentre per $t>0$ la grandezza impressa è nulla, per cui esso può non essere considerato;

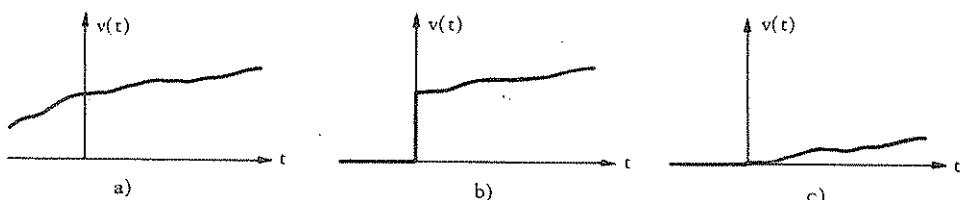


Fig.III.4.10 - Andamento della tensione ai capi di un condensatore: a) quando non si usa il circuito equivalente (di tab.III.4.2); b) quando si usa il circuito equivalente con grandezza impressa impulsiva; c) quando si usa il circuito equivalente con grandezza impressa a gradino.

- 2) il componente reattivo presente nel circuito equivalente, scarico all'istante $t=0^-$, viene istantaneamente caricato e portato in condizioni identiche a quelle del componente reale all'istante $t=0^+$ (fig.III.4.10a e b);
- 3) negli istanti $t > 0$ il comportamento sia del resto del circuito in cui si trova il condensatore sia del condensatore è lo stesso che si ha quando non si usa il circuito equivalente.

Nel caso dei circuiti equivalenti contenenti generatori a gradino, si ha invece il seguente comportamento (illustrato per il condensatore in fig.III.4.10):

- 1) il generatore esplica la propria azione in tutto l'intervallo $t > 0$, nel quale si studia il fenomeno elettrico;
- 2) il componente reattivo rimane scarico all'istante $t = 0$;
- 3) negli istanti $t > 0$, il comportamento del resto del circuito in cui si trova il condensatore è identico a quello che si ha quando non si usa il circuito equivalente, mentre il comportamento del condensatore è diverso, come messo in evidenza in fig.III.4.10 c. In questo caso infatti è necessario considerare in ogni istante il contributo del generatore aggiuntivo e solo la somma delle due tensioni fornisce la tensione che si avrebbe ai capi del condensatore nel caso in cui non si usasse il circuito equivalente per questo.

Le considerazioni precedenti sono di grande utilità, in quanto:

- 1) sono valide anche nei casi in cui non è applicabile il metodo simbolico (per esempio quando qualche grandezza impressa non è \mathcal{L} -trasformabile);
- 2) permettono di trattare in modo unificato i generatori esterni e le condizioni iniziali;
- 3) semplificano la trattazione delle condizioni iniziali.

Esempio III.4.5.

Dato il circuito di fig.III.4.11, determinare un circuito equivalente con condizioni iniziali nulle per $t > 1$ sec.

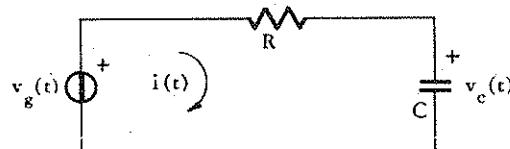


Fig.III.4.11 - Circuito considerato nell'esempio III.4.5. I valori dei componenti sono: $R = 2$, $C = 1$, $v_c(0) = 0$, $v_g(t) = 2 u_{-1}(t)$, (Ω , F, V).

L'andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.4.11 è dato dalla seguente equazione (vedere l'esempio III.4.1):

$$i(t) = \frac{2}{R} e^{-t/RC} u_{-1}(t) = e^{-t/2} u_{-1}(t)$$

Perciò la tensione $v_c(t)$ ha la seguente espressione:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau/2} d\tau = -[2e^{-\tau/2}]_0^t = (2 - 2e^{-t/2}) u_{-1}(t)$$

All'istante $t = 1$, risulta:

$$v_c(1) = 2(1 - e^{-0,5}) = 0,787 \text{ V}$$

Di conseguenza all'istante $t=1$, il circuito dato è equivalente a quello mostrato in fig.III.4.12.

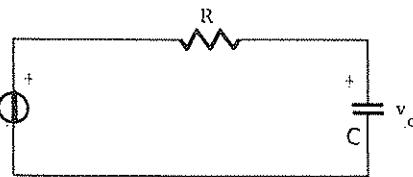


Fig.III.4.12 - Circuito di fig.III.4.11 all'istante $t=1$ sec. I valori delle tensioni sono: $v_g = 2$, $v_c = 0,787$ (V).

Il circuito di fig.III.4.12 può essere considerato come stadio iniziale per l'analisi dell'evoluzione successiva del fenomeno elettrico. Perciò, in base all'equivalenza riportata in tab.III.4.2, si ottiene il circuito di fig.III.4.13, in cui il condensatore è scarico all'istante iniziale $t = 1$ sec.

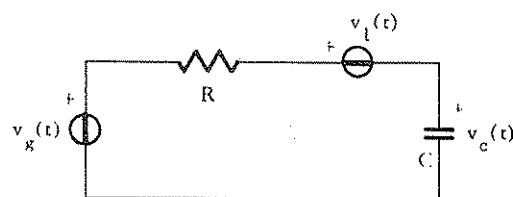


Fig.III.4.13 - Circuito da analizzare al posto di quello di fig.III.4.11 per $t > 1$ sec. I valori delle tensioni sono $v_g(t) = 2u_{-1}(t-1)$, $v_c(1) = 0$, $v_l(1) = 0,787 u_{-1}(t-1)$ (V).

NOTA: Altri esempi di applicazione del metodo della trasformata di Laplace all'analisi dei circuiti sono riportati nell'App. III.B.

APPENDICI AL CAPITOLO III

III.A - Cenni sulla trasformazione e antitrasformazione di Laplace.

Nel § III.3 è stata introdotta la trasformazione di Laplace riportando per essa le proprietà essenziali per la sua applicazione all'analisi dei circuiti. Nella presente appendice, dopo aver fornito alcune precisazioni relative alla definizione dell'operazione di trasformazione, verranno riportate ulteriori proprietà di tale trasformazione, assai utili nell'affrontare i vari aspetti del problema dell'analisi. L'applicazione della trasformazione di Laplace richiede essenzialmente l'esecuzione di due passi:

- 1) la determinazione della trasformata di una funzione assegnata nel tempo;
- 2) l'antitrasformazione, cioè il passaggio da una funzione della variabile s alla corrispondente funzione del tempo.

Questi due passi fondamentali sono usualmente effettuati mediante l'aiuto di tabelle di trasformate, del tipo di quella riportata alla fine del § III.A.5.

Nel caso dei circuiti a costanti concentrate, tuttavia, è usualmente sufficiente conoscere la trasformata di poche funzioni del tempo, che verranno considerate nel § III.A.2. Ciò è conseguenza del fatto che le eccitazioni che interessano in questo caso sono usualmente di pochi tipi e che l'antitrasformazione viene richiesta solo per funzioni della variabile s appartenenti a pochi tipi, tramite lo sviluppo in frazioni parziali. Quest'ultima operazione verrà trattata in dettaglio per la sua importanza nei § III.A.3, III.A.4 e III.A.5.

III.A.1 - Ulteriori proprietà della trasformazione di Laplace.

Una funzione $f(t)$ si dice \mathcal{L} -trasformabile se esiste almeno un valore s_0 della variabile s tale da far risultare determinato e finito il limite seguente:

$$(III.A.1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-s_0 t} f(t) dt$$

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.A.1 - Se la funzione $f(t)$ è \mathcal{L} -trasformabile, la sua trasformata di Laplace $F(s)$ è definita in tutti i punti del semipiano aperto (figura III.A.1) per cui risulta:

$$(III.A.2) \quad \operatorname{Re}[s] > \beta$$

dove la quantità β prende il nome di ascissa di convergenza.

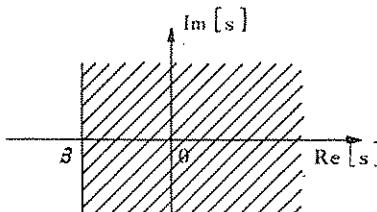


Fig.III.A.1 - Dominio di definizione della trasformata di Laplace (indicato tratteggiato).

Il valore dell'ascissa di convergenza β dipende dalla funzione da trasformare $f(t)$; essa può assumere qualsiasi valore reale e può essere eventualmente uguale a $-\infty$.

Per le proprietà di linearità, di derivazione nel dominio del tempo, di integrazione nel dominio del tempo si rimanda al §III.3.

In questa appendice verranno enunciate altre proprietà che hanno grande importanza nelle applicazioni.

Proprietà IV - Traslazione nel tempo.

Detta $f(t)$ una funzione \mathcal{L} -trasformabile, si consideri la funzione $f(t-a)$, ottenuta traslando l'asse dei tempi della quantità reale non negativa a . Risulta:

$$(III.A.3) \quad \mathcal{L}[f(t-a) u_1(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)]$$

Proprietà V - Cambiamento della scala dei tempi.

Detta $f(t)$ una funzione \mathcal{L} -trasformabile, di trasformata $F(s)$, si consideri la funzione $f(t/a)$, dove a è un fattore di scala arbitrario (numero reale e positivo); si ha:

$$(III.A.4) \quad \mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a F(a \cdot s)$$

Proprietà VI - Teorema del valore iniziale.

Se $F(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, sotto opportune ipotesi, di cui la più importante è l'esistenza del limite per $t \rightarrow 0$ di $f(t)^{(1)}$, si ha:

$$(III.A.5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)]$$

Proprietà VII - Teorema del valore finale.

Se $F(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, sotto opportune ipotesi, di cui la più importante è l'esistenza del limite per $t \rightarrow \infty$ di $f(t)^{(1)}$, si ha:

$$(III.A.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)]$$

Per l'applicazione delle proprietà precedenti si rimanda agli esempi riportati nell'appendice III.B.

III.A.2 - Calcolo delle trasformate di Laplace delle funzioni più comuni nei circuiti a costanti concentrate.

Nel presente paragrafo verrà effettuato il calcolo delle trasformate di Laplace di alcune funzioni tipiche nell'analisi dei circuiti a costanti concentrate.

(1) - È opportuno richiamare l'attenzione sull'importanza dell'ipotesi di esistenza del limite nel tempo per le suddette proprietà. Un esempio tipico in cui tale ipotesi viene a cadere, per il teorema del valore finale, è quello della funzione $f(t) = \sin t$; in tal caso, infatti, pur non esistendo il limite nel tempo, il limite a secondo membro della formula (III.A.6) esiste ed è pari a zero.

a) *Trasformata della funzione gradino unitario $u_{-1}(t)$.*

Si ottiene:

$$(III.A.7) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u_{-1}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^T = \frac{1}{s} + \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{per } \operatorname{Re}[s] > 0$$

Quindi si ha:

$$(III.A.8) \quad \mathcal{L}[u_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$$

con ascissa di convergenza $\beta = 0$.

b) *Trasformata della funzione impulso unitario $u_0(t)$.*

Si ottiene in base alla (III.2.15):

$$(III.A.9) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u_0(t) dt = [e^{-st}]_{t=0}^T = 1$$

Quindi si ha:

$$(III.A.10) \quad \mathcal{L}[u_0(t)] = 1$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\infty$.

Ovviamente tale trasformata vale solo nell'ambito della teoria delle distribuzioni, quando l'estremo inferiore di integrazione è preso pari a $t = 0^+$.

c) *Trasformata della funzione $e^{-s_0 t}$ con s_0 costante reale o complessa.*

Si ottiene:

$$(III.A.11) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} e^{-s_0 t} u_{-1}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s+s_0)t}}{s+s_0} \right]_0^T = \frac{1}{s+s_0} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s+s_0)T}}{s+s_0} = \frac{1}{s+s_0} \quad \text{per } \operatorname{Re}[s] > -\operatorname{Re}[s_0]$$

Quindi si ha:

$$(III.A.12) \quad \mathcal{L} [e^{-s_0 t} u_{-1}(t)] = \frac{1}{s + s_0}$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\operatorname{Re}[s_0]$.

d) *Trasformata della funzione $t^n e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$ con n intero positivo o nullo ed s_0 costante reale o complessa.*

Si ottiene:

$$(III.A.13) \quad \mathcal{L} [t^n e^{-s_0 t} u_{-1}(t)] = \frac{n!}{(s + s_0)^{n+1}}$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\operatorname{Re}[s_0]$.

Le trasformate precedentemente considerate hanno una grande importanza nelle applicazioni all'analisi dei circuiti a costanti concentrate. Infatti in base ad esse ed alle proprietà della trasformazione di Laplace è possibile ricavare la maggior parte delle trasformate che occorrono nei casi concreti⁽¹⁾. Illustriamo tale affermazione con un esempio.

Esempio III.A.1.

Calcolare la trasformata di Laplace della seguente funzione:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) u_{-1}(t)$$

Esprimendo la $f(t)$ in funzione del suo fasore $E = A e^{j\phi}$, tenendo conto delle (III.2.26), si ha:

$$(III.A.14) \quad \frac{1}{2} E e^{j\omega_0 t} u_{-1}(t) + \frac{1}{2} E^* e^{-j\omega_0 t} u_{-1}(t)$$

Applicando la proprietà di linearità e la regola di trasformazione della funzione $e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$ (caso c) considerato precedentemente, si ottiene:

$$(III.A.15) \quad F(s) = \frac{E/2}{s - j\omega_0} + \frac{E^*/2}{s + j\omega_0}$$

(1) - Ulteriori trasformate sono elencate nella tab.III.A.2.

Tenendo conto dell'espressione del fasore, si ha:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{s - j\omega_0} + e^{-j\varphi} \frac{1}{s + j\omega_0} = \\
 (\text{III.A.16}) \quad &= \frac{A}{2} \frac{(cos\varphi + j\sin\varphi)(s + j\omega_0) + (cos\varphi - j\sin\varphi)(s - j\omega_0)}{s^2 + \omega_0^2} = A \frac{s\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{s^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

con ascissa di convergenza $\beta = 0$.

III.A.3 - Trasformazione inversa di Laplace.

La teoria della antitrasformazione di Laplace si basa sul seguente teorema di unicità:

Teorema III.A.2 - Se due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ hanno la stessa trasformata di Laplace $F(s)$, in un certo semipiano di convergenza $\text{Re}[s] > \beta$, allora le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ possono differire soltanto nei punti di un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue).

L'esecuzione dell'operazione di antitrasformazione⁽¹⁾ può presentare notevoli difficoltà, in quanto:

- 1) la formula integrale che viene usualmente utilizzata è l'integrale principale di Cauchy di una funzione di variabile complessa. Tale integrale va eseguito lungo percorsi opportuni nel piano complesso;
- 2) il risultato dell'integrale di inversione fornisce l'antitrasformata cercata solo se è noto a priori che la funzione della variabile s considerata è una trasformata di Laplace. Tale condizione è usualmente di difficile accertamento.

Per le ragioni precedenti il ricorso alla formula integrale suddetta è del tutto eccezionale, ciò che ne giustifica l'omissione nel caso presente. Nelle applicazioni all'analisi dei circuiti è sufficiente l'uso delle tabelle (di cui la tabella riportata alla fine del § III.A.5 è un esempio), e la constatazione che le funzioni con cui si ha a che fare sono usualmente razionali reali nella variabile s . Tali funzioni si possono ridurre ad una combinazione lineare di funzioni molto semplici, del tipo di quelle trattate nel § III.A.2, mediante l'operazione di sviluppo in frazioni parziali. Quindi nei casi usuali l'operazione di antitrasformazione consta di due passi:

(1) - L'operazione di antitrasformazione di una funzione $F(s)$ viene indicato brevemente con il simbolo $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

- a) suddivisione della funzione $F(s)$ in una combinazione di funzioni elementari mediante l'algoritmo detto dello «sviluppo in frazioni parziali»;
- b) antitrasformazione delle singole funzioni elementari componenti, direttamente per ispezione, e determinazione della funzione nel dominio del tempo, utilizzando la proprietà di linearità.

Per l'importanza che assume tale procedimento nei calcoli relativi all'analisi dei circuiti elettrici a costanti concentrate, i due passi suddetti verranno sviluppati in dettaglio nei paragrafi successivi.

III.A.4 - Sviluppo in frazioni parziali.

Sia $F(s)$ una funzione razionale della variabile s :

$$(III.A.17) \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $N(s)$ è il numeratore:

$$(III.A.18) \quad N(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} \dots + a_1 s + a_0$$

e $D(s)$ il denominatore:

$$(III.A.19) \quad D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} \dots + b_1 s + b_0$$

Nel seguito supporremo i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ primi fra loro.

Prende il nome di polo della funzione $F(s)$ un valore della variabile per cui risulti⁽¹⁾:

$$(III.A.20) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} |F(s)| = \infty$$

È facile vedere che sono poli della funzione tutte le radici del polinomio $D(s)$. Nel caso di una radice s_0 di molteplicità r , si dice che s_0 è un polo multiplo di $F(s)$ di molteplicità r . Inoltre la funzione $F(s)$ può tendere all'infinito anche per s che tende all'infinito, se il grado del numeratore m è maggiore del grado del denominatore n ; in tal caso si dice che la funzione $F(s)$ ha un polo all'infinito, la cui molteplicità

(1) - Taluni autori, previa introduzione del punto all'infinito per i valori di F , scrivono la relazione equivalente $\lim_{s \rightarrow s_0} F(s) = \infty$.

r è uguale a $r=m-n$. I valori di s che sono poli di $F(s)$ sono gli unici punti singolari di detta funzione.

Una funzione razionale $F(s)$ può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno di ogni punto s_0 del piano complesso che non sia singolare, cioè:

$$(III.A.21) \quad F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove i coefficienti c_i sono dati da:

$$(III.A.22) \quad c_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i F}{ds^i} \right)_{s=s_0}$$

Si consideri ora un punto s_0 del piano complesso s nel quale la funzione $F(s)$ abbia un polo di molteplicità r ; in tale punto s_0 la funzione $F(s)$ non è sviluppabile in serie di Taylor, essendo s_0 singolare. Si consideri la seguente funzione:

$$(III.A.23) \quad G(s) = (s - s_0)^r F(s)$$

È facile vedere che questa funzione è ancora razionale nella variabile s e non ha più alcun polo nel punto s_0 ; perciò, essendo s_0 un punto non singolare per la funzione $G(s)$, essa può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno di tale punto. Si ottiene:

$$(III.A.24) \quad G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove i coefficienti c_i devono essere calcolati con le seguenti formule:

$$(III.A.25) \quad c_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i G}{ds^i} \right)_{s=s_0}$$

Si divida ora membro a membro l'espressione (III.A.24) per $(s + s_0)^r$; si ottiene in tal modo il seguente sviluppo per la funzione $F(s)$:

$$(III.A.26) \quad F(s) = \frac{c_0}{(s - s_0)^r} + \frac{c_1}{(s - s_0)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{r-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{c_{r-1}}{s - s_0} + \sum_{i=r}^{\infty} c_i (s - s_0)^{i-r}$$

Lo sviluppo (III.A.26) della funzione $F(s)$ nell'intorno del punto singolare s_0 viene detto *sviluppo in serie di Laurent* della funzione $F(s)$; i coefficienti c_i di tale sviluppo possono essere calcolati per mezzo della (III.A.25).

Come si può vedere dall'espressione (III.A.26) lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione razionale $F(s)$ consta di due parti: la prima è costituita da quei termini che vanno all'infinito per s che tende ad s_0 ; la seconda invece rimane limitata per s che tende ad s_0 . La prima parte viene detta *parte singolare* dello sviluppo in serie di Laurent di $F(s)$ nell'intorno del punto s_0 ; tale parte singolare che verrà indicata con PS_0 è uguale a:

$$(III.A.27) \quad PS_0 = \frac{c_0}{(s-s_0)^r} + \frac{c_1}{(s-s_0)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{r-1}}{s-s_0}$$

La seconda parte dello sviluppo in serie di Laurent viene detta *parte regolare*.

In modo analogo a quanto fatto nel caso del polo al finito s_0 , è possibile definire uno sviluppo in serie di Laurent della funzione $F(s)$ nell'intorno dell'eventuale polo all'infinito di molteplicità r . In tale caso la funzione $G(s)$ a cui occorre fare riferimento è la seguente:

$$(III.A.28) \quad G(s) = \frac{1}{s^r} F(s)$$

Anche per lo sviluppo in serie di Laurent nell'intorno del punto all'infinito è possibile definire una parte singolare ed una parte regolare. La parte singolare PS_∞ risulta essere del seguente tipo:

$$(III.A.29) \quad PS_\infty = c_0 s^r + c_1 s^{r-1} + \dots + c_{r-1} s$$

dove r è la molteplicità relativa al polo all'infinito e le costanti c_i possono essere calcolate utilizzando la formula (III.A.25) sulla funzione $G(s)$ espressa dalla (III.A.28).

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema III.A.3 - «La somma delle parti singolari di una funzione razionale $F(s)$ nell'intorno di tutti i suoi poli (distinti), compreso l'eventuale polo all'infinito, è uguale alla funzione stessa $F(s)$, a meno di una costante».

In base a tale teorema si può scrivere:

$$(III.A.30) \quad F(s) = \sum_i PS_i + PS_{\infty} + c$$

dove con PS_i è stata indicata la parte singolare relativa allo sviluppo nell'intorno dell' i -esimo polo al finito e la sommatoria è estesa a tutti i poli al finito distinti. La costante c è un numero reale se la funzione è a coefficienti reali.

Lo sviluppo (III.A.30) della funzione razionale $F(s)$ viene chiamato *sviluppo in frazioni parziali*. Tale sviluppo permette di effettuare in modo immediato l'operazione di antitrasformazione di Laplace, essendo coincidente con una combinazione lineare di funzioni antitrasformabili per ispezione visiva come vedremo successivamente.

Si può notare che la parte dello sviluppo in frazioni parziali relativa ai termini $(PS_{\infty} + c)$ può essere determinata in modo molto semplice effettuando la divisione fra i polinomi $N(s)$ e $D(s)$.

Nel caso particolare, ma molto frequente, in cui la funzione $F(s)$ possiede un polo al finito semplice, il calcolo della parte singolare nell'intorno di tale polo si semplifica notevolmente. In questo caso, infatti, la parte singolare PS_0 diviene:

$$(III.A.31) \quad PS_0 = \frac{c_0}{s - s_0}$$

La costante c_0 prende il nome di *residuo* della funzione $F(s)$ nel polo s_0 . L'espressione (III.A.25) diviene:

$$(III.A.32) \quad c_0 = G(s_0)$$

ovvero, ricordando la (III.A.23):

$$(III.A.33) \quad c_0 = \left[\frac{N(s)}{D_0(s)} \right]_{s=s_0}$$

dove $D_0(s)$ è pari al denominatore $D(s)$ privato del fattore $s - s_0$, relativo al polo considerato, cioè:

$$(III.A.34) \quad D(s) = (s - s_0) D_0(s)$$

Per il calcolo del residuo c_0 è anche possibile utilizzare un'altra espressione al posto della (III.A.33). Infatti derivando la (III.A.34) rispetto ad s , si ha:

$$(III.A.35) \quad D'(s) = D_0(s) + (s - s_0) D'_0(s)$$

Quindi risulta $D'(s) = D_0(s)$ per $s = s_0$. Sostituendo nella formula (III.A.33) tale relazione, si ha:

$$(III.A.36) \quad c_0 = \left(\frac{N(s)}{D'(s)} \right)_{s=s_0}$$

dove $D'(s)$ rappresenta la derivata del polinomio $D(s)$ rispetto alla variabile s .

Il procedimento di sviluppo in frazioni parziali risultante è riassunto in tab.III.A.1.

Tabella III.A.1 - Procedimento di sviluppo in frazioni parziali di una funzione razionale.

Passo	Operazione
1	Individuare i poli al finito della funzione $F(s) = N(s)/D(s)$ con la loro molteplicità
2	Determinare il quoziente $Q(s)$ ed il resto $R(s)$ della divisione tra numeratore e denominatore, cioè: $\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$ <p>Questa operazione è necessaria solo se il grado del numeratore è maggiore od uguale a quello del denominatore.</p>
3	Per ogni radice s_0 di molteplicità r maggiore dell'unità, calcolare la relativa parte singolare PS_0 , con la formula (III.A.27), dove i coefficienti c_i sono dati dalla formula (III.A.25) con $G(s)$ dato dalla formula (III.A.23). I coefficienti c_i sono in generale dei numeri complessi. Nel caso che il polo s_0 sia semplice, calcolare la relativa parte singolare PS_0 con la formula (III.A.31), dove il residuo c_0 (in generale complesso) è dato dalla espressione (III.A.33) ovvero dalla (III.A.36).
4	Lo sviluppo in frazioni parziali della $F(s)$ è uguale a: $F(s) = \sum PS_i + Q(s)$

Osservazione III.A.1.

Notevoli semplificazioni si hanno nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ è a coefficienti reali. In tale caso, essendo il denominatore $D(s)$ un polinomio a coefficienti reali, i poli di $F(s)$ risultano reali ovvero complessi coniugati. È possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.A.4 - «I coefficienti c_i relativi alle parti singolari di una funzione razionale $F(s)$ a coefficienti reali, in corrispondenza a poli complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. In particolare nel caso di poli semplici i residui di una coppia di poli complessi coniugati sono complessi coniugati».

Tale teorema è di grande utilità in quanto permette di effettuare i calcoli indicati al punto 3) del procedimento di sviluppo in frazioni parziali, in corrispondenza ad uno solo dei due poli complessi coniugati, mentre per l'altro polo la parte singolare è immediatamente individuabile.

La presente osservazione ha conseguenze importanti anche per il calcolo della antitrasformata di una funzione razionale a coefficienti reali, come vedremo nell'osservazione III.A.3.

Esempio III.A.2.

Effettuare lo sviluppo in frazioni parziali della seguente funzione razionale:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s+1)^2}$$

Si ha:

$$N(s) = s^2 + 3 ; \quad D(s) = (s+2)(s+1)^2$$

Passo 1. Si hanno i seguenti poli:

$s = -2$	molteplicità 1
$s = -1$	molteplicità 2

Passo 2. Si può omettere questo passo in quanto la funzione in esame è propria.

Passo 3. Calcoliamo la parte singolare PS_{-2} relativa al polo -2. Essendo il polo semplice, si ha:

$$c_0 = \frac{N(s)}{D_0(s)} \Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 3}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 7 ; \quad PS_{-2} = \frac{7}{s+2}$$

Calcoliamo la parte singolare relativa al polo -1. Essendo il polo doppio si ha:

$$PS_{-1} = \frac{c_0}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1}$$

Dalla formula (III.A.25) si ottiene:

$$c_0 = G(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 4$$

$$c_1 = \frac{dG}{ds} \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 + 3}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{2s(s+2) - (s^2 + 3)}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -6$$

Passo 4. Lo sviluppo in frazioni parziali della funzione assegnata è:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{7}{s+2} + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1}$$

Esempio III.A.3.

Calcolare lo sviluppo in frazioni parziali della funzione:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

Passo 1. La funzione ha i seguenti poli al finito:

$$s_1 = -1 + j \quad \text{molteplicità } r_1 = 1$$

$$s_2 = -1 - j \quad \text{molteplicità } r_2 = 1$$

È opportuno osservare come accanto ad un polo complesso, c'è sempre il complesso coniugato e della stessa molteplicità. Ciò è conseguenza, come è stato detto, della realtà dei coefficienti delle funzioni razionali che si considerano.

Passo 2. La funzione assegnata è impropria, perciò facciamo la divisione tra numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{r} s^3 + 2s^2 + 3s + 1 \\ s^3 + 2s^2 + 2s \\ \hline s+1 \end{array} \quad \begin{array}{r} s^2 + 2s + 2 \\ s \\ \hline \end{array}$$

Quindi risulta:

$$Q(s) = s \quad R(s) = s + 1$$

Passo 3. Calcoliamo la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione:

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$$

nei due poli s_1 ed s_2 . Poiché sono poli semplici basta calcolare il residuo con la formula (III.A.36). A questo scopo determiniamo:

$$\begin{aligned} R(s_1) &= j & R(s_2) &= -j \\ D'(s_1) &= 2s + 2 & D'(s_1) &= 2j & D'(s_2) &= -2j \end{aligned}$$

I residui dei due poli sono quindi uguali ad $1/2$. È opportuno osservare che non è necessario, in generale, effettuare il calcolo del residuo per ambedue i poli di una coppia di poli complessi coniugati. Infatti, sempre per la realtà dei coefficienti delle funzioni razionali che si considerano, i residui di due poli complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati.

Passo 4. Lo sviluppo in frazioni parziali della funzione assegnata è:

$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1 + j} + \frac{1/2}{s + 1 - j} + s$$

III.A.5 - Antitrasformazione delle funzioni elementari facenti parte dello sviluppo in frazioni parziali:

Come è stato visto in precedenza, mediante lo sviluppo in frazioni parziali è possibile esprimere una funzione razionale come combinazione lineare di alcune funzioni elementari della variabile s , per le quali è possibile effettuare facilmente l'operazione di antitrasformazione. La antitrasformata della funzione razionale di conseguenza risulta uguale alla combinazione lineare delle singole antitrasformate per la proprietà di linearità.

Le antitrasformate che occorrono per tale procedimento sono le seguenti.

a) Antitrasformata della funzione $1/(s+s_0)$ con s_0 costante reale o complessa (eventualmente nulla).

Ricordando la regola di trasformazione riportata nel § III.A.2, si ha dalla (III.A.12):

$$(III.A.37) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+s_0} \right] = e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$$

Nel caso particolare in cui sia $s_0=0$, si ottiene dalla (III.A.37):

$$(III.A.38) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u_{-1}(t)$$

b) Antitrasformata della funzione $1/(s+s_0)^n$ con s_0 costante reale o complessa, eventualmente nulla, ed n intero positivo maggiore od uguale ad uno.

Ricordando la regola di trasformazione (III.A.13) si ottiene:

$$(III.A.39) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+s_0)^n} \right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$$

Nel caso particolare in cui sia $s_0=0$, si ha dalla (III.A.39):

$$(III.A.40) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u_{-1}(t) = u_{-n}(t)$$

c) Antitrasformata della funzione $F(s)=1$.

In base alla regola di trasformazione (III.A.10) si ottiene:

$$(III.A.41) \quad \mathcal{L}^{-1}[1] = u_0(t)$$

d) Antitrasformata della funzione $F(s)=s^n$ con n intero positivo non nulo.

Le funzioni della variabile s del tipo s^k , $k=1,2,\dots$ costituiscono le trasformate di Laplace delle distribuzioni di Dirac. Tali distribuzioni possono essere visualizzate qualitativamente come se fossero coincidenti con un numero di impulsi di ampiezza infinita e larghezza infinitesima, alternativamente positivi e negativi posti nell'origine. In figura III.A.2 si fornisce in forma qualitativa questa idea. Si parla perciò nel caso della distribuzione corrispondente ad s ed indicata con $u_1(t)$ di doppietto unitario, nel caso della distribuzione corrispondente ad s^2 ed indicata con $u_2(t)$ di triploetto unitario, ecc. In conclusione si ha:

$$(III.A.42) \quad \mathcal{L}^{-1}[s^n] = u_n(t)$$

Osservazione III.A.2.

È importante osservare che è necessario fare ricorso alle antitrasformate c) (impulso $u_0(t)$ e d) (distribuzioni di Dirac di ordine n), solo nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ è impropria, cioè quando il grado del numeratore è maggiore od uguale a quello del denominatore. È infatti immediato constatare che tali funzioni si ottengono antitrasformando il polinomio $Q(s)$ ottenuto come quoziente della divisione fra il numeratore $N(s)$ ed il denominatore $D(s)$, come risulta dal secondo passo del procedimento di sviluppo in frazioni parziali, riportato in tab.III.A.2.

Osservazione III.A.3.

Nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ da antitrasformare sia a coefficienti reali, come accade nella totalità dei casi considerati nelle applicazioni all'analisi dei circuiti, vi sono importanti conseguenze relativamente alla funzione antitrasformata $f(t)$.

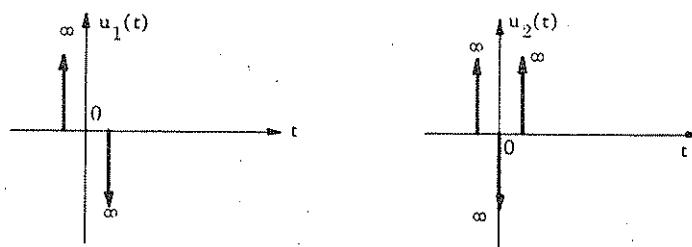


Fig.III.A.2 - Rappresentazione qualitativa delle distribuzioni $u_1(t)$ ed $u_2(t)$.

Come è stato detto nell'osservazione III.A.1, in tale caso i poli di $F(s)$ di tipo complesso danno luogo a termini dello sviluppo in frazioni parziali del tipo seguente:

$$(III.A.43) \quad W(s) = \frac{c}{(s + s_0)^n} + \frac{c^*}{(s + s_0^*)^n}$$

Effettuando l'antitrasformata secondo la formula (III.A.39), si ottiene:

$$(III.A.44) \quad w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = c \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + s_0)^n}\right] + c^* \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + s_0^*)^n}\right] = \\ = \frac{c}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0 t} u_{-1}(t) + \frac{c^*}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0^* t} u_{-1}(t)$$

Poiché le quantità c, c^*, s_0, s_0^* sono complesse, potrebbe apparire complessa anche l'antitrasformata $w(t)$. Tuttavia si può osservare che $w(t)$ è espressa come la somma di due quantità che risultano complesse coniugate per ogni t ; essa perciò è reale. Infatti si ha dalla (III.A.44):

$$(III.A.45) \quad w(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \{ c e^{-s_0 t} + c^* e^{-s_0^* t} \} u_{-1}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 2 \operatorname{Re}[c e^{-s_0 t}] u_{-1}(t)$$

dove $\operatorname{Re}[\dots]$ indica l'operatore parte reale. Detto quindi:

$$(III.A.46) \quad c = |c| e^{j\varphi}$$

$$(III.A.47) \quad s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$

si ha:

$$(III.A.48)$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{2t^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{Re}[|c| e^{j\varphi} e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)t}] u_{-1}(t) = \frac{2|c| t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\sigma_0 t} \operatorname{Re}[e^{-j\omega_0 t + j\varphi}] u_{-1}(t) = \\ &= 2|c| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t - \varphi) u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Da quest'ultima espressione appare esplicitamente il carattere reale della funzione $w(t)$. Quanto detto vale per qualsiasi valore di n ; in particolare per $n=1$. Perciò si può affermare in generale che l'antitrasformata di una funzione razionale a coefficienti reali è una funzione reale del tempo.

Esempio III.A.4.

Effettuare l'antitrasformata della funzione razionale reale:

$$F(s) = \frac{(s^2 + 3)}{(s+2)(s+1)^2}$$

considerata nell'esempio III.A.2.

Nell'esempio III.A.2 è stato ottenuto il seguente sviluppo in frazioni parziali:

$$F(s) = \frac{7}{s+2} + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1}$$

Effettuando l'antitrasformata di questo sviluppo si ottiene:

$$f(t) = \{7 e^{-2t} + 4t e^{-t} - 6e^{-t}\} u_{-1}(t)$$

Esempio III.A.5.

Effettuare l'antitrasformata della funzione razionale reale:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

considerata nell'esempio III.A.3.

Nell'esempio III.A.3 è stato ottenuto il seguente sviluppo in frazioni parziali:

$$F(s) = s + \frac{\frac{1}{2}}{s + 1 + j} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 1 - j}$$

Effettuando l'antitrasformata di questo sviluppo, si ottiene:

$$f(t) = u_1(t) + \frac{1}{2} \{ e^{(1+j)t} + e^{(1-j)t} \} u_{-1}(t)$$

D'altra parte si ha:

$$e^{(1+j)t} = e^{-t} (\cos t + j \sin t); \quad e^{(1-j)t} = e^{-t} (\cos t - j \sin t)$$

da cui si ricava:

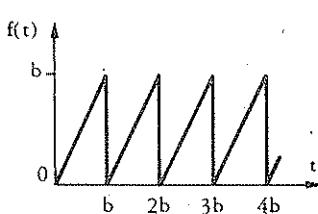
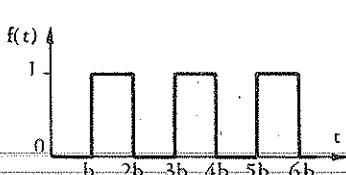
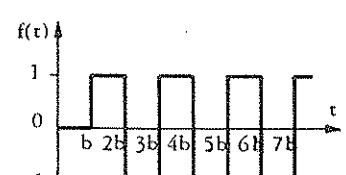
$$f(t) = u_1(t) + e^{-t} \cos t u_{-1}(t)$$

Lo stesso risultato si ottiene usando le (III.A.46) e (III.A.48). Infatti risulta:
 $n = 1, |c| = 1/2, \varphi = 0, \sigma_0 = 1, \omega_0 = 1$.

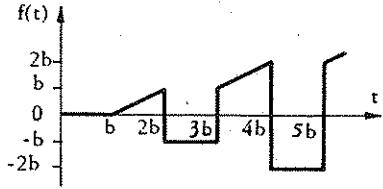
Tabella III.A.2 - Trasformate di Laplace (le funzioni del tempo sono definite per $t \geq 0$).

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$1 \quad na < t < na + b$ $0 \quad na+b < t < (n+1)a$ 	$\frac{1-e^{-bs}}{s(1-e^{-as})}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$
$\frac{2(t-na)}{b} \quad na < t < na + \frac{b}{2}$ $\frac{2(b+na-t)}{b} \quad na + \frac{b}{2} < t < na + b$ $0 \quad na + b < t < (n+1)a$ 	$\frac{2(1-e^{-\frac{b}{2}s})^2}{bs^2(1-e^{-as})}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$
$\frac{t-4na}{a} \quad 4na < t < 4na + b$ $\frac{b}{a} \quad 4na + b < t < (4n+2)a - b$ $\frac{(4n+2)a-t}{a} \quad (4n+2)a - b < t < (4n+2)a$ $0 \quad (4n+2)a < t < (4n+4)a$ 	$\frac{(1-e^{-bs})(1-e^{-(2-\frac{b}{a})as})}{as^2(1-e^{-4as})}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$t-nb \quad nb < t < (n+1)b$ 	$\frac{1}{s^2} - \frac{b}{2s} \left[\coth \frac{bs}{2} - 1 \right]$ $= \frac{e^{bs} - bs - 1}{s^2(e^{bs} - 1)}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$
$0 \quad 2nb < t < (2n+1)b$ $1 \quad (2n+1)b < t < (2n+2)b$ 	$\frac{1}{s(1+e^{bs})}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$
$0 \quad 0 < t < b$ $1 \quad (2n+1)b < t < (2n+2)b$ $-1 \quad (2n+2)b < t < (2n+3)b$ 	$\frac{1-e^{-bs}}{s(1+e^{bs})}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\text{Re } s > 0$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$\frac{1}{4} [1 - (-1)^n] (2t - b) - \frac{1}{2}$ $nb < t < (n+1)b$ 	$\frac{1}{s^2(e^{bs} + 1)}$	$n = 0, 1, 2, \dots$ $\operatorname{Re} s > 0$
1 $\frac{1 - e^{-at}}{a}$ $\frac{a}{a} + \left(1 - \frac{a}{\alpha}\right) e^{-at}$ $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-at} - \alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}$ $\frac{a}{\alpha\beta} + \frac{a - \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-at} + \frac{a - \beta}{\beta(\beta - \alpha)} e^{-\beta t}$ $\frac{b}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 - \alpha\alpha + b}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-at} - \frac{\beta^2 - \alpha\beta + b}{\beta(\beta - \alpha)} e^{-\beta t}$ $\frac{t^2}{2}$ $t + \frac{at^2}{2}$ $1 + at + \frac{bt^2}{2}$	$\frac{1}{s}$ $\frac{1}{s(s + \alpha)}$ $\frac{s + a}{s(s + \alpha)}$ $\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$ $\frac{s + a}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$ $\frac{s^2 + as + b}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$ $\frac{1}{s^3}$ $\frac{s + a}{s^3}$ $\frac{s^2 + as + b}{s^3}$	$\operatorname{Re} s > 0$ $\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} \alpha)$ $\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} \alpha)$ $\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} \alpha, -\operatorname{Re} \beta)$ $\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} \alpha, -\operatorname{Re} \beta)$ $\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} \alpha, -\operatorname{Re} \beta)$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\operatorname{Re} s > 0$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$\frac{1}{a^3} (1 - e^{-at}) \cdot \frac{t}{a^2} + \frac{t^2}{2a}$	$\frac{1}{s^3(s+a)}$	$\operatorname{Re}s > (\max 0, -\operatorname{Re}\alpha)$
$\frac{\alpha-a}{a^2} t + \frac{a}{2a} t^2 - \frac{\alpha-a}{a^3} (1 - e^{-at})$	$\frac{s+a}{s^3(s+a)}$	$\operatorname{Re}s > (\max 0, -\operatorname{Re}\alpha)$
$\frac{a\alpha-b}{a^2} t + \frac{b}{2a} t^2 + \frac{\alpha^2 - a\alpha + b}{a^3} (1 - e^{-at})$	$\frac{s^2 + as + b}{s^3(s+a)}$	$\operatorname{Re}s > (\max 0, -\operatorname{Re}\alpha)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\alpha $
$\cosh(at) + \frac{a}{\alpha} \sinh(at)$	$\frac{s+a}{s^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\alpha $
$\frac{at \cosh(at) - \sinh(at)}{2\alpha^3}$	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\alpha $
$\frac{(\alpha^2 t - a) \sinh(at) + a \alpha t \cosh(at)}{2\alpha^3}$	$\frac{s+a}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\alpha $
$\frac{(\alpha^2 at + a^2 - b) \sinh(at) + (a^2 + b) \alpha t \cosh(at)}{2\alpha^3}$	$\frac{s^2 + as + b}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\alpha $
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Im}\beta $
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Im}\beta $
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Re}\beta $
$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re}s > \operatorname{Im}\beta - \operatorname{Re}\alpha$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta - \operatorname{Re} \alpha$
$\frac{[(c-\alpha)^2 + \beta^2]^{1/2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \phi), \phi = \tan^{-1} \frac{\beta}{c-\alpha}$	$\frac{s+c}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta - \operatorname{Re} \alpha$
$\frac{1}{\beta^4} (\cos \beta t - 1) + \frac{1}{2\beta^2} t^2$	$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)s^3}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{\beta^4} (\cosh \beta t - 1) - \frac{1}{2\beta^2} t^2$	$\frac{1}{(s^2 - \beta^2)s^3}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \beta $
$\frac{1}{2\beta} t \sin \beta t$	$\frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$	$\frac{\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$t \cos \beta t$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{\beta^4} (1 - \cos \beta t) - \frac{1}{2\beta^3} t \sin \beta t$	$\frac{1}{s(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $

NOTA: Le derivazioni delle trasformate nel caso di funzioni il cui andamento nel tempo viene assegnato per via grafica ed è composto da tratti costanti o variabili linearmente, può essere effettuato facilmente, esprimendo l'andamento mediante le funzioni $u_{,1}(t)$ ed $u_{,2}(t)$. A titolo di esempio, ricaviamo la trasformata della funzione riportata al sesto posto nella tab.III.A.2.

Considerando l'andamento nel tempo, a partire dalla prima discontinuità, si ha:

$$\begin{aligned}f(t) &= u_{-1}(t-b) - 2u_{-1}(t-2b) + 2u_{-1}(t-3b) - 2u_{-1}(t-4b) + \dots \\&= u_{-1}(t-b) - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k u_{-1}(t-kb)\end{aligned}$$

Trasformando secondo Laplace, si ha:

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-bs} - \frac{2}{s} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k e^{-kbs}$$

Questa si può scrivere, estendendo la sommatoria a $k=1$:

$$F(s) = -\frac{1}{s} e^{-bs} - \frac{2}{s} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kbs}$$

Per $\operatorname{Re} s > 0$, si ha:

$$F(s) = -\frac{1}{s} e^{-bs} + \frac{2}{s} \frac{e^{-bs}}{1+e^{-bs}} = \frac{1}{s} \frac{e^{-bs}(1-e^{-bs})}{1+e^{-bs}}$$

che equivale a quella riportata nella tabella.

III.B - Esempi di applicazione del metodo della trasformata di Laplace.

Il metodo simbolico di Laplace è molto generale e può essere applicato in moltissimi casi di interesse applicativo. In questo paragrafo verranno sviluppati vari esempi sia allo scopo di illustrare tale metodo in casi più complessi, sia allo scopo di risolvere alcuni circuiti utili in casi concreti.

Il primo esempio riguarda il caso del partitore di tensione, indicato in fig. III.B.1. Tale esempio è rilevante in molte applicazioni. In molti casi (p. esempio in elettronica o nel campo delle misure) è infatti richiesto di ottenere una tensione v_2 che sia una frazione della tensione di un generatore v_1 . Ciò può essere ottenuto utilizzando un semplice partitore resistivo, senza la presenza dei due condensatori indicati in figura. Tuttavia in quasi tutti i casi il condensatore C_2 non è eliminabile poiché esso è presente come elemento parassita in parallelo al carico R_2 . In questi casi il segnale di uscita risulterebbe distorto rispetto a quello del generatore, a meno che il condensatore C_1 non sia presente in parallelo a R_1 come indicato in figura e inoltre non sia verificata la condizione di *partitore compensato* indicata nella figura III.B.4. Il circuito di figura III.B.1 è anche rilevante nel determinare la tensione che si localizza nel punto centrale di una serie di condensatori (p. esempio nel caso di isolatori

per alte tensioni). Accade infatti che, in presenza di una tensione di ingresso a gradino, la tensione di uscita v_2 segue la legge della partizione capacitiva (tensione V_B della figura III.B.4) solo in assenza dei resistori R_1 e R_2 . È tuttavia noto che tali resistori possono essere presenti come elementi parassiti dei condensatori. In questo caso la partizione capacitiva vale solo in un intervallo di tempo molto breve dopo l'inserzione del generatore, poiché dopo un tempo maggiore la tensione di uscita v_2 finisce col seguire la legge della partizione resistiva (tensione V_A della figura III.B.4). Se anche in tal caso il partitore non è compensato le due tensioni V_A e V_B possono essere molto diverse fra loro, anche con l'eventualità di possibili danneggiamenti del partitore.

Tutti questi aspetti derivano dall'analisi dell'esempio III.B.1.

Esempio III.B.1

Dato il circuito di fig.III.B.1 determinare la tensione $v_2(t)$, supponendo che la tensione $v_1(t)$ abbia l'andamento indicato in fig.III.B.2. Si considerino nulle le condizioni iniziali all'istante $t = 0$.

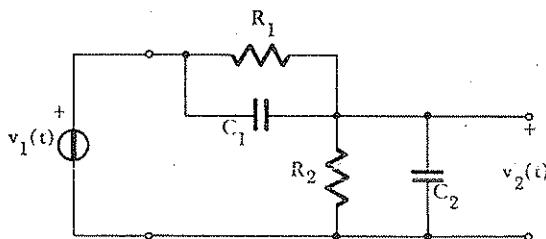
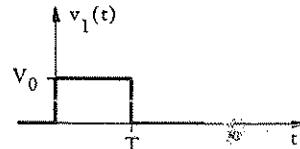


Fig.III.B.1 - Circuito considerato nell'esempio III.B.1.

Fig.III.B.2 - Andamento della tensione del generatore $v_1(t)$.



Seguendo il procedimento simbolico di analisi nel dominio di Laplace indicato in tabella III.4.1, trasformiamo il circuito di fig.III.B.1 nel dominio di s.

La funzione di eccitazione $v_1(t)$ può essere espressa come segue:

$$v_1(t) = V_0 [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-T)]$$

Perciò la trasformata $V_1(s)$, applicando la proprietà I (linearità) e la proprietà IV (traslazione nel tempo), risulta pari a:

$$V_1(s) = V_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts})$$

Il circuito trasformato nel dominio di Laplace è quindi quello indicato in figura III.B.3, tenendo conto del fatto che le condizioni iniziali sono nulle.

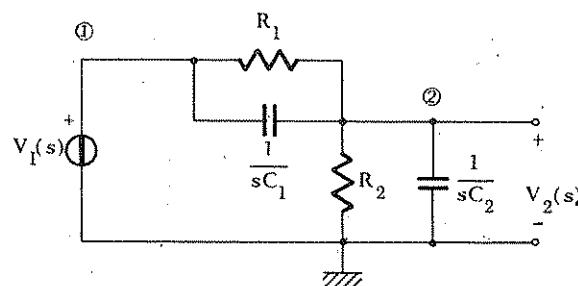


Fig.III.B.3 - Circuito trasformato nel dominio di Laplace.

Risolviamo il circuito mediante il metodo dei nodi, al fine di determinare la tensione incognita $V_2(s)$. Risulta sufficiente scrivere la seguente equazione di equilibrio al nodo 2:

$$V_2(s) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 + sC_2 \right) - \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) V_1(s) = 0$$

da cui si ottiene, tenendo conto del valore di $V_1(s)$:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{R_2(sC_1R_1 + 1)}{(R_1 + R_2) \left[(C_1 + C_2) \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} s + 1 \right] \cdot s} \cdot (1 - e^{-Ts}) V_0 = \\ &= F(s) \cdot (1 - e^{-Ts}) V_0 \end{aligned}$$

Effettuando lo sviluppo in frazioni parziali di $F(s)$, si ottiene:

$$F(s) = \frac{R_2(sC_1R_1 + 1)}{(R_1 + R_2) \left[(C_1 + C_2) \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} s + 1 \right] \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha}$$

con:

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{R_1 R_2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\infty} [F(s) \cdot (s + \alpha)] = \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

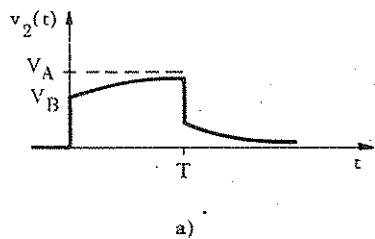
Perciò la tensione $V_2(s)$ si può esprimere nel modo seguente:

$$V_2(s) = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha} \right) (1 - e^{-Ts}) V_0$$

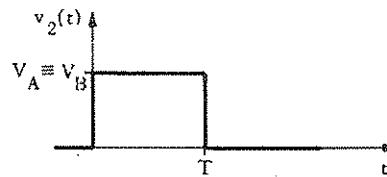
Antitrasformando quest'ultima espressione si ottiene:

$$v_2(t) = V_0 (A + B e^{-\alpha t}) u_{-1}(t) - V_0 [A + B e^{-\alpha(t-T)}] u_{-1}(t-T)$$

I possibili andamenti della tensione $v_2(t)$ sono riportati nelle figg. III.B.4 a, b, e c, nei tre casi $B < 0$, $B = 0$, $B > 0$.



a)



b)

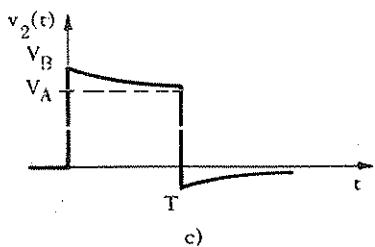


Fig. III.B.4 - Possibili andamenti della tensione $v_2(t)$:

- caso a) in cui $B < 0$;
 - caso b) in cui $B = 0$ (partitore RC compensato);
 - caso c) in cui $B > 0$.
- In tutti e tre i casi si ha:

$$V_A = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad V_B = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

————— * —————

Nel prossimo esempio è analizzato con il metodo delle equazioni su base maglie un circuito attivo contenente un nullore. Il circuito considerato è detto *circuito integratore* poiché la forma d'onda di tensione $v_2(t)$ risulta proporzionale all'integrale (cambiato di segno e a meno di una costante) della forma d'onda di tensione $v_1(t)$. Tale proprietà può essere verificata osservando le forme d'onda utilizzate nell'esempio. Il circuito è rilevante in applicazioni nel campo dell'elettronica e dei controlli automatici.

Esempio III.B.2

Dato il circuito di fig.III.B.5, determinare la tensione $v_2(t)$, supponendo che la tensione $v_1(t)$ abbia l'andamento indicato in fig.III.B.6 e che la tensione iniziale del condensatore sia V_0 .

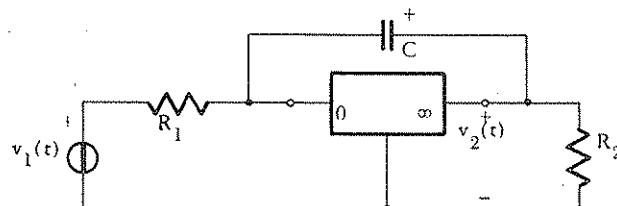


Fig.III.B.5 - Circuito considerato nell'esempio III.B.2.

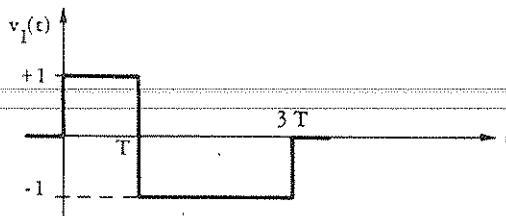


Fig.III.B.6 - Andamento della tensione $v_1(t)$.

La funzione di eccitazione può essere espressa come segue:

$$v_1(t) = [u_{-1}(t) - 2u_{-1}(t-T) + u_{-1}(t-3T)]$$

Trasformando la tensione $v_1(t)$ si ha:

$$V_1(s) = \frac{1}{s} [1 - 2e^{-Ts} + e^{-3Ts}]$$

Il circuito trasformato nel dominio di Laplace è riportato in fig.III.B.7, utilizzando per il condensatore lo schema indicato in tabella III.3.2.

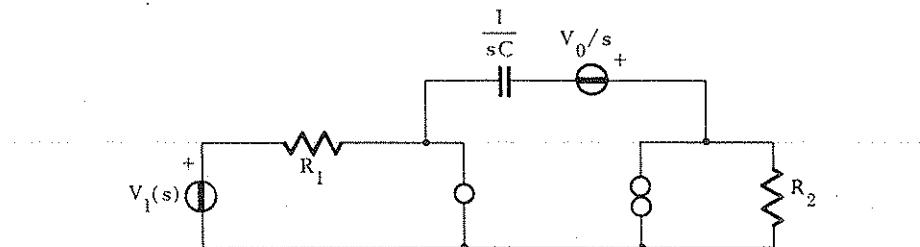


Fig.III.B.7 - Circuito trasformato nel dominio di s, ottenuto da quello di fig.III.B.5.

Scriviamo per il circuito di fig.III.B.7 il sistema risolvibile su base maglie, scegliendo le tre maglie indicate in fig.III.B.8 e sostituendo al nullatore un corto-circuito ed al noratore un generatore di tensione.

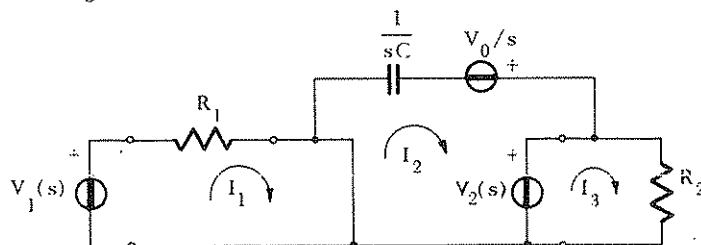


Fig.III.B.8 - Scelta delle maglie per l'analisi del circuito di fig.III.B.7.

Si ottiene il seguente sistema di equazioni su base maglie:

$$\begin{cases} I_1(s) \cdot R_1 = V_1(s) \\ I_2(s) \cdot \frac{1}{sC} - \frac{V_0}{s} = V_2(s) \\ I_3(s) \cdot R_2 = V_2(s) \end{cases}$$

A queste equazioni va aggiunta quella del vincolo imposto dal nullatore presente, cioè:

$$I_1(s) - I_2(s) = 0$$

Eliminando dalle equazioni precedenti $I_1(s)$ ed $I_2(s)$, si ha:

$$V_1(s) \cdot \frac{1}{sR_1C} = \frac{V_0}{s} - V_2(s)$$

e quindi, tenendo conto dell'espressione ricavata per $V_1(s)$:

$$V_2(s) = -\frac{1}{s^2 R_1 C} [1 - 2 e^{-Ts} + e^{-3Ts}] + \frac{V_0}{s}$$

L'antitrasformata di $V_2(s)$ è la seguente in base alla (III.A.40):

$$v_2(t) = -\frac{1}{R_1 C} [u_{-2}(t) - 2u_{-2}(t-T) + u_{-2}(t-3T)] + V_0 u_{-1}(t)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.B.9 per i valori:

$$R_1 = 1 \Omega, \quad C = 1 F, \quad V_0 = 1 V \quad \text{e} \quad T = 1 \text{ sec}$$

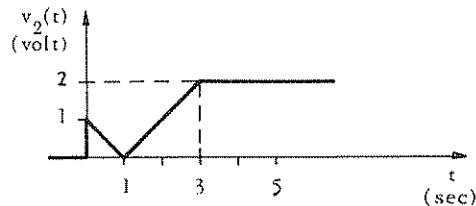


Fig.III.B.9 - Andamento della tensione $v_2(t)$ ottenuta nell'esempio III.B.2.

— * —

Nel prossimo esempio è analizzato con il metodo delle maglie il circuito contenente induttanze accoppiate, indicato in figura III.B.10. Si può notare che l'andamento delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nelle induttanze segue la stessa forma d'onda come indicato in figura III.B.12. Il valore asintotico di tali correnti per t che tende all'infinito è pari rispettivamente a $6/10$ e $4/10$. La somma di tali valori è pari a 1, come si può dedurre direttamente dal circuito di fig. III.B10, considerando che al termine di ogni transitorio le due induttanze possono essere considerate equivalenti a due corti circuiti. Tale analisi semplificata non è tuttavia in grado di fornire i due valori di corrente ottenuti con l'analisi simbolica, in quanto la partizione di una corrente in due elementi di corto circuito in parallelo è indeterminata.

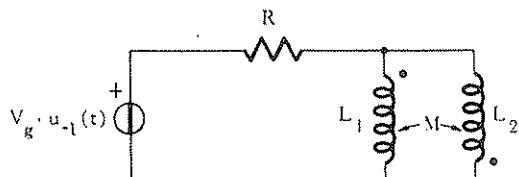


Fig.III.B.10 - Circuito considerato nell'esempio III.B.3. I valori dei componenti sono: $V_g = 2$, $L_1 = 2$, $L_2 = 1$, $M = 1$, $R = 2(V, H, \Omega)$

Esempio III.B.3

Dato il circuito di fig.III.B.10, nel quale si considerino nulle le condizioni iniziali e costante ed uguale a 2 volt la tensione di eccitazione, si determinino gli andamenti nel tempo delle correnti nei due induttori e l'energia dissipata nel resistore nello intervallo di tempo $0 \div 1$ sec.

Effettuando la trasformazione del circuito assegnato, si ottiene il circuito fittizio nel dominio di s , riportato in fig.III.B.11.

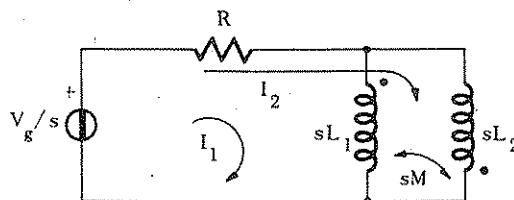


Fig. III.B.11 - Circuito trasformato nel dominio di s ottenuto da quello di figura III.B.10.

Per l'analisi del circuito di fig. III.B.11, applichiamo il metodo delle maglie, modificato opportunamente per la presenza della mutua induzione corrispondente al termine sM . Scegliamo come variabili ausiliarie le correnti di maglia $I_1(s)$ e $I_2(s)$, indicate in fig. III.B.11. Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\text{Maglia 1} \quad (R + sL_1) I_1 + (R - sM) I_2 = V_g/s$$

$$\text{Maglia 2} \quad (R - sM) I_1 + (R + sL_2) I_2 = V_g/s$$

Si può notare che la presenza del termine sM dà luogo ad un'ulteriore interazione tra le correnti di maglia. Infatti nell'equazione relativa alla maglia 1 è presente il termine $-sMI_2$, coincidente con la tensione provocata in tale maglia dalla corrente I_2 , che circola nell'altra maglia, attraverso la mutua induzione (il segno negativo è dovuto al fatto che i versi convenzionali delle due correnti di maglia sono disposti in modo opposto rispetto ai segni di riferimento degli induttori). Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2 + 2s) I_1 + (2 - s) I_2 = \frac{2}{s} \\ (2 - s) I_1 + (2 + s) I_2 = \frac{2}{s} \end{array} \right.$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-s \\ 2 & 2+s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2s & 2-s \\ 2-s & 2+s \end{vmatrix}} = \frac{4}{s^2 + 10s}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2+2s & \frac{2}{s} \\ 2-s & \frac{2}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2s & 2-s \\ 2-s & 2+s \end{vmatrix}} = \frac{6}{s^2 + 10s}$$

Sviluppando in frazioni parziali, si ottiene:

$$I_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} ; \quad A = \frac{4}{s+10} \Big|_{s=0} = \frac{4}{10} ; \quad B = \frac{4}{s} \Big|_{s=-10} = -\frac{4}{10}$$

Antitrasformando $I_1(s)$, si ha:

$$i_1(t) = \frac{4}{10} (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

Analogamente, si ottiene:

$$i_2(t) = \frac{6}{10} (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

Gli andamenti delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono mostrati nella fig.III.B.12.

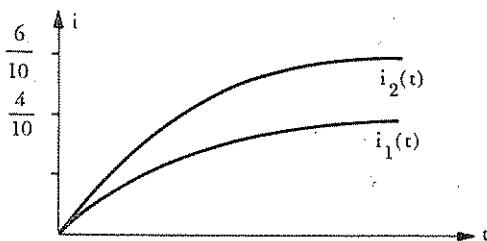


Fig.III.B.12 - Andamenti delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nell'esempio III.B.3.

Per calcolare l'energia dissipata nel resistore, occorre determinare la corrente che lo percorre. Dalla fig.III.B.11 e dalle espressioni di $i_1(t)$ ed $i_2(t)$ ricavate in precedenza, si ha:

$$i_R(t) = -i_1(t) + i_2(t) = (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

L'energia dissipata nell'intervallo $0 \div 1$ sec vale:

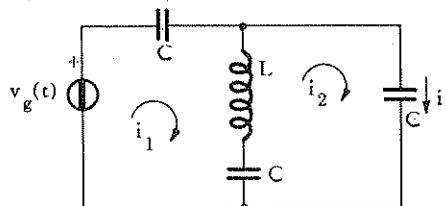
$$\begin{aligned} \epsilon_R &= \int_0^1 R i_R^2(t) dt = \int_0^1 2 \cdot (1 - e^{-10t})^2 dt = \\ &= \int_0^1 (2 - 4e^{-10t} + 2e^{-20t}) dt = \left[2t + \frac{4}{10} e^{-10t} - \frac{2}{20} e^{-20t} \right]_0^1 \approx 1,7 \text{ joule} \end{aligned}$$

————— * —————

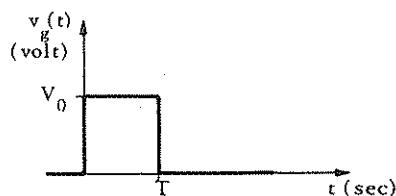
Negli esempi III.B.4 e III.B.5 è considerato il circuito di fig. III.B.13, nel quale è presente una maglia contenente solo condensatori e il generatore di tensione. La presenza di tale maglia fa sì che, in presenza di gradini di tensione, la corrente presenti andamenti con singolarità di tipo impulsivo.

Esempio III.B.4

Determinare l'andamento della corrente i che percorre uno dei condensatori del circuito di fig.III.B.13, nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle e che la tensione impressa dal generatore abbia l'andamento riportato nella parte b) della stessa figura.



a)



b)

Fig.III.B.13 - Circuito considerato nell'esempio III.B.4. In b) è riportato l'andamento della tensione impressa.

Applicando il metodo di analisi su base maglie al circuito fittizio che si ottiene trasformando quello di fig.III.B.13a nel dominio di Laplace, con variabili ausiliarie coincidenti con le trasformate delle due correnti di maglia i_1 ed i_2 , si ha:

$$\begin{aligned} I_1 \left(\frac{2}{sC} + sL \right) - I_2 \left(\frac{1}{sC} + sL \right) &= V_g(s) \\ - I_1 \left(\frac{1}{sC} + sL \right) + I_2 \left(\frac{2}{sC} + sL \right) &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene la trasformata della corrente incognita i , coincidente con $I_2(s)$, cioè:

$$I_2(s) = \frac{sC(s^2LC + 1)}{2LCs^2 + 3} V_g(s)$$

Per determinare l'andamento nel tempo richiesto, occorre preliminarmente individuare la trasformata $V_g(s)$ della tensione impressa. Scrivendo in forma opportuna tale tensione, si ha:

$$v_g(t) = V_0 u_{-1}(t) - V_0 u_{-1}(t-T)$$

a cui corrisponde:

$$V_g(s) = \frac{V_0}{s} (1 - e^{-sT})$$

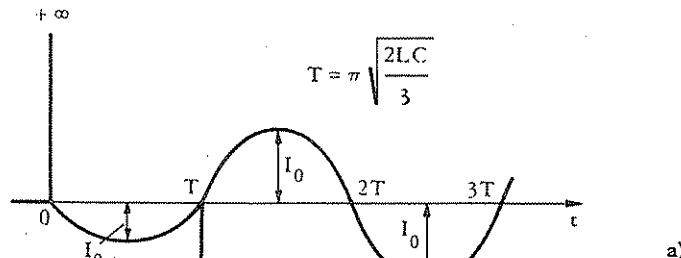
Tenendo conto di questa espressione e sviluppando in frazioni parziali la parte razionale della $I_2(s)$, si ottiene:

$$I_2(s) = \frac{V_0 C}{2} \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} (1 - e^{-sT}) = \frac{V_0 C}{2} \left(1 - \frac{\frac{0,5}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) (1 - e^{-sT})$$

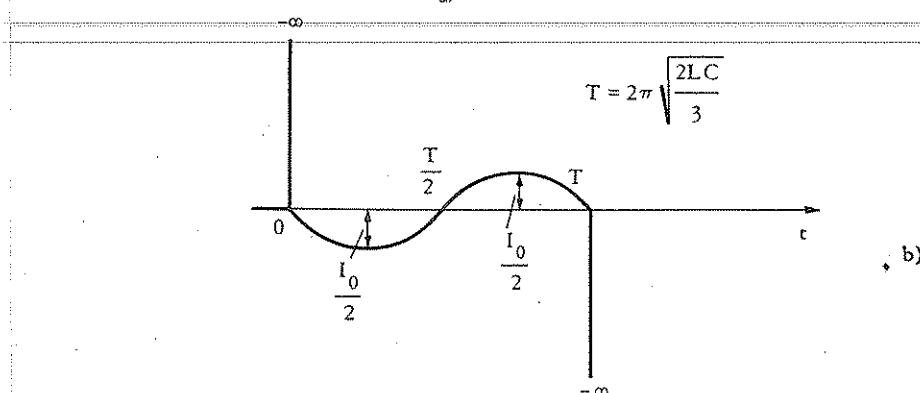
Per antitrasformare, osserviamo che dalla tab.III.A.1 si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right] = \sqrt{\frac{LC}{1,5}} \sin \sqrt{\frac{1,5}{LC}} t \cdot u_{-1}(t)$$

e quindi risulta:



a)



b)

Fig.III.B.14 - Andamento della corrente $i(t)$ del circuito di fig.III.B.13 per i valori indicati di T . In ambedue i casi il valore di I_0 è:

$$V_0 \sqrt{\frac{C}{6L}}$$

$$i(t) = \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) - u_0(t-T)] +$$

$$+ \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \left[\sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-T) u_{-1}(t-T) - \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t u_{-1}(t) \right]$$

In fig. III.B.14a è riportato l'andamento di $i(t)$ nel caso che $T = \pi \sqrt{2LC/3}$. Si vede che sono presenti due impulsi di Dirac in corrispondenza a $t=0$ ed a $t=T$, diretti in senso contrario. Inoltre la corrente ha un andamento sinusoidale indefinito. È interessante mettere in evidenza il fatto che per valori particolari di T , la corrente $i(t)$ ha una durata limitata. Questo accade per $T = 2\pi \sqrt{2LC/3}$. Infatti, in questo caso si ha:

$$i(t) = \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) - u_0(t-T)] - \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-T)]$$

L'andamento risultante per la corrente è riportato in fig. III.B.14b.

Esempio III.B.5

Svolgere l'esempio III.B.4 nell'ipotesi che la tensione impressa abbia l'andamento di fig. III.B.15.

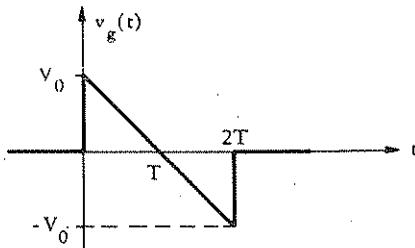


Fig. III.B.15 - Andamento della tensione impressa dal generatore del circuito di figura III.B.13 nell'es. III.B.5.

Avendo già determinata l'espressione della trasformata della corrente incognita in funzione della trasformata della tensione impressa nello svolgimento dell'esempio III.B.4, occorre individuare nel caso presente la trasformata dell'eccitazione. A questo scopo osserviamo che l'espressione analitica della $v_g(t)$ è:

$$v_g(t) = \left(V_0 - \frac{V_0 t}{T} \right) u_{-1}(t) + \left(V_0 + V_0 \frac{t-2T}{T} \right) u_{-1}(t-2T)$$

a cui corrisponde la seguente trasformata:

$$V_g(s) = \frac{V_0}{T} \left(\frac{Ts - 1}{s^2} + \frac{Ts + 1}{s^2} e^{-2sT} \right)$$

Utilizzando le formule ottenute nell'esempio III.B.4, si ha:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{V_0 C}{2} \left(1 - \frac{\frac{0,5}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) \left(\frac{s - 1/T}{s} + \frac{s + 1/T}{s} e^{-2sT} \right) = \\ &= \frac{V_0 C}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{3s} - \frac{\frac{s}{6} + \frac{T}{4LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) + \frac{V_0 C}{T} \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{3s} + \frac{\frac{s}{6} - \frac{T}{4LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) e^{-2sT} \end{aligned}$$

Antitrasformando l'espressione precedente, si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) + u_0(t-2T)] - \frac{C V_0}{3 T} [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-2T)] + \\ &\quad - \frac{C V_0}{6 T} \left[u_{-1}(t) \cos \sqrt{\frac{3}{2LC}} t - u_{-1}(t-2T) \cos \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-2T) \right] + \\ &\quad - \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \left[u_{-1}(t) \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t + u_{-1}(t-2T) \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-2T) \right] \end{aligned}$$

L'andamento di $i(t)$ nel caso particolare di

$$T = \pi \sqrt{\frac{2LC}{3}}$$

è riportato in fig.III.B.16, dove si è posto:

$$I_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{6L}}$$

— * —

Nell'esempio III.B.6 è preso in esame un circuito contenente un transistore, del quale è fornito lo schema equivalente semplificato. Tale circuito è rilevante in elettronica poiché rappresenta un oscillatore di tipo Colpitts.

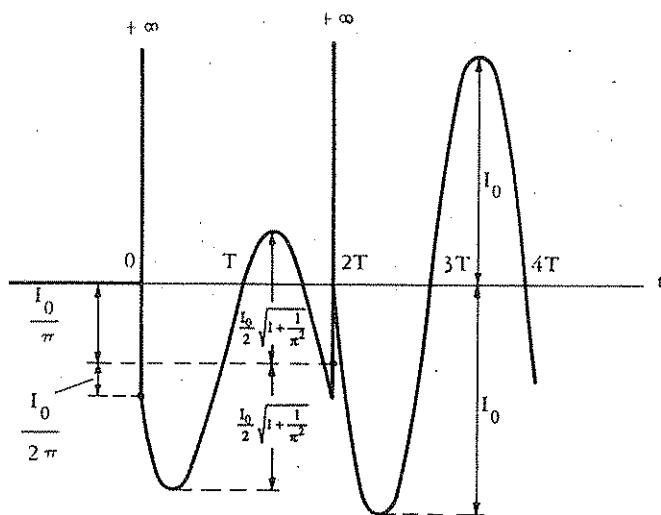


Fig.III.B.16 - Andamento della corrente $i(t)$ del circuito di fig.III.B.13 nel caso che la tensione impressa abbia l'andamento di fig.III.B.15 con $T = \pi \sqrt{2LC/3}$.

Esempio III.B.6

Determinare per quali valori dei componenti si innesta un'oscillazione sinusoidale nello schema di fig.III.B.17, che rappresenta un oscillatore di Colpitts a transistori. Si effettui l'analisi nella fase d'innesto, supponendo che il transistore sia lineare e rappresentabile, insieme con il circuito di polarizzazione, come indicato in figura III.B.18. Si supponga inoltre il circuito a riposo per $t=0$ e l'eccitazione coincidente con un generatore di corrente avente come grandezza impressa un impulso unitario.

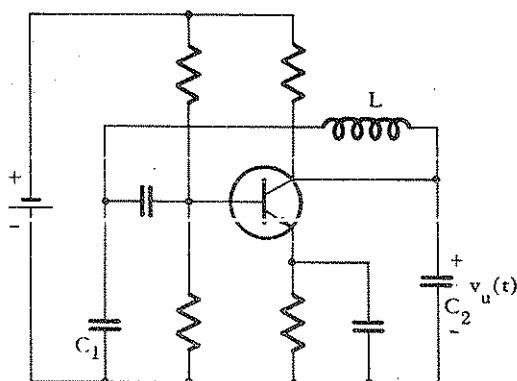


Fig.III.B.17 - Schema dell'oscillatore di Colpitts.

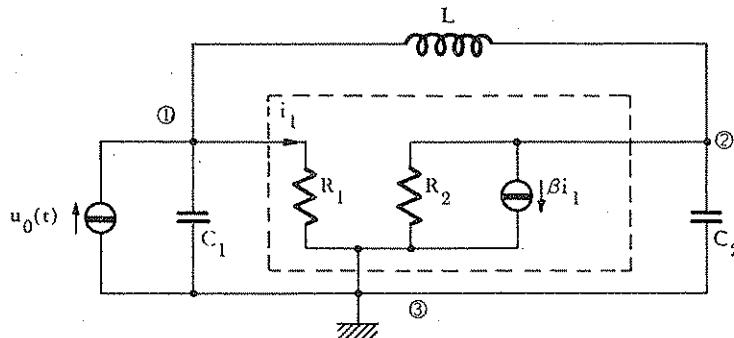


Fig.III.B.18 - Schema dell'oscillatore di Colpitts usato per l'analisi dell'innesto delle oscillazioni.

Dopo aver trasformato nel dominio di Laplace il circuito di fig.III.B.18, analizziamolo con il metodo dei nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 3. Si ottiene:

$$V_1(s) \left[sC_1 + G_1 + \frac{1}{sL} \right] - V_2(s) \frac{1}{sL} = 1$$

$$- V_1(s) \left[\frac{1}{sL} - \beta G_1 \right] + V_2(s) \left[G_2 + sC_2 + \frac{1}{sL} \right] = 0$$

Determiniamo $V_2(s)$, che coincide con la trasformata della tensione incognita $v_u(t)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{-\beta G_1 + \frac{1}{sL}}{\left(sC_1 + G_1 + \frac{1}{sL} \right) \left(sC_2 + G_2 + \frac{1}{sL} \right) - \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{sL} - \beta G_1 \right)} = \\ &= \frac{1 - \beta G_1 L s}{s^3 C_1 C_2 L + s^2 L (C_1 G_2 + G_1 C_2) + s (C_1 + C_2 + G_1 G_2 L) + G_1 + G_2 + \beta G_1} \end{aligned}$$

Affinché si inneschi l'oscillazione sinusoidale occorre che il denominatore abbia una coppia di radici $\pm j\omega_0$, essendo ω_0 la pulsazione desiderata. Di conseguenza, il denominatore della $V_2(s)$ deve essere del tipo:

$$D(s) = (s^2 + \omega_0^2)(s + a) = s^3 + a s^2 + \omega_0^2 s + a \omega_0^2$$

con $a \geq 0$.

Uguagliando termine a termine i coefficienti del denominatore di $V_2(s)$ con quelli voluti, si ha:

$$\frac{C_1 G_2 + G_1 C_2}{C_1 C_2} = a$$

$$\frac{C_1 + C_2 + G_1 G_2 L}{C_1 C_2 L} = \omega_0^2$$

$$\frac{G_1 + G_2 + \beta G_1}{C_1 C_2 L} = a \omega_0^2$$

È evidente che le relazioni precedenti sono soddisfatte e quindi si ha l'innesto dell'oscillazione sinusoidale se il prodotto della prima relazione per la seconda uguaglia la terza, cioè se:

$$\left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{G_1}{C_1} \right) \frac{C_1 + C_2 + G_1 G_2 L}{C_1 C_2 L} = \frac{G_1 + G_2 + \beta G_1}{C_1 C_2 L}$$

Tale condizione equivale a richiedere che il guadagno del transistore sia:

$$\beta = \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} + \frac{L}{R_2} \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} \right) + \frac{C_2}{C_1}$$

————— * —————

Negli esempi III.B.7 e III.B.8 sono analizzati due circuiti relativamente complessi la cui soluzione si semplifica con particolari artifici. Nel primo è utilizzato il metodo di sovrapposizione degli effetti, nel secondo sono effettuate varie considerazioni semplificative che derivano dalla presenza di un nullo.

Esempio III.B.7

Nel circuito di fig.III.B.19, calcolare l'andamento della corrente erogata dal generatore v_{g2} , sapendo che il condensatore è scarico all'istante $t = 0$.

Trasformiamo il circuito nel dominio di Laplace; in particolare la trasformata $V_{g2}(s)$ si ottiene osservando che nel tempo si ha:

$$v_{g2}(t) = u_{-2}(t) - 2u_{-2}(t-1) + u_{-2}(t-2)$$

e quindi:

$$V_{g2}(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

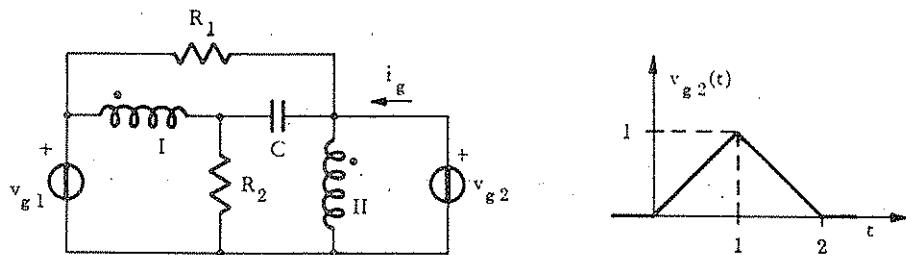


Fig. III.B.19 - Circuito considerato nell'esempio III.B.7. I valori dei componenti sono: $R_1 = R_2 = 1$, $C = 1$, $v_{g1}(t) = u_2(t)$, rapporto del trasformatore uguale ad 1. (Ω , F, V, S)

Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, determinando il contributo dei due generatori.

• Generatore v_{g1} :

Con riferimento alla fig. III.B.20, dove è stato disattivato il generatore v_{g2} , si possono determinare le varie grandezze indicate per ispezione visiva nel seguente ordine:

$$I_{R2} = V_{g1}, \quad I_{R1} = V_{g1}, \quad I_c = s V_{g1}, \quad I_{T1} = I_{R2} + I_c = (1 + s) V_{g1},$$

$$I_{T2} = I_{T1} = (1 + s) V_{g1}, \quad I_g = -I_{R1} - I_c - I_{T2} = -2 \frac{1+s}{s^2}.$$

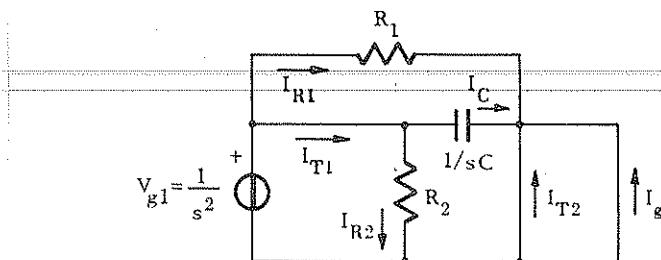


Fig. III.B.20 - Circuito quando agisce V_{g1} .

• Generatore v_{g2} :

Con riferimento alla fig. III.B.21, anche in questo caso, possiamo ricavare le varie grandezze indicate per ispezione visiva nel seguente ordine:

$$V_1 = -V_{g2}, \quad I'_{R2} = V_{g2}, \quad I'_{R1} = V_{g2}, \quad I'_c = 2s V_{g2},$$

$$I'_{T1} = I'_{R2} + I'_c = (2s + 1) V_{g2}, \quad I'_{T2} = I'_{T1}$$

$$I'_g = I'_{R1} + I'_c + I'_{T2} = (1 + 2s) 2 V_{g2}$$

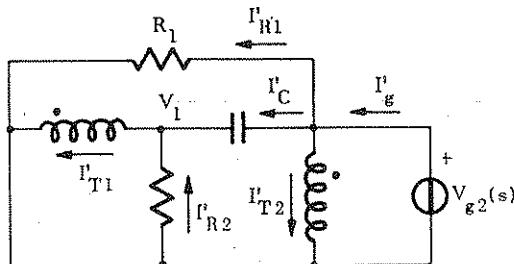


Fig. III.B.21 - Circuito quando agisce V_{g2} .

In totale, la corrente I_g vale:

$$I_g = I_g + I'_g = \frac{2}{s} - \left(\frac{8}{s} + \frac{4}{s^2} \right) e^{-s} + \left(\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} \right) e^{-2s}$$

Antitrasformando, si ottiene la soluzione:

$$i_g(t) = 2 u_{-1}(t) - 8 u_{-1}(t-1) - 4 u_{-2}(t-1) + 4 u_{-1}(t-2) + 2 u_{-2}(t-2)$$

che corrisponde all'andamento di fig. III.B.22.

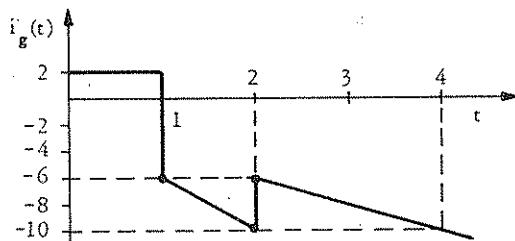


Fig. III.B.22

Esempio III.B.8

Determinare la corrente che scorre nell'induttore L nel circuito di fig. III.B.23.

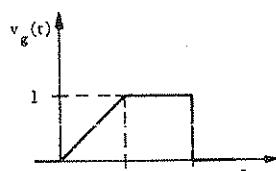
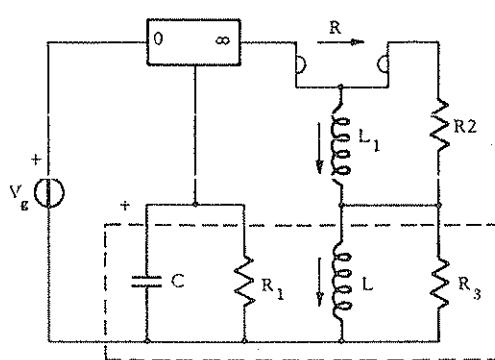


Fig. III.B.23 - Circuito considerato nell'esempio III.B.8. I valori dei componenti sono: $R=R_1=R_2=R_3=1$, $C=1$, $L=L_1=1$. Le condizioni iniziali sono: $V_c(0)=1$; $i_L(0)=i_{L1}(0)=1$ (Ω , F, H, V, A, s).

L'analisi può essere effettuata in modo molto semplice osservando che:

- 1) le correnti che scorrono in C , R_1 , L , R_3 sono in equilibrio, facendo riferimento al taglio tratteggiato e tenendo conto che il generatore non eroga corrente, essendo attaccato ad un nullore dalla parte nullatore;
- 2) la tensione ai capi di C ed R_1 è V_g , in quanto la tensione sul nullatore è nulla.

Di conseguenza, è sufficiente trasformare nel dominio di Laplace solo la parte del circuito che riguarda C , R_1 , L , R_3 , V_g , come indicato in fig.III.B.24.

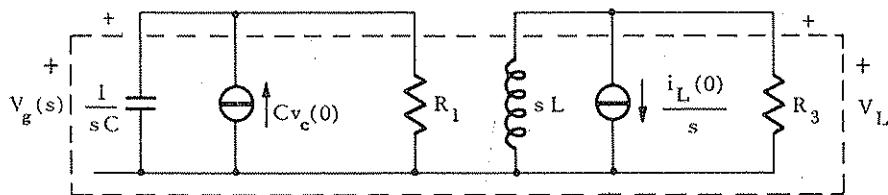


Fig.III.B.24

Effettuando l'equilibrio nel taglio tratteggiato, si ha:

$$\left(sC + \frac{1}{R_1} \right) V_g - Cv_C(0) + \left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_3} \right) V_L + \frac{i_L(0)}{s} = 0$$

Si ottiene:

$$V_L(s) = \frac{s}{s+1} \left[1 - \frac{1}{s} (s+1) V_g \right]$$

Trasformiamo $v_g(t)$, tenendo conto che si può esprimere con:

$$v_g(t) = u_{-2}(t) - u_{-2}(t-1) - u_{-1}(t-2)$$

che corrisponde a:

$$V_g(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}) - \frac{1}{s} e^{-2s}$$

In conclusione, $I_L(s)$ vale:

$$I_L(s) = \frac{V_L}{sL} + \frac{i_L(0)}{s} = \frac{2}{s+1} - V_g(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-2s}$$

e quindi l'andamento nel tempo è:

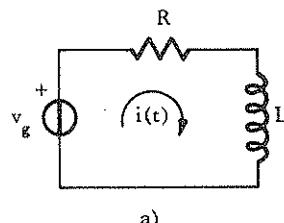
$$i_L(t) = 2 e^{-t} u_{-1}(t) - u_{-2}(t) + u_{-2}(t-1) + u_{-1}(t-2)$$

Nel circuito di fig. III.B.25 è considerato un circuito del primo ordine, nel quale è richiesto un andamento a rampa per la corrente di maglia. Tale circuito è significativo nel progetto di dispositivi di deflessione nei cinescopi a deflessione magnetica. Sono importanti le considerazioni energetiche. Poiché la tensione del generatore presenta una singolarità impulsiva, si ha un trasferimento istantaneo di energia dall'induttore al generatore.

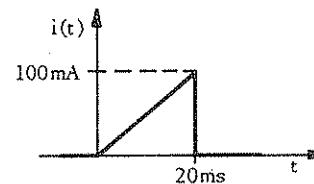
Esempio III.B.9

Nel circuito indicato in figura III.B.25, la corrente di maglia $i(t)$ ha l'andamento indicato nella parte b) della stessa figura e l'induttore è scarico per $t < 0$. Dopo aver determinato la tensione $v_g(t)$ del generatore, definita $E(t)$ l'energia scambiata fra $-\infty$ e t , si determini:

- 1) l'energia $E_g(t)$ erogata dal generatore;
- 2) l'energia $E_R(t)$ assorbita dal resistore;
- 3) l'energia $E_L(t)$ assorbita dall'induttore.



a)



b)

Fig. III.B.25 - Circuito considerato nell'esempio III.B.9 e andamento della corrente $i(t)$. I valori dei componenti sono: $R = 10 \Omega$ e $L = 10 \text{ mH}$.

Detto $T = 2 \cdot 10^{-2}$, l'andamento della corrente $i(t)$ può essere così espresso:

$$i(t) = A u_{-2}(t) - A u_{-2}(t-T) - B u_{-1}(t-T)$$

con $A = 5$ e $B = 0,1$. Trasformando secondo Laplace la corrente $i(t)$, si ottiene:

$$I(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^2} e^{-sT} - \frac{0,1}{s} e^{-sT}$$

Essendo l'impedenza di maglia pari a $R + sL = 10 + 10^{-2}s$, si ottiene

$$V_g(s) = \frac{50}{s^2} - \frac{50}{s^2} e^{-sT} - \frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{0,05}{s} - \frac{0,05}{s} e^{-sT} - 10^{-3} e^{-sT}$$

Antitrasformando si ottiene

$$v_g(t) = 50 u_{-2}(t) - 50 u_{-2}(t-T) - u_{-1}(t-T) + 0,05 u_{-1}(t) - 0,05 u_{-1}(t-T) - 0,001 u_0(t-T)$$

L'andamento della tensione $v_g(t)$ è indicato in figura III.B.26

Determiniamo ora l'andamento dell'energia $E_g(t)$ erogata dal generatore. A tale scopo osserviamo che la potenza $P_g(t)$ erogata dal generatore vale:

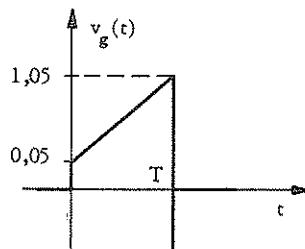


Fig. III.B.26 - Andamento della tensione $v_g(t)$.

$$P_g(t) = v_g(t) i(t) = (50t + 0.05) 5 \quad \text{per } 0 < t < T$$

mentre è nulla al di fuori di detto intervallo.

Pertanto si ha:

$$E_g(t) = \int_0^t P_g(\tau) d\tau = \int_0^t (50\tau + 0.05) 5 \tau d\tau = \frac{250}{3} t^3 + \frac{0.25}{2} t^2 \quad (0 < t < T)$$

Ponendo nell'espressione precedente $t = T^-$, si ottiene:

$$E_g(T^-) = \frac{2}{3} 10^{-3} + 0.05 10^{-3}$$

L'energia assorbita dal generatore per $t > T$, deve tenere conto dell'effetto dell'impulso presente per $t = T$. Tenuto conto della nota alla formula (III.2.15) e quindi che:

$$(III.B.1) \quad \int_{0^-}^{0^+} u_0(\tau) u_{-1}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$$

si ottiene:

$$E_g(t) = E_g(T^-) - \int_{T^-}^{T^+} 10^{-3} u_0(\tau-T) 0.1 u_{-1}(\tau-T) d\tau = E_g(T^-) - \frac{1}{2} 10^{-4} = \frac{2}{3} 10^{-3}, \quad (t > T)$$

Pertanto l'andamento di $E_g(t)$ è quello riportato in fig. III.B.27 a.

Per quanto riguarda l'espressione di $E_R(t)$ si ottiene:

$$E_R(t) = \int_0^t 10 (5\tau)^2 d\tau = \frac{250}{3} t^3 \quad (0 < t < T) ; \quad E_R(t) = \frac{250}{3} T^3 = \frac{2}{3} 10^{-3} \quad (t > T)$$

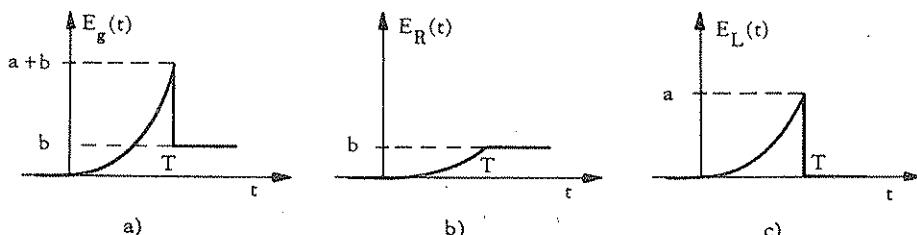


Fig. III.B.27 - Andamenti di $E_g(t)$, $E_R(t)$ e $E_L(t)$. Le quantità a e b indicate in figura valgono: $a = 0.05 10^{-3}$, $b = (2/3) 10^{-3}$.

Infine l'andamento di $E_L(t)$ è pari a:

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{0.25}{2} t^2 \quad (0 < t < T) : \quad E_L(T^-) = 0.5 \cdot 10^{-4}$$

mentre è nullo al di fuori di detto intervallo. Gli andamenti di $E_g(t)$, $E_R(t)$ e $E_L(t)$ sono riportati in fig. III.B.27 a), b), c), rispettivamente.

Si vede che per ogni t vale $E_g(t) = E_R(t) + E_L(t)$. In particolare nell'intorno dell'istante T vi è una restituzione istantanea di energia dall'induttore al generatore.

----- *

Quando in un circuito è presente una maglia costituita da soli condensatori e generatori di tensione ovvero un taglio costituito da soli induttori e generatori di corrente, è possibile che avvengano trasferimenti istantanei di energia fra tali componenti in corrispondenza ad andamenti di tipo impulsivo della corrente ovvero della tensione. In assenza di generatori, tali variazioni istantanee di energia possono ancora avvenire, ma solo per effetto di apertura o chiusura di interruttori. In tali casi può accadere che il principio di conservazione dell'energia appaia apparentemente violato, se non si tiene conto che in presenza di tensioni o correnti impulsive l'interruttore ideale si può comportare come un elemento dissipativo. Si consideri infatti la maglia di condensatori indicata in fig. III.B.28.

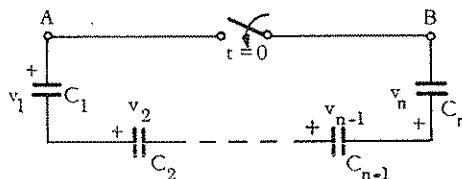


Fig. III.B.28 - Maglia di condensatori in presenza di un interruttore. Le tensioni indicate sono i valori iniziali validi per $t < 0$.

Utilizzando il metodo di Laplace e ponendo in serie i generatori e i condensatori nel dominio di s , si ottiene il circuito di fig. III.B.29.

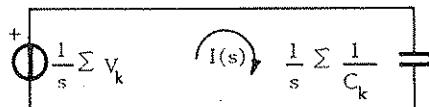


Fig. III.B.29 - Circuito fittizio nel dominio di Laplace del circuito di fig. III.B.28.

Dall'esame del circuito di fig. III.B.29 si può osservare che la maglia di fig. III.B.28 può essere sostituita da una maglia contenente un unico condensatore pari alla serie dei condensatori dati e avente tensione iniziale pari alla somma delle tensioni iniziali. Detti quindi:

$$C_s = 1 / [\sum 1 / C_k] \quad \text{e} \quad V_s = \sum V_k$$

si ottiene: $I(s) = C_s V_s$ e quindi: $i(t) = C_s V_s u_0(t)$.

In figura III.B.28 l'interruttore, corrispondente al bipolo connesso fra i nodi A e B, presenta i seguenti andamenti di tensione e corrente:

a) tensione: $v_{AB}(t) = [1 - u_{-1}(t)] V_s$

b) corrente: $i(t) = C_s V_s u_0(t)$.

Pertanto il bipolo connesso ai nodi A e B assorbe la seguente quantità di energia:

$$E = \int_{0^-}^{0^+} V_s [1 - u_{-1}(t)] C_s V_s u_0(t) dt$$

che, tenuto conto dell'integrale (III.B.1), è pari a $C_s V_s^2 / 2$. Tale energia è detta *energia perduta per commutazione* ed è pari all'energia ceduta istantaneamente dal condensatore C_s nell'intervallo $[0^-, 0^+]$. È evidente che il comportamento dell'interruttore nel caso considerato è anomalo, in quanto tale elemento in ogni altro caso (tensione e corrente non impulsive) assorbe energia nulla. Situazioni non anomale si possono ottenere inserendo un resistore nella maglia considerata. Si può facilmente verificare che, qualunque sia il valore di tale resistore, esso dissipà tutta l'energia perduta per commutazione (in un tempo infinito) e che in tal caso l'interruttore non dissipà alcuna energia.

Applichiamo le considerazioni precedenti all'esempio III.B.10.

Esempio III.B.10

Nel circuito indicato in fig.III.B.30, si ha: $C_1 = C_2 = 1 F$, $C_3 = 0,5 F$ e $R = 1 \Omega$.

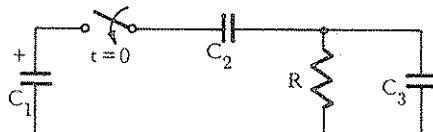


Fig. III.B.30 - Circuito considerato nell'esempio III.B.10

Per $t < 0$ l'interruttore è aperto, il condensatore C_1 è carico alla tensione $V_0 = 100 V$, mentre i condensatori C_2 e C_3 sono scarichi. L'interruttore si chiude all'istante $t = 0$.

Calcolare gli andamenti delle tensioni sui condensatori e l'andamento della corrente nel condensatore C_1 . Determinare inoltre l'energia totale del circuito per $t < 0$ e per t che tende all'infinito e verificare il bilancio energetico tenendo conto dell'energia dissipata nel resistore e dell'energia perduta per commutazione.

Il circuito fittizio nel dominio di Laplace è indicato in fig.III.B.31.

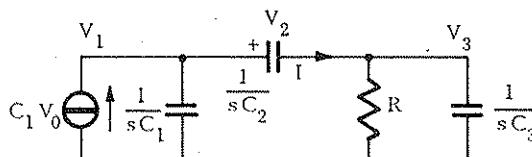


Fig.III.B.31 - Circuito nel dominio di s relativo all'esempio III.B.10.

Detto $G = 1/R$, il sistema risolvente su base nodi è il seguente:

$$\begin{cases} V_1(sC_1 + sC_2) - V_3sC_2 = C_1V_0 \\ -V_1sC_2 + V_3(sC_2 + sC_3 + G) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$V_1 = \frac{s(C_2 + C_3) + G}{sC_2} V_3 = \frac{1,5s + 1}{s} V_3$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} V_3 & \left\{ \frac{s(C_2 + C_3) + G}{C_2} (C_2 + C_3) - sC_2 \right\} = C_1V_0 \\ V_3 & \frac{s(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3) + G(C_1 + C_2)}{C_2} = C_1V_0 \end{aligned}$$

Essendo: $C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 = 2$, si ha:

$$V_3 = \frac{1}{s+1} \frac{V_0}{2}$$

e quindi, antitrasformando:

$$v_3(t) = \frac{V_0}{2} e^{-t} u_{-1}(t)$$

D'altra parte si ha:

$$V_1 = \frac{(1,5s+1)}{s(s+1)} \frac{V_0}{2} = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \right) \frac{V_0}{2}, \quad \text{con: } A = 1; \quad B = \frac{-1,5+1}{-1} = 0,5$$

e quindi, antitrasformando:

$$v_1(t) = \frac{V_0}{2} (1 + e^{-t}) u_{-1}(t)$$

D'altra parte la tensione e la corrente sul condensatore C_2 sono pari a:

$$v_2(t) = v_1(t) - v_3(t) = \frac{V_0}{2} (1 - 0.5 e^{-t}) u_{-1}(t)$$

$$i(t) = C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{V_0}{4} u_0(t) + \frac{V_0}{2} 0.5 e^{-t} u_{-1}(t)$$

Gli andamenti delle tensioni $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ e della corrente $i(t)$ sono mostrati nella figura III.B.32. Occorre notare che la corrente $i(t)$ calcolata è la stessa che scorre nell'interruttore e nel condensatore C_1 di fig. III.B.30.

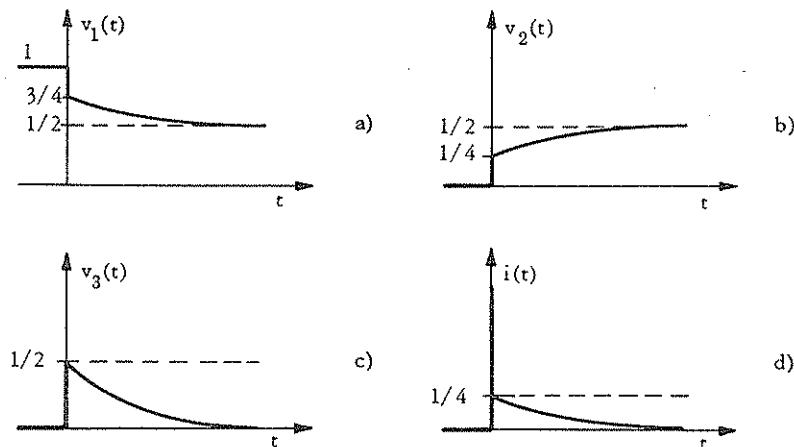


Fig. III.B.32 - Andamenti nel tempo delle tensioni $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ e della corrente $i(t)$ per il circuito di fig. III.B.30. Tutte le ordinate devono essere moltiplicate per il fattore V_0 .

Determiniamo ora i valori delle energie relative al circuito considerato.

- l'energia totale del circuito E_0 , immagazzinata nel condensatore C_1 , per $t < 0$, è pari a $E_0 = V_0^2 / 2$;
- l'energia totale del circuito E_{inf} , immagazzinata nei condensatori C_1 e C_2 per t che tende all'infinito, è pari a $E_{\text{inf}} = (V_0^2 / 8) + (V_0^2 / 8) = V_0^2 / 4$;
- l'energia totale E_R dissipata sul resistore è pari a:

$$E_R = \int_0^\infty \frac{v_3^2(t)}{R} dt = \int_0^\infty \frac{1}{R} \left(\frac{V_0}{2} e^{-t} \right)^2 dt = \frac{V_0^2}{4} \int_0^\infty e^{-2t} dt = \frac{V_0^2}{8}$$

Si vede che il bilancio energetico fra le energie E_0 , E_{inf} e E_R non è verificato in quanto risulta $E_0 > E_{\text{inf}} + E_R$. Essendo infatti presente una maglia formata dai condensatori e dall'interruttore, occorre considerare anche l'energia E_C perduta per commutazione. Essa si può calcolare considerando la tensione e la corrente ai capi dell'interruttore e integrando la potenza assorbita nell'intervallo $[0^-, 0^+]$, nel modo seguente:

$$E_C = \int_{0^-}^{0^+} V_0 [1 - u_{-1}(t)] \frac{V_0}{4} u_0(t) dt = \frac{V_0^2}{8}$$

tenendo conto che il valore medio di $1 - u_{-1}(t)$ per $t = 0$ vale 0,5.

D'altra parte tale energia E_C si può anche determinare considerando il condensatore serie C_s della maglia di condensatori e calcolando l'energia perduta da tale condensatore nell'intervallo $[0^-, 0^+]$. Si ottiene: $1/C_s = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 = 4$, da cui $C_s = 1/4$. Pertanto si ha: $E_C = (1/2) C_s V_0^2 = (1/8) V_0^2$.

Considerando anche l'energia E_C il bilancio energetico è verificato. Infatti si ha $E_0 = E_{inf} + E_R + E_C$.

* * *

CAPITOLO IV

FUNZIONI DI RETE

IV.1 - Eccitazione e risposta di un circuito.

Un circuito elettrico diviene sede di fenomeni elettrici sotto la azione di eccitazioni di origine sia esterna che interna al circuito stesso. Le eccitazioni di origine esterna sono «rappresentate» dai generatori indipendenti, le cui grandezze impresse sono imposte dall'esterno; le eccitazioni di origine interna sono quelle dovute ai generatori indipendenti presenti nei circuiti equivalenti secondo Laplace dei componenti reattivi, che tengono conto delle condizioni iniziali di questi, tramite le loro grandezze impresse. Dal punto di vista dell'analisi di un circuito, i due tipi di generatori sono perfettamente equivalenti ed indistinguibili. Le loro grandezze impresse sono le «cause» dei fenomeni elettrici che si svolgono nel circuito e le grandezze elettriche conseguenti sono i relativi «effetti» o «risposte» del circuito.

Il legame tra effetto e causa nei circuiti che consideriamo è facilmente caratterizzabile per la linearità degli stessi, in conseguenza della quale l'effetto di ciascuna causa risulta indipendente dalla presenza delle altre e dipendente in modo semplice dalla causa stessa. La caratterizzazione quantitativa di tale legame è l'oggetto del presente capitolo.

IV.1.1 - Caso di una sola eccitazione.

Il legame tra una qualsiasi eccitazione $e(t)$ (grandezza impressa di un generatore di tensione o corrente) ed una qualsiasi risposta $u(t)$ (tensione o corrente che si stabilisce nel circuito) è in generale di tipo integro-differenziale, come visto nel cap.III. Solo nel caso particolare

dei circuiti senza memoria, tale legame si riduce ad una proporzionalità diretta, cioè:

$$(IV.1.1) \quad u(t) = a e(t)$$

in cui a dipende dalla struttura del circuito.

Il legame di semplice proporzionalità vale per una classe di circuiti molto più ampia, se si utilizza il metodo della trasformata di Laplace. Infatti nel cap. III è stato fatto vedere che qualsiasi circuito lineare e permanente con memoria può essere analizzato in modo del tutto simile ad un circuito senza memoria, se in luogo di considerare il circuito assegnato nel dominio del tempo, se ne considera un altro equivalente nel dominio della variabile s . In tale nuovo circuito si hanno, al posto delle grandezze $e(t)$ e $u(t)$, le corrispondenti trasformate, cioè $E(s)$ trasformata della eccitazione ed $U(s)$ trasformata della risposta. Tra $U(s)$ ed $E(s)$ esiste di conseguenza un legame di semplice proporzionalità. Occorre però notare che la costante di proporzionalità, pur non dipendendo da $E(s)$ per la linearità del circuito, dipende dalla variabile s , cioè:

$$(IV.1.2) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

L'espressione (IV.1.2) ha validità molto più ampia della (IV.1.1), in quanto si riferisce a qualsiasi circuito per il quale si può applicare il metodo della trasformata di Laplace⁽¹⁾.

La funzione $F(s)$, che permette di ottenere nel dominio di s la risposta a partire dall'eccitazione, prende il nome di «funzione di rete». Vale quindi la seguente definizione:

Definizione IV.1.1 - «Si definisce come funzione di rete il rapporto fra la \mathcal{L} -trasformata dell'effetto (risposta), dovuto ad una determinata causa (eccitazione) e la \mathcal{L} -trasformata della causa stessa».

È evidente che la funzione di rete dipende: 1) dalla struttura del circuito; 2) dal tipo e posizione del generatore di eccitazione; 3) dal tipo e posizione della grandezza elettrica considerata come risposta. Vedremo l'influenza di questi fattori nel § IV.2 e nell'appendice IV.A.

(1) - È opportuno notare il fatto che la (IV.1.1) è un caso particolare della (IV.1.2). Infatti nel caso in cui $F(s)$ non dipende da s , come ad esempio per i circuiti senza memoria, si ottiene:

$$U(s) = F E(s)$$

che equivale alla (IV.1.1) nel dominio del tempo, essendo F una costante.

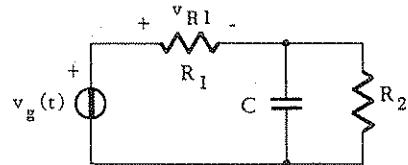
Esempio IV.1.1

Nel circuito di fig.IV.1.1 determinare la funzione di rete, relativa alla tensione ai capi del resistore R_1 (risposta) ed alla tensione del generatore ⁽¹⁾.

La determinazione della funzione di rete richiede di considerare una sola causa; supponiamo perciò scarico il condensatore all'istante iniziale. Di conseguenza il circuito nel dominio di s che corrisponde a quello d'interesse è come indicato in figura IV.1.2.

Fig.IV.1.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.1.1. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 3, R_2 = 1, C = 2 \text{ } (\Omega, F)$$



Prendendo il nodo 1 come riferimento e scrivendo l'equazione al nodo 3 delle correnti uscenti, si ottiene:

$$E_3 \left(sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + V_g(s) \cdot \left(sC + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

Da cui, essendo $V_{R1}(s) = -E_3$, si ha:

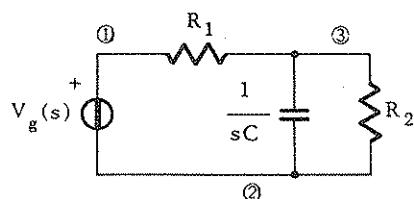
$$V_{R1}(s) = \frac{sC + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} V_g(s)$$

Quindi risulta:

$$V_{R1}(s) = \frac{sCR_1R_2 + R_1}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2} V_g(s)$$

Tenendo conto che nel caso presente $V_g(s) = E(s)$, $U(s) = V_{R1}(s)$, si ha, in base alla (IV.1.2).

Fig.IV.1.2 - Circuito che corrisponde nel dominio di s a quello di fig.IV.1.1.



(1) - Nell'esempio l'andamento della tensione $v_g(t)$ non è stato indicato, poichè la funzione di rete dipende solo dal tipo e dalla posizione del generatore di eccitazione.

$$F(s) = \frac{sCR_1R_2 + R_1}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$F(s) = \frac{6s + 3}{6s + 4}$$

che è la funzione di rete richiesta.

Osservazione IV.1.1

Dalla definizione di funzione di rete si può dedurre che essa, pur essendo una funzione di s , non è una trasformata di Laplace, ma semplicemente un rapporto di trasformate di Laplace⁽¹⁾. L'utilità della nozione di funzione di rete deriva dal fatto che essa è un operatore molto semplice che permette di ottenere la risposta a partire dalla eccitazione, qualunque essa sia.

Osservazione IV.1.2

L'espressione (IV.1.2) definisce la funzione di rete $F(s)$ come rapporto fra effetto e causa nel dominio di s . Si sarebbe potuto con pari validità definire una funzione $G(s)$ come rapporto nel dominio di s fra la causa e l'effetto, in base alla seguente relazione:

$$(IV.1.3) \quad E(s) = G(s) U(s)$$

In alcuni casi viene effettivamente utilizzata l'espressione (IV.1.3); tuttavia occorre osservare che in generale la $G(s)$ non è una funzione di rete, ma l'inverso di una tale funzione, risultando $G(s) = 1/F(s)$. Tale distinzione è necessaria, poiché le funzioni di rete e le loro inverse non godono delle stesse proprietà. Un esempio molto semplice in tal senso è il seguente. Si consideri il circuito «partitore resistivo» di figura IV.1.3. In questo caso la causa è la tensione V_g , mentre l'effetto è la tensione V_u ; la funzione di rete risulta:

$$(IV.1.4) \quad F(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

mentre il suo inverso:

$$(IV.1.5) \quad G(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

(1) - È opportuno mettere in evidenza che un rapporto di trasformate *non* è mai legato in modo semplice al rapporto delle rispettive grandezze nel dominio del tempo.

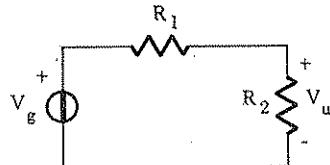


Fig.IV.1.3 - Partitore resistivo.

Entrambe le funzioni non dipendono da s , poiché il circuito è senza memoria. Tuttavia mentre $F(s)$ è sempre minore di uno (e tale proprietà è caratteristica del partitore), $G(s)$ è sempre maggiore di uno. La differenza di proprietà delle funzioni di rete e delle relative inverse verrà discussa in maggiore dettaglio successivamente.

IV.1.2 - Caso di più eccitazioni.

Nel caso che siano presenti nel circuito più eccitazioni, la risposta si ottiene come somma delle risposte dovute alle singole eccitazioni, ciascuna agente da sola. Tenendo conto che le eccitazioni sono dovute o a cause esterne o a cause interne (generatori presenti nei circuiti equivalenti dei componenti reattivi), si ottiene per la risposta la seguente espressione:

$$(IV.1.6) \quad U(s) = \sum_{i=1}^{N_g} F_i(s) E_i(s) + \sum_{i=1}^{N_c} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

dove:

$U(s)$ è la generica risposta nel circuito in esame;

$E_i(s)$ è la trasformata di Laplace della i -esima eccitazione di tipo esterno (relativa ad un generatore di tensione o di corrente);

N_g è il numero delle eccitazioni di tipo esterno;

$F_i(s)$ è la funzione di rete relativa all'eccitazione $E_i(s)$;

$v_i(0^-)$ è la tensione ai capi dell' i -esimo condensatore all'istante $t=0^-$;

N_c è il numero dei condensatori presenti;

$i_i(0^-)$ è la corrente relativa all' i -esimo induttore all'istante $t=0^-$;

N_L è il numero degli induttori presenti.

Le funzioni $H_i(s)$ e $K_i(s)$ differiscono da una funzione di rete per un fattore che dipende dal particolare generatore usato per le condizioni iniziali. Precisamente, si ha la seguente situazione:

1) nel caso che si consideri per il condensatore un generatore di tensione, la cui grandezza impressa è $v_i(0^-)/s$, la funzione di rete relativa è:

$$s H_i(s)$$

2) nel caso che si consideri per il condensatore un generatore di corrente, la cui grandezza impressa è $C_i v_i(0^+)$, la funzione di rete relativa è:

$$\frac{1}{C_i} H_i(s) ;$$

3) nel caso che si consideri per l'induttore un generatore di tensione, la cui grandezza impressa è $L_i i_i(0^+)$, la funzione di rete relativa è:

$$\frac{1}{L_i} K_i(s) ;$$

4) nel caso che si consideri per l'induttore un generatore di corrente, la cui grandezza impressa è $i_i(0^+)/s$, la funzione di rete relativa è:

$$s K_i(s)$$

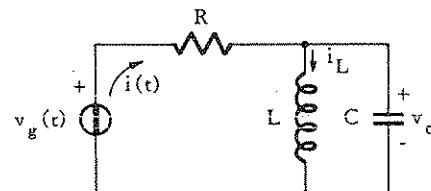
Esempio IV.1.2

Determinare le funzioni di rete relative alle singole eccitazioni per il circuito di fig.IV.1.4, essendo la risposta d'interesse la corrente $i(t)$ che percorre il generatore di tensione.

Fig.IV.1.4 - Circuito considerato nell'esempio IV.1.2. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, L = 2, C = 1, v_g(t) = u_{-1}(t)$$

$$v_c(0^+) = 2, i_L(0^+) = 1 \text{ (}\Omega, \text{H, F, V, A)}$$



Il circuito equivalente nel dominio di s , ottenuto utilizzando per i componenti reattivi gli schemi di tipo serie, è mostrato in fig.IV.1.5. Applicando il metodo di analisi su base maglie, si ottiene:

$$\begin{cases} (R + sL)I_1 + sLI_2 = V_g(s) + L i_L(0^+) \\ sLI_1 + \left(sL + \frac{1}{sC} \right) I_2 = \frac{v_c(0^+)}{s} + L i_L(0^+) \end{cases}$$

Ricavando la corrente I_2 dalla seconda equazione si ha:

$$I_2 = \frac{sC}{s^2LC + 1} \left[\frac{v_c(0^+)}{s} + L i_L(0^+) - sLI_1 \right]$$

Sostituendo nella prima equazione tale espressione, si ottiene:

$$\left(R + \frac{sL}{s^2LC + 1} \right) I_1 = V_g(s) - \frac{sLC}{s^2LC + 1} v_c(0^-) + \frac{L}{s^2LC + 1} i_L(0^-)$$

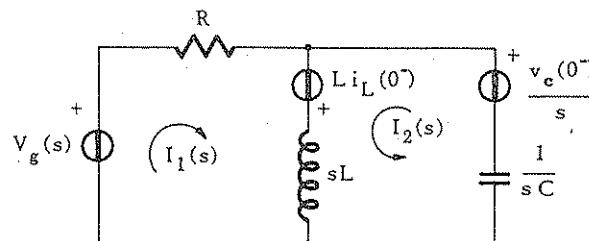


Fig.IV.1.5 - Circuito di fig.IV.1.4 trasformato nel dominio di s.

L'espressione della $I_1(s)$ è quindi:

$$I_1(s) = \frac{s^2LC + 1}{s^2RLC + sL + R} V_g(s) - \frac{sLC}{s^2RLC + sL + R} v_c(0^-) + \frac{L}{s^2RLC + sL + R} i_L(0^-)$$

Confrontando tale espressione con la (IV.1.6) si ha:

$$U(s) = I_1(s)$$

$$N_g = 1 \quad ; \quad E_1(s) = V_g(s)$$

$$F_1(s) = \frac{s^2LC + 1}{s^2RLC + sL + R}$$

$$N_c = 1 \quad ; \quad v_1(0^-) = v_c(0^-)$$

$$H_1(s) = \frac{-sLC}{s^2RLC + sL + R}$$

$$N_L = 1 \quad ; \quad i_1(0^-) = i_L(0^-)$$

$$K_1(s) = \frac{L}{s^2RLC + sL + R}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$F_1(s) = \frac{2s^2 + 1}{2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad H_1(s) = -\frac{2s}{2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad K_1(s) = \frac{2}{2s^2 + 2s + 1}$$

Quindi le funzioni di rete richieste sono:

$$F_1(s) ; \quad \frac{2s^2}{2s^2 + 2s + 1} ; \quad \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

IV.2 - Classificazione delle funzioni di rete.

Abbiamo osservato, in relazione alla definizione di funzione di rete, che essa dipende da tre fattori: struttura del circuito, posizione e tipo della causa e dell'effetto. Nel presente paragrafo esaminiamo l'influenza degli ultimi due fattori, rimandando per il primo all'appendice IV.A. L'influenza di questi fattori è notevole e conviene che sia messa in evidenza già a livello di definizione. Precisamente dal punto di vista della posizione della causa e dell'effetto le funzioni di rete si distinguono in *funzioni di trasferimento* e *funzioni di immettenza di ingresso* (o semplicemente di immettenza). Nel primo caso la causa e l'effetto si riferiscono a coppie di morsetti differenti nel circuito e possono essere a seconda dei casi o tensioni o correnti; nel secondo caso invece la causa e l'effetto si riferiscono alla stessa coppia di morsetti e perciò una deve essere una tensione e l'altra una corrente o viceversa. Ad esempio nel caso considerato nell'esempio IV.1.1 la funzione di rete richiesta è una funzione di trasferimento (l'eccitazione è infatti una tensione, mentre la risposta è la tensione ai capi di un altro bipolo); nel caso dell'esempio IV.1.2, invece, la funzione di rete $F_1(s)$ è una funzione di immettenza di ingresso, poiché l'eccitazione è la tensione ai capi di un bipolo e la risposta è la corrente che lo attraversa.

Dal punto di vista del tipo della causa e dell'effetto, le funzioni di rete si distinguono in quattro tipi, a seconda che l'eccitazione e la risposta siano tensioni o correnti. La nomenclatura utilizzata nei quattro casi è riportata in tab.IV.2.1. Si può notare da questa tabella che quando l'eccitazione e la risposta sono entrambe tensioni (o entrambe correnti) si ha senz'altro il caso di una funzione di trasferimento. Nel caso invece di impedenza o ammettenza, esse possono essere sia funzioni di trasferimento sia funzioni d'immettenza d'ingresso.

Infine è opportuno mettere in evidenza che le funzioni di rete non hanno dimensioni fisiche nel caso che l'eccitazione e la risposta siano dello stesso tipo. Nei rimanenti due casi, esse hanno le dimensioni di ohm quando si tratta di un'impedenza e di mho quando si tratta di un'ammettenza.

Tabella IV.2.1 - I vari tipi di funzioni di rete che si ottengono tenendo conto della natura dell'eccitazione e della risposta.

Eccitazione Risposta	Tensione	Corrente
Tensione	Funzione di trasferimento in tensione	Impedenza
Corrente	Ammettenza	Funzione di trasferimento in corrente

Osservazione IV.2.1

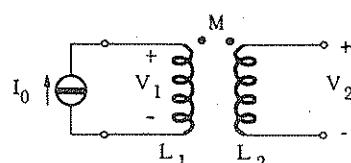
Le definizioni di impedenza ed ammettenza introdotte in tab.IV.2.1 sono congruenti con le definizioni di tali grandezze date nel cap.III e ne rappresentano la naturale estensione. Ciò può essere visto chiaramente nel seguente caso particolare. Consideriamo due induttori accoppiati mutualmente ed esaminiamo dapprima il caso in cui sia presente una sola eccitazione applicata ad uno di essi (generatore di corrente) e si prenda come risposta la tensione ai suoi capi (fig.IV.2.1). Supponendo che gli induttori siano a riposo all'istante $t = 0^+$ ed usando la trasformata di Laplace, si ha che:

$$(IV.2.1) \quad V_1(s) = s L_1 I_0(s)$$

In questa situazione, $s L_1$ è l'impedenza del primo induttore, già introdotta nel cap.III, e che in base alla tab.IV.2.1 rappresenta un'immettenza d'ingresso del tipo impedenza, in quanto la causa è la corrente del generatore e l'effetto è la tensione ai suoi capi. Consideriamo ora come effetto la tensione V_2 ; dalle relazioni costitutive degli induttori accoppiati mutualmente si ha che:

$$(IV.2.2) \quad V_2 = s M I_0$$

Fig.IV.2.1 - Induttori accoppiati mutualmente.



Dalla tab.IV.2.1, vediamo che $s M$ è una funzione di trasferimento del tipo impedenza.

In conclusione, dall'esame delle relazioni costitutive degli induttori accoppiati mutuamente, cioè:

$$(IV.2.3) \quad \begin{aligned} V_1 &= sL_1 I_1 + sMI_2 \\ V_2 &= sMI_1 + sL_2 I_2 \end{aligned}$$

si vede chiaramente la congruenza delle definizioni di tab.IV.2.1 con quelle del cap.III, in quanto tutte le funzioni sL_1 , sL_2 , sM sono funzioni di rete del tipo impedenza, le prime due funzioni d'ingresso, l'ultima di trasferimento.

Osservazione IV.2.2

Nell'osservazione IV.1.2 è stato fatto notare che in generale non sono delle funzioni di rete quelle funzioni ottenute considerando nel dominio di s il rapporto fra eccitazione e risposta (e non come dalla definizione il rapporto fra risposta ed eccitazione); tali funzioni sono infatti inverse di funzioni di rete e corrispondono al fatto fisico di uno scambio fra causa ed effetto. Tale distinzione rimane essenziale per le funzioni di trasferimento, mentre risulta superflua nel caso delle funzioni di immettenza di ingresso; infatti in quest'ultimo caso si può considerare come eccitazione la tensione, ottenendo come risposta la corrente, ovvero come eccitazione la corrente ottenendo come effetto la tensione. Il fenomeno elettrico è nei due casi il medesimo; ciò implica che per ogni bipolo l'impedenza d'ingresso è sempre l'inversa dell'ammettenza d'ingresso. Ambedue queste grandezze appartengono alla classe delle immettenze e perciò si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà IV.2.1 - «L'immettenza d'ingresso e la sua inversa sono entrambe funzioni di rete».

Tale proprietà verrà utilizzata nel § IV.4.

IV.3 - La risposta impulsiva.

Nell'osservazione IV.1.1 è stato messo in evidenza che una funzione di rete $F(s)$ non è la trasformata di Laplace di una grandezza elettrica presente nel circuito, ma bensì un rapporto di trasformate. È tuttavia possibile individuare una situazione nella quale una funzione di rete assume tale significato, facendo riferimento alla relazione che la definisce, cioè alla:

$$(IV.3.1) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

Ponendo infatti nella (IV.3.1):

$$(IV.3.2) \quad E(s) = 1$$

si ha che la risposta corrispondente è proprio uguale alla funzione di rete, cioè vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.3.1 - «*Nel dominio di s, la risposta di un circuito coincide con la corrispondente funzione di rete, quando la funzione di eccitazione è uguale ad uno».*

La proprietà IV.3.1 può essere posta in una forma più significativa, effettuando l'antitrasformata della (IV.3.2) e della risposta, cioè:

$$(IV.3.3) \quad \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \mathcal{L}^{-1}[1] = u_0(t)$$

$$(IV.3.4) \quad \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t)$$

La risposta $h(t)$ ha un significato fisico preciso: essa rappresenta l'andamento nel tempo dell'effetto quando la causa ha un andamento nel tempo coincidente con un impulso unitario. Tale risposta prende il nome di *risposta impulsiva*.

Dall'espressione (IV.3.4) si vede che la risposta impulsiva è analiticamente espressa dall'antitrasformata della funzione di rete. Vale perciò la seguente proprietà, che rappresenta la traduzione nel dominio del tempo della proprietà IV.3.1.

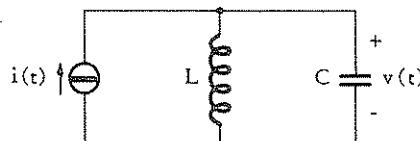
Proprietà IV.3.2 - «*La risposta impulsiva è uguale all'antitrasformata della corrispondente funzione di rete».*

La risposta impulsiva, come la funzione di rete, dipende dalle posizioni dell'impulso di eccitazione e della risposta. Di conseguenza in un circuito si possono definire più risposte impulsive, ciascuna delle quali corrisponde ad una particolare funzione di rete.

Esempio IV.3.1

Nel circuito di fig.IV.3.1 determinare la risposta impulsiva, relativa alla corrente $i(t)$ (eccitazione) e alla tensione $v(t)$ (risposta).

Fig.IV.3.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.3.1.
I valori dei componenti sono:
 $L = 1$, $C = 1$ (H , F).



Ricaviamo la funzione di rete relativa alla risposta impulsiva richiesta. A questo scopo trasformiamo il circuito assegnato come mostrato in fig.IV.3.2. Si ottiene:

$$I(s) = V(s) \left(sC + \frac{1}{sL} \right)$$

e quindi:

$$F(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{sL}{s^2LC + 1} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Indicando con $h(t)$ la risposta impulsiva, si ha in base alla proprietà IV.3.2:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] = \text{cost} \cdot u_1(t)$$

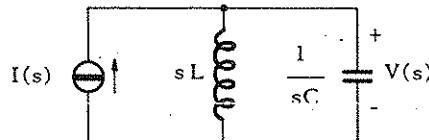


Fig.IV.3.2 - Circuito di figura IV.3.1 trasformato nel dominio di s .

L'importanza della nozione di risposta impulsiva risiede nella seguente proprietà:

Proprietà IV.3.3 - «In un circuito lineare e permanente, se è nota la risposta impulsiva $h(t)$, è univocamente determinata la risposta ad una generica eccitazione $e(t)$ ⁽¹⁾».

Infatti, per la proprietà IV.3.2, si può ottenere la funzione di rete corrispondente:

$$F(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

Perciò, dopo aver calcolato la trasformata dell'eccitazione, cioè:

$$E(s) = \mathcal{L}[e(t)]$$

si ha per la trasformata della risposta:

$$U(s) = F(s) E(s)$$

e quindi:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)]$$

(1) - Supponiamo che sia $h(t)$ sia $e(t)$ siano \mathcal{L} -trasformabili.

In conclusione in un circuito lineare e permanente la risposta impulsiva è sufficiente per caratterizzare il comportamento del circuito in presenza di eccitazioni di qualsiasi tipo.

Esempio IV.3.2

Sapendo che un circuito lineare e permanente ha una risposta impulsiva:

$$h(t) = 3 e^{-2t} u_{-1}(t)$$

determinare la risposta $u(t)$ che corrisponde ad un'eccitazione a gradino $e(t) = u_{-1}(t)$.

Trasformando $h(t)$ si ottiene:

$$H(s) = \frac{3}{s+2}$$

D'altra parte si ha:

$$E(s) = \frac{1}{s}$$

Perciò la trasformata della risposta vale:

$$U(s) = \frac{3}{s(s+2)}$$

Sviluppando la $U(s)$ in frazioni parziali, si ha:

$$U(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

dove:

$$A = \frac{3}{s+2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2} ; \quad B = \frac{3}{s} \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

Quindi si ha, antitrasformando:

$$u(t) = 1,5(1 - e^{-2t}) u_{-1}(t)$$

che rappresenta la risposta all'eccitazione a gradino.

Osservazione IV.3.1

E' stato visto che i circuiti lineari e permanenti sono caratterizzati dalla seguente relazione tra risposta ed eccitazione:

$$(IV.3.5) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

Ci si può porre la domanda se sia possibile ottenere una relazione esplicita nel dominio del tempo tra la risposta $u(t)$ e l'eccitazione $e(t)$; tale relazione dovrà essere ovviamente di tipo integro-differenziale.

Per rispondere a tale domanda è necessario fare uso della nozione di risposta impulsiva e di una operazione integrale detta «*prodotto integrale*» o «*prodotto di convoluzione*»⁽¹⁾. Tale operazione è definita nel seguente modo:

Definizione IV.3.1 - «Assegnate due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$, si definisce prodotto integrale di tali funzioni la seguente espressione:

$$(IV.3.6) \quad f_3(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

L'utilità dell'operazione di prodotto integrale è dovuta al seguente teorema, che viene dimostrato nell'ambito della teoria della trasformazione di Laplace:

Teorema IV.3.1 - «La trasformata di Laplace del prodotto integrale di due funzioni è uguale al prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni stesse⁽²⁾».

In base al teorema del prodotto integrale si ottiene, antitrasformando la (IV.3.5) e ricordando l'espressione (IV.3.4):

$$(IV.3.7) \quad u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s) E(s)] = \int_0^t h(\tau) e(t - \tau) d\tau$$

La (IV.3.7) rappresenta il legame diretto, nel dominio del tempo, fra l'eccitazione $e(t)$ e la risposta $u(t)$; in tale espressione la risposta impulsiva $h(t)$ tiene conto dell'azione del circuito. Quanto detto si può riassumere nella seguente proprietà:

Proprietà IV.3.4 - «La risposta $u(t)$ di un circuito lineare e permanente è uguale al prodotto integrale (prodotto di convoluzione) fra la risposta impulsiva $h(t)$ e la funzione di eccitazione $e(t)$ ».

(1) - Il prodotto integrale viene indicato spesso con la notazione abbreviata:

$$f_3(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

(2) - Tale teorema vale sotto opportune ipotesi restrittive per le quali si rimanda ai testi riguardanti le trasformate di Laplace.

L'espressione (IV.3.7) rappresenta la generalizzazione dell'espress. (IV.1.1) valida per i circuiti senza memoria. Infatti, per tali circuiti, la risposta impulsiva è un impulso di ampiezza a , cioè:

$$(IV.3.8) \quad h(t) = a u_0(t)$$

e perciò si ottiene dalla (IV.3.7):

$$(IV.3.9) \quad u(t) = \int_0^t a u_0(\tau) e(t-\tau) d\tau = a e(t) \Big|_{\tau=0} = a e(t)$$

Osservazione IV.3.2

La nozione di risposta impulsiva è molto più generale della nozione di funzione di rete. Quest'ultima, che vale nel dominio di s , può essere utilizzata solo per i circuiti lineari e permanenti; mentre la prima, che si riferisce a condizioni operative di funzionamento e non a proprietà matematiche, può essere considerata per qualunque circuito.

Per ottenere operativamente la risposta impulsiva di un circuito è necessario utilizzare una forma d'onda di eccitazione che approssimi in modo adeguato l'impulso unitario. Si può facilmente mostrare che ciò non è difficile da ottenersi nel caso dei circuiti lineari. Infatti l'impulso unitario può essere approssimato in questo caso in modo adeguato da una qualunque forma d'onda $e(t)$, che goda delle seguenti proprietà:

- 1) la funzione $e(t)$ è diversa da zero solo nell'intervallo $(0, \theta)$;
- 2) per ogni t , la risposta impulsiva $h(t)$ deve potersi considerare costante in detto intervallo, cioè $h(t-\tau) \equiv h(t)$, per $0 < t < \theta$.

Per dimostrare la sufficienza delle suddette condizioni consideriamo il prodotto integrale fra $h(t)$ ed $e(t)$. Si ottiene⁽¹⁾:

$$(IV.3.10) \quad h_L(t) = \int_0^t e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Per la prima ipotesi, poiché $e(\tau)$ è nulla all'infuori dell'intervallo $(0, \theta)$, si può sostituire l'integrale (IV.3.10) con il seguente:

$$(IV.3.11) \quad h_L(t) = \int_0^\theta e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

⁽¹⁾ - Il prodotto integrale (IV.3.10) è stato espresso in forma diversa da quella considerata nella (IV.3.7), scambiando fra loro $e(t)$ ed $h(t)$. È facile dimostrare che le due forme sono equivalenti.

Tenendo conto della seconda ipotesi, sostituendo $h(t - \tau)$ con $h(t)$ si ottiene:

$$(IV.3.12) \quad h_1(t) = \int_0^{\theta} e(\tau)h(t) d\tau = h(t) \int_0^{\theta} e(\tau) d\tau$$

In conclusione la risposta $h_1(t)$ differisce dalla vera risposta impulsiva $h(t)$ per la quantità:

$$(IV.3.13) \quad a = \int_0^{\theta} e(\tau) d\tau$$

La risposta del circuito $h_1(t)$ ha quindi lo stesso andamento della risposta impulsiva ed inoltre la forma d'onda di eccitazione si comporta come se fosse impulsiva. Tuttavia essa non è un impulso unitario; la sua ampiezza infatti è pari alla quantità a (che si misura in volt sec).

D'altra parte in molte applicazioni non è possibile e spesso nemmeno conveniente approssimare l'impulso unitario meglio di quanto richiesto nell'ambito delle due ipotesi precedenti. Premesso che una forma d'onda esattamente impulsiva è fisicamente irrealizzabile, l'avvicinarsi troppo a tale forma d'onda potrebbe significare l'utilizzazione di variazioni tanto rapide nel tempo da rendere non più valide le ipotesi fatte sui modelli circuitali adottati; in particolare potrebbe non essere più valida l'ipotesi di costanti concentrate.

IV.4 - Proprietà delle funzioni di rete.

Come è stato detto precedentemente, una funzione di rete costituisce un operatore per passare, nel dominio di s , dalla funzione di eccitazione alla risposta del circuito. Una funzione di rete dipende, oltre che dalla posizione e dal tipo della eccitazione e della risposta, anche dalla struttura del circuito a cui si riferisce. È chiaro quindi che non si possono specificare le proprietà delle funzioni di rete se non viene precisata la classe di circuiti a cui si fa riferimento.

Nel presente paragrafo l'attenzione verrà limitata alle proprietà più generali delle funzioni di rete, rimandando per quelle più particolari all'appendice IV.A.

IV.4.1 - Proprietà derivanti dal carattere «costanti concentrate».

Per tutti i circuiti lineari e permanenti a costanti concentrate, le funzioni di rete, di qualsiasi tipo, godono delle seguenti proprietà.

Proprietà IV.4.1 - «Ogni funzione di rete di un circuito lineare, permanente, a costanti concentrate è una funzione razionale a coefficienti reali della variabile s».

La proprietà IV.4.1 si dimostra in modo molto semplice. Consideriamo allo scopo, senza perdita di generalità, come funzione di eccitazione la grandezza impressa da un generatore di tensione ed analizziamo il circuito utilizzando il metodo delle maglie, dopo averlo trasformato nel dominio di s , ciò che si può fare in quanto è lineare e permanente per ipotesi. Detto allora $[I_m]$ il vettore delle trasformate di Laplace delle correnti di maglia, $[Z_m]$ la matrice delle impedenze di maglia e $[V_g]$ il vettore dei termini noti, si ottiene il seguente sistema di equazioni risolventi:

$$(IV.4.1) \quad [Z_m] [I_m] = [V_g]$$

Si può osservare che ciascun elemento della matrice $[Z_m]$ è di tipo razionale a coefficienti reali nella variabile s , rappresentando la somma delle impedenze di ciascuna maglia, ovvero la somma delle impedenze in comune fra maglie diverse, in quanto il circuito è a costanti concentrate. Risolvendo il sistema si ha:

$$(IV.4.2) \quad [I_m] = [Z_m]^{-1} [V_g]$$

Ciascun elemento della matrice $[Z_m]^{-1}$ si ottiene effettuando il rapporto fra due opportuni determinanti della matrice $[Z_m]$. Perciò la matrice $[Z_m]^{-1}$ è formata da elementi coincidenti con funzioni razionali reali in s . Ricordando che si è supposta presente una sola eccitazione $V(s)$ si otterrà allora dalla (IV.4.2) la seguente espressione per la generica corrente di maglia:

$$(IV.4.3) \quad I_{m_i} = F_i V(s)$$

dove F_i è un opportuno elemento della matrice $[Z_m]^{-1}$.

Di conseguenza ogni corrente del circuito risulta del tipo (IV.4.3), in quanto è una combinazione lineare con coefficienti $\pm 1,0$ delle correnti di maglia. Analogamente ogni tensione del circuito è del tipo (IV.4.3), in quanto si ottiene moltiplicando un'impedenza (funzione razionale reale in s nel caso presente) per una corrente.

È evidente che un risultato simile si sarebbe ottenuto se la funzione di eccitazione fosse stata la grandezza impressa di un generatore di corrente e si fosse applicato il metodo dei nodi o dei tagli per l'analisi del circuito.

In conclusione, ogni risposta di un circuito lineare permanente a costanti concentrate è proporzionale all'eccitazione nel dominio di s tramite una funzione razionale reale della variabile s .

Osservazione IV.4.1

La proprietà IV.4.1 è stata implicitamente utilizzata in precedenza quando si è detto che nelle applicazioni usuali le funzioni di s delle quali è necessario effettuare le trasformate di Laplace sono razionali.

tuare l'antitrasformazione sono funzioni razionali a coefficienti reali. Risulta infatti verificato tale fatto per tutte le risposte corrispondenti ad eccitazioni, la cui trasformata $E(s)$ sia a sua volta razionale a coefficienti reali, come avviene nella maggior parte dei casi d'interesse.

La proprietà di essere a coefficienti reali è essenziale, poiché garantisce il carattere reale dell'antitrasformata e quindi il carattere reale della risposta nel dominio del tempo (come è fisicamente necessario). Il carattere di essere a coefficienti reali per la $F(s)$ viene spesso espresso in un'altra forma equivalente, che si basa sulla seguente definizione:

Definizione IV.4.1 - «*Una funzione di variabile complessa $F(s)$ è detta reale, se $F(s)$ è reale per s reale, cioè, se calcolando la funzione $F(s)$ sull'asse reale della variabile si ottiene una parte immaginaria uguale a zero».*

È immediato verificare che una funzione razionale $F(s)$ risulta reale se e solo se risulta a coefficienti reali. Di conseguenza è del tutto equivalente dire funzione razionale reale ovvero funzione razionale a coefficienti reali. Quindi la proprietà IV.4.1 si può esprimere anche nel seguente modo:

Proprietà IV.4.2 - «*Ogni funzione di rete di un circuito lineare, permanente, a costanti concentrate è una funzione razionale reale della variabile s .*

IV.4.2 - Proprietà derivanti dalla stabilità.

Un comportamento molto importante dei circuiti, che occorre conoscere a priori nelle applicazioni, è quello connesso con la stabilità. Un circuito è stabile se, sottoposto a sollecitazioni esterne di durata limitata, è capace di ritornare alla situazione di riposo dopo che le sollecitazioni esterne hanno finito di agire. Nel caso dei circuiti lineari e permanenti tale comportamento stabile può essere precisato facilmente in termini di risposta impulsiva. Infatti le eccitazioni di breve durata possono scegliersi, senza perdita di generalità, coincidenti con funzioni impulsive sia nel caso di generatori di tensione sia in quello di generatori di corrente. Tenendo conto che tali generatori possono essere situati dovunque nel circuito e che come risposta si può considerare qualsiasi grandezza elettrica presente nel circuito, ne deriva che affinchè il circuito sia stabile è necessario che ogni possibile risposta impulsiva tenda a zero al crescere del tempo. Si può perciò adottare la seguente definizione di circuito stabile:

Definizione IV.4.2 - «*Un circuito si dice stabile quando tutte le sue possibili risposte impulsive tendono a zero al crescere del tempo⁽¹⁾.*

(1) - La stabilità definita in questo modo è spesso denominata « stabilità asintotica ».

Ad ogni risposta impulsiva corrisponde una funzione di rete, come è stato fatto notare nel §IV.3. Nasce quindi il problema di determinare quali proprietà debba avere una funzione di rete $F(s)$, affinché la risposta impulsiva corrispondente $h(t)$ tenda a zero al crescere di t . Per la proprietà IV.3.2, si ha:

$$(IV.4.4) \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Poichè la funzione $F(s)$ è razionale e reale, la sua antitrasformata si ottiene considerandone lo sviluppo in frazioni parziali, descritto nell'appendice III.A. I termini che si ottengono con tale sviluppo sono dei seguenti tipi:

1) termini corrispondenti a poli reali:

$$(IV.4.5) \quad \frac{a_i}{(s - \alpha_i)^n} \quad a_i, \alpha_i \text{ reali} \quad n = 1, 2, \dots$$

2) termini corrispondenti a coppie di poli complessi coniugati:

$$(IV.4.6) \quad \frac{A_i}{(s - s_0)^n} + \frac{A_i^*}{(s - s_0^*)^n} \quad A_i, s_0 \text{ complessi} \quad n = 1, 2, \dots$$

3) termini del tipo:

$$(IV.4.7) \quad a_i s^n$$

Questi termini sono presenti quando la funzione $F(s)$ è razionale impropria.

Calcoliamo il contributo di questi termini alla risposta impulsiva $h(t)$, effettuandone l'antitrasformata come indicato nell'appendice III.A.5, e verificandone il comportamento al crescere di t .

1) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.5) hanno la seguente espressione:

$$(IV.4.8) \quad f_1(t) = \frac{a_i}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha_i t} u_{-1}(t)$$

Gli andamenti di tali funzioni $f_1(t)$ sono mostrati nella fig.IV.4.1, nei tre casi $\alpha_i < 0$, $\alpha_i = 0$, $\alpha_i > 0$.

Si vede chiaramente da questa figura che le funzioni $f_1(t)$ tendono a zero nel caso in cui risulti:

$$(IV.4.9) \quad \alpha_i < 0$$

Non tendono a zero, ma rimangono limitate al crescere di t , nel caso in cui risulti:

$$(IV.4.10) \quad \alpha_i = 0 \quad \text{e} \quad n = 1$$

Tendono all'infinito negli altri casi, cioè quando risulti:

$$(IV.4.11) \quad \alpha_i > 0 \quad \text{oppure} \quad \alpha_i = 0, \quad n > 1$$

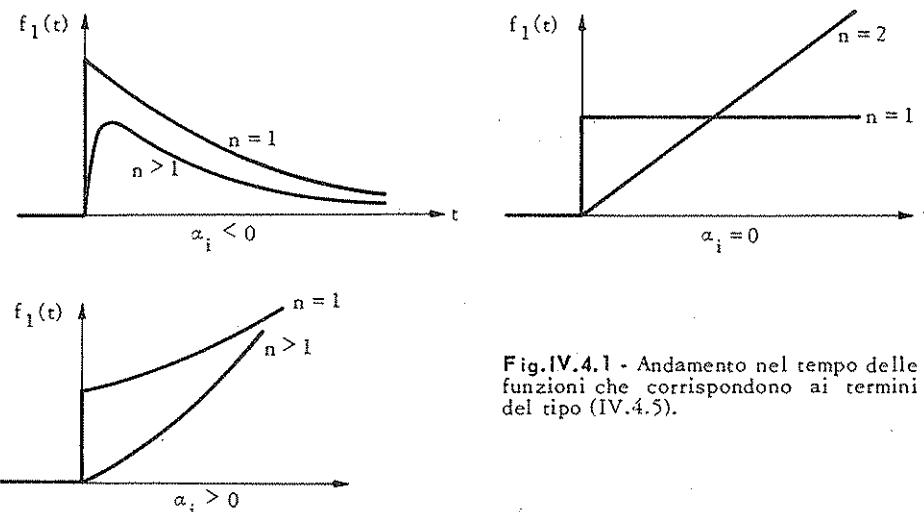


Fig. IV.4.1 - Andamento nel tempo delle funzioni che corrispondono ai termini del tipo (IV.4.5).

2) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.6) hanno la seguente espressione, come messo in evidenza in appendice III.A:

$$(IV.4.12) \quad f_2(t) = 2 |A_i| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) u_{-1}(t)$$

dove $|A_i|$ è il modulo del numero A_i , φ_i è l'argomento del numero A_i , σ_0 è la parte reale del polo s_0 ed ω_0 ne è la parte immaginaria.

Gli andamenti delle funzioni $f_2(t)$ sono mostrati nella figura IV.4.2 nei vari casi possibili. Si vede chiaramente da questa figura che le funzioni $f_2(t)$ tendono a zero quando risulti:

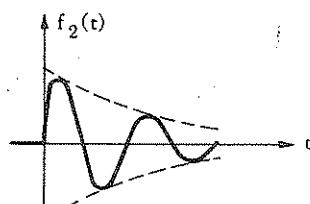
$$(IV.4.13) \quad \sigma_0 = \operatorname{Re}[s_0] < 0$$

Non tendono a zero, ma rimangono di valore limitato al crescere di t , nel caso in cui risulti:

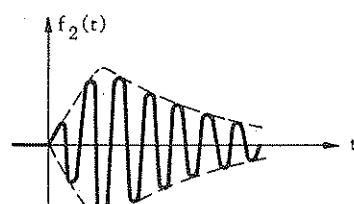
$$(IV.4.14) \quad \sigma_0 = \operatorname{Re}[s_0] = 0 \quad \text{ed} \quad n = 1$$

Tendono all'infinito negli altri casi, cioè quando si abbia:

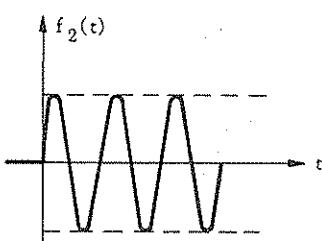
$$(IV.4.15) \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} [s_0] > 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} [s_0] = 0 \quad \text{ed} \quad n > 1$$



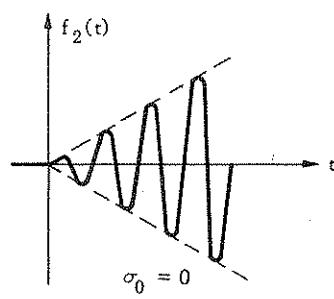
$$\sigma_0 < 0 \\ n = 1$$



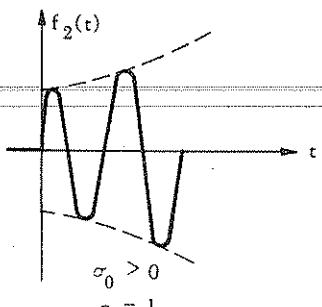
$$\sigma_0 < 0 \\ n > 1$$



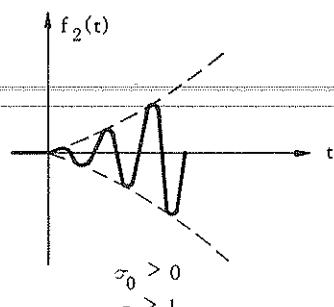
$$\sigma_0 = 0 \\ n = 1$$



$$\sigma_0 = 0 \\ n = 2$$



$$\sigma_0 > 0 \\ n = 1$$



$$\sigma_0 > 0 \\ n > 1$$

Fig. IV.4.2 - Andamento nel tempo delle funzioni che corrispondono ai termini del tipo (IV.4.6).

- 3) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.7) hanno la seguente espressione:

$$(IV.4.16) \quad f_3(t) = a_i u_n(t)$$

Le funzioni $f_3(t)$ sono sempre nulle per t maggiore di zero.

Possiamo riassumere la precedente discussione nelle seguenti proprietà:

Proprietà IV.4.3 - «Condizione necessaria e sufficiente affinchè una risposta impulsiva tenda a zero al crescere di t è che la corrispondente funzione di rete abbia tutti i poli con parte reale negativa. Tali poli debbono essere quindi contenuti tutti nel semipiano sinistro aperto della variabile s , indicato tratteggiato in fig.IV.4.3 e detto semipiano di stabilità».

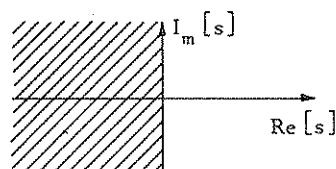


Fig.IV.4.3 - Semipiano di stabilità (tratteggiato).

Proprietà IV.4.4 - «Condizione necessaria e sufficiente affinchè una risposta impulsiva rimanga limitata al crescere di t è che la corrispondente funzione di rete abbia tutti i poli con parte reale minore od uguale a zero e che i poli con parte reale uguale a zero siano semplici».

Prendiamo ora in esame i possibili comportamenti di un circuito nei riguardi della stabilità, considerando separatamente le due grandi categorie dei circuiti passivi ed attivi. Tali comportamenti possono essere discussi in maniera intuitiva, valutando il bilancio energetico del circuito stesso. Tenendo presente che l'accertamento della stabilità avviene solo dopo che sono cessate le sollecitazioni esterne, la valutazione in questione riguarda i seguenti tipi di componenti:

- 1) *componenti con memoria*: tali componenti immagazzinano energia;
- 2) *componenti dissipatori di energia*: essi sottraggono energia al circuito. Se la loro azione prevale, si ha lo smorzamento di tutti i fenomeni elettrici e quindi un comportamento stabile;
- 3) *componenti attivi*: tali componenti forniscono energia al circuito. Se la loro azione prevale si ha un comportamento instabile.

Circuiti passivi.

I circuiti passivi sono quelli costituiti dai componenti immagazzinatori di energia e dissipatori. In assenza di eccitazioni esterne, tali circuiti non possono incrementare la propria energia e perciò l'andamen-

to nel tempo delle grandezze elettriche *deve rimanere limitato al crescere di t*. Di conseguenza vale per essi la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.5 - «Ogni risposta impulsiva di un circuito passivo rimane limitata al crescere del tempo».

Per quanto riguarda la posizione dei poli delle funzioni di rete, si può allora applicare la proprietà IV.4.4, deducendo che tali poli si debbono trovare nel semipiano sinistro, compreso l'asse immaginario della variabile s e che questi ultimi devono essere semplici.

In particolare *deve essere semplice l'eventuale polo all'infinito*, ciò che si può dedurre nel seguente modo. Si supponga per assurdo che esista un circuito passivo avente una funzione di rete $F(s)$ con un polo multiplo all'infinito. Indichiamo con A tale circuito. Si consideri quindi un circuito B , ottenuto da quello A sostituendo: 1) ad ogni condensatore di capacità C un induttore di induttanza $1/C$; 2) ad ogni induttore di induttanza L un condensatore di capacità $1/L$.

È evidente che ogni funzione di rete del circuito B si ottiene sostituendo $1/s$ al posto della variabile s nella corrispondente funzione di rete del circuito A . In particolare il circuito B ha una funzione di rete pari a:

$$(IV.4.17) \quad G(s) = F\left(\frac{1}{s}\right)$$

Poichè abbiamo supposto che la funzione $F(s)$ abbia un polo multiplo per s che tende all'infinito, la funzione $G(s)$ in base alla relazione (IV.4.17) possiederà un polo multiplo per s che tende a zero. D'altra parte il circuito B è anch'esso passivo e quindi non può avere poli multipli sull'asse immaginario ed in particolare per $s = 0$. Si può quindi concludere che non esiste un circuito A passivo avente una funzione di rete con polo multiplo all'infinito.

Riassumendo quanto è stato detto sulle funzioni di rete di un circuito passivo, si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.6 - «I poli delle funzioni di rete di un circuito passivo possono essere dei seguenti tipi:

- 1) *poli disposti nel semipiano sinistro della variabile s;*
- 2) *poli semplici disposti sull'asse immaginario;*
- 3) *un polo semplice all'infinito⁽¹⁾.*

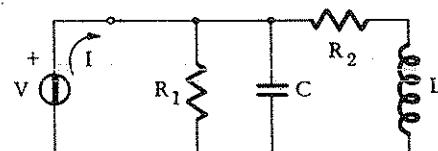
(1) - Il caso 3) può essere omesso, quando si segua la convenzione di considerare il punto $s = \infty$ come se fosse un punto dell'asse immaginario di s . Ciò può essere accettato proprio in base all'analogia di comportamento.

Rimane da discutere se il comportamento di un circuito passivo sia o meno stabile. Per quanto è stato detto precedentemente i poli del tipo 2) danno luogo ad un andamento che non tende a zero, nel dominio del tempo, per t che tende all'infinito; la presenza di tali poli indicherebbe quindi un comportamento non asintoticamente stabile. Tuttavia è necessario notare che ciò è dovuto ad un processo di idealizzazione dei componenti con memoria, in base al quale è stata ammessa come possibile l'evoluzione del fenomeno elettrico all'interno del circuito senza alcuna dissipazione di energia. Tale ipotesi, introdotta per comodità di calcolo, non risulta mai verificata in realtà, poiché ad ogni componente con memoria è sempre associato un elemento parassita che tiene conto delle inevitabili perdite. Per questa ragione è conveniente classificare un circuito passivo come circuito stabile, ricordando che i suoi eventuali poli sull'asse immaginario provengono da un processo di idealizzazione e corrispondono sempre nella realtà a poli disposti nel semipiano di stabilità. Tale corrispondenza può essere messa in una forma esatta, come vedremo successivamente nell'osservazione IV.4.2.

Esempio IV.4.1

Determinare i poli della funzione ammettenza d'ingresso del circuito di figura IV.4.4.

Fig.IV.4.4 - Circuito considerato nell'esempio IV.4.1.



La funzione ammettenza d'ingresso è pari al rapporto fra la corrente $I(s)$ e la tensione $V(s)$. Tale funzione può essere facilmente determinata risolvendo il circuito di fig.IV.4.4 mediante operazioni di serie e di parallelo. Si ottiene:

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R_2 + sL}$$

Eseguendo i calcoli si ha:

$$Y(s) = \frac{I}{V} = \frac{s^2LCR_1 + s(L+CR_1R_2) + R_1 + R_2}{R_1(sL + R_2)}$$

La funzione $Y(s)$ ha i seguenti poli:

$$s = -\frac{R_2}{L} ; \quad s = \infty$$

Si vede che il polo al finito è reale e negativo e si trova perciò nel semipiano di stabilità. Il polo all'infinito è semplice, poiché il grado del numeratore supera di una sola unità quello del denominatore. Ciò è in accordo con la proprietà IV.4.6.

Circuiti attivi.

I circuiti attivi sono quelli che contengono i componenti capaci di fornire energia quali ad esempio il nullore, i generatori controllati, ecc. In tali circuiti, anche in assenza di eccitazioni esterne, si può avere qualsiasi tipo di comportamento in quanto sono presenti componenti sia capaci di fornire che di assorbire energia. Si possono perciò avere circuiti attivi stabili ed instabili. Nei circuiti attivi quindi *la stabilità non costituisce una proprietà intrinseca, ma piuttosto un requisito che viene richiesto nelle applicazioni*.

Per verificare se un circuito attivo è stabile occorre applicare la definizione IV.4.2, controllando in base alla proprietà IV.4.3 che i poli di tutte le sue funzioni di rete si trovino nel semipiano sinistro aperto. Occorre notare che in questo caso i poli sull'asse immaginario corrispondono ad un comportamento instabile, in quanto non provengono più da un processo di idealizzazione come nel caso dei circuiti passivi, ma corrispondono a precise modalità di funzionamento del circuito.

Osservazione IV.4.2

È stato precedentemente affermato che per un circuito passivo i poli sull'asse immaginario sono dovuti alla presenza nel circuito di componenti con memoria ideali, completamente privi di perdite. Verrà ora mostrato come introducendo tali perdite si provoca uno spostamento di tutti i poli del circuito verso il semipiano sinistro, in modo che vengono eliminati tutti i poli sull'asse immaginario. A tale scopo utilizziamo per gli elementi con memoria gli schemi già introdotti nel § I.6; precisamente ad ogni induttore associamo un resistore in serie e ad ogni condensatore un resistore in parallelo. Ad ogni induttore con perdite del tipo mostrato in fig.IV.4.5 a) corrisponde un'impedenza pari a:

$$(IV.4.18) \quad Z_L(s) = sL + R_s = L \left(s + \frac{R_s}{L} \right)$$

Ad ogni condensatore con perdite del tipo mostrato in fig.IV.4.5 b) corrisponde un'ammettenza pari a:

$$(IV.4.19) \quad Y_c(s) = C s + \frac{1}{R_p} = C \left(s + \frac{1}{C R_p} \right)$$

Supponiamo ora per semplicità di trattazione che per tutti gli induttori e per tutti i condensatori del circuito si abbia:

$$(IV.4.20) \quad d = \left(\frac{R_s}{L} \right)_i = \left(\frac{1}{C R_p} \right)_k \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots N_L \\ k = 1, 2, \dots N_C \end{array}$$

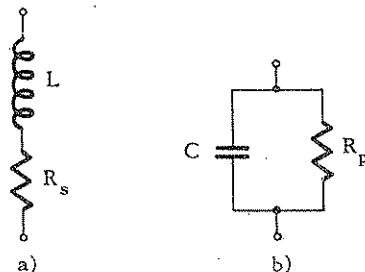
dove d è una quantità costante. Tale ipotesi corrisponde ad ammettere «uniformi» le perdite dei componenti reattivi.

In base alla (IV.4.20) ed alle (IV.4.18) e (IV.4.19) si ha:

$$(IV.4.21) \quad Z_L(s) = L(s + d)$$

$$(IV.4.22) \quad Y_c(s) = C(s + d)$$

Fig. IV.4.5 - Schemi equivalenti con perdite dell'induttore e del condensatore.



Introduciamo ora una nuova variabile p definita nel modo seguente:

$$(IV.4.23) \quad p = s + d$$

In funzione di questa variabile, le impedenze Z_L ed Y_c divengono:

$$(IV.4.24) \quad Z_L(p) = Lp$$

$$(IV.4.25) \quad Y_c(p) = Cp$$

Dalle espressioni precedenti si deduce che gli elementi con memoria si comportano come se fossero senza perdite nella variabile p . Consideriamo ora una funzione di rete generica $F(p)$; tale funzione riferendosi ad un circuito passivo con componenti senza perdite ha i poli disposti anche sull'asse immaginario (in base alla proprietà IV.4.6). Consideriamo un polo generico $p = p_0$. Passando alla variabile s si ha:

$$(IV.4.26) \quad s + d = p_0$$

e perciò:

$$(IV.4.27) \quad s = p_0 - d$$

Essendo d positivo, si ottiene che tutti i poli nella variabile s possono essere calcolati a partire da quelli nella variabile p , spostandoli verso sinistra della quantità d . In particolare per un polo sull'asse immaginario $p = j\omega_0$ si ha un polo pari a:

$$(IV.4.28) \quad s = j\omega_0 - d$$

In conclusione vediamo che la funzione di rete $F(s)$ non può avere poli a destra di una retta parallela all'asse immaginario e distante da quest'ultimo della quantità d (fig. IV.4.6).

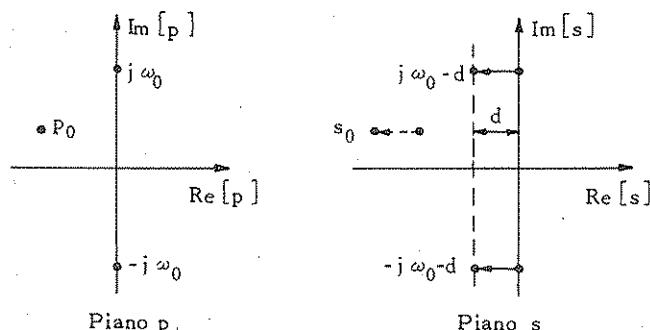


Fig. IV.4.6 - Legame tra la posizione dei poli di una funzione di rete di un circuito passivo nel piano p e nel piano s .

La limitazione sulla posizione dei poli, dovuta alle perdite dei componenti reattivi, è molto importante nelle applicazioni, in quanto tali poli hanno una grande influenza sul comportamento del circuito stesso. Per questa ragione è opportuno, sia definire dei fattori di merito per la valutazione delle perdite dei suddetti componenti (come fatto nel § I.6), sia introdurre una misura della vicinanza all'asse immaginario di un polo disposto nel piano complesso. Tali fattori di merito sono i seguenti:

$$(IV.4.29) \quad \text{per un polo } \sigma_0 + j\omega_0 \quad Q_p = \frac{\omega_0}{\sigma_0}$$

$$(IV.4.30) \quad \text{per un induttore} \\ (\text{alla pulsazione } \omega_0) \quad Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_s}$$

$$(IV.4.31) \quad \text{per un condensatore} \\ (\text{alla pulsazione } \omega_0) \quad Q_c = \omega_0 C R_p$$

In base alle considerazioni precedenti si deduce che: *sotto l'ipotesi di uniformità della distribuzione delle perdite, il fattore di merito dei poli non può superare il fattore di merito dei componenti con memoria.*

La trattazione qui fatta costituisce solo un cenno alla teoria delle perdite associate ai componenti reattivi di un circuito passivo. Tale teoria è particolarmente utile in fase di progetto dei circuiti e da essa trae origine un metodo detto della «predistorzione», per il quale si rimanda ai testi di sintesi dei circuiti elettrici.

Esempio IV.4.2

Assegnata la funzione di rete:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_0^2}$$

nell'ipotesi che i poli sull'asse immaginario abbiano un fattore di merito pari a $Q_p = 100$, determinare il numero di oscillazioni della risposta impulsiva corrispondente, affinché la sua ampiezza si riduca di $1/e$ del valore iniziale.

La parte reale del polo da considerare è in base alla (IV.4.29) uguale a $\omega_0/100$, perciò nella variabile s la funzione che corrisponde alla $F(p)$ assegnata è:

$$F(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{\omega_0}{100}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Sviluppando in frazioni parziali tale funzione, si ha:

$$F(s) = \frac{A}{s + \frac{\omega_0}{100} + j\omega_0} + \frac{A^*}{s + \frac{\omega_0}{100} - j\omega_0}$$

dove:

$$A = \frac{1}{s + \frac{\omega_0}{100} - j\omega_0} \Bigg|_{s = -\frac{\omega_0}{100} - j\omega_0} = \frac{1}{-2j\omega_0}$$

Antitrasformando, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= [A e^{-\frac{\omega_0 t}{100}} e^{-j\omega_0 t} + A^* e^{-\frac{\omega_0 t}{100}} e^{j\omega_0 t}] u_{-1}(t) = \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{100}}}{\omega_0} \sin \omega_0 t u_{-1}(t) \end{aligned}$$

La funzione $f(t)$ ha l'andamento di una sinusoide leggermente smorzata. La ampiezza per $t=0$ è pari ad $1/\omega_0$. L'ampiezza si riduce di $1/e$ quando risulta:

$$\frac{\omega_0 t_x}{100} = 1$$

Quindi, ricordando che il periodo T della sinusoide è:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

si ottiene:

$$t_x = \frac{100}{\omega_0} = \frac{100}{2\pi} T \approx 15,9 T$$

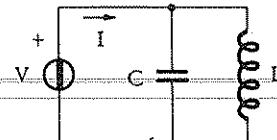
Quindi l'ampiezza si riduce ad $1/e$ del valore iniziale all'incirca dopo 16 periodi di oscillazione.

Esempio IV.4.3

Calcolare i poli dell'impedenza d'ingresso del circuito di fig.IV.4.7, nell'ipotesi che i componenti con memoria abbiano perdite uniformemente distribuite con $d = 0,1 \text{ sec}^{-1}$.

Fig.IV.4.7 - Circuito considerato nell'esempio IV.4.3. I valori dei componenti sono:

$$C = 1 \quad L = 1 \quad (F, H) \dots$$



Supponendo il circuito di fig.IV.4.7 senza perdite, si ottiene:

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{pC + \frac{1}{pL}} = \frac{pL}{p^2LC + 1} = \frac{p}{p^2 + 1} = F(p)$$

Essendo $d = 0,1$ si ottiene:

$$p = s + 0,1$$

e quindi:

$$F(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 1}$$

che è la funzione impedenza d'ingresso cercata.

Essa ha i seguenti poli:

$$s_1 = -0,1 + j$$

$$s_2 = -0,1 - j$$

Osservazione IV.4.3

Nell'osservazione IV.2.2 è stato fatto notare che quando si considera la funzione di rete $F(s)$ di tipo impedenza o ammettenza d'ingresso, anche la funzione $1/F(s)$ è una funzione di rete dello stesso tipo. Tale considerazione comporta ulteriori proprietà derivanti dalla stabilità di un circuito per le funzioni di rete tipo immettenza. Infatti gli zeri di una funzione $F(s)$, cioè quei valori di s per cui la funzione risulta uguale a zero, sono coincidenti con i poli della funzione $1/F(s)$. Di conseguenza vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.7 - «Per le funzioni immettenza d'ingresso di qualsiasi circuito, gli zeri soddisfano le stesse proprietà dei poli».

IV.5 - Suddivisione della risposta di un circuito in parti significative.

La risposta di un circuito $U(s)$, nel caso più generale e nel dominio di s , è data dall'espressione (IV.1.6), dove la funzione $U(s)$ è espressa in funzione delle eccitazioni e delle condizioni iniziali. L'andamento nel tempo $u(t)$ si ottiene antitrasformando la $U(s)$. Per ricordare che sono stati tenuti in conto tutti i possibili contributi, la $U(s)$ viene indicata come «*risposta completa*» del circuito.

È usuale suddividere la risposta completa in parti con lo scopo di evidenziare in essa degli aspetti ritenuti particolarmente importanti. Le suddivisioni più usate sono le seguenti:

- 1) suddivisione in risposta libera e risposta forzata;
- 2) suddivisione in risposta permanente e risposta transitoria.

Nel presente paragrafo ci occuperemo solo della prima, in quanto la seconda verrà trattata diffusamente nel cap. V.

Per *risposta libera* di un circuito si intende la risposta quando non è presente alcun generatore esterno, ma solo le condizioni iniziali. Nel dominio di s , tale risposta $U_L(s)$ si può esprimere nel modo seguente (a partire dalla (IV.1.6))⁽¹⁾:

(1) - I simboli utilizzati nelle espressioni (IV.5.1) e (IV.5.3) hanno gli stessi significati indicati nella formula (IV.1.6).

$$(IV.5.1) \quad U_L(s) = \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^+) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i(0^+)$$

La corrispondente espressione nel tempo si ottiene antitrasformando la (IV.5.1):

$$(IV.5.2) \quad u_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_L(s)]$$

Per *risposta forzata* di un circuito s'intende la *risposta* quando sono presenti i generatori esterni con condizioni iniziali nulle. Nel dominio di s , tale risposta $U_F(s)$ si può esprimere nel modo seguente⁽¹⁾:

$$(IV.5.3) \quad U_F(s) = \sum_{i=1}^{N_g} F_i(s) E_i(s)$$

La corrispondente espressione nel tempo si ottiene antitrasformando la (IV.5.3):

$$(IV.5.4) \quad u_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_F(s)]$$

E' evidente che risulta:

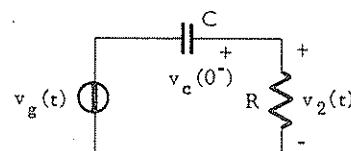
$$(IV.5.5) \quad U(s) = U_L(s) + U_F(s)$$

Esempio IV.5.1

Dato il circuito di fig.IV.5.1, determinare la *risposta libera* e la *risposta forzata*, considerando come grandezza d'interesse la tensione $v_2(t)$.

Fig.IV.5.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.5.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 2, \quad C = 1, \quad v_c(0^+) = 2, \quad v_g(t) = \\ = \sin 2t \cdot u_1(t) \quad (\Omega, \text{F}, \text{V}).$$



Con riferimento a fig.IV.5.2, dove è riportato lo schema trasformato nel dominio di s del circuito d'interesse, in cui:

$$V_g(s) = \mathcal{L}[\sin 2t \cdot u_1(t)] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

(1) - v. nota di pagina precedente.

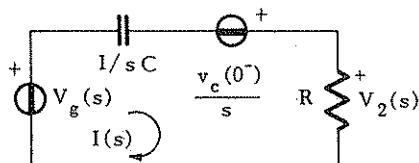


Fig. IV.5.2 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig. IV.5.1.

si ottiene la seguente equazione di equilibrio:

$$I(s) \cdot \left(\frac{1}{sC} + R \right) = V_g(s) + \frac{v_c(0^-)}{s}$$

Quindi si ha:

$$V_2(s) = \frac{sRC}{1+sCR} V_g(s) + \frac{RC}{1+sRC} v_c(0^+)$$

In base alla definizione data in precedenza risulta:

$$V_{2L}(s) = \frac{2}{1+2s} ; \quad V_{2F}(s) = \frac{2s}{1+2s} \frac{2}{s^2+4}$$

Antitrasformando V_{2L} si ottiene la risposta libera nel dominio del tempo, cioè:

$$v_{2L}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+0,5} \right] = 2 e^{-0,5t} u_1(t)$$

Per ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, occorre sviluppare preliminarmente V_{2F} in frazioni parziali:

$$V_{2F}(s) = \frac{2s}{1+2s} \frac{2}{s^2+4} = \frac{2s}{(s+0,5)(s^2+4)} = \frac{A}{s+0,5} + \frac{B}{s-j2} + \frac{B^*}{s+j2}$$

dove:

$$A = \frac{2s}{s^2+4} \Big|_{s=-0,5} = -\frac{4}{17} ;$$

$$B = \frac{2s}{(s+0,5)(s+j2)} \Big|_{s=j2} = \frac{2}{17} \frac{(1-4j)}{(1-4j)} = \frac{2}{\sqrt{17}} e^{-j \arctan 4} = \frac{2}{\sqrt{17}} e^{-j1,33}$$

Antitrasformando i singoli termini dello sviluppo si ottiene l'espressione voluta:

$$\begin{aligned} v_{2F}(t) &= (A e^{-0.5t} + B e^{j2t} + B^* e^{-j2t}) u_1(t) = \\ &= \left[-\frac{4}{17} e^{-0.5t} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos(2t - 1.33) \right] u_1(t) \end{aligned}$$

Osservazione IV.5.1

Le risposte libera e forzata hanno proprietà caratteristiche nel caso della classe molto importante dei circuiti stabili. In base alla definizione data nel § IV.4.2, un circuito stabile è caratterizzato dal ritornare nelle condizioni di riposo dopo che è stato sottoposto all'azione di eccitazioni di breve durata. Poiché con tali eccitazioni è possibile ottenere nel circuito una qualsiasi configurazione di grandezze elettriche in corrispondenza all'istante in cui esse cessano di agire, possiamo affermare che:

Proprietà IV.5.1 - «L'andamento nel tempo della risposta libera di un circuito stabile tende a zero al crescere del tempo, per un qualunque insieme di condizioni iniziali».

Tale proprietà equivale nel dominio di s alla seguente altra:

Proprietà IV.5.2 - «I poli della risposta libera di un circuito stabile si trovano nel semipiano sinistro aperto della variabile s , per un qualunque insieme di condizioni iniziali».

Per quanto riguarda la risposta forzata nel dominio di s , è facile constatare che i suoi poli appartengono o alle funzioni di rete oppure alle eccitazioni (nell'ipotesi che queste siano coincidenti con funzioni razionali reali della variabile s). Di conseguenza è possibile trarre qualche conclusione generale nel caso dei circuiti stabili solo se si considerano eccitazioni di tipo particolare. Un caso che ha importanza pratica è quello delle eccitazioni che hanno un andamento limitato nel tempo. Per tali eccitazioni sappiamo che le relative trasformate di Laplace hanno poli o nel semipiano sinistro aperto o semplici sull'asse immaginario. Poiché le funzioni di rete di un circuito stabile hanno poli solo nel semipiano sinistro aperto, ne deriva che la risposta forzata nel caso presente abbia poli o nel semipiano sinistro aperto oppure semplici sull'asse immaginario. Di conseguenza vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.5.3 - «L'andamento nel tempo della risposta forzata di un circuito stabile si mantiene limitato quando tutte le funzioni di eccitazione sono a loro volta limitate».

APPENDICE AL CAPITOLO IV

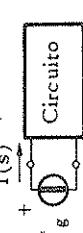
IV.A - Proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla struttura del circuito.

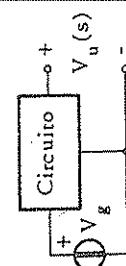
L'effetto della struttura del circuito sulle proprietà delle funzioni di rete è notevole sia per quanto riguarda la natura dei componenti presenti sia per quanto riguarda la sua topologia. Nella presente appendice vogliamo dare un'idea di questo argomento, rimandando per l'affondamento ai testi di sintesi delle reti elettriche, dove l'argomento stesso assume un'importanza predominante, in quanto solo attraverso la conoscenza dettagliata delle proprietà delle funzioni di rete si può risalire al circuito che soddisfa le specifiche di progetto.

IV.A.1 - Proprietà derivanti dalla natura dei componenti.

La presenza o meno dei vari tipi di componenti ha un'influenza notevole sulle funzioni di rete. L'analisi di tale influenza è importante ai fini della caratterizzazione di ciascuna funzione di rete, in modo che si possa sapere a priori se una funzione è realizzabile o meno come funzione di rete di un certo tipo di circuito. Ha anche una notevole influenza sulle funzioni di rete l'eventuale numero di componenti di uno stesso tipo presenti nel circuito; accenneremo a ciò per quanto riguarda i transistori schematizzati tramite il loro elemento ideale (nullore sbilanciato). Le proprietà delle funzioni di rete che scaturiscono dalla presenza di interi circuiti equivalenti sono usualmente poco note e sono state individuate solo per classi limitate di circuiti.

Tabella IV.A.1 - Esempi di proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla natura dei componenti.

Tipo di circuito Funzione di rete	Circuito RC	Circuito reattivo	Circuito passivo	Circuito RC attivo contenente un solo transistore ideale.	Circuito RC attivo contenente un numero qualsiasi di transistori ideali
Ammettenza d'ingresso: $Y(s) = \frac{I(s)}{V_g(s)}$	<ul style="list-style-type: none"> - Poli e zeri semplici sull'asse reale negativo, alternati tra loro; - Costante moltiplicativa positiva; - Primo punto critico (polo o zero) vicino all'origine coincidente con uno zero. 	<ul style="list-style-type: none"> - Poli semplici sull'asse immaginario con residui reali positivi; - Parte reale per $s = j\omega$ identicamente nulla. 	<ul style="list-style-type: none"> - Poli nel semipiano sinistro aperto oppure sull'asse immaginaria, nel qual caso sono semplici con residui reali positivi; - Parte reale sull'asse immaginario non-negativa positiva; - Parte reale sull'asse immaginario non-negativa. 	<ul style="list-style-type: none"> - Zeri ovunque con l'esclusione dell'asse reale positivo; - Costante moltiplicativa positiva; - Per $s = 0$ non c'è polo, lo zero è possibile ma deve essere semplice; - Per $s = \infty$ non c'è polo, l'eventuale polo deve essere semplice. 	<ul style="list-style-type: none"> - Non ci sono limitazioni.
Funzione di trasferimento in tensione: $\frac{V_u(s)}{V_g(s)} = H(s)$	$H(s) = \frac{N}{D}$	<ul style="list-style-type: none"> - Poli reali negativi semplici non nulli; - Zeri ovunque eccetto che sull'asse reale positivo; - Grado del denominatore maggiore od uguale a quello del numeratore; - Costante moltiplicativa H tale che: 	<ul style="list-style-type: none"> - Poli nel semipiano sinistro aperto oppure semplici sull'asse immaginario, con l'esclusione di $s = 0$, $s = \infty$, i residui dei poli sull'asse immaginario puramente immaginari. 	<ul style="list-style-type: none"> - L'unica condizione è che gli zeri non devono stare sull'asse reale positivo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Non ci sono limitazioni.



con il segno di ugualie nella precedente diseguaglianza solo se H_0 è diverso da H_d . La quantità H_d è definita come il minimo valore del parametro K (se esiste) per cui il polinomio:

$$D(s) - K N(s)$$

ha uno zero reale positivo di molteplicità pari.

Nel presente paragrafo accenniamo brevemente alle proprietà di alcune funzioni di rete di circuiti tipici. Le proprietà sono riassunte nella tab. IV.A.1 e si riferiscono all'ammittenza d'ingresso ed alla funzione di trasferimento in tensione, come precisato nella tabella stessa. I circuiti considerati sono: 1) quelli passivi tradizionali, costituiti da resistori, condensatori, induttori e trasformatori; 2) alcune categorie più particolari di circuiti passivi, cioè i circuiti RC (costituiti solo da resistori e condensatori) ed i circuiti reattivi (caratterizzati dall'assenza dei resistori); 3) i circuiti attivi corrispondenti ai microcircuiti lineari, cioè costituiti da resistori, condensatori e transistori.

Il transistore viene schematizzato nel suo funzionamento lineare con un nullo sbilanciato. È evidente che una schematizzazione migliore richiederebbe l'uso di un circuito equivalente del transistore comprendente, oltre al nullo, anche dei resistori e dei condensatori. Tuttavia le proprietà delle funzioni di rete che si hanno in questo caso sono poco note e molto complicate a dedursi. Per questa ragione nella tabella IV.A.1 ci limitiamo a distinguere soltanto i due casi di presenza di uno o più transistori, allo scopo di far vedere come questa semplice differenza già comporti notevoli conseguenze a livello di proprietà delle funzioni di rete.

Nella tab. IV.A.1 le proprietà delle funzioni di rete considerate sono espresse in termini di posizione di zeri e poli della funzione razionale reale corrispondente, di residui nei poli, di parte reale della funzione per $s = j\omega$, di costante moltiplicativa.

IV.A.2 - Proprietà derivanti dalla topologia del circuito.

La configurazione topologica del circuito ha una notevole influenza sulle funzioni di rete. Allo scopo di dare un'idea di tale influenza, consideriamo un caso tipico: quello del circuito a scala. Per tale circuito, rappresentato in fig. IV.A.1, esaminiamo l'influenza della configurazione topologica su una qualsiasi funzione di trasferimento ingre-

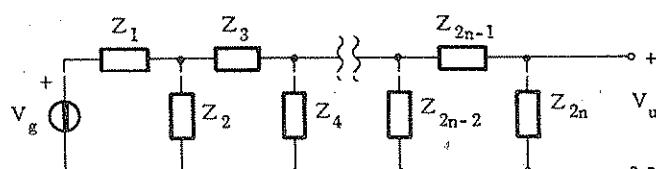


Fig. IV.A.1 - Circuito a scala. I bipoli Z_{2K+1} , $K=1, 2, \dots, n-1$, sono i rami longitudinali; i bipoli Z_{2K} , $K=1, 2, \dots, n$, sono i rami trasversali.

so-uscita. È intuitivo che la grandezza elettrica in uscita è nulla, se la trasmissione ingresso-uscita è interrotta, ciò che può accadere o perchè un bipolo longitudinale ha un'impedenza infinita o perchè un bipolo trasversale ha un'impedenza nulla. Tuttavia, un esame più accurato della trasmissione fa vedere che tale interruzione non sempre avviene nelle due situazioni dette, per cui vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.A.1 - «*Gli zeri di una funzione di trasferimento ingresso-uscita di un circuito a scala possono essere solo i poli dell'impedenza dei rami longitudinali o zeri dell'impedenza dei rami trasversali.*»

Tenendo conto di questa proprietà e di tab.IV.A.1 vediamo che gli zeri delle funzioni di trasferimento di un circuito RC a scala possono essere situati solo sull'asse reale negativo. Analogamente, nel caso di un circuito a scala passivo tali zeri possono essere situati solo nel semipiano sinistro chiuso della variabile s .

* * *

CAPITOLO V

ANALISI IN REGIME PERMANENTE

In gran parte delle applicazioni, sia nel caso dei circuiti di potenza, sia nel caso di circuiti per il trattamento dell'informazione, gli andamenti nel tempo più comuni per le grandezze elettriche sono quelli di tipo sinusoidale. Inoltre il comportamento di un circuito sotto l'azione di eccitazioni di tipo sinusoidale riveste una grande importanza teorica per la possibilità di risalire da questo comportamento a quello dovuto ad eccitazioni di tipo più generale. La risposta del circuito che interessa in tutti questi casi è quella che predomina al passare del tempo. Tale risposta prende il nome di «permanente» e l'analisi che si effettua in queste condizioni è quella in «regime permanente sinusoidale». Tale analisi è l'argomento del presente capitolo, in cui viene introdotto un metodo estremamente efficiente per svolgerla: «il metodo dei fasori», derivato da quello della trasformata di Laplace, già descritto nel cap. III.

V.1 - Suddivisione della risposta di un circuito nella parte transitoria e nella parte permanente.

V.1.1 - Definizione di risposta transitoria e permanente.

Si consideri un circuito lineare e permanente che sia sede di un fenomeno elettrico sotto le seguenti ipotesi:

- a) il fenomeno elettrico abbia inizio all'istante $t=0$, in presenza di condizioni iniziali nulle;
- b) sia presente un'eccitazione esterna di tipo sinusoidale, avente il seguente andamento⁽¹⁾ ed inizio all'istante $t=0$;

(1) - Per il nome ed il significato dei simboli che si usano nel caso di un'eccitazione sinusoidale, si veda il § III.2.3 del cap. III.

$$(V.1.1) \quad e(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) u_{-1}(t)$$

c) il circuito sia stabile⁽¹⁾.

In tali condizioni analizziamo l'andamento nel tempo di una qualunque risposta $u(t)$ del circuito, utilizzando il metodo della trasformata di Laplace. Detta $E(s)$ la trasformata di Laplace dell'eccitazione $e(t)$ e con $F(s)$ la funzione di rete d'interesse, si ha:

$$(V.1.2) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

L'andamento della funzione $u(t)$ si ottiene effettuando lo sviluppo in frazioni parziali della $U(s)$ ed antitrasformando i singoli termini. A questo scopo occorre esaminare la posizione dei poli della $U(s)$. Si vede facilmente che essi sono di due tipi:

a) poli coincidenti con quelli della funzione di rete $F(s)$; tali poli si trovano nel semipiano sinistro aperto della variabile s , essendo per ipotesi il circuito di tipo stabile, cioè risulta:

$$(V.1.3) \quad s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad ; \quad \sigma_i < 0$$

b) poli coincidenti con i poli della funzione di eccitazione $E(s)$; tali poli si trovano sull'asse immaginario, cioè sono del tipo seguente:

$$(V.1.4) \quad s_i = \pm j\omega_0$$

essendo ω_0 la pulsazione della funzione $e(t)$ riportata nella (V.1.1).

Distinguendo i poli nelle due categorie precedenti, lo sviluppo in frazioni parziali risulta suddivisibile nel modo seguente:

$$(V.1.5) \quad U(s) = U_t(s) + \frac{R}{s - j\omega_0} + \frac{R^*}{s + j\omega_0}$$

dove la funzione $U_t(s)$ corrisponde alla parte dello sviluppo relativo ai poli del tipo a), mentre gli altri due addendi corrispondono ai poli del tipo b).

È facile verificare le seguenti proprietà:

- 1) l'antitrasformata $u_t(t)$ della funzione $U_t(s)$ tende a zero al crescere del tempo, in base alla (V.1.3);
- 2) l'antitrasformata della funzione:

(1) - Si tengano presenti le considerazioni fatte nel § IV.4.2 relativamente alla stabilità.

$$(V.1.6) \quad U_p(s) = \frac{R}{s - j\omega_0} + \frac{R^*}{s + j\omega_0}$$

non tende a zero al crescere di t , ma il suo andamento appartiene alla stessa classe di funzioni a cui appartiene l'eccitazione $e(t)$ ed è cioè del tipo:

$$(V.1.7) \quad u_p(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) u_{-1}(t)$$

È opportuno notare che tale funzione ha la stessa pulsazione ω_0 della funzione $e(t)$, ma ha ampiezza A_1 e fase iniziale φ_1 differenti in generale dalle corrispondenti ampiezza e fase iniziale di $e(t)$.

Le considerazioni precedenti conducono ad una suddivisione della risposta, valida nel dominio di s e nel dominio di t , del tipo seguente:

$$(V.1.8) \quad U(s) = U_t(s) + U_p(s)$$

$$(V.1.9) \quad u(t) = u_t(t) + u_p(t)$$

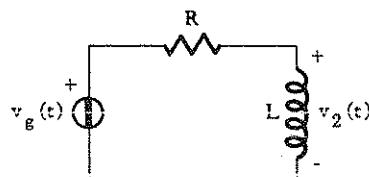
La parte $u_t(t)$ viene detta *risposta transitoria* del circuito (poiché tale risposta si esaurisce al crescere del tempo), mentre la parte $u_p(t)$ viene detta *risposta permanente* del circuito (poiché tale risposta è quella che predomina al crescere del tempo). A volte la risposta $u_p(t)$ viene anche detta *risposta a regime* del circuito (poiché essa coincide con la risposta totale $u(t)$ quando i fenomeni transitori si sono esauriti).

Esempio V.1.1

Determinare la risposta transitoria e la risposta permanente del circuito di figura V.1.1, considerando come grandezza d'interesse la tensione $v_2(t)$.

Fig. V.1.1 - Circuito considerato nell'esempio V.1.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, L = 2, v_g(t) = 2 \cos 2t \cdot u_{-1}(t), \\ i_L(0^-) = 0, \quad (\Omega, H, V)$$



Risolvendo il circuito nel dominio della trasformata di Laplace (fig.V.1.2), si ottiene la seguente espressione per la tensione $V_2(s)$:

$$V_2(s) = \frac{sL}{R + sL} V_g(s)$$

dove:

$$V_g(s) = \mathcal{L} [2 \cos 2t u_1(t)] = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

I poli della funzione $V_2(s)$ sono i seguenti:

a) poli della funzione di rete. Vi è un solo polo reale e negativo:

$$s = -\frac{R}{L} = -0,5$$

b) poli della funzione di eccitazione. Vi sono due poli con parte reale nulla pari a:

$$s = \pm j2$$

Effettuando lo sviluppo in frazioni parziali della $V_2(s)$, si ottiene:

$$V_2(s) = \frac{A}{s + 0,5} + \frac{B}{s + j2} + \frac{B^*}{s - j2}$$

dove:

$$A = V_2(s) |_{s=-0,5} = s \frac{2s}{s^2 + 4} \Big|_{s=-0,5} = \frac{2}{17}$$

$$B = V_2(s) |_{s=j2} = \frac{s}{s+0,5} \frac{2s}{s-j2} \Big|_{s=j2} = \frac{16-j4}{17}$$

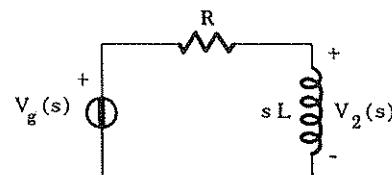
La parte transitoria (nel dominio di s) risulta:

$$V_{2t}(s) = \frac{A}{s+0,5} = \frac{2/17}{s+0,5}$$

Antitrasformando si ha:

$$v_{2t}(t) = \frac{2}{17} e^{-0,5t} u_1(t)$$

Fig.V.1.2 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig.V.1.1.



La parte permanente (nel dominio di s) risulta:

$$V_{2p}(s) = \frac{4}{17} \left(\frac{4-j}{s+j2} + \frac{4+j}{s-j2} \right)$$

Antitrasformando si ha:

$$v_{2p}(t) = \frac{4}{17} \{(4-j) e^{-j2t} + (4+j) e^{j2t}\} u_{-1}(t)$$

Essendo:

$$4-j = \sqrt{17} e^{-j \operatorname{arg} \frac{1}{4}} \approx \sqrt{17} e^{-j0,25}$$

si ha:

$$v_{2p}(t) = \frac{4}{\sqrt{17}} \{e^{-j(2t+0,25)} + e^{j(2t+0,25)}\} u_{-1}(t) = \frac{8}{\sqrt{17}} \cos(2t+0,25) u_{-1}(t)$$

Si vede che l'andamento nel tempo della tensione transitoria $v_{2t}(t)$ tende a zero al crescere di t , mentre la tensione permanente $v_{2p}(t)$ ha un andamento cosinoidale, avente la stessa pulsazione della eccitazione $v_g(t)$.

V.1.2 - Limiti di validità della suddivisione della risposta di un circuito nelle parti transitoria e permanente.

La suddivisione della risposta di un circuito in permanente e transitoria è stata effettuata sotto le ipotesi a), b) e c) riportate all'inizio del § V.1.1. Queste ipotesi tuttavia sono state scelte più restrittive del necessario per semplicità di trattazione e per introdurre la nozione di risposta permanente. Non sussistendo più le ragioni precedenti, conviene riprendere tali ipotesi, estendendole a situazioni più generali, quali sono richieste nelle applicazioni, sempre tenendo presente che i circuiti che stiamo considerando sono quelli lineari e permanenti.

a) Si può ammettere la presenza anche di condizioni iniziali non nulle. Infatti in tale caso, in luogo dell'equazione (V.1.2) per la $U(s)$, si può utilizzare l'espressione seguente (derivata dalla (IV.1.6) del cap.IV, a cui si rimanda per i simboli)

$$(V.1.10) \quad U(s) = F(s) E(s) + \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

Si riconosce facilmente che i contributi alla risposta $u(t)$ dei fattori:

$$(V.1.11) \quad \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

tendono a zero al crescere del tempo per i circuiti stabili. Quindi si può affermare che la risposta del circuito può ancora essere suddivisa in transitoria e permanente e che quest'ultima ha un andamento del tutto identico a quello che si ha nel caso in cui si abbiano condizioni iniziali nulle.

b) Si può ammettere la presenza di più eccitazioni esterne del tipo seguente:

$$(V.1.12) \quad e_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) u_{11}(t)$$

purchè aventi tutte la medesima pulsazione ω_0 . Infatti in tal caso, in luogo della (V.1.2), si può utilizzare la seguente espressione:

$$(V.1.13) \quad U(s) = \sum_{i=1}^{N_g} F_i(s) E_i(s)$$

Si riconosce facilmente che la (V.1.13) può essere suddivisa nella parte transitoria e nella parte permanente. Quest'ultima è uguale alla somma delle parti permanenti che si ottengono considerando una eccitazione per volta.

c) Si può accettare la presenza di poli sull'asse immaginario per la funzione di rete $F(s)$, sotto le seguenti condizioni:

- 1) il circuito considerato è passivo;
- 2) non si ha coincidenza di detti poli con i poli derivanti dall'eccitazione.

Infatti, nel caso dei circuiti passivi, i poli sull'asse immaginario delle funzioni di rete corrispondono ad aver trascurato (per comodità di calcolo) tutte le perdite associate ai componenti con memoria (si veda il §IV.4.2 e l'osservazione IV.4.2 del cap. IV); da un punto di vista fisico tali poli si trovano sempre disposti nel semipiano sinistro (anche se molto vicini all'asse immaginario, nel caso di elevato fattore di merito). Perciò, nel dominio del tempo, in corrispondenza a tali poli si ottiene un andamento che non tende a zero, come limite di un andamento leggermente smorzato. Si può quindi fisicamente giustificare la separabilità della risposta transitoria (il cui andamento è leggermente smorzato) dalla risposta permanente (il cui andamento nel tempo mantiene una ampiezza rigorosamente costante); quest'ultima infatti prevale, anche se a lungo termine.

La suddivisione in transitorio e permanente non è invece più accettabile quando un eventuale polo sull'asse immaginario della funzione di rete $F(s)$ coincide con il polo dell'eccitazione. In tal caso infat-

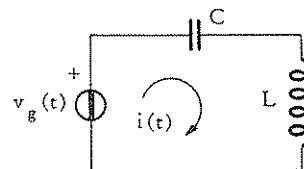
ti, per la presenza di un polo multiplo, lo sviluppo in frazioni parziali assume una forma del tutto particolare, nella quale non è distinguibile il contributo del circuito da quello dell'eccitazione.

Esempio V.1.2

Determinare la parte transitoria e la parte permanente della corrente $i(t)$ che percorre il circuito di fig. V.1.3.

Fig. V.1.3 - Circuito considerato nell'esempio V.1.2. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} C &= 1, \quad L = 1, \quad v_g(t) = \\ &= \cos 2t u_{+1}(t) \quad (\text{F}, \text{H}, \text{V}) \end{aligned}$$



Si ottiene nel dominio di s :

$$I(s) = \frac{sC}{s^2LC + 1} V_g(s)$$

in cui:

$$V_g(s) = \mathcal{L} [\cos 2t u_{+1}(t)] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Quindi si ha:

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \frac{s}{s^2 + 4}$$

Sviluppando la $I(s)$ in frazioni parziali si ottiene:

$$I(s) = -\frac{1/3}{s^2 + 1} + \frac{4/3}{s^2 + 4}$$

Nel dominio del tempo, antitrasformando la $I(s)$ si ottiene:

$$i(t) = \left[-\frac{1}{3} \sin t + \frac{2}{3} \sin 2t \right] u_{+1}(t)$$

Si constata che la corrente $i(t)$ è la somma di due sinusoidi, la prima corrispondente ai poli della funzione di rete e la seconda corrispondente ai poli dell'eccitazione. Per quanto detto, però, il primo termine è presente solo perché abbiamo trascurato le perdite degli elementi reattivi. Se tenessimo conto di tali perdite, il termine sudetto sarebbe moltiplicato per un esponenziale decrescente. Per questa ragione esso può essere considerato come risposta transitoria del circuito. Il secondo termine invece non tende a zero in alcun caso, perciò la quantità:

$$i_p(t) = \frac{2}{3} \sin 2t u_{>1}(t)$$

è la risposta permanente del circuito.

Osservazione V.1.1

In alcuni casi particolari, ma notevoli dal punto di vista delle applicazioni, può accadere che nella suddivisione (V.1.5) della risposta $U(s)$ in parte permanente e in parte transitoria, quest'ultima risultì identicamente nulla. In questi casi la (V.1.5) diviene:

$$(V.1.14) \quad U(s) = \frac{R}{s - j\omega_0} + \frac{R^*}{s + j\omega_0}$$

essendo $U_t(s) \equiv 0$.

Vediamo sotto quali condizioni si verifica questa situazione, escludendo il caso banale del circuito senza memoria, per il quale la parte transitoria è sempre assente. Consideriamo perciò un circuito con memoria, nel quale supporremo condizioni iniziali nulle. Sia s_0 il generico polo della funzione di rete $F(s)$ ⁽¹⁾.

Il corrispondente residuo a_0 vale:

$$(V.1.15) \quad a_0 = \lim_{s \rightarrow s_0} [(s - s_0) F(s) E(s)]$$

Affinché si abbia $U_t(s) \equiv 0$, si deve avere per ogni polo s_0 :

$$(V.1.16) \quad a_0 = 0$$

Tale condizione (V.1.16) è compatibile con la (V.1.15) solo nel caso in cui sia:

$$(V.1.17) \quad E(s_0) = 0$$

cioè che si verifica quando s_0 è uno zero della funzione di eccitazione. Nel caso qui considerato di eccitazioni del tipo (V.1.1) la funzione $E(s)$ ha la forma:

$$(V.1.18) \quad E(s) = \frac{s \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi}{s^2 + \omega_0^2}$$

Dal confronto della (V.1.17) con la (V.1.18) si deduce che deve essere:

$$(V.1.19) \quad s_0 = \omega_0 \tan \varphi$$

In conclusione la parte transitoria della risposta del circuito è identicamente nulla sotto le due seguenti condizioni:

(1) - Non verrà considerato, per semplicità, il caso di funzioni $F(s)$ aventi poli multipli.

- a) la funzione di rete $F(s)$ ha un unico polo, disposto sull'asse reale (eventualmente nullo o infinito);
 b) fra il polo di $F(s)$, la pulsazione ω_0 e la fase iniziale Φ della funzione di eccitazione sussiste la relazione (V.1.19).

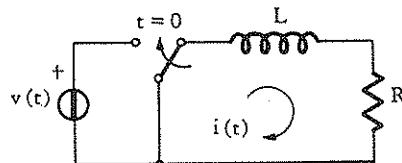
L'assenza della parte transitoria della risposta è richiesta in quelle applicazioni in cui si desidera che il regime permanente abbia inizio immediatamente all'atto della inserzione dell'eccitazione. In presenza di condizioni iniziali diverse da zero, si può ottenere l'assenza della parte transitoria della risposta in condizioni più generali rispetto a quelle indicate nella presente osservazione (vedi esempio V.A.4).

Esempio V.1.3

Dato il circuito di fig.V.1.4, a riposo all'istante iniziale, determinare la fase iniziale Φ della funzione di eccitazione in modo che nella corrente $i(t)$ non sia presente il termine transitorio.

Fig.V.1.4 - Circuito considerato nell'esempio V.1.3. Il valore di $v(t)$ è:

$$v(t) = V \cos(\omega_0 t + \Phi).$$



Nel dominio di s si ottiene il seguente legame fra $V(s)$ ed $I(s)$

$$I(s) = \frac{1}{sL + R} V(s)$$

La funzione di trasferimento $F(s)$ è uguale a:

$$F(s) = \frac{1}{sL + R}$$

Tale funzione possiede un polo reale e negativo avente il seguente valore:

$$\sigma_0 = -\frac{R}{L}$$

Applicando la relazione (V.1.19) si ottiene:

$$\sigma_0 = -\frac{R}{L} = \omega_0 \tan \Phi$$

da cui:

$$\Phi = -\text{atan} \frac{R}{\omega_0 L} + k\pi$$

con $k = 0$ oppure $k = 1$.

Nel caso in cui $R = 0$, il fenomeno transitorio è assente quando la fase iniziale Φ è uguale a zero ovvero a π ; ciò corrisponde ai casi in cui la forma d'onda di tensione assume il valore assoluto massimo per $t = 0$.

L'esempio qui svolto ha importanza quando interessa alimentare con una tensione sinusoidale un utilizzatore il cui circuito equivalente sia approssimabile con un circuito di tipo RL, a riposo nell'istante iniziale; tale situazione è molto comune, come ad esempio nel caso dell'alimentazione di un trasformatore ovvero di una macchina elettrica. In tali casi come è stato qui mostrato ha importanza la fase con la quale viene inserita la tensione di alimentazione. Se la fase ϕ ha uno dei valori ricavati in precedenza, non si ha alcun fenomeno transitorio, per cui la corrente assorbita ha subito l'andamento di tipo permanente. Nei rimanenti casi, si ha un fenomeno transitorio, a causa del quale la corrente assume valori massimi che possono essere alquanto maggiori (fino a due volte) rispetto a quelli che si hanno in regime permanente.

V.2 - Derivazione del metodo dei fasori da quello della trasformata di Laplace.

Quando un circuito si trova in regime permanente tutte le grandezze elettriche (tensioni e correnti) sono di tipo sinusoidale e riconducibili all'espressione (V.1.1) nella quale risultano variabili da grandezza a grandezza i valori di A (ampiezza) e ϕ (fase iniziale), mentre il valore di ω_0 (pulsazione) risulta uguale per tutte le grandezze del circuito. A seguito di tale circostanza è conveniente utilizzare i fasori delle grandezze elettriche, introdotti nel § II.2.4.

V.2.1 - Legame fra il fasore dell'eccitazione ed il fasore della risposta in regime permanente.

L'introduzione della nozione di fasore associato ad una grandezza sinusoidale è particolarmente utile nella determinazione della risposta di un circuito in regime permanente. Si consideri, infatti, un circuito al quale sia applicata un'eccitazione sinusoidale di pulsazione ω_0 del tipo (III.2.20), il cui fasore è dato, per quanto detto, dalla quantità (III.2.24).

Supponendo di applicare tale eccitazione all'istante $t = 0$ e che quindi essa abbia l'andamento (V.1.1), la sua trasformata di Laplace è data dalla (III.A.15), in funzione del fasore E .

La risposta del circuito nella variabile s è di conseguenza:

$$(V.2.1) \quad U(s) = F(s) \left[\frac{1}{2} \frac{E}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{E^*}{s + j\omega_0} \right]$$

Limitando l'attenzione alla parte permanente di $U(s)$, indicata con $U_p(s)$, è sufficiente considerare la parte dello sviluppo in frazioni parziali riguardante i poli $\pm j\omega_0$, cioè:

$$(V.2.2) \quad U_p(s) = \frac{1}{2} \frac{U}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{U^*}{s + j\omega_0}$$

avendo indicato con U il doppio del residuo di $U(s)$ nel polo $s = j\omega_0$.

La quantità U vale, tenendo conto della (V.2.1)

$$(V.2.3) \quad U = 2U(s)(s - j\omega_0) \Big|_{s=j\omega_0} = 2F(s) \frac{1}{2} E \Big|_{s=j\omega_0} = F(j\omega_0) E$$

D'altra parte, antitrasformando l'espressione (V.2.2) si ottiene:

$$(V.2.4) \quad u_p(t) = \frac{U e^{j\omega_0 t} + U^* e^{-j\omega_0 t}}{2} u_{-1}(t)$$

da cui, confrontando con la (III.2.26), si riconosce che la quantità complessa U è pari al fasore associato alla grandezza sinusoidale $u_p(t)$; quest'ultima inoltre risulta isofrequenziale con l'eccitazione $e(t)$. Da quanto detto consegue la proprietà:

Proprietà V.2.1 - «Per un circuito lineare e permanente, limitatamente ai casi nei quali è possibile suddividere la risposta nella parte transitoria e nella parte permanente, la risposta a regime risulta isofrequenziale con la funzione di eccitazione. Inoltre il fasore U relativo alla risposta è legato al fasore E dell'eccitazione tramite la relazione seguente:

$$(V.2.5) \quad U = F(j\omega_0) E$$

dove $F(j\omega_0)$ è il valore assunto dalla funzione di rete $F(s)$ per $s = j\omega_0$.

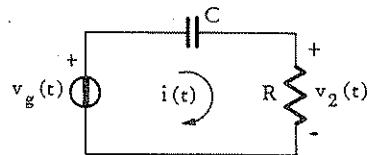
La proprietà V.2.1 riveste importanza fondamentale nell'analisi dei circuiti in regime permanente. Da essa si può trarre un metodo di analisi estremamente efficiente per calcolare direttamente la risposta a regime di un circuito, detto *metodo dei fasori*, che verrà sviluppato nel paragrafo seguente.

Esempio V.2.1.

Determinare la risposta in regime permanente del circuito di fig.V.2.1.

Fig.V.2.1 - Circuito considerato nell'esempio V.2.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, C = 1, v_g(t) = 2 \sin 2t \\ u_1(t), (\Omega, F, V)$$



Risolvendo il circuito nel dominio di Laplace, si ottiene:

$$V_2(s) = R \frac{V_g(s)}{1 + \frac{R}{sC}} = \frac{sRC}{sRC + 1} V_g(s)$$

La funzione di rete $F(s)$ d'interesse risulta quindi:

$$F(s) = \frac{sRC}{sRC + 1} = \frac{s}{s + 1}$$

Calcoliamo ora il fasore della funzione di eccitazione; si ha:

$$v_g(t) = 2 \sin 2t = 2 \cos \left(2t - \frac{\pi}{2} \right)$$

da cui si ricava il fasore:

$$V_g = 2 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j2$$

Applichiamo la proprietà V.2.1; ponendo nella (V.2.5) $s = j\omega_0 = j2$, si ottiene il fasore della risposta permanente:

$$V_2 = F(j\omega_0) V_g = \left(\frac{s}{s+1} \right)_{s=j2} V_g = \frac{j2}{j2+1} (-j2) = \frac{4}{5} (1-j2)$$

Per determinare l'andamento nel tempo della risposta in regime permanente $v_2(t)$, poniamo il fasore V_2 in forma polare, cioè:

$$V_2 = \frac{4}{\sqrt{5}} e^{-j \operatorname{atan} 2}$$

Quindi si ottiene:

$$v_2(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} \cos(2t - \operatorname{atan} 2)$$

V.3 - Metodo dei fasori.

Il metodo è basato sulla proprietà V.2.1 e sulla seguente osservazione. La quantità $F(j\omega_0)$ è stata ottenuta effettuando l'analisi nel dominio di s e ponendo successivamente $s = j\omega_0$. Si può però procedere in senso inverso e cioè porre subito $s = j\omega_0$ e successivamente analizzare il procedimento risultante. I risultati sono chiaramente identici nei due casi, ma nel secondo caso si è ottenuta una notevole semplificazione dei calcoli. Tenendo conto di ciò, si ha il seguente procedimento di analisi.

Procedimento di analisi in regime permanente (metodo dei fasori).

- 1) Detta ω_0 la pulsazione del generatore, sostituire al circuito assegnato nel dominio del tempo un circuito fittizio ottenuto nel modo seguente:
 - a) sostituire ad ogni resistore R un bipolo di impedenza R ;
 - b) sostituire ad ogni induttore L un bipolo di impedenza $j\omega_0 L$;
 - c) sostituire ad ogni condensatore C un bipolo di impedenza $1/j\omega_0 C$;
 - d) sostituire al generatore $e(t)$ un generatore la cui grandezza impressa sia uguale al fasore E della funzione $e(t)$;
- 2) Analizzare il circuito risultante con i metodi usuali, tenendo conto che le grandezze elettriche sono rappresentate dai rispettivi fasori. Determinare il fasore U della risposta;
- 3) Passare nel dominio del tempo, determinando la funzione $u(t)$ corrispondente al fasore U con la (III.2.27).

Il procedimento qui descritto è completamente differente dal metodo di analisi secondo Laplace. La differenza principale consiste nel fatto che il circuito fittizio ottenuto al punto 1) contiene dei bipoli la cui impedenza non è una funzione di s , ma è un numero complesso il cui valore dipende dalla pulsazione ω_0 del generatore. In secondo luogo le tensioni e le correnti associate al circuito fittizio rappresentano, in base alla proprietà V.2.1, i fasori delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo e non più le loro trasformate di Laplace.

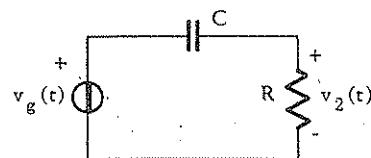
Il metodo dei fasori ha senso solo se esiste per il circuito che si sta analizzando la risposta permanente. Quindi la sua giustificazione teorica coincide con la dimostrazione dell'esistenza del regime permanente e della proprietà V.2.1.

Esempio V.3.1

Determinare la risposta in regime permanente del circuito di fig.V.3.1 mediante il metodo dei fasori.

Fig.V.3.1 - Circuito considerato nell'esempio V.3.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 1 \quad , \quad C = 1 \quad , \quad v_g(t) = 2 \sin 2t \quad (\Omega, F, V)$$



Sostituendo al circuito di fig.V.3.1 il circuito fittizio di fig.V.3.2, il quale contiene i seguenti componenti:

- 1) un generatore di tensione, la cui tensione impressa V_g è uguale al fasore corrispondente alla funzione di eccitazione; si ottiene:

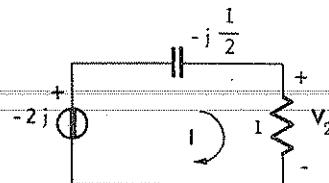
$$V_g = -2j$$

- 2) un bipolo la cui impedenza vale $1/j\omega_0 C$ al posto del condensatore; si ottiene:

$$\frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j2} = -j\frac{1}{2}$$

- 3) un bipolo la cui impedenza vale $R=1$ al posto del resistore.

Fig.V.3.2 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.1.



Nel circuito di fig.V.3.2 tutte le grandezze elettriche rappresentano i fasori delle corrispondenti grandezze relative al circuito reale nel dominio del tempo. Si può quindi risolvere il circuito con i metodi usuali. Il fasore I della corrente vale:

$$I = \frac{-2j}{1 - j\frac{1}{2}}$$

Il fasore della tensione di uscita è:

$$V_2 = RI = \frac{-2j}{1 - j\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} (1 - j2)$$

Il risultato ottenuto è ovviamente identico a quello dell'esempio V.2.1, dove l'analisi è stata effettuata con un altro procedimento.

Osservazione V.3.1

È necessario mettere in evidenza il fatto che, accanto ai notevoli vantaggi computazionali, il metodo dei fasori presenta lo svantaggio di non permettere di verificare la validità del regime permanente del circuito. Infatti, non essendo nota l'espressione analitica della funzione di rete $F(s)$, non risulta possibile verificare la stabilità del circuito. Si può andare incontro di conseguenza ai seguenti inconvenienti:

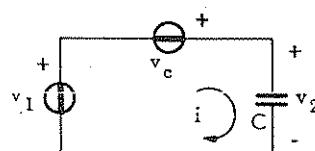
- 1) Caso dei circuiti contenenti elementi attivi. Tali circuiti possono o meno essere stabili a seconda della loro costituzione. Il calcolo effettuato mediante il metodo dei fasori perde di validità nel caso di circuiti non stabili. Purtroppo nel corso dello svolgimento dei calcoli non è presente alcun passaggio che permetta di accettare tale eventualità.
- 2) Caso dei circuiti passivi. Tali circuiti sono sempre stabili, anche in presenza di poli sull'asse immaginario. Il calcolo effettuato mediante il metodo dei fasori perde di validità solo se un polo della funzione di rete coincide con il polo della funzione di eccitazione. Nel corso dello svolgimento dei calcoli, tale eventualità viene evidenziata dalla presenza di una operazione di divisione con divisore nullo. In conclusione si può affermare che *il metodo dei fasori può essere applicato solo quando è nota a priori la validità dell'analisi in regime permanente per il circuito in esame*.

Esempio V.3.2

Determinare con il metodo dei fasori la risposta permanente del circuito di figura V.3.3 (il generatore v_c è controllato dalla corrente i).

Fig.V.3.3 - Circuito considerato nell'esempio V.3.2. I valori dei componenti sono:

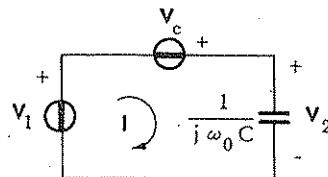
$$C = 1, \quad v_1(t) = 2 \cos t, \\ v_c = 3i \quad (F, V, A).$$



Applichiamo il metodo dei fasori. Il circuito fittizio associato a quello di figura V.3.3 è quello di fig.V.3.4, in cui V_1 è il fasore della tensione impressa dal generatore indipendente e vale:

$$V_1 = 2$$

Fig.V.3.4 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.3.



Inoltre si ha:

$$\frac{1}{j\omega_0 C} = -j \quad ; \quad V_c = 3I$$

Dalla fig.V.3.4 si ottiene:

$$I = \frac{V_1 + V_c}{-j} = j(2 + V_c) = j(2 + 3I)$$

Perciò risulta:

$$I(1 - j3) = j2 \quad ; \quad I = \frac{j2}{1 - j3}$$

Si ha quindi:

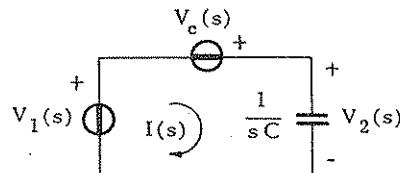
$$V_2 = -jI = \frac{2}{1 - j3} = \frac{2}{10}(1 + j3)$$

da cui si può ricavare facilmente l'andamento nel tempo della tensione di uscita.

Si può notare che il circuito assegnato contiene un elemento di tipo attivo (il generatore controllato) e quindi potrebbe essere instabile. Per verificare ciò, calcoliamo nel dominio di Laplace l'espressione della funzione di trasferimento fra la tensione di ingresso e l'uscita considerata. Il circuito nel dominio di Laplace è quello mostrato in fig.V.3.5. Per tale circuito si ha:

$$I(s) = [V_1(s) + V_c(s)] sC$$

Fig.V.3.5 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig.V.3.3.



Essendo:

$$V_c(s) = 3I(s)$$

e sostituendo il valore della capacità, si ottiene:

$$I(s) = [V_1(s) + 3I(s)] s$$

Da cui risulta:

$$V_2(s) = \frac{1}{s} I(s) = \frac{1}{1-3s} V_1(s)$$

Quindi la funzione di rete cercata è

$$F(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1-3s}$$

Poichè la funzione $F(s)$ possiede un polo nel semipiano destro di s , il circuito è di tipo instabile. Di conseguenza la risposta di tale circuito risulta crescente nel tempo e quindi non è fisicamente valida la suddivisione di tale risposta nelle parti transitoria e permanente.

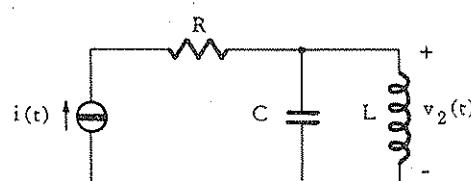
L'applicazione del metodo dei fasori, nel presente esempio, ha quindi condotto ad un risultato non corretto, poichè l'andamento della risposta, determinato con tale metodo, non ha alcun riferimento così il fenomeno fisico che si svolge nel circuito in esame. È bene notare che, dal punto di vista formale, i calcoli effettuati durante lo svolgimento del procedimento di analisi con il metodo dei fasori sono del tutto corretti. Ciò mette in evidenza il fatto che tale metodo deve essere adoperato con cautela nel caso dei circuiti contenenti elementi attivi.

Esempio V.3.3

Determinare con il metodo dei fasori la risposta permanente del circuito di figura V.3.6.

Fig.V.3.6 - Circuito considerato nell'esempio V.3.3. I valori dei componenti sono:

$R = 2$, $L = 1$, $C = 0,25$,
 $i(t) = \sin 2t$ (Ω , H, F, A, V).



Utilizzando il metodo dei fasori, essendo:

$$\omega_0 = 2$$

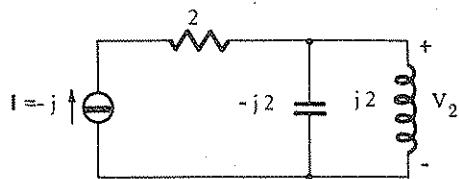
$$I = -j$$

si ottiene il circuito fittizio di fig.V.3.7. Applicando il metodo dei nodi si ha la seguente equazione:

$$v_2 \left(\frac{1}{j2} + \frac{1}{j2} \right) = -j$$

Da tale equazione non è possibile determinare il valore del fasore incognito v_2 , in quanto il coefficiente moltiplicativo di v_2 è nullo.

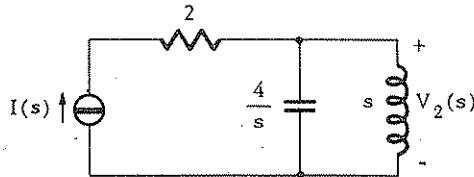
Fig.V.3.7 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.6.



Per trovare la causa di tale risultato è necessario considerare il circuito assegnato in maggiore dettaglio. Si può senz'altro dire che tale circuito è stabile in quanto non contiene elementi attivi. Tuttavia la funzione di rete potrebbe avere dei poli sull'asse immaginario della variabile s , avendo supposto per semplicità i componenti reattivi privi del tutto di perdite. Per verificare ciò consideriamo il circuito fittizio nel dominio di Laplace mostrato in fig.V.3.8: Per tale circuito si ottiene:

$$V_2(s) \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{s} \right) = I(s)$$

Fig. V.3.8 - Circuito trasformato nel dominio di Laplace di quello di fig.V.3.6.



La funzione di rete corrispondente risulta uguale a:

$$F(s) = \frac{V_2(s)}{I(s)} = \frac{4s}{s^2 + 4}$$

ed ha i poli sull'asse immaginario per:

$$s_0 = \pm j 2$$

Tali poli coincidono con i poli della funzione di eccitazione e quindi non risulta possibile la suddivisione della risposta nelle parti transitoria e permanente, come detto in precedenza.

Nel caso in cui si sia incerti sulla stabilità del circuito, quando esso sia attivo, occorre accettare tale condizione. In questo caso, non conviene più applicare il metodo dei fasori, in quanto siamo stati costretti a determinare $F(s)$. Perciò, si può utilizzare direttamente la proprietà V.2.1. Il procedimento da usare in tale circostanza consiste quindi nei seguenti passi:

- 1) trasformare il circuito nel dominio di Laplace, determinando la funzione di rete $F(s)$ di interesse. È evidente che si può omettere di considerare sia le condizioni iniziali sia le trasformate delle eccitazioni;

- 2) controllare che la $F(s)$ non abbia poli nel semipiano destro chiuso. Se il controllo dà un risultato negativo, non esiste il regime permanente;
- 3) calcolare $F(j\omega_0)$, sostituendo in $F(s)$ $s = j\omega_0$;
- 4) calcolare il fasore dell'eccitazione E ;
- 5) determinare il fasore della risposta $U = F(j\omega_0)E$;
- 6) determinare l'andamento nel tempo della risposta mediante la (III.2.27).

V.3.1 - Circuito fittizio nel dominio dei fasori.

Nel procedimento di analisi con il metodo dei fasori, si propone nel primo passo una trasformazione del circuito da analizzare. Quello che si ottiene può essere ancora chiamato *circuito* in quanto soddisfa le leggi di Kirchhoff ed è composto da elementi senza memoria. Tale proprietà deriva dalla constatazione che il circuito fittizio nel dominio dei fasori è identico a quello che si ha nel dominio di Laplace, salvo che $s = j\omega_0$, non ci sono condizioni iniziali e le eccitazioni sono sostituite dai loro fasori.

Poiché il circuito fittizio nel dominio dei fasori soddisfa le leggi di Kirchhoff per esso vale la proprietà di ortogonalità del vettore dei fasori delle tensioni e dell'analogo vettore dei fasori delle correnti. Tale proprietà vale anche se i due vettori si riferiscono a circuiti diversi purché di uguale grafo (teorema di Tellegen). Un'applicazione interessante del teorema di Tellegen riguarda il caso in cui si consideri il circuito di interesse ed un altro circuito ottenuto dal primo semplicemente sostituendo le eccitazioni e le impedenze con i complessi coniugati. In tale nuovo circuito tutte le grandezze in gioco sono le complesse coniugate delle corrispondenti grandezze del circuito iniziale. L'applicazione del teorema di Tellegen in questo caso comporta la seguente proprietà, che utilizzeremo successivamente:

Proprietà V.3.1 - Detto con \mathbf{V} il vettore dei fasori delle tensioni dei rami di un circuito ed \mathbf{I} l'analogo delle correnti, risulta:

$$(V.3.1) \quad \mathbf{V}^T \mathbf{I}^* = 0$$

V.4 - Uso grafico dei fasori nell'analisi in regime permanente sinusoidale.

Quando si considera il regime permanente sinusoidale, tutte le grandezze elettriche presenti in un circuito hanno un andamento nel tempo di tipo sinusoidale e sono isofrequenziali. Il comportamento del cir-

cuito può essere descritto utilizzando i fasori associati a tali grandezze. Poichè d'altra parte ogni fasore, essendo una quantità complessa, può essere rappresentato come un vettore nel piano dei fasori, l'analisi dei circuiti in regime permanente viene spesso effettuata considerando la disposizione di tali vettori nel piano complesso.

Abbiamo già fatto vedere nel § III.2.4 come si possa interpretare per via grafica il legame tra le grandezze nel tempo ed i fasori.

Nel presente paragrafo faremo vedere come in regime permanente i legami fra le grandezze elettriche possano essere interpretati graficamente nel piano dei fasori, nel caso dei singoli bipoli elementari e nel caso delle leggi di Kirchhoff. Illustreremo poi tale metodo grafico nel caso dell'analisi di una particolare categoria di circuiti: i *circuiti a scala*. Vedremo poi nel § V.7 un uso tipico del metodo grafico in relazione ai sistemi trifase, che si utilizzano nelle applicazioni di potenza. È da sottolineare che proprio in tale ambito è più usato il metodo dei fasori per via grafica.

V.4.1 - Interpretazione grafica dei legami fra i fasori delle grandezze elettriche relative ai singoli componenti elementari.

Si consideri una grandezza sinusoidale $e(t)$, il cui fasore sia \mathbf{E} . Se si effettua la derivata rispetto al tempo di $e(t)$, cioè de/dt , tale nuova grandezza è ancora sinusoidale isofrequenziale con la $e(t)$ e quindi caratterizzata da un fasore, che possiamo ottenere derivando rispetto al tempo ambo i membri della (III.2.28). Si ottiene:

$$(V.4.1) \quad \frac{de}{dt} = \operatorname{Re} [j\omega_0 \mathbf{E} e^{j\omega_0 t}]$$

Quindi il fasore cercato è $j\omega_0 \mathbf{E}$.

Ricordando che $j = e^{j\pi/2}$, si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà V.4.1 - *Data una grandezza sinusoidale $e(t)$, il cui fasore è \mathbf{E} , il fasore relativo alla derivata de/dt , ha un modulo pari ad $\omega_0 |\mathbf{E}|$ ed è ruotato rispetto ad \mathbf{E} di 90° in senso antiorario, come illustrato in figura V.4.1⁽¹⁾.*

Utilizzando la proprietà V.4.1 si ottengono facilmente le relazioni fra i fasori della tensione e della corrente, relativi al resistore, allo induttore ed al condensatore riportati in tabella V.4.1.

(1) - La proprietà V.4.1 si enuncia spesso dicendo che il vettore $j\omega_0 \mathbf{E}$ è *in anticipo di fase* di 90° rispetto ad \mathbf{E} . Tale enunciato è conseguenza del fatto che il vettore rotante associato alla derivata precede di 90° il vettore rotante associato ad \mathbf{E} .

Fig. V.4.1 - Legame tra il fasore \mathbf{E} di una grandezza sinusoidale ed il fasore \mathbf{G} della sua derivata rispetto al tempo.

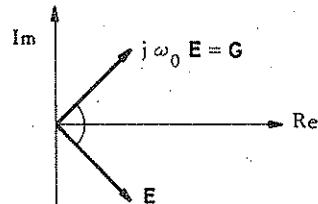


Tabella V.4.1 - Relazione tra i fasori della tensione e della corrente per gli elementi ideali resistore, induttore e condensatore.

Elemento ideale	Relazione costitutiva nel dominio dei fasori	Interpretazione grafica della relazione costitutiva
Resistore (resistenza R)	$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$	
Induttore (induttanza L)	$\mathbf{V} = j \omega_0 L \mathbf{I}$	
Condensatore (capacità C)	$\mathbf{I} = j \omega_0 C \mathbf{V}$	

V.4.2 - Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff nel piano dei fasori.

L'operazione di passaggio dal fasore alla relativa funzione del tempo è lineare, in quanto basata sull'operatore «parte reale», come risulta dalla (III.2.28). Ciò implica la seguente proprietà:

Proprietà V.4.2 - «Una combinazione lineare di funzioni sinusoidali isofrequenziali è una funzione sinusoidale di frequenza uguale a quella delle funzioni componenti. Il fasore di tale funzione si ottiene sostituendo nella combinazione lineare alle funzioni componenti i relativi fasori».

Una situazione particolare si verifica quando la combinazione lineare che si sta considerando è identicamente nulla, come accade ad esempio quando si applicano le leggi di Kirchhoff. In conseguenza della proprietà V.4.2, i fasori relativi alle tensioni di una maglia o alle correnti di un taglio di un circuito hanno somma algebrica uguale a zero. Di conseguenza tali fasori possono essere rappresentati nel piano complesso per mezzo di una linea poligonale chiusa come mostrato in fig. V.4.2.

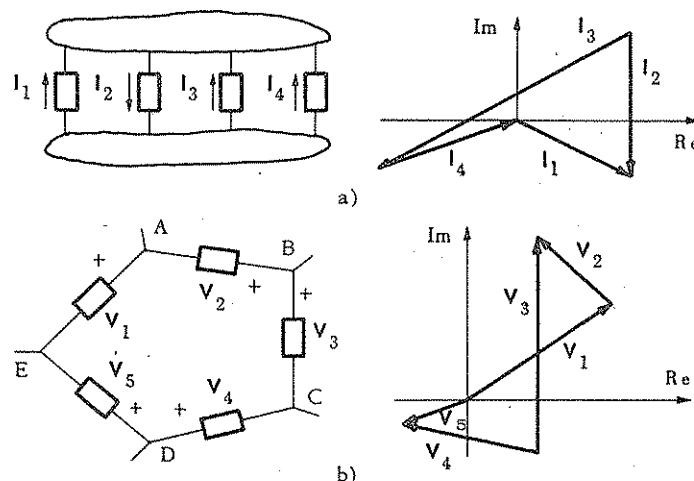


Fig. V.4.2 - Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff: a) caso della prima legge; b) caso della seconda legge.

Esempio V.4.1

Determinare con il metodo grafico l'ampiezza e la fase della seguente funzione sinusoidale:

$$f(t) = \cos 2t + 3 \sin 2t$$

Nel piano dei fasori si possono individuare facilmente i fasori relativi ai due addendi della funzione $f(t)$. Il fasore F della funzione $f(t)$ è quindi pari alla somma dei due fasori (fig. V.4.3).

Risulta:

$$F = 1 + 3j$$

e quindi:

$$f(t) = \sqrt{10} \cos(2t - \arctan 3)$$

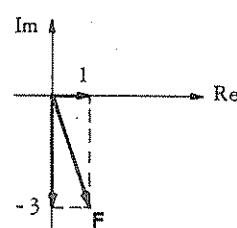


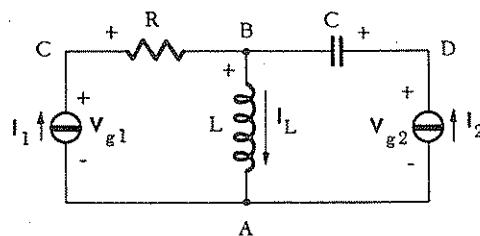
Fig. V.4.3 - Esempio V.4.1.

Esempio V.4.2

Dato il circuito di fig.V.4.4 determinare con il metodo grafico le tensioni e le correnti in tutti i suoi rami.

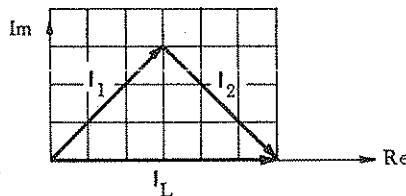
Fig.V.4.4 - Circuito considerato nell'esempio V.4.2. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned}I_1 &= 1+j ; \quad I_2 = 1-j ; \quad R = 1 ; \\ \omega_0 L &= 1 ; \quad \omega_0 C = 2 \quad (\text{A}, \Omega) .\end{aligned}$$



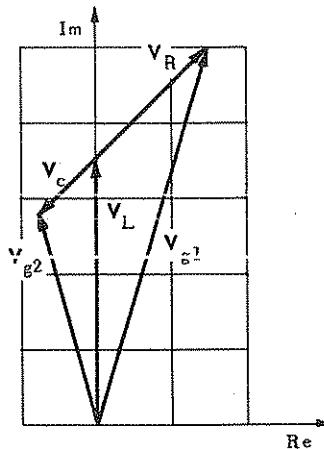
Riportiamo nel piano dei fasori il diagramma delle correnti nei vari rami del circuito; tale diagramma si ottiene immediatamente applicando la prima legge di Kirchhoff al nodo B (fig.V.4.5).

Fig.V.4.5 - Legame tra i fasori delle correnti che entrano nel nodo B del circuito di figura V.4.4. Le correnti sono espresse in ampere.



Il diagramma delle tensioni nel piano dei fasori si può ottenere dalle correnti già determinate e dalle definizioni dei componenti, come mostrato in fig.V.4.6, dove con V_L , V_C , V_R sono state indicate le tensioni ai capi rispettivamente dell'induttore, del condensatore e del resistore, con V_{g1} e V_{g2} le tensioni ai capi dei generatori di corrente. Si noti che il nodo A è stato preso come riferimento e quindi il fasore della relativa tensione è l'origine del piano dei fasori. Si può anche notare che il diagramma di fig.V.4.6 è equivalente al grafo del circuito considerato.

Fig.V.4.6 - Legame tra i fasori delle tensioni del circuito di figura V.4.4.

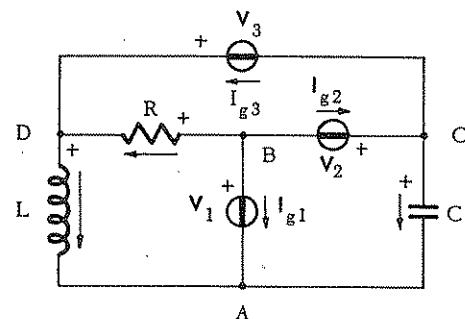


Esempio V.4.3

Dato il circuito di fig. V.4.7 determinare con il metodo grafico le tensioni e le correnti di tutti i suoi rami.

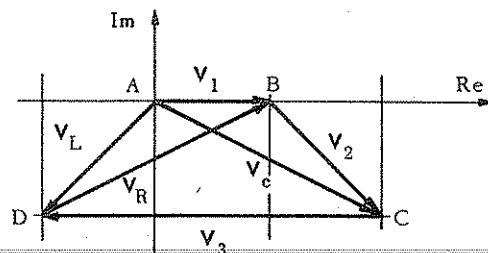
Fig. V.4.7 - Circuito considerato nell'esempio V.4.3. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1, \quad V_2 = 1-j, \quad V_3 = -3, \quad R = 1 \\ \omega L &= 1, \quad \omega C = 1, \quad (V, \Omega, H, F) \end{aligned}$$



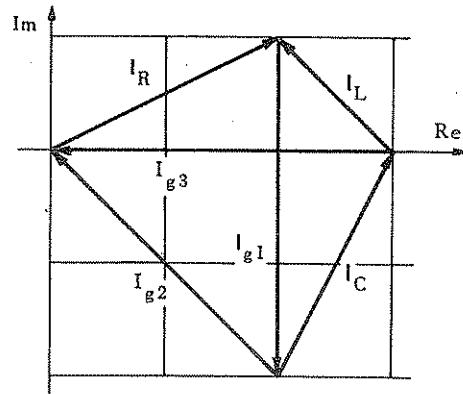
Riportiamo nel piano dei fasori (fig. V.4.8) il diagramma delle tensioni; tale diagramma si ottiene immediatamente, osservando che i generatori di tensione sono posti su un albero del circuito.

Fig. V.4.8 - Diagramma dei fasori delle tensioni del circuito di fig. V.4.7 (V).



Dal diagramma di fig. V.4.8, in base alle definizioni dei componenti ed alle leggi di Kirchhoff relative ai nodi D, C e B si possono ottenere le correnti nei rami del circuito (fig. V.4.9).

Fig. V.4.9 - Diagramma dei fasori delle correnti del circuito di fig. V.4.7 (A).



Osservazione V.4.1

Gli esempi V.4.2 e V.4.3 mostrano che in alcuni casi un circuito in regime permanente sinusoidale può essere risolto utilizzando il metodo grafico. Ciò non vale in generale, in quanto per l'analisi di un circuito è usualmente richiesta l'utilizzazione di uno dei metodi visti precedentemente (metodo delle maglie, dei nodi o dei tagli) e quindi la soluzione di un sistema di equazioni lineari a coefficienti complessi. In questi casi il diagramma delle tensioni e delle correnti del circuito nel piano dei fasori può essere ottenuto solo dopo aver analizzato nel modo detto il circuito; tali diagrammi sono ancora utili per mettere in evidenza le relazioni di ampiezza e di fase fra le varie grandezze elettriche.

V.4.3 - Analisi del circuito a scala.

Il circuito a scala, rappresentato in fig. V.4.10, è particolarmente indicato per l'applicazione del metodo grafico di analisi, quando interessi il legame tensione di uscita-tensione d'ingresso. In questo caso infatti è sufficiente supporre nota la tensione di uscita e risalire per via grafica alla tensione d'ingresso. A questo scopo, posto $V_u = 1$, si calcolano per via grafica i seguenti fasori (fig. V.4.11).

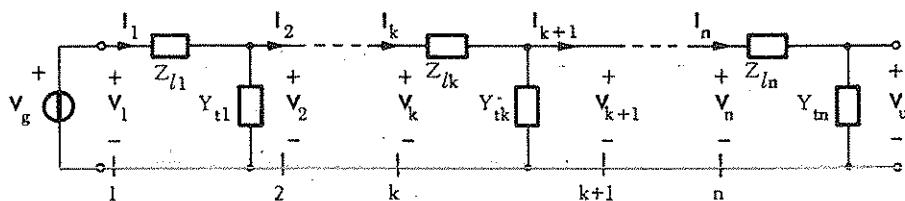
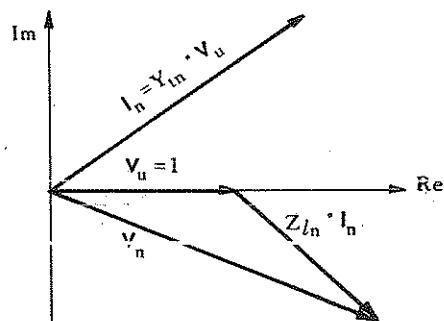


Fig. V.4.10 - Circuito a scala.



(V.4.2)

$$\begin{cases} I_n = Y_{tn} \cdot V_u \\ V_n = V_u + Z_{ln} \cdot I_n \end{cases}$$

Fig. V.4.11 - Interpretazione grafica delle (V.4.2).

Tali fasori corrispondono alla tensione e alla corrente relative alla sezione n -esima del circuito a scala (fig. V.4.10). Si può ora procedere al calcolo della tensione e della corrente nella k -esima sezione a partire da $k = n-1$ fino a $k=1$, procedendo dal fondo del circuito verso la sezione iniziale. Il passo generico di tale procedimento, illustrato in fig. V.4.12, consiste nelle seguenti operazioni:

$$(V.4.3) \quad \begin{cases} I_k = I_{k+1} + Y_{tk} V_{k+1} \\ V_k = V_{k+1} + Z_{tk} I_k \end{cases}$$

con $k = n-1, n-2, \dots, 2, 1$

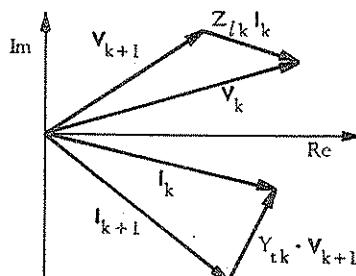


Fig. V.4.12 - Interpretazione grafica delle (V.4.2).

Tale procedimento permette di determinare tutte le tensioni e le correnti del circuito, compresa la tensione del generatore che risulta pari alla tensione V_1 di fig. V.4.10; cioè si ha:

$$(V.4.4) \quad V_g = V_1$$

Poiché il calcolo grafico è stato fatto ponendo arbitrariamente $V_u = 1$, il valore di V_g ottenuto tramite la (V.4.4) rappresenta in effetti il rapporto V_g/V_u . Pertanto il valore effettivo di V_u si ottiene dividendo per questa quantità, determinata per via grafica, il fasore assegnato della tensione di ingresso⁽¹⁾.

Nelle figure V.4.14 viene risolto mediante il metodo grafico il circuito a scala indicato in fig. V.4.13.

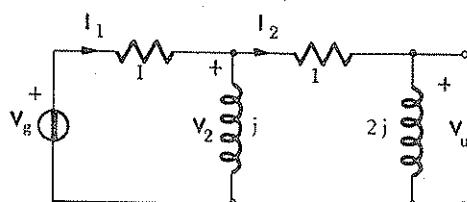


Fig. V.4.13 - Esempio di applicazione del metodo grafico per l'analisi di circuiti a scala. I valori sono in V, Ω .

(1) - Il metodo qui descritto ed in particolare le formule ricorrenti (V.4.3) costituiscono un procedimento molto efficiente per l'analisi automatica di circuiti a scala.

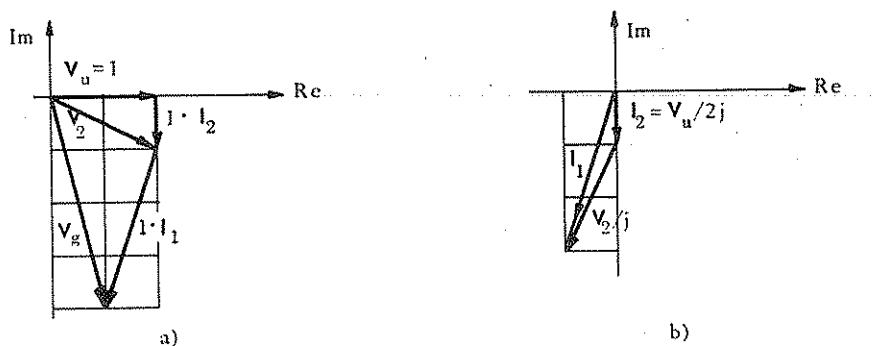


Fig. V.4.14 - Risoluzione grafica del circuito di fig. V.4.13;
a) diagramma delle tensioni;
b) diagramma delle correnti.

V.5 - Potenza ed energia in regime permanente sinusoidale.

L'analisi degli scambi di energia tra i componenti in regime permanente sinusoidale richiede l'introduzione di grandezze opportune, in quanto sia la potenza sia l'energia variano nel tempo, essendo le grandezze elettriche presenti variabili sinusoidalmente nel tempo. Per le varie applicazioni dei circuiti occorre avere a disposizione i mezzi per misurare gli aspetti che più interessano, quali il valore medio dell'energia fornita od assorbita, il valore medio dell'energia scambiata con gli elementi accumulatori di energia. Nel presente paragrafo definiremo le grandezze più usate per raggiungere questi scopi, fornendo contemporaneamente le formule che le collegano ai fasori delle grandezze elettriche presenti nel circuito.

V.5.1 - Espressione della potenza istantanea in regime permanente.

Si consideri un bipolo alimentato da un generatore (fig.V.5.1). Supponiamo, senza perdita di generalità, che il generatore sia di tensione e che l'impedenza del bipolo sia Z . Nel dominio del tempo, dette $v(t)$ ed $i(t)$ la tensione e la corrente ai capi del bipolo (con i versi scelti come in fig.V.5.1) è noto che la potenza $p(t)$ ceduta in ogni istante t dal generatore al bipolo è:

$$(V.5.1) \quad p(t) = v(t) i(t)$$

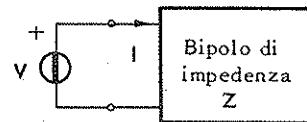
Tale quantità, che si misura in watt, viene detta potenza istantanea assorbita dal bipolo.

In regime permanente sinusoidale, le grandezze $v(t)$ e $i(t)$ hanno entrambe andamento sinusoidale isofrequenziale. Detta ω_0 la pulsazione e:

$$(V.5.2) \quad v = V e^{j\varphi_v}$$

$$(V.5.3) \quad i = I e^{j\varphi_i}$$

Fig.V.5.1 - Situazione considerata per la definizione della potenza istantanea.



i fasori rispettivamente della tensione e della corrente, ricaviamo un'espressione della potenza istantanea nella quale compaiono in modo esplicito i suddetti fasori. A tale scopo esprimiamo $v(t)$ e $i(t)$ in funzione dei rispettivi fasori nel modo seguente:

$$(V.5.4) \quad v(t) = \frac{1}{2} [v e^{j\omega_0 t} + v^* e^{-j\omega_0 t}]$$

$$(V.5.5) \quad i(t) = \frac{1}{2} [i e^{j\omega_0 t} + i^* e^{-j\omega_0 t}]$$

Sostituendo le espressioni (V.5.4) e (V.5.5) nella (V.5.1) si ottiene:

$$(V.5.6) \quad p(t) = \frac{1}{4} [v e^{j\omega_0 t} + v^* e^{-j\omega_0 t}] [i e^{j\omega_0 t} + i^* e^{-j\omega_0 t}] = \\ = \frac{1}{4} [v i^* + v^* i] + \frac{1}{4} [v i e^{j2\omega_0 t} + v^* i^* e^{-j2\omega_0 t}]$$

Osservando che i termini ottenuti sono a due a due complessi coniugati, si ha:

$$(V.5.7) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[v i^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[v i e^{j2\omega_0 t}]$$

La (V.5.7) è l'espressione cercata; essa consiste della somma di due termini, di cui il primo non dipende dal tempo, ed il secondo è di tipo sinusoidale con pulsazione uguale a $2\omega_0$. La (V.5.7) costituisce il punto di partenza di tutte le considerazioni successive. Analizziamo in dettaglio i due termini che la compongono.

V.5.2 - Potenza attiva.

Il significato del termine costante della potenza istantanea $p(t)$, si può ottenere facilmente esplicitando l'espressione (V.5.7) nel modo seguente:

$$(V.5.8) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [VI^*] + \frac{1}{2} VI \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i)$$

Riportando in funzione del tempo l'andamento di $p(t)$ si ottiene un diagramma del tipo indicato in fig. V.5.2. Tale andamento mostra che la potenza $p(t)$ varia sinusoidalmente con pulsazione $2\omega_0$ ed ha un valore medio uguale al termine costante della (V.5.7), cioè:

$$(V.5.9) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [VI^*]$$

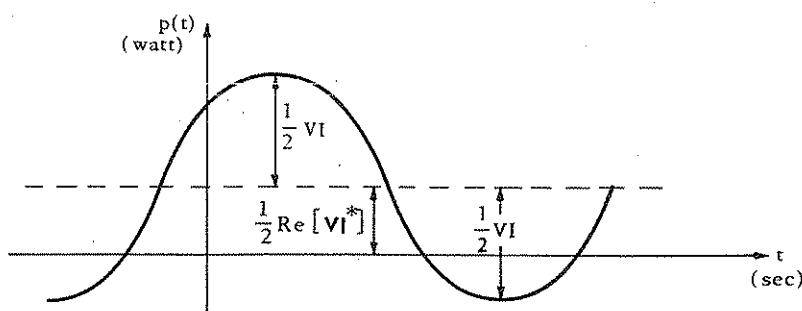


Fig. V.5.2 - Andamento nel tempo della potenza istantanea.

La grandezza P_a , che rappresenta la potenza ceduta *in media* al bipolo di carico dal generatore, viene detta *potenza attiva* e viene misurata in watt (multipli: kilowatt; sottomultipli: milliwatt, microwatt).

La potenza attiva implica quindi una media della potenza istantanea da effettuarsi su un opportuno intervallo di tempo. A questo riguardo occorre osservare che se

l'intervallo di tempo in questione non è scelto bene, il valore medio risultante è diverso dalla potenza attiva. Due scelte tipiche che forniscono i risultati voluti sono:

1) intervallo di tempo uguale ad un multiplo intero N di semiperiodi delle grandezze elettriche. Il valore medio della potenza istantanea è:

$$(V.5.10) \quad \overline{p(t)} = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} p(t) dt = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] + \frac{1}{2} VI \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i) \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] + \frac{1}{2} \frac{VI}{2\omega_0 T_m} [\sin(2\omega_0 T_m + \varphi_v + \varphi_i) - \sin(\varphi_v + \varphi_i)]$$

Poiché per ipotesi T_m è uguale a $N\pi/\omega_0$, $N=1, 2, 3, \dots$ il contributo del termine variabile della potenza istantanea è nullo. Quindi il valore medio è in questo caso proprio la potenza attiva;

2) intervallo di tempo infinitamente grande. Il contributo del termine variabile della potenza istantanea vale:

$$(V.5.11) \quad \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{VI}{2\omega_0 T_m} [\sin(2\omega_0 T_m + \varphi_v + \varphi_i) - \sin(\varphi_v + \varphi_i)] = 0$$

Perciò anche in questo caso il valore medio della potenza istantanea coincide con la potenza attiva.

È evidente che se si effettua la media della potenza $p(t)$ su intervalli di tempo che non rientrano nei due casi precedenti, si ottiene un valore medio differente da P_a , poiché in tale caso il termine variabile dà un contributo diverso da zero.

L'espressione (V.5.9) della potenza attiva P_a può essere esplicitata in base alle espressioni (V.5.2) e (V.5.3) in modo che compaiano i valori dei moduli e delle fasi di V ed I . Si ottiene:

$$(V.5.12) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V e^{j\varphi_v} I e^{-j\varphi_i}] = \frac{1}{2} VI \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

Detto Φ l'angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente:

$$(V.5.13) \quad \Phi = \varphi_v - \varphi_i$$

si ha:

$$(V.5.14) \quad P_a = \frac{1}{2} VI \cos \Phi$$

La quantità $\cos\Phi$ prende il nome di «fattore di potenza». Si vede chiaramente da questa espressione che la potenza attiva dipende in modo notevole dallo sfasamento tra corrente e tensione. In particolare può accadere che anche con valori grandi della tensione e della corrente si abbiano valori piccoli di potenza attiva a causa di uno sfasamento tra le due grandezze elettriche vicino a 90° . Tale constatazione è di fondamentale importanza nella trasmissione dell'energia elettrica e rende chiara la necessità dell'azione di «rifasamento» che si opera in tali casi (cfr. esempio V.5.3).

La presenza del coefficiente 2 nella (V.5.14) viene usualmente resa superflua mediante l'utilizzazione dei «valori efficaci» delle grandezze sinusoidali. Si definiscono come valori efficaci della tensione e della corrente le seguenti quantità:

$$(V.5.15) \quad V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I$$

In termini efficaci la potenza attiva assume la forma:

$$(V.5.16) \quad P_a = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\Phi$$

Altre espressioni equivalenti della potenza attiva si ottengono, tenendo conto del legame tra tensione e corrente imposto dal carico. Precisamente si ha:

$$(V.5.17) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z] I^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z] I^2 = \operatorname{Re}[Z] I_{\text{eff}}^2$$

$$(V.5.18) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Y] V^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Y] V^2 = \operatorname{Re}[Y] V_{\text{eff}}^2$$

Da queste espressioni si deduce che la potenza attiva dipende solo dalle parti reali dell'impedenza e dell'ammettenza.

V.5.3 - Potenza complessa e potenza reattiva.

La potenza attiva definita in precedenza non fornisce alcun elemento di valutazione del termine variabile nel tempo che appare nell'espressione (V.5.7) della potenza istantanea. Occorre perciò introdurre ulteriori grandezze. Per raggiungere questo scopo è opportuno trasformare preventivamente il termine suddetto, in modo che in esso compaia esplicitamente la potenza attiva, cioè:

$$\begin{aligned}
 p_v(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I} e^{j2\omega_0 t}] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I} e^{-j2\varphi_i} e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}] = \\
 (V.5.19) \quad &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^* e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}]
 \end{aligned}$$

avendo indicato con φ_i l'argomento del fasore della corrente. La quantità $p_v(t)$ è di tipo sinusoidale con pulsazione $2\omega_0$; ad essa può essere associata la quantità:

$$(V.5.20) \quad P_c = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*$$

La quantità P_c prende il nome di «potenza complessa» e svolge un ruolo importante nella caratterizzazione dei circuiti in regime permanente sinusoidale, come vedremo successivamente. Il modulo di P_c , che coincide con l'ampiezza della quantità $p_v(t)$, prende il nome di «potenza apparente» e vale:

$$(V.5.21) \quad P_{ap} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I} = V_{eff} I_{eff}$$

La potenza apparente, che si misura in voltampere, ha interesse in quei casi in cui occorre conoscere contemporaneamente l'ampiezza della tensione e della corrente per valutare globalmente l'impegno che ne deriva per l'apparecchiatura che si sta considerando. Infatti in una macchina elettrica la complessità dell'isolamento e dei circuiti magnetici è proporzionale all'ampiezza della tensione e la complessità degli avvolgimenti è proporzionale all'ampiezza della corrente. Perciò in questo caso la potenza apparente fornisce una misura della complessità della macchina stessa. È interessante osservare che la potenza apparente non è mai inferiore alla potenza attiva, cioè:

$$(V.5.22) \quad P_{ap} \geq P_a$$

La (V.5.19) richiede la parte reale del prodotto dei due numeri complessi P_c ed $e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}$. Quindi, coincide con la differenza del prodotto delle loro parti reali ed il prodotto delle loro parti immaginarie, cioè:

$$\begin{aligned}
 (V.5.23) \quad p_v(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i) \\
 &\sim \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_i)
 \end{aligned}$$

I due termini in cui risulta suddivisa la parte variabile della potenza istantanea hanno un significato fisico preciso, anche se sono stati ottenuti soltanto per via analitica. Essi corrispondono infatti all'effetto di due cause distinte, che provocano la variabilità della potenza istantanea: l'andamento sinusoidale delle grandezze elettriche e la presenza degli elementi immagazzinatori di energia. Per separare i due effetti è sufficiente osservare che in assenza di elementi reattivi i due fasori V ed I sarebbero in fase e quindi sarebbe presente solo il primo termine della (V.5.23). Perciò è del tutto naturale identificare tale primo termine con l'effetto della prima causa ed il secondo con l'effetto della seconda causa. Osserviamo che quest'ultimo termine ha un'ampiezza pari a:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [VI^*]$$

che coincide con l'ampiezza della parte immaginaria della potenza complessa, definita nella (V.5.20). Tale parte immaginaria, quindi, costituisce una misura dello scambio energetico con gli elementi immagazzinatori di energia e prende il nome di «potenza reattiva», cioè:

$$(V.5.24) \quad P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [VI^*] = \frac{1}{2} VI \sin(\phi_v - \phi_i) = \frac{1}{2} VI \sin \Phi = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \Phi$$

Esplicitando la (V.5.24) in funzione dell'impedenza o dell'ammettenza del bipolo si ha un'ulteriore conferma del legame della potenza reattiva con gli elementi reattivi; infatti si ha:

$$(V.5.25) \quad P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [Z] \cdot I^2 = \operatorname{Im} [Z] \cdot I_{\text{eff}}^2$$

$$P_R = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} [Y] \cdot V^2 = -\operatorname{Im} [Y] \cdot V_{\text{eff}}^2$$

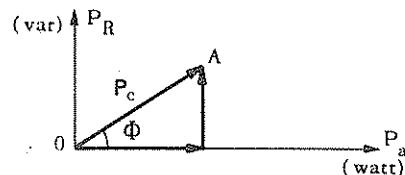
L'unità di misura usata per la potenza reattiva è il var (volt ampere reattivi; multiplo: kilovar). Non si usa quindi il watt, in quanto si tratta di una potenza soltanto scambiata e non utilizzata.

È importante notare che tra le varie grandezze introdotte esiste un legame molto semplice, come si deduce dalle (V.5.20), (V.5.14) e (V.5.24), cioè:

$$(V.5.26) \quad P_c = P_a + j P_R$$

Inoltre la potenza apparente è semplicemente il modulo del fasore P_c . Queste relazioni sono ricavabili in modo immediato nel piano delle potenze complesse, come si deduce dalla fig. V.5.3.

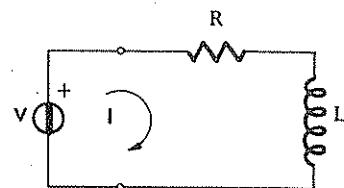
Fig. V.5.3 - Legame tra potenza complessa, potenza attiva e potenza reattiva. La potenza apparente coincide con la lunghezza del segmento OA.



Esempio V.5.1.

Dato il circuito di fig. V.5.4, determinare le potenze attiva, reattiva, complessa, apparente entranti nel bipolo.

Fig. V.5.4 - Circuito considerato nell'esempio V.5.1. I valori dei componenti sono: $V=100$, $R=3$, $L=2$, $\omega_0=2$ (V , Ω , H , rad/sec).



Dall'equazione di equilibrio dell'unica maglia presente, si ha:

$$I = \frac{V}{R + j\omega_0 L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100}{25} (3 - j4) = 12 - j16 = 20 e^{-j\arctan 4/3} = 20 e^{-j0,93}$$

In base alle definizioni precedenti si ha:

$$P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V I^*] = 600 \text{ watt}$$

$$P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [V I^*] = 800 \text{ VAR}$$

$$P_c = P_a + j P_R = 600 + j 800$$

$$P_{ap} = \frac{1}{2} V I = 1000 \text{ voltampere}$$

Tra le quantità precedenti esiste il legame mostrato in fig. V.5.5.

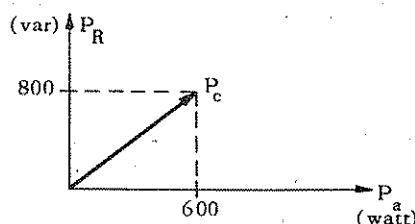


Fig. V.5.5 - Rappresentazione delle potenze attiva, reattiva e complessa per il circuito dell'esempio V.5.1.

Applicando la formula (V.5.8) si ottiene l'espressione della potenza istantanea $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V I^*] + \frac{1}{2} V I \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [100(12 + j16)] + \frac{1}{2} 100 \cdot 20 \cos(4t - 0,93) = 600 + 1000 \cos(4t - 0,93) \text{ watt} \end{aligned}$$

L'andamento nel tempo di tale potenza istantanea $p(t)$ è riportato nella fig. V.5.6. Dall'esame di questa figura si vede chiaramente che:

$$P_a = 600 \text{ watt}$$

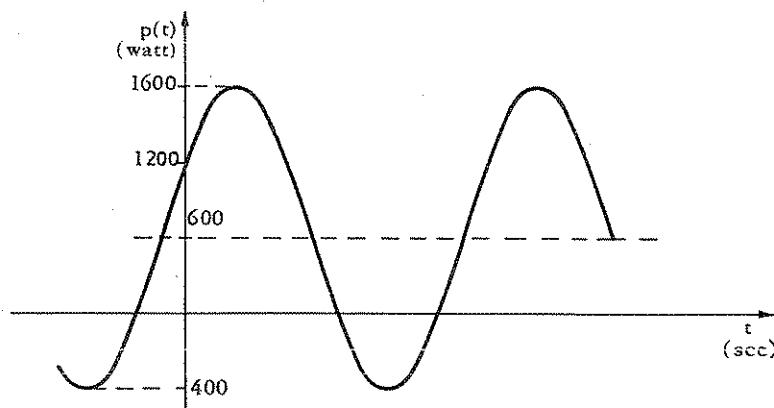


Fig. V.5.6 - Andamento della potenza istantanea: $p(t) = 600 + 1000 \cos(4t - 0,93)$.

Il termine variabile della potenza istantanea può essere ulteriormente suddiviso come indicato nella (V.5.23), cioè:

$$\begin{aligned}
 p_v(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V I^*] \cos(4t - 1,86) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} [V I^*] \sin(4t - 1,86) = \\
 &= 600 \cos(4t - 1,86) - 800 \sin(4t - 1,86)
 \end{aligned}$$

La $p_v(t)$ è perciò uguale alla somma di due sinusoidi, la prima di ampiezza pari a 600, la seconda di ampiezza pari a 800. Tenendo conto del termine costante, si ottiene la seguente espressione della potenza istantanea:

$$p(t) = 600 [1 + \cos(4t - 1,86)] - 800 \sin(4t - 1,86)$$

Il primo termine rappresenta la potenza dissipata sulla parte reale dell'impedenza (cioè la resistenza R). Il secondo termine, la cui ampiezza è 800, rappresenta la potenza scambiata tra il generatore e la parte immaginaria dell'impedenza (cioè la reattanza $\omega_0 L$). L'andamento di tali termini è riportato in fig.V.5.7.

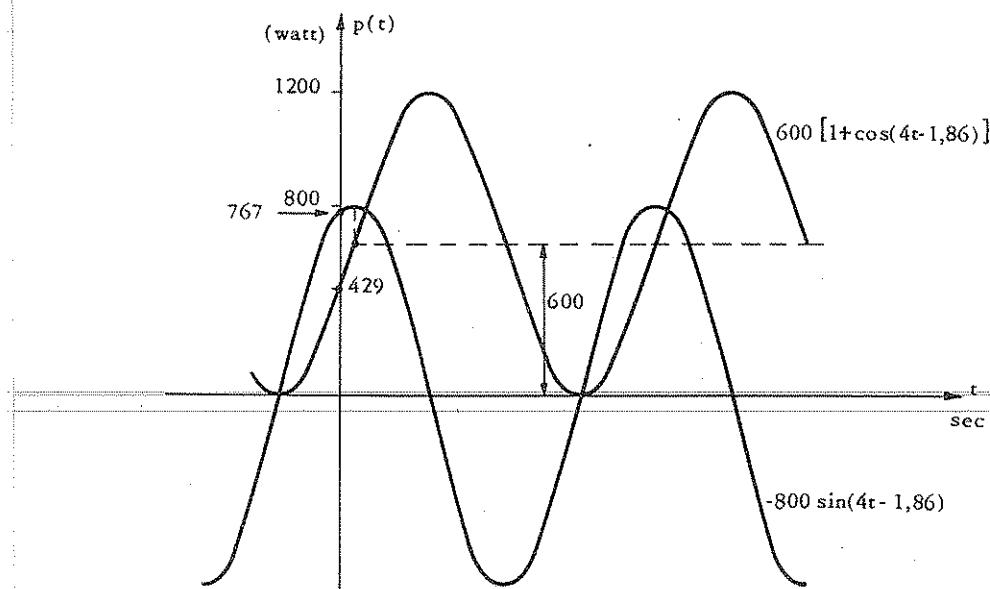


Fig.V.5.7 - Andamento delle potenze istantanee applicate al resistore ed all'induttore del circuito di fig.V.5.4.

V.5.4 - Conservazione della potenza complessa.

È stato messo in evidenza nel § I.10.5 che i circuiti a costanti concentrate soddisfano al principio fondamentale di conservazione della energia, come conseguenza delle leggi di Kirchhoff. Di conseguenza anche in regime permanente sinusoidale vale la seguente proprietà:

Proprietà V.5.1 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze istantanee $p_i(t)$ assorbite da tutti i bipoli⁽¹⁾ presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.27) \quad \sum_{i=1}^N p_i(t) = 0$$

dove N è il numero dei bipoli che compongono il circuito, inclusi i generatori indipendenti».

Nel caso del regime permanente abbiamo visto che è opportuno utilizzare al posto della potenza istantanea, altre grandezze quali la potenza complessa, la potenza attiva, la potenza reattiva e la potenza apparente. È quindi naturale domandarsi se sia possibile o meno estendere la proprietà V.5.1 a queste grandezze. La risposta a tale domanda è data dalla seguente proprietà:

Proprietà V.5.2 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze complesse P_{ci} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.28) \quad \sum_{i=1}^N P_{ci} = 0$$

dove N è il numero dei bipoli costituenti il circuito».

Tale proprietà è la traduzione in termini di potenza complessa della proprietà V.3.1.

Dalla proprietà V.5.2 si deduce che anche le potenze attiva e reattiva soddisfano al principio di conservazione. Per vedere ciò è sufficiente ricordare la (V.5.26), in base alla quale si derivano le seguenti proprietà:

Proprietà V.5.3 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze attive P_{ai} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.29) \quad \sum_{i=1}^N P_{ai} = 0$$

(1) - L'ipotesi che siano presenti nel circuito solo bipoli non è restrittivo, in quanto come vedremo nel § VI.10.2, ogni componente a due porte è sostituibile con un circuito equivalente costituito da bipoli.

Proprietà V.5.4 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze reattive P_{Ri} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.30) \quad \sum_{i=1}^N P_{Ri} = 0$$

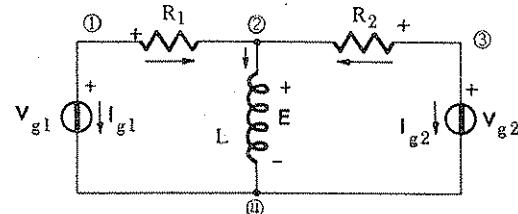
Le proprietà dimostrate nel presente paragrafo mettono in evidenza che è possibile trattare le potenze complessa, attiva e reattiva come fossero potenze istantanee ed effettuare per ciascuna di esse i bilanci energetici nel circuito considerato. Occorre notare che una proprietà analoga non vale per la potenza apparente, in quanto nella sua definizione interviene l'operazione di modulo, che non è lineare.

Esempio V.5.2.

Verificare la conservazione delle potenze attive e reattive per il circuito di figura V.5.8.

Fig.V.5.8 - Circuito considerato nell'esempio V.5.2. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} V_{g1} &= 5+j, \quad V_{g2} = -1-2j, \\ R_1 &= R_2 = R = 1, \quad L = 1, \\ \omega_0 &= 2 \quad (\text{V, } \Omega, \text{ H, rad/sec}). \end{aligned}$$



Risolvendo il circuito con il metodo dei nodi, si ottiene:

$$V_{g1} \frac{1}{R} - E \frac{1}{R} = -I_{g1}$$

$$-V_{g1} \frac{1}{R} + E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega_0 L} \right) - V_{g2} \frac{1}{R} = 0$$

$$-E \frac{1}{R} + V_{g2} \frac{1}{R} = -I_{g2}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$5+j - E = -I_{g1}$$

$$-(5+j) + E \left(2 + \frac{1}{2j} \right) + 1+2j = 0$$

$$-E - 1 - 2j = -I_{g2}$$

La soluzione è:

$$E = 2, \quad I_{g1} = -3 - j, \quad I_{g2} = 3 + 2j \quad (V, A)$$

Si ottengono quindi i seguenti valori per le tensioni e le correnti applicate a ciascun componente:

$$\begin{array}{ll} V_{g1} = 5 + j; & I_{g1} = -3 - j \\ V_{R1} = 3 + j; & I_{R1} = 3 + j \\ V_L = 2; & I_L = -j \\ V_{R2} = -3 - 2j; & I_{R2} = -3 - 2j \\ V_{g2} = -1 - 2j; & I_{g2} = 3 + 2j \end{array} \quad (V, A)$$

In fig.V.5.9 sono riportati i diagrammi vettoriali dei fasori relativi alle tensioni ed alle correnti del circuito. Le potenze attive e reattive assorbite da ciascun componente sono le seguenti:

Generatore V_{g1} :	$P_{a1} = -8$;	$P_{R1} = 1$
Resistore R_1 :	$P_{a2} = 5$;	$P_{R2} = 0$
Induttore:	$P_{a3} = 0$;	$P_{R3} = 1$ (watt, var)
Resistore R_2 :	$P_{a4} = 6,5$;	$P_{R4} = 0$
Generatore V_{g2} :	$P_{a5} = -3,5$;	$P_{R5} = -2$

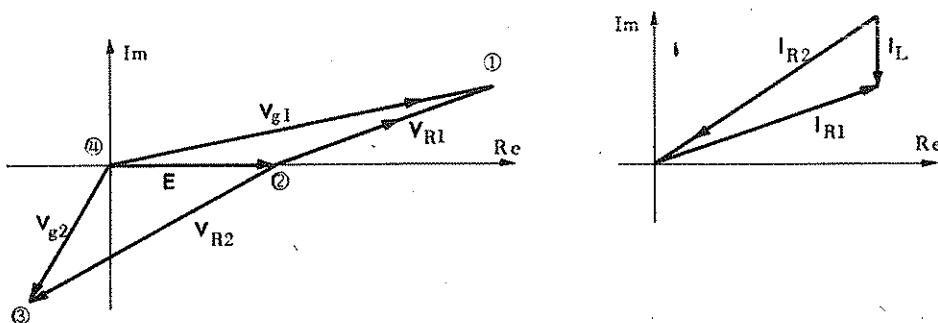


Fig.V.5.9 - Fasori delle tensioni e delle correnti del circuito di fig.V.5.8(V, A).

Si verifica immediatamente che la somma delle potenze attive e reattive è uguale a zero. In fig.V.5.10 è riportato infine il diagramma delle potenze complesse per il circuito in esame (accanto ad ogni vettore è indicato il componente che assorbe la potenza corrispondente). Si vede chiaramente che i fasori di tali potenze costituiscono i lati di una poligonale chiusa.

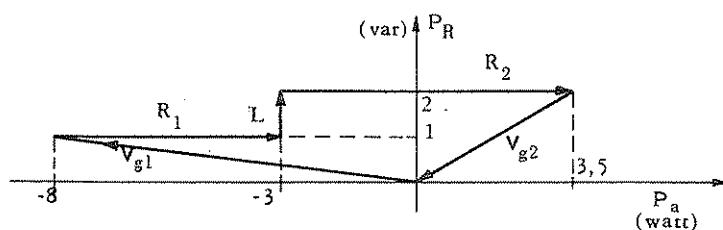


Fig. V.5.10 - Diagramma delle potenze complesse assorbite dai bipoli costituenti il circuito di fig. V.5.8.

V.5.5 - Espressione esplicita della potenza attiva e reattiva assorbita dai componenti di un circuito.

Le grandezze introdotte in precedenza per caratterizzare la potenza in regime permanente sinusoidale assumono una forma caratteristica nel caso dei componenti tipici del circuito, quali il resistore, il condensatore, l'induttore, il trasformatore ideale ed il giratore ideale. Esaminiamo in dettaglio tali componenti nel presente paragrafo. Per quanto riguarda gli altri componenti, è immediato rendersi conto che sia la potenza complessa, sia la potenza attiva, sia la potenza reattiva possono assumere qualsiasi valore per i componenti del tipo generatori indipendenti, generatori controllati, nullori. Tali componenti verranno perciò nel seguito indicati come «componenti energeticamente indefiniti».

a) Resistore.

Si consideri un resistore di resistenza R in regime permanente sinusoidale. Detti \mathbf{V} ed \mathbf{I} i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente espressione, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.31) \quad p(t) = \frac{1}{2} R I^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi_v)]$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig. V.5.11.

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.32) \quad P_c = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} G V^2$$

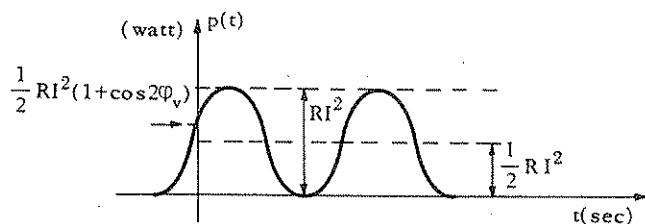


Fig.V.5.11 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un resistore di resistenza R.

Essendo la potenza complessa puramente reale, si deduce che la potenza attiva P_a vale:

$$(V.5.33) \quad P_a = \frac{1}{2} RI^2 = \frac{1}{2} GV^2 = RI_{\text{eff}}^2 = GV_{\text{eff}}^2$$

e che la potenza reattiva P_R è nulla cioè:

$$(V.5.34) \quad P_R = 0$$

A volte si indica con il simbolo F_{mi} il valore della potenza media dissipata nel resistore di resistenza R_i , facente parte di un circuito. Dalla (V.5.33) si ottiene:

$$(V.5.35) \quad F_{mi} = \frac{1}{2} R_i I^2$$

b) Induttore.

Si consideri un induttore di induttanza L in regime permanente sinusoidale. Detti V ed I i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente forma, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.36) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [j \omega_0 L I \cdot I^*] + \frac{1}{2} \omega_0 L I^2 \cos\left(2\omega_0 t + 2\phi_i + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{1}{2} \omega_0 L I^2 \cos\left(2\omega_0 t + 2\phi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig.V.5.12.

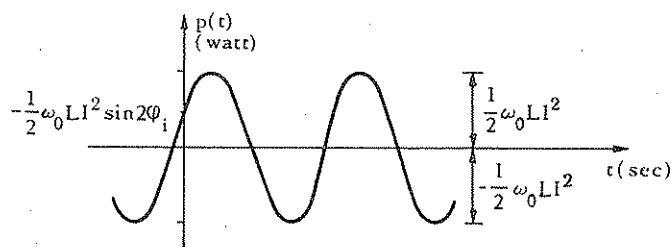


Fig.V.5.12 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un induttore di induttanza L .

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.37) \quad P_c = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \omega_0 L I^2$$

Essendo la potenza complessa immaginaria pura, si ottiene il risultato che la potenza attiva P_a è uguale a zero:

$$(V.5.38) \quad P_a = 0$$

e che la potenza reattiva P_R è uguale a:

$$(V.5.39) \quad P_R = \frac{1}{2} \omega_0 L I^2$$

La potenza reattiva è una misura degli scambi di energia con i componenti reattivi. Nell'ambito dell'induttore è intuitivo che la potenza reattiva sia legata in qualche modo con l'energia immagazzinata in esso: cioè a:

$$(V.5.40) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Per individuare questo legame calcoliamo il valore medio di questa energia istantanea, usando come intervallo di tempo su cui effettuare la media lo stesso visto nel caso della potenza attiva. Si ha:

$$(V.5.41) \quad \bar{\mathcal{E}}_L = \bar{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \frac{1}{2} L i^2(t) dt = \frac{L I^2}{2 T_m} \int_0^{T_m} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i) dt = \\ = 1/4 L I^2$$

Confrontando la (V.5.39) con la (V.5.41) si ottiene la seguente proprietà:

Proprietà V.5.5 - «La potenza reattiva assorbita da un induttore di induttanza L è uguale a:

$$(V.5.42) \quad P_R = 2\omega_0 \bar{E}_L$$

avendo indicato con \bar{E}_L l'energia media immagazzinata nell'induttore».

a) *Condensatore.*

Si consideri un condensatore di capacità C in regime permanente sinusoidale. Detti V ed I i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente forma, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.43) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [-j\omega_0 C V^2] + \frac{1}{2}\omega_0 C V^2 \cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_v + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{1}{2}\omega_0 C V^2 \cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_v + \frac{\pi}{2}\right)$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig.V.5.13.

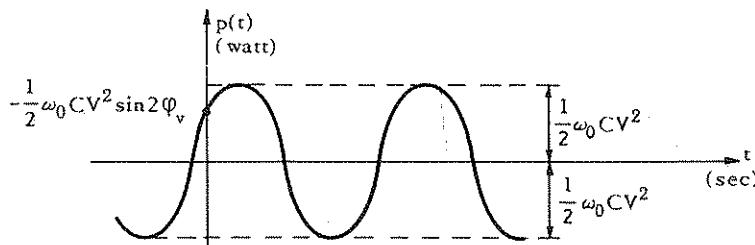


Fig.V.5.13 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un condensatore di capacità C .

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.44) \quad P_c = \frac{1}{2} V I^* = -j \frac{1}{2} \omega_0 C V^2$$

Essendo la potenza complessa immaginaria pura, si ottiene il risultato che la potenza attiva P_a è uguale a zero:

$$(V.5.45) \quad P_a = 0$$

e che la potenza reattiva P_R è uguale a:

$$(V.5.46) \quad P_R = -\frac{1}{2} \omega_0 C V^2$$

Si noti che nel condensatore la potenza reattiva assume in ogni caso un valore negativo, a differenza dell'induttore, dove la potenza reattiva è sempre positiva.

La potenza reattiva nel condensatore è legata all'energia media immagazzinata in esso, analogamente a quello che accade per l'induttore. Calcoliamo l'energia media in questione; si ha, utilizzando un intervallo di tempo su cui effettuare la media, scelto come nel caso della potenza attiva:

$$(V.5.47) \quad \bar{\mathcal{E}}_C = \bar{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{C V^2}{2 T_m} \int_0^{T_m} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_v) dt = \\ = \frac{1}{4} C V^2$$

Confrontando la (V.5.47) con la (V.5.46), si ottiene la seguente proprietà:

Proprietà V.5.6 - «La potenza reattiva assorbita da un condensatore di capacità C è uguale a:

$$(V.5.48) \quad P_R = -2 \omega_0 \bar{\mathcal{E}}_C$$

avendo indicato con $\bar{\mathcal{E}}_C$ l'energia media immagazzinata nel condensatore.

d) *trasformatore ideale*.

In base alle relazioni costitutive:

$$(V.5.49) \quad \begin{aligned} v_1 &= n v_2 \\ i_1 &= -i_2/n \end{aligned}$$

il trasformatore ideale non assorbe potenza istantanea, come già messo in evidenza nella (I.9.8). Analogamente, utilizzando le (V.5.49) scritte nel dominio dei fasori, si ha:

$$(V.5.50) \quad P_c = \frac{1}{2} V_1 I_1^* + \frac{1}{2} V_2 I_2^* = \frac{1}{2} V_1 I_1^* + \frac{1}{2} n V_1 \left(-\frac{1}{n} I_1^* \right) = 0$$

Vale quindi la seguente proprietà:

Proprietà V.5.7 - «Un trasformatore ideale non assorbe sia la potenza istantanea sia la potenza complessa sia la potenza attiva sia la potenza reattiva».

e) giratore ideale.

In base alle relazioni costitutive:

$$(V.5.51) \quad v_1 = -R_0 i_2 ; \quad v_2 = R_0 i_1$$

il giratore ideale non assorbe potenza istantanea, come già messo in evidenza nella (I.9.10). Per quanto riguarda la potenza complessa si ha, utilizzando le (V.5.51) nel dominio dei fasori:

$$(V.5.52) \quad P_c = \frac{1}{2} V_1 I_1^* + \frac{1}{2} V_2 I_2^* = -\frac{1}{2} R_0 I_2 I_1^* + \frac{1}{2} R_0 I_1 I_2^* = j \operatorname{Im} [R_0 I_1 I_2^*]$$

Quindi vale la seguente proprietà:

Proprietà V.5.8 - «Un giratore ideale non assorbe né potenza istantanea né potenza attiva. La potenza reattiva è data da:

$$(V.5.53) \quad P_R = \operatorname{Im} [R_0 I_1 I_2^*]$$

in cui R_0 è la resistenza di girazione ed I_1 ed I_2 sono i fasori delle correnti entranti».

V.5.6 - Bilancio energetico di un circuito.

Si consideri un circuito costituito da componenti energeticamente indefiniti (generatori indipendenti, generatori controllati, nullori), resistori, condensatori, induttori, trasformatori e giratori ideali. In base alla proprietà V.5.2 (conservazione della potenza complessa) si può scrivere:

$$(V.5.54) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P^{(g_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} P^{(R_i)} + \sum_{i=1}^{N_L} P^{(L_i)} + \sum_{i=1}^{N_C} P^{(C_i)} + \sum_{i=1}^{N_G} P^{(G_i)}$$

dove:

N_g è il numero dei componenti energeticamente indefiniti;

$P_c^{(g_i)}$ è la potenza complessa erogata dall'i-esimo componente energeticamente indefinito;

N_R è il numero dei resistori;

$P_c^{(R_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall'i-esimo resistore;

N_L è il numero degli induttori;

$P_c^{(L_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall'i-esimo induttore;

N_C è il numero dei condensatori;

$P_c^{(C_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall'i-esimo condensatore;

N_G è il numero dei giratori ideali;

$P_c^{(G_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall'i-esimo giratore.

Ricordando l'espressione (V.5.35), si ha:

$$(V.5.55) \quad \sum_{i=1}^{N_R} P_c^{(R_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} \frac{1}{2} R_i I_i^2 = \sum_{i=1}^{N_R} F_{m_i}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti i resistori del circuito, è una quantità reale.

Ricordando l'espressione (V.5.42), si ha:

$$(V.5.56) \quad \sum_{i=1}^{N_L} P_c^{(L_i)} = j 2 \omega_0 \sum_{i=1}^{N_L} \bar{E}_{L_i}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti gli induttori del circuito, è una quantità immaginaria pura.

Ricordando l'espressione (V.5.48) si ha:

$$(V.5.57) \quad \sum_{i=1}^{N_C} P_c^{(C_i)} = -j 2 \omega_0 \sum_{i=1}^{N_C} \bar{E}_{C_i}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti i condensatori del circuito, è una quantità immaginaria pura.

Scindendo il bilancio della potenza complessa (V.5.54) nella parte reale ed immaginaria, si ottiene, tenendo conto delle (V.5.55), (V.5.56), (V.5.57) e (V.5.53):

$$(V.5.58) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} F_{m_i}$$

$$(V.5.59) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_R^{(g_i)} - \sum_{i=1}^{N_G} P_R^{(G_i)} = 2\omega_0 \left[\sum_{i=1}^{N_L} \bar{E}_{L_i} - \sum_{i=1}^{N_C} \bar{E}_{C_i} \right]$$

dove $P_a^{(g_i)}$ è la potenza attiva erogata dall'i-esimo componente energeticamente indefinito; $P_R^{(g_i)}$ è la potenza reattiva erogata dallo stesso componente; $P_R^{(G_i)}$ è la potenza reattiva assorbita dall'i-esimo giratore.

Le due espressioni (V.5.58) e (V.5.59) rappresentano i bilanci energetici che si possono effettuare in un circuito in regime permanente sinusoidale. Esse equivalgono alle seguenti proprietà:

Proprietà V.5.9 - «In ogni circuito in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze attive erogate da tutti i componenti energeticamente indefiniti è uguale alla somma delle potenze medie assorbite da tutti i resistori presenti».

Corollari della proprietà V.5.9 sono le seguenti formule:

$$(V.5.60) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} > 0 \quad \text{per i circuiti con perdite}$$

$$(V.5.61) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} = 0 \quad \text{per i circuiti senza perdite}$$

Proprietà V.5.10 - «In ogni circuito in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze reattive erogate da tutti i componenti energeticamente indefiniti e dai giratori è legata, tramite l'espressione (V.5.59), alla somma delle energie medie immagazzinate negli induttori ed alla somma delle energie medie immagazzinate nei condensatori».

Si noti che il segno della potenza reattiva globalmente erogata dai componenti energeticamente indefiniti e dai giratori dipende dalla prevalenza o meno dell'energia totale media di tipo magnetico rispetto a quella totale media di tipo elettrico. Si può avere un valore nullo per la potenza reattiva totale quando non sono presenti componenti reattivi, ovvero quando i due tipi di energia totale media si bilanciano esattamente.

V.5.7 - Problema del rifasamento di un carico reattivo.

Il problema può essere descritto chiaramente mediante un esempio.

Esempio V.5.3.

Assegnato il circuito di fig.V.5.14, determinare il valore della capacità C , in modo che risulti nulla (se possibile) la potenza reattiva erogata dal generatore. Effettuare inoltre il bilancio energetico del circuito.

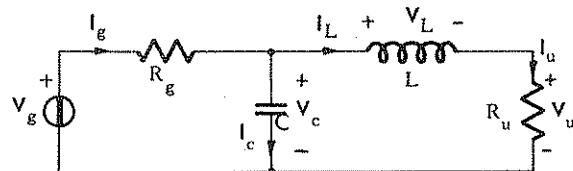


Fig.V.5.14 - Circuito considerato nell'esempio V.5.3. I valori dei componenti sono: $R_u = 100$, $R_g = 10$, $\omega_0 L = 10$, $\omega_0 = 314 \Omega/\text{rad/sec}$.

Risolviamo il problema con il metodo grafico, utilizzando il procedimento descritto nel § V.4.5. Poniamo a questo scopo $I_u = 1 \text{ A}$ e riportiamo tale valore sul diagramma delle correnti (fig.V.5.15). Sul diagramma delle tensioni (fig.V.5.16) deriviamo la posizione dei vettori V_u , V_L e V_c . Si può quindi ottenere, sul diagramma delle correnti, la direzione che dovrà avere la corrente I_c che percorre il condensatore. Tale direzione deve essere tale da formare un angolo di 90° in anticipo rispetto alla direzione di V_c .

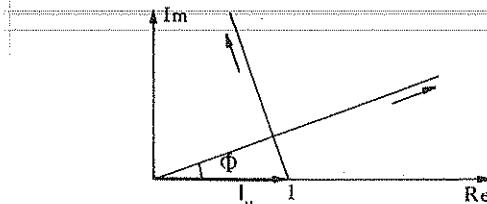


Fig.V.5.15 - Diagramma delle correnti del circuito di fig.V.5.14. Le correnti sono in ampere.

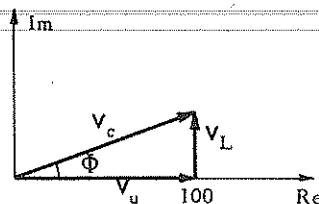
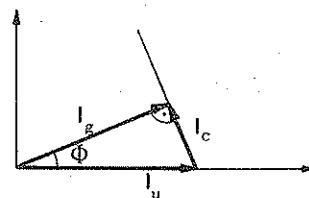


Fig.V.5.16 - Diagramma delle tensioni del circuito di fig.V.5.14. Le tensioni sono in volt.

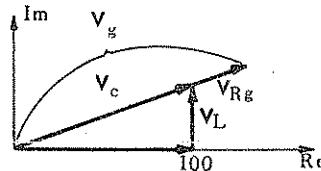
La corrente I_c , sommata alla corrente I_u , fornisce la corrente erogata dal generatore I_g . Non è nota a priori, tuttavia, l'ampiezza della corrente I_c , poiché è incognita la capacità C . Tale incognita viene determinata imponendo che il generatore di tensione non eroghi potenza reattiva. A questo scopo occorre che I_c sia tale che la corrente I_g formi un angolo nullo con la direzione della tensione V_c . Tale scelta è indicata in fig.V.5.17, dove è mostrato il diagramma completo delle correnti.

Fig.V.5.17 - Determinazione della corrente I_c .



In fig.V.5.18 è riportato il diagramma completo delle tensioni. Si noti che a parità di I_u , la scelta effettuata per la corrente del condensatore I_c è tale da rendere minimo il valore del modulo della corrente I_g che scorre nel generatore e nella resistenza R_g .

Fig.V.5.18 - Determinazione della tensione V_g .



Il valore della capacità C può essere determinato sia per via analitica sia per via grafica. Usando il metodo grafico si ha da fig.V.5.17:

$$I_c = I_u \sin \Phi = \sin \Phi$$

D'altra parte dalla fig.V.5.16 si ottiene:

$$V_L = V_c \sin \Phi ; \quad \tan \Phi = \frac{V_L}{V_u} = \frac{10}{100} = 0,1 ; \quad \Phi = 0,099$$

che equivale a:

$$10 = \sin \Phi \cdot \frac{I_c}{\omega_0 C} = \frac{\sin^2 \Phi}{\omega_0 C}$$

Il valore della capacità è dunque:

$$C = \frac{\sin^2 \Phi}{10 \omega_0} = 3,153 \mu F$$

Procedendo per via analitica, tenendo conto che il generatore non deve erogare potenza reattiva, si deve avere per la proprietà V.5.10:

$$\bar{\mathcal{E}}_C = \bar{\mathcal{E}}_L$$

dove:

$$\bar{\mathcal{E}}_L = \frac{1}{4} L I_L^2$$

è l'energia media immagazzinata sotto forma magnetica nell'induttore e:

$$\bar{\mathcal{E}}_C = \frac{1}{4} C V_c^2$$

è l'energia media immagazzinata sotto forma elettrica nel condensatore. Si ha quindi:

$$C = L \frac{I_L^2}{V_c^2}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene il valore precedente, cioè:

$$C = \frac{10}{314} \frac{1}{(100^2 + 10^2)} = 3,153 \mu F$$

Per completare il bilancio energetico occorre verificare l'uguaglianza tra la potenza attiva erogata dal generatore e la somma delle potenze medie dissipate nei resistori. Si ottiene:

$$I_g = I_u \cos \Phi = 0,995 A$$

Inoltre da fig. V.5.18, si ha:

$$V_g = V_c + I_g R_g = \sqrt{100^2 + 10^2} + 10 \cdot 0,995 = 110,45 V$$

Quindi si ottiene per la potenza attiva erogata dal generatore:

$$P_a^{(g)} = \frac{1}{2} V_g I_g = 54,95 \text{ watt}$$

Per le potenze dissipate dai resistori si ha:

$$\frac{1}{2} R_u I_u^2 + \frac{1}{2} R_g I_g^2 = 50 + 4,95 = 54,95 \text{ watt}$$

Risulta quindi verificato il bilancio delle potenze attive.

Il problema trattato nel presente esempio prende il nome di *problema del rifasamento di un circuito reattivo*. Tale problema si incontra molto spesso nelle applicazioni tecniche. In tal caso i bipoli R_u ed L rappresentano il carico dove, accanto ad un elemento resistivo c'è anche un elemento induttivo, per cui alla potenza attiva è sempre associata anche una potenza reattiva. Se non fosse presente il condensatore C , tale potenza reattiva dovrebbe essere fornita dal generatore. Ciò darebbe luogo ad un aumento delle perdite sulla resistenza R_g , che rappresenta la resistenza interna del generatore stesso e le perdite della linea che serve a trasportare l'energia dal generatore al carico. La presenza del condensatore C evita l'erogazione di potenza reattiva da parte del generatore, minimizzando in questo modo, a parità di potenza attiva fornita al carico, il modulo della corrente I_g che scorre lungo la linea e quindi diminuendo le perdite lungo la linea stessa.

V.6 - Regime permanente in presenza di grandezze elettriche di tipo non sinusoidale.

Quanto detto nei paragrafi precedenti si riferisce al caso in cui le grandezze elettriche impresse varino sinusoidalmente nel tempo e siano isofrequenziali. Nei limiti di validità del metodo dei fasori, l'analisi viene effettuata considerando al posto di tutte le grandezze elettriche i relativi fasori e quindi procedendo con tecniche del tutto simili a quelle usate nel caso del cap. II per i circuiti resistivi. Tale semplificazione nella trattazione dell'analisi in regime permanente è tuttavia limitata solo al caso visto. Quando sono presenti eccitazioni sinusoidali non isofrequenziali oppure eccitazioni periodiche qualsiasi oppure, ancora più in generale, eccitazioni di tipo aperiodico, occorre procedere in modo diverso per ricavare la risposta permanente. Le osservazioni fondamentali su cui è basato il procedimento di analisi in questo caso sono tre:

- 1) un'eccitazione periodica non sinusoidale è sviluppabile in una serie di funzioni sinusoidali di frequenza multipla della propria frequenza (sviluppo in serie di Fourier);
- 2) un'eccitazione non periodica è sviluppabile in una serie infinita di funzioni sinusoidali di ogni frequenza possibile (sviluppo nell'integrale di Fourier);
- 3) in un circuito lineare l'effetto di più eccitazioni coincide con la somma degli effetti delle singole eccitazioni, considerate come se agissero da sole (principio di sovrapposizione degli effetti).

La conseguenza immediata della prima e della seconda osservazione è che possiamo limitare la nostra attenzione solo al caso in cui le eccitazioni presenti siano di tipo sinusoidale. La terza osservazione, invece, suggerisce di procedere a passi successivi, suddividendo preliminarmente le eccitazioni presenti in gruppi isofrequenziali, quindi determinando con il metodo dei fasori l'effetto di ciascuno di essi ed infine sommando questi effetti per ottenere il risultato voluto. Il metodo risultante può essere schematizzato operativamente come segue:

Metodo di analisi in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa.

- 1) Raggruppare le eccitazioni di uguale frequenza. I gruppi siano in totale N , caratterizzati dalle frequenze f_1, f_2, \dots, f_N ;
- 2) Disattivare tutti i gruppi di eccitazioni con l'esclusione del primo; ciò implica il corto-circuito per i generatori indipendenti di tensione ed il circuito aperto per quelli di corrente di frequenza diversa da f_1 ;
- 3) Applicare al circuito così ottenuto il metodo dei fasori, tenendo presente che la pulsazione è $\omega_1 = 2\pi f_1$. Determinare la grandezza elettrica incognita e quindi calcolare la sua espressione in funzione del tempo, cioè:

$$(V.6.1) \quad u_1(t) = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

- 4) Ripetere i passi 2) e 3) per il k -simo gruppo, $k=2, 3, \dots, N$, disattivando tutti gli altri gruppi. Si ottiene per la grandezza d'interesse l'espressione:

$$(V.6.2) \quad u_k(t) = U_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

- 5) La soluzione del problema d'analisi è:

$$(V.6.3) \quad u(t) = \sum_{k=1}^N U_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

Il metodo precedente è applicabile sia nel caso che le varie eccitazioni siano già assegnate in forma sinusoidale sia nel caso che occorra preventivamente svilupparle in componenti di questo tipo, come nel caso di funzioni periodiche (§ V.6.2) ed aperiodiche (§ V.6.3).

Esempio V.6.1.

Determinare l'espressione della tensione $v_c(t)$ in regime permanente nel circuito di fig.V.6.1.

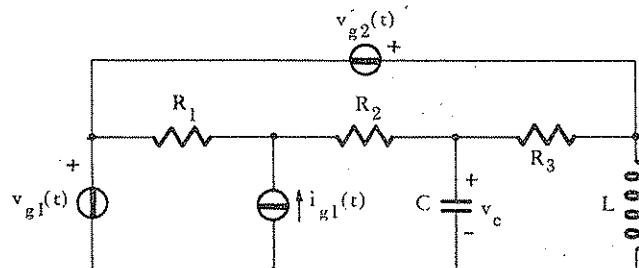


Fig.V.6.1 - Circuito considerato nell'esempio V.6.1. I valori dei componenti sono: $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $C = 1$, $L = 1$, $v_{g1} = 2 \cos(2t)$, $v_{g2} = \cos(1,5t + \pi/3)$, $i_{g1} = 1,5 \cos(0,5t + 4/3\pi)$. (Ω , F, H, V, A).

Applichiamo i passi del procedimento precedente:

Passo 1. I gruppi di eccitazioni presenti sono tre, ciascuno contenente un solo generatore. Le pulsazioni implicate sono:

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 1,5, \quad \omega_3 = 0,5$$

Passo 2. Disattivando tutti i generatori, esclusi quelli del primo gruppo, si ha il circuito di fig.V.6.2a, che nel dominio dei fasori è equivalente a quello di fig.V.6.2b, in quanto l'induttore è in parallelo al generatore di tensione e quindi non influisce sulla tensione del condensatore. Il valore della tensione incognita è:

$$v_c^{(1)} = \frac{1/2j}{1/2j + 2/3} 2 = \frac{6}{3+4j} = \frac{6}{5} e^{-j0,9273}$$

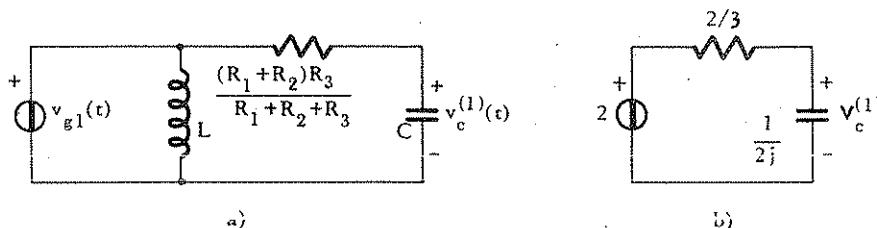


Fig.V.6.2 - Circuito che si ottiene nel passo 2 da quello di fig.V.6.1.

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(1)}(t) = 1,2 \cos(2t - 0,9273)$$

Passo 3. Facciamo agire i generatori del secondo gruppo. Si ha il circuito di fig.V.6.3a, che nel dominio dei fasori è equivalente a quello di fig.V.6.3b, in quanto l'induttore non influisce sulla tensione del condensatore. Il valore della tensione incognita è:

$$v_c^{(2)} = \frac{\frac{1}{j1,5+0,5} - \frac{j\pi}{3}}{\frac{1}{j1,5+0,5} + 1} e^{\frac{j\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{j\pi/12}$$

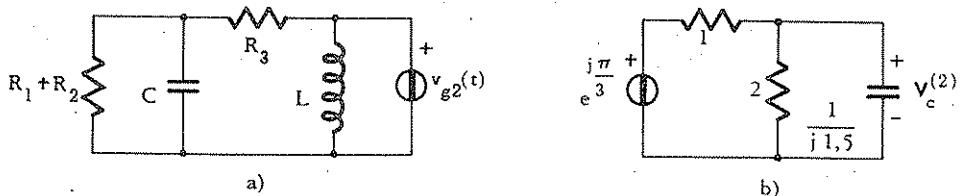


Fig.V.6.3 - Circuito che si ottiene nel passo 3 da quello di fig.V.6.1.

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(2)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \left(1,5t + \frac{\pi}{12} \right)$$

Passo 4. Facciamo agire i generatori del terzo gruppo. Si ha il circuito di fig.V.6.4a, che nel dominio dei fasori è equivalente a quello di fig.V.6.4b, in quanto l'induttore non influisce sulla tensione del condensatore. Il valore della tensione incognita è:

$$v_c^{(3)} = \frac{\frac{1}{0,5j+1} - \frac{j4\pi}{3}}{\frac{1}{0,5j+1} + 2} 1,5 e^{\frac{j4\pi}{3}} = 0,4743 e^{j3,867}$$

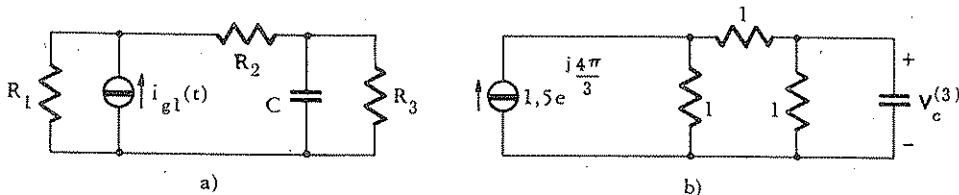


Fig.V.6.4 - Circuito che si ottiene nel passo 4 da quello di fig.V.6.1

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(3)}(t) = 0,4743 \cdot \cos (0,5t + 3,8670)$$

Passo 5. La soluzione cercata è:

$$v_c(t) = 1,2 \cos(2t - 0,9273) + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{12}\right) + 0,4743 \cos(0,5t + 3,867)$$

La presenza di eccitazioni non sinusoidali, in regime permanente, oltre alla necessità di avere a disposizione un metodo di analisi, richiede la caratterizzazione dei fenomeni di scambio energetico mediante grandezze globali appropriate, analogamente a quanto fatto nel caso sinusoidale. È opportuno precisare che nel caso presente, l'unica grandezza correntemente usata è la potenza attiva, definita come media di quella istantanea. L'intervallo di tempo su cui effettuare la media va scelto in modo compatibile con quanto fatto nel § V.5.2 nel caso sinusoidale. Dall'esame dell'influenza dell'intervallo in questione si vede chiaramente che l'unica possibilità valida in generale è quella di una lunghezza molto grande, al limite infinita, per tale intervallo. Infatti solo tale scelta è compatibile con grandezze sinusoidali aventi periodi non commensurabili tra di loro. Nel caso particolare che le grandezze sinusoidali abbiano periodi commensurabili, allora evidentemente è possibile scegliere l'intervallo coincidente con il minimo comune multiplo di tali periodi od un multiplo intero di tale quantità. Valgono perciò le seguenti definizioni della potenza attiva:

Definizione V.6.1 – «Si definisce come potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali, aventi periodi commensurabili tra loro, il valore medio della potenza istantanea calcolato su un intervallo di tempo coincidente o con il minimo comune multiplo dei periodi di tutte le eccitazioni sinusoidali presenti o con un multiplo intero di tale quantità».

Definizione V.6.2 – «Si definisce come potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali qualsiasi, il valore medio della potenza istantanea calcolato su un intervallo di tempo infinitamente lungo».

La potenza attiva, così definita, gode di proprietà assai utili nelle applicazioni, che considereremo in dettaglio di seguito.

V.6.1 - Proprietà della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale.

Nel caso del regime permanente in cui siano presenti eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa, tutte le grandezze elettriche sono

esprimibili mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali di frequenza uguale a quelle delle suddette eccitazioni, cioè del tipo (V.6.3). Ciò implica che la potenza istantanea, essendo il prodotto di una tensione per una corrente, è del tipo:

$$(V.6.4) \quad \left(\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \{ V_k e^{j\omega_k t} \} \right) \left(\sum_{h=1}^N \operatorname{Re} \{ I_h e^{j\omega_h t} \} \right)$$

avendo utilizzato i fasori delle varie componenti sinusoidali.

Nella determinazione della potenza attiva dalla potenza istantanea tramite operazioni di media, i termini che derivano dallo sviluppo della (V.6.4) subiscono un trattamento assai diverso, a seconda che siano o meno il prodotto di due funzioni sinusoidali di uguale pulsazione. Nel primo caso si ha:

$$(V.6.5) \quad \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_k^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_k e^{j2\omega_k t}] \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_k^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{V_k I_k}{2j\omega_k T_m} (e^{j2\omega_k T_m} - 1) \right]$$

che è uguale a:

$$(V.6.6) \quad \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_k^*]$$

sia nel caso che T_m sia il minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni sinusoidali presenti (nel caso che esista) sia nel caso che sia infinitamente grande.

Quando il termine dello sviluppo (V.6.4) è invece il prodotto di due funzioni sinusoidali di pulsazione diversa, allora si ha:

$$(V.6.7) \quad \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_h e^{j(\omega_k + \omega_h)t}] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_h^* e^{j(\omega_k - \omega_h)t}] \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{V_k I_h}{j(\omega_k + \omega_h) T_m} (e^{j(\omega_k + \omega_h) T_m} - 1) \right] \\ + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{V_k I_h^*}{j(\omega_k - \omega_h) T_m} (e^{j(\omega_k - \omega_h) T_m} - 1) \right]$$

che è uguale a zero sia nel caso che T_m sia il minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni sinusoidali presenti (nel caso che esista) sia nel caso che sia infinitamente grande.

In conclusione l'espressione della potenza attiva è

$$(V.6.8) \quad P_a = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_k I_k^*]$$

L'esame della (V.6.8) mette in evidenza la seguente proprietà fondamentale della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale.

Proprietà V.6.1 - «La potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali di pulsazione diversa è uguale alla somma delle potenze attive che si hanno considerando separatamente gli effetti dei gruppi di eccitazioni di uguale pulsazione».

La proprietà precedente fornisce un modo abbreviato ed operativo per calcolare in regime permanente non sinusoidale la potenza attiva.

Esempio V.6.2

Nel circuito di fig.V.6.1 calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore R_3 , verificando la proprietà V.6.1.

Applicando il metodo di analisi in regime permanente non sinusoidale, si ottiene per la tensione applicata al resistore R_3 :

$$v_{R3} = v_{R3}^{(1)} + v_{R3}^{(2)} + v_{R3}^{(3)}$$

$$v_{R3}^{(1)} = v_{g1} - v_c^{(1)} = \frac{8}{5} \cos(2t + 0,6435)$$

$$v_{R3}^{(2)} = v_{g2} - v_c^{(2)} = \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cos(1,5t + 1,511)$$

$$v_{R3}^{(3)} = v_c^{(3)} = 0,4743 \cos(0,5t + 3,867)$$

I periodi delle eccitazioni presenti sono:

$$\pi, \frac{4}{3}\pi, 4\pi$$

ed hanno il minimo comune multiplo 4π . Utilizzando perciò la definizione V.6.1, la potenza attiva vale:

$$P_a = \frac{1}{4\pi R_3} \int_0^{4\pi} \left[\frac{8}{5} \cos(2t + 0,6435) + \frac{\sqrt{5}}{3} \cos(1,5t + 1,511) + 0,4743 \cos(0,5t + 3,867) \right]^2 dt = 1,670 \text{ watt}$$

Calcoliamo ora le potenze attive dissipate sul resistore R_3 quando agiscono separatamente i tre generatori. Si ha:

$$V_{R3}^{(1)} = \frac{8}{5} e^{j0,6435} ; \quad P_a^{(1)} = 1,280$$

$$V_{R3}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{3} e^{j1,511} ; \quad P_a^{(2)} = 0,2778$$

$$V_{R3}^{(3)} = 0,4743 e^{j3,867} ; \quad P_a^{(3)} = 0,1125$$

$$P_a = P_a^{(1)} + P_a^{(2)} + P_a^{(3)} = 1,670 \text{ watt}$$

Osservazione V.6.1.

La proprietà V.6.1 fornisce un modo molto semplice di procedere nel calcolo della potenza attiva quando sono presenti più eccitazioni sinusoidali. È importante però notare che tale proprietà è valida solo se le pulsazioni delle eccitazioni sono diverse. Si commetterebbe un errore se si sommassero le potenze attive relative ad eccitazioni sinusoidali di uguale pulsazione. Mettiamo in evidenza questa osservazione con un esempio.

Esempio V.6.3.

Nel circuito di fig.V.6.5 calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore.

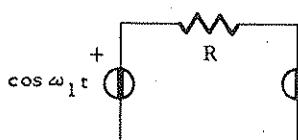


Fig.V.6.5 - Circuito considerato nell'esempio V.6.3.

Utilizzando la proprietà V.6.1, determiniamo la potenza attiva assorbita dal resistore quando agiscono singolarmente i due generatori. Si ha:

$$P_1 = \frac{1}{2R} ; \quad P_2 = \frac{1}{2R}$$

La potenza attiva assorbita vale perciò:

$$P = \frac{I}{R}$$

Se i generatori sinusoidali avessero una stessa pulsazione, cioè:

$$\omega_1 = \omega_2$$

allora, come si vede direttamente dalla figura, il resistore non sarebbe percorso da corrente e la potenza attiva da esso assorbita sarebbe zero. Chiaramente, non vale in quest'ultimo caso la proprietà V.6.1.

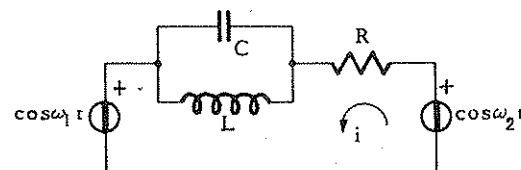
Osservazione V.6.2.

Nel calcolo della potenza attiva assorbita o erogata da un bipolo in regime permanente non sinusoidale occorre considerare, in base alla proprietà V.6.1, le potenze attive corrispondenti alle singole pulsazioni. Ciò implica che un generatore sinusoidale presente nel circuito eroga od assorbe energia solo per effetto della componente di uguale pulsazione che risulta ad esso applicata. In particolare può accadere che la potenza attiva erogata od assorbita dal generatore in questione sia nulla, malgrado che le grandezze elettriche ad esso applicate siano di notevole ampiezza,

Esempio V.6.4.

Far vedere nel circuito di fig.V.6.6 che la potenza attiva erogata dal generatore di tensione di pulsazione ω_1 è nulla, anche se la corrente che lo attraversa è di ampiezza notevole.

Fig.V.6.6 - Circuito considerato nell'esempio V.6.4. I valori di L e C sono tali che $LC\omega_1^2 = 1$.



Consideriamo presente il generatore di pulsazione ω_1 . Poiché il bipolo costituito dal parallelo di L e C ha impedenza infinita in corrispondenza alla pulsazione ω_1 , non circola corrente nel circuito e perciò il generatore in questione non eroga potenza attiva. Calcoliamo quindi l'effetto dell'altro generatore. La corrente i vale in questo caso, usando i fasori:

$$i^{(2)} = \frac{1}{R + \frac{j\omega_2/C}{1/LC - \omega_2^2}} = \frac{1}{R + \frac{j\omega_2/C}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}$$

Il valore del modulo di $f^{(2)}$ può essere anche notevole nel caso di valori particolari dei componenti e delle pulsazioni, ciò che dimostra quanto asserito.

V.6.2 - Sviluppo in componenti sinusoidali di un'eccitazione periodica.

Le eccitazioni dei circuiti che possono interessare le applicazioni sono molteplici, anche nel caso che interessi il solo regime permanente. Nel presente paragrafo consideriamo il caso in cui le funzioni che rappresentano le eccitazioni siano *periodiche nel tempo*, nel senso che il loro andamento si ripete ad intervalli regolari di uguale larghezza. In modo esatto, si può dire che una funzione periodica $f(t)$ è caratterizzata dalla condizione:

$$(V.6.9) \quad f(t) = f(t+T) \quad -\infty \leq t \leq +\infty$$

ed a T si dà il nome di «*periodo*». Esempi tipici di funzioni periodiche d'interesse (oltre alla funzione sinusoidale) sono «*l'onda quadra*», «*l'onda triangolare*» riportate in fig. V.6.7.

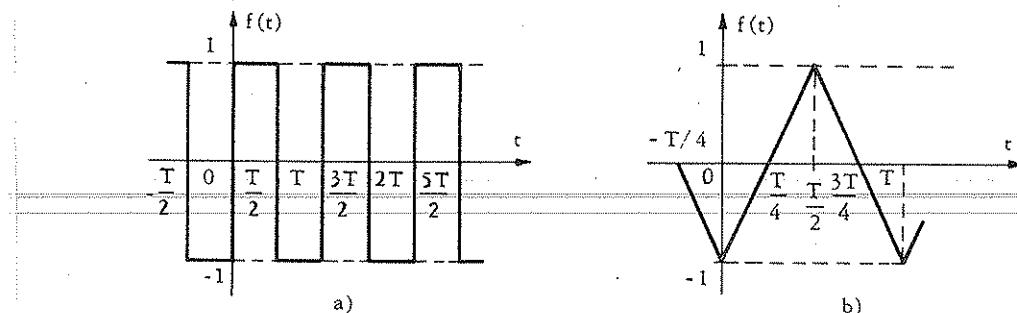


Fig. V.6.7 - Forme tipiche di eccitazioni periodiche: a) onda quadra; b) onda triangolare.

La combinazione di funzioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportune permette di ottenere forme d'onda periodiche. Un esempio semplice in tal senso è quello mostrato in fig. V.6.8 dove sono rappresentate le seguenti funzioni periodiche:

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin \pi t$$

$$(V.6.10) \quad f_2(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t \right)$$

$$f_3(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t \right)$$

$$f_4(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \frac{1}{7} \sin 7\pi t \right)$$

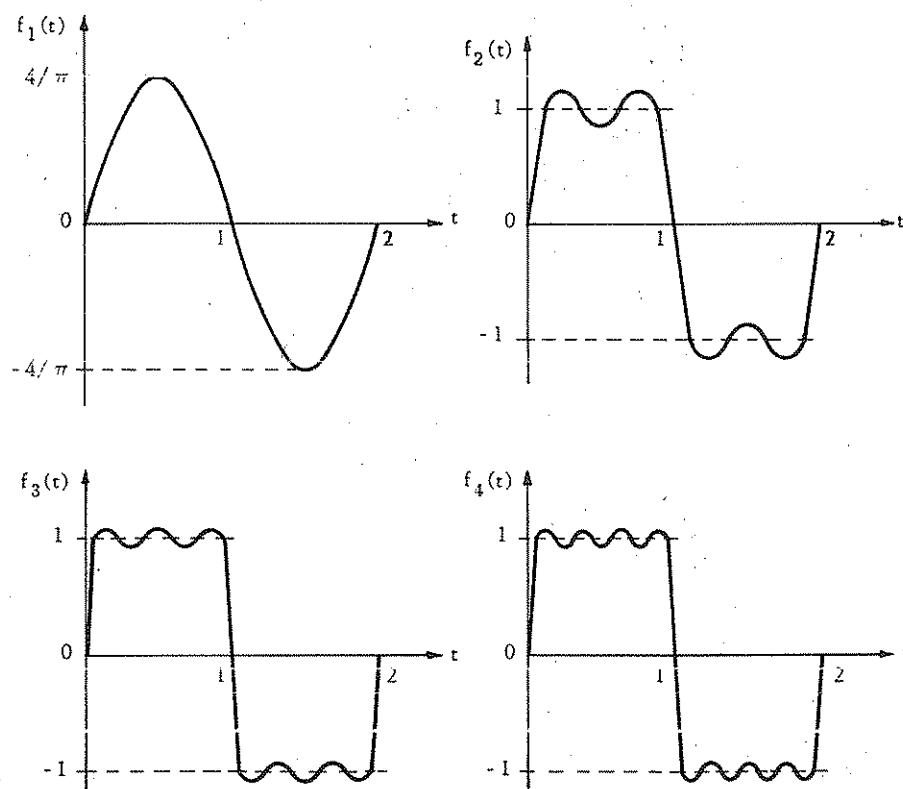


Fig.V.6.8 - Funzioni periodiche risultanti dalla combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

Si vede chiaramente che, all'aumentare delle funzioni sinusoidali componenti, la forma d'onda risultante tende ad avvicinarsi a quella quadra di fig.V.6.7. Ciò permette di intuire la possibilità di sviluppare in tutti i casi d'interesse una qualsiasi eccitazione periodica in una somma di funzioni sinusoidali. In termini analitici esatti, ciò viene fatto con lo sviluppo in serie di Fourier, in base al quale una funzione periodica è sviluppabile nella serie di funzioni sinusoidali del tipo:

$$(V.6.11) \quad f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots = \\ = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(k\omega_0 t + \Phi_k)$$

in cui:

(V.6.12)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt ; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt ;$$

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} ; \quad \Phi_k = -\arctan(b_k/a_k) ; \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

La componente di pulsazione ω_0 prende il nome di «componente fondamentale» e quella di pulsazione $k\omega_0$ di «armonica di ordine k ».

È importante tenere presente che lo sviluppo in serie di Fourier esiste per una funzione periodica solo se essa soddisfa le condizioni di Dirichlet, cioè:

- 1) in ogni periodo il numero dei massimi e dei minimi deve essere finito e le ampiezze relative devono essere finite;
- 2) il numero di discontinuità in un periodo deve essere finito;
- 3) deve essere:

$$(V.6.13) \quad \int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

Per le dimostrazioni e per le proprietà dello sviluppo in serie di Fourier, per le semplificazioni che si possono ottenere in conseguenza di proprietà particolari della $f(t)$ (funzioni pari, dispari, ... ecc.), si rimanda ai testi specifici di analisi.

Esempio V.6.5.

Determinare la tensione di uscita $v_u(t)$ del rettificatore di fig. V.6.9 a), nell'ipotesi che sia accettabile la schematizzazione mostrata nella parte b) di tale figura (tale schematizzazione consiste nel supporre il trasformatore ideale ed i diodi ideali).

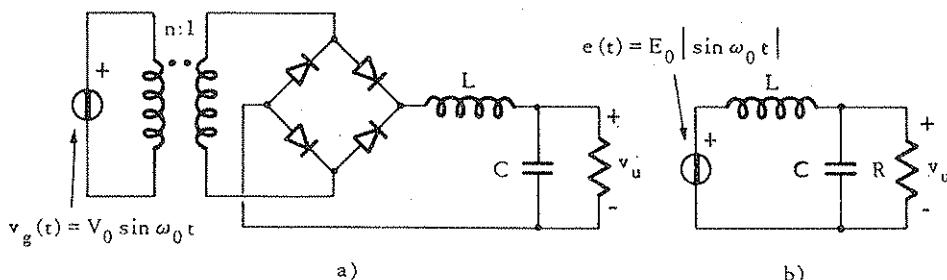


Fig. V.6.9 - Schema di un rettificatore con filtro ad induttanza di blocco. I valori dei componenti sono:

$L=3$, $C=30$, $R=2$, $E_0=10$, $\omega_0=314$, $V_0=nE_0$ (H , μF , $k\Omega$, V , rad/sec).

Per poter applicare il metodo di analisi in regime permanente in presenza di più eccitazioni sinusoidali, occorre sviluppare in serie di Fourier la funzione di eccitazione $e(t)$. Si ha, considerando solo $|\sin \omega_0 t|$, in base alle (V.6.12):

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| dt = \frac{2}{\pi} :$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \sin \omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_\pi^{2\pi} \sin^2 x dx \right] = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \sin k \omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin x \sin kx dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x \sin kx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi \cos(k-1)x dx - \int_0^\pi \cos(k+1)x dx - \int_\pi^{2\pi} \cos(k-1)x dx + \int_\pi^{2\pi} \cos(k+1)x dx \right] = 0$$

Sono perciò presenti solo le componenti in coseno, come del resto si può dedurre dalle proprietà generali, osservando che la funzione $|\sin \omega_0 t|$ è pari. Per quanto riguarda i coefficienti a_k , si ha:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \cos k \omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin x \cos kx dx + \int_\pi^{2\pi} \sin x \cos kx dx \right] =$$

$$\equiv \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ dispari} \\ \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)} - \frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} \right]_{x=0}^{x=\pi} & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

È facile constatare che sono diversi da zero solo gli a_k che corrispondono a valori pari di k . Per questi risulta:

$$a_{2h} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h-1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4h^2-1}$$

In particolare si ha:

$$a_2 = -\frac{4}{3\pi} ; \quad a_4 = -\frac{4}{15\pi} ; \quad a_6 = -\frac{4}{35\pi}$$

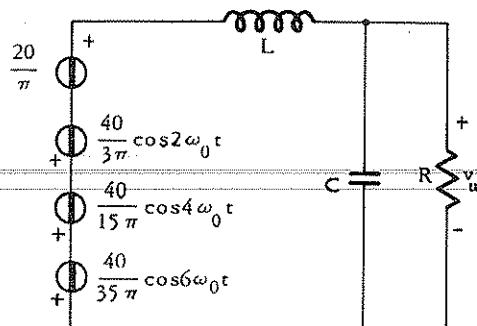


Fig. V.6.10 - Circuito corrispondente a quello di figura V.6.9. I valori dei componenti L , C , R e di ω_0 sono quelli riportati in fig. V.6.9.

Limitandoci a considerare le componenti armoniche di ordine 2, 4, 6 il circuito risultante è quello di fig. V.6.10. È interessante osservare che nel caso presente si ha anche un'eccitazione continua, il cui effetto in regime permanente è deducibile in modo assai semplice, notando che in continua i condensatori equivalgono a circuiti aperti e gli induttori a corto-circuito. Perciò la determinazione della componente continua di v_u viene fatta mediante il circuito di fig. V.6.11 a), ottenuto disattivando tutti i generatori fuorché quello in continua ed eliminando il condensatore e l'induttore nel modo detto. Si vede da tale circuito che:

$$v_u^{(0)} = \frac{20}{\pi}$$

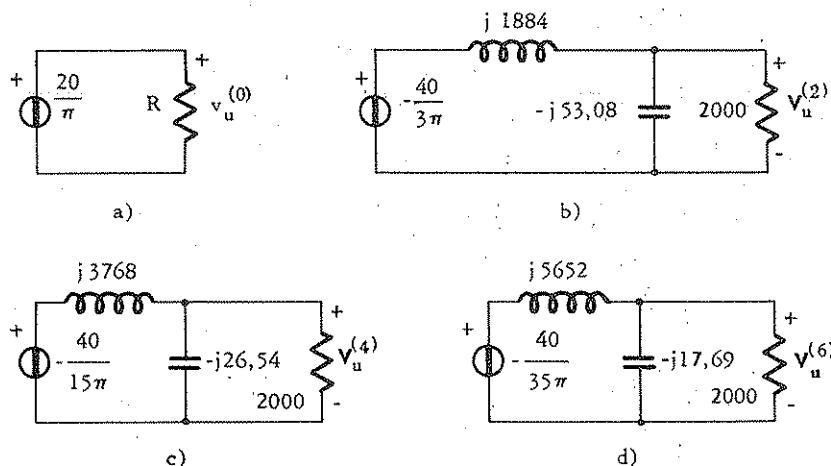


Fig. V.6.11 - Circuiti corrispondenti alle varie pulsazioni del circuito di figura V.6.10. I valori dei componenti sono in Ω , V.

Il contributo degli altri generatori viene ottenuto facilmente mediante gli schemi di fig. V.6.11. Precisamente si ha:

$$v_u^{(2)} = \frac{40}{3\pi} \frac{-j1,062 \cdot 10^5}{j3,662 \cdot 10^6 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 0,0193 e^{j0,027}$$

$$v_u^{(4)} = \frac{40}{15\pi} \frac{-j26,54 \cdot 2000}{j7,483 \cdot 10^6 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 9,46 \cdot 10^{-4} e^{j0,013}$$

$$v_u^{(6)} = \frac{40}{35\pi} \frac{-j3,538 \cdot 10^4}{j1,127 \cdot 10^7 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 1,79 \cdot 10^{-4} e^{j0,0089}$$

In conclusione, la tensione all'uscita del rettificatore vale:

$$v_u(t) = \frac{20}{\pi} [1 + 0,0193 \cos(628t + 0,027) + 9,46 \cdot 10^{-4} \cos(1256t + 0,013) + \\ + 1,79 \cdot 10^{-4} \cos(1884t + 0,0089)]$$

e si vede chiaramente come il circuito analizzato trasformi la tensione alternata di ingresso in una ad andamento quasi costante nel tempo di valore $20/\pi$.

V.7 - Analisi dei circuiti con la trasformata di Fourier: analisi in frequenza dei circuiti.

Le grandezze impresse dai generatori presenti in un circuito sono, nella maggioranza dei casi di interesse, segnali che il circuito elabora e rende disponibile sotto forma di una grandezza elettrica (tensione o corrente). È quindi opportuno tenere conto della descrizione analitica più frequentemente usata per i segnali nelle applicazioni. Tale descrizione è quella che si ricava applicando alla funzione del tempo la trasformata di Fourier, ottenendo una funzione complessa di una nuova variabile reale: *la frequenza*. Essendo complessa, la funzione trasformata è caratterizzata da un modulo e da un argomento. Agli andamenti con la frequenza del modulo e dell'argomento viene dato il nome di *spettro di ampiezza e di fase* rispettivamente. In ogni applicazione sono note le proprietà del segnale relativamente ai suoi spettri.

Per quanto detto, è evidente l'importanza di effettuare l'analisi di un circuito direttamente nel dominio della frequenza. Tale analisi prende il nome di *analisi in frequenza*.

V.7.1 - La trasformata di Fourier: definizione e proprietà.

La trasformata di Fourier di una funzione $g(t)$ del tempo t è definita come:

$$(V.7.1) \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

dove $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione ed f la frequenza. La funzione trasformata è complessa:

$$(V.7.2) \quad G(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

in cui $A(\omega)$ è lo spettro di ampiezza, $\phi(\omega)$ lo spettro di fase di $g(t)$.

La funzione $g(t)$ può essere ottenuta dalla sua trasformata mediante:

$$(V.7.3) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Tale formula di inversione vale se sono soddisfatte opportune condizioni, che corrispondono a situazioni via via più complicate.

Caso 1. La funzione soddisfa le condizioni di Dirichlet, cioè:

1) la funzione è assolutamente integrabile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty ;$$

2) il numero dei massimi e dei minimi è finito e le ampiezze relative sono finite;

3) il numero delle discontinuità è finito.

Caso 2. L'integrale (V.7.3) è improprio: esso esiste solo come valore principale di Cauchy.

Caso 3. La $g(t)$ è una distribuzione e gli integrali (V.7.1) e (V.7.3) vanno intesi nel senso delle distribuzioni.

Le funzioni $g(t)$ presenti nel circuito corrispondono a grandezze fisiche e quindi sono reali; per esse risulta:

$$(V.7.4) \quad R(-\omega) = R(\omega) ; \quad X(-\omega) = -X(\omega)$$

cioè la parte reale della trasformata è pari e la parte immaginaria è dispari.

Proprietà V.7.1 - Linearità.

Sia $G_k(\omega)$ la trasformata di Fourier di $g_k(t)$; si ha:

$$(V.7.5) \quad \Im \left\{ \sum_{k=1}^N a_k g_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^N a_k G_k(\omega)$$

avendo indicato con $\Im \{ \cdot \}$ l'operazione di trasformazione secondo Fourier.

Proprietà V.7.2 - Derivazione nel tempo:

$$(V.7.6) \quad \Im \left\{ \frac{dg(t)}{dt} \right\} = j\omega G(\omega) .$$

Proprietà V.7.3 - Integrazione nel tempo:

$$(V.7.7) \quad \Im \left\{ \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right\} = \pi G(0) u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} G(\omega) .$$

Proprietà V.7.4 - Convoluzione:

$$(V.7.8) \quad \Im \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau) d\tau \right\} = G_1(\omega) G_2(\omega)$$

nell'ipotesi che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_i(\tau)|^2 d\tau < \infty \quad i = 1, 2$$

Proprietà V.7.5 - Formule di Parseval:

$$(V.7.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(-\omega) G_2(\omega) d\omega$$

Proprietà V.7.6 - Traslazione nel tempo:

$$(V.7.10) \quad \Im \{g(t - t_0)\} = G(\omega) e^{j\omega t_0}$$

Proprietà V.7.7 - Traslazione in frequenza:

$$(V.7.11) \quad \Im \{e^{j\omega_0 t} g(t)\} = G(\omega - \omega_0)$$

Osservazione V.7.1.

La trasformata di Fourier può essere considerata una generalizzazione dello sviluppo in serie di Fourier, nel senso di considerare la funzione $g(t)$ come una funzione periodica di periodo infinitamente grande. Tale interpretazione è molto semplice; ha però l'inconveniente di non permettere l'individuazione delle condizioni di validità della trasformata stessa. Malgrado questo inconveniente, la riportiamo di seguito, per il carattere intuitivo che introduce nella trattazione.

Riscriviamo l'espressione dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(t)$ di periodo T considerata nella (V.6.11):

$$(V.7.12) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t}$$

in cui:

$$(V.7.13) \quad c_k = \frac{a_k - j b_k}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos k \omega_0 t - j \sin k \omega_0 t] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk \omega_0 t} dt$$

Le formule possono essere anche scritte nel modo seguente, tenendo conto che:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$(V.7.14) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}, \quad F(\omega) = \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Per T molto grande e quindi per ω_0 molto piccolo, l'espressione della $f(t)$ tende a divenire un integrale effettuato rispetto alla variabile ω_0 , cioè tende alla (V.7.3) e la $F(\omega)$ tende alla (V.7.1)..

V.7.2 - Trasformate di Fourier di andamenti tipici.

Riportiamo in tab.V.7.1 un elenco di trasformate di andamenti tipici. Di alcuni di questi è opportuno dare un cenno.

Caso 1: impulso unitario $u_0(t)$.

Si tratta della distribuzione definita tramite l'integrale:

$$(V.7.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) g(t) dt = g(0)$$

con riferimento a qualsiasi funzione $g(t)$ continua nell'origine.

Considerando come $g(t)$ la funzione $e^{-j\omega t}$, si ha che:

$$(V.7.16) \quad \mathcal{F}\{u_0(t)\} = 1$$

La formula inversa richiede anch'essa l'utilizzazione di proprietà opportune. Infatti, si ha, considerando il valore principale di Cauchy:

$$(V.7.17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \cos \omega t d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \end{aligned}$$

che coincide con la $u_0(t)$.

Caso 2: valore costante uguale ad 1.

Applichiamo la (V.7.1) e tenendo conto della (V.7.17), si ha:

$$(V.7.18) \quad \mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi u_0(\omega)$$

Tabella V.7.1 - Trasformate di Fourier.

$g(t)$	$G(\omega)$
$u_0(t)$	1
$u_{-1}(t)$	$\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
$e^{-at} u_{-1}(t) , a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t e^{-at} u_{-1}(t) , a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi [u_0(\omega + \omega_0) - u_0(\omega - \omega_0)]$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [u_0(\omega + \omega_0) + u_0(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t \cdot u_{-1}(t)$	$\frac{\pi}{2j} [u_0(\omega - \omega_0) - u_0(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\cos \omega_0 t \cdot u_{-1}(t)$	$\frac{\pi}{2} [u_0(\omega - \omega_0) + u_0(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot u_{-1}(t) , a > 0$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

D'altra parte, dalla formula di inversione (V.7.3), abbiamo:

$$(V.7.19) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi u_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

Caso 3: gradino unitario.

Il gradino unitario è legato all'impulso unitario tramite derivazione rispetto al tempo nel senso delle distribuzioni:

$$(V.7.20) \quad u_0(t) = \frac{d u_{-1}(t)}{dt} .$$

Applicando la proprietà V.7.2, si ha:

$$(V.7.21) \quad 1 = j\omega \left[\Im \{ u_{-1}(t) \} + H u_0(\omega) \right]$$

in cui il termine $H u_0(\omega)$ è stato inserito per tenere conto della proprietà dell'impulso unitario:

$$(V.7.22) \quad \omega u_0(\omega) = 0$$

La (V.7.22) è una conseguenza della definizione di $u_0(t)$ riportata nella (V.7.15), in base alla quale risulta:

$$(V.7.23) \quad g(t) u_0(t) = g(0) u_0(t)$$

per ogni funzione continua in $t = 0$. Infatti si ha la (V.7.22) considerando $g(t) = t$ e scrivendola in funzione della variabile ω al posto di t .

La (V.7.21) definisce la trasformata di Fourier del gradino unitario a meno del termine $H u_0(\omega)$. Per determinare la costante H , utilizziamo la formula inversa calcolando $u_{-1}(0)$, che è uguale ad $1/2$ (discontinuità):

$$(V.7.24) \quad u_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j\omega} - H u_0(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega$$

da cui:

$$(V.7.25) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{2\pi} H = -\frac{H}{2\pi}$$

Perciò si ha:

$$(V.7.26) \quad \Im \{ u_{-1}(t) \} = \frac{1}{j\omega} + \pi u_0(\omega)$$

Caso 4: funzione sinusoidale $\sin \omega_0 t$.

Applichiamo la formula (V.7.1) alla funzione $\sin \omega_0 t$, scritta in forma esponenziale:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}\{\sin \omega_0 t\} &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] e^{-jt} dt = \\ (V.7.27) \quad &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \end{aligned}$$

In base alla (V.7.17), si ha:

$$\mathfrak{J}\{\sin \omega_0 t\} = j\pi [u_0(\omega + \omega_0) - u_0(\omega - \omega_0)]$$

Caso 5: funzione sinusoidale nulla per $t < 0$.

L funzione considerata è:

$$(V.7.28) \quad g(t) = \sin \omega_0 t \cdot u_{>0}(t)$$

che si può riscrivere come:

$$(V.7.29) \quad g(t) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} u_{>0}(t) - e^{-j\omega_0 t} u_{>0}(t)]$$

Applicando le proprietà V.7.1 e V.7.7 e tenendo conto della trasformata di Fourier del gradino unitario, riportata nella (V.7.26), si ha:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}\{\sin \omega_0 t \cdot u_{>0}(t)\} &= \frac{\pi}{2j} [u_0(\omega - \omega_0) - u_0(\omega + \omega_0)] - \frac{1}{2(\omega - \omega_0)} + \\ (V.7.30) \quad &+ \frac{1}{2(\omega + \omega_0)} = \frac{\pi}{2j} [u_0(\omega - \omega_0) - u_0(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Osservazione V.7.2.

La determinazione delle trasformate di Fourier delle funzioni del tempo che più interessano nell'analisi dei circuiti e cioè di quelle che sono nulle per $t < 0$ e tendono a zero per t che tende all'infinito, viene effettuata semplicemente sostituendo nelle relative trasformate di Laplace al posto della variabile s la quantità $j\omega$. Ciò è conseguenza del legame che esiste tra le due trasformate, come verrà evidenziato nel prossimo sottoparagrafo.

V.7.3 - Legame tra le trasformate di Fourier e Laplace di funzioni nulle per $t < 0$.

Se una funzione $f(t) u_{-1}(t)$, cioè nulla per $t < 0$, ammette la trasformata di Laplace $F(s)$, allora *se esiste* la sua trasformata di Fourier può essere ricavata da $F(s)$ nel modo seguente. Se la funzione $f(t) u_{-1}(t)$ ammette la trasformata di Fourier $G(\omega)$, allora la sua trasformata di Laplace esiste ed è uguale a $G(s/j)$.

Esaminiamo più in dettaglio il primo punto. Occorre distinguere tre casi a seconda che l'asse immaginario nel piano della variabile s sia incluso, escluso o di confine del dominio di convergenza della trasformata di Laplace. In ogni caso ci riferiamo a trasformate di Laplace razionali reali.

Caso 1: asse immaginario incluso.

In questo caso la trasformata di Fourier è semplicemente
(V.7.31)
$$G(\omega) = F(j\omega)$$

Un esempio relativo a questo caso è la funzione $e^{-at} u_1(t)$ della tab.V.7.1. Tale funzione ha trasformata di Laplace:

$$\frac{1}{s+a}$$

e dominio di convergenza per $\operatorname{Re}[s] > -a$.

Caso 2: asse immaginario escluso.

Non esiste la trasformata di Fourier.

Caso 3: asse immaginario di confine.

Si verifica nel caso che la trasformata di Laplace ha poli sull'asse immaginario. Il caso che ci interessa è quello di poli semplici, cioè:

$$(V.7.32) \quad F(s) = F_1(s) + \sum_{k=1}^N \left[\frac{R_k}{s - j\omega_k} + \frac{R_k^*}{s + j\omega_k} \right]$$

con $F_1(s)$ avente dominio di convergenza comprendente l'asse immaginario. In questo caso, tenendo conto della funzione del tempo che corrisponde ad $F(s)$, si ha:

$$G(\omega) = F_1(j\omega) + \sum_{k=1}^N \left[\frac{R_k}{j(\omega - \omega_k)} + \frac{R_k^* u_0(\omega + \omega_k)}{j(\omega + \omega_k)} \right] +$$

(V.7.33)

$$+ \pi \sum_{k=1}^N [R_k u_0(\omega - \omega_k) + R_k^* u_0(\omega + \omega_k)] .$$

Tale sviluppo è stato già considerato nel caso 5 del sottoparagrafo precedente, nella derivazione della trasformata di $\sin\omega_0 t u_1(t)$.

V.7.4 - Analisi in frequenza.

Il metodo di analisi che consideriamo si basa sulla trasformazione secondo Fourier degli andamenti nel tempo di tutte le grandezze presenti nel circuito. La sua validità, perciò, richiede che tali andamenti siano trasformabili. In particolare è necessario che il circuito sia stabile in modo che ogni risposta impulsiva soddisfi le condizioni di Dirichlet. In questo caso, supponendo le grandezze impresse dai generatori trasformabili secondo Fourier, il circuito può essere analizzato nel modo seguente:

- 1) Effettuare le trasformazioni secondo Fourier delle grandezze impresse, eventualmente usando la tab. V.7.1.
- 2) Analizzare il circuito come nel caso del metodo dei fasori, considerando però la pulsazione come un parametro.
- 3) Determinare per la grandezza di interesse lo spettro di ampiezza e fase. L'andamento nel tempo può essere ricavato effettuando l'anttrasformazione. Eventualmente, si può utilizzare la tab. V.7.1.

Esempio V.7.1

Un filtro passa-basso ideale è definito tramite la risposta in frequenza di figura V.7.1, cioè: 1) ha una risposta in ampiezza costante ed uguale ad uno nell'intervallo $-\omega_0 \div \omega_0$, dove ω_0 è la sua pulsazione di taglio e costante ed uguale a zero per le altre pulsazioni; 2) ha una risposta in fase decrescente linearmente con la pulsazione e zero per $\omega = 0$.

Fare vedere che tale risposta provoca l'assurdo fisico che un'eccitazione applicata all'istante $t = 0$, ha un effetto antecedente all'applicazione.

Consideriamo come eccitazione il gradino unitario, che ha la trasformata di Fourier (tab. V.7.1) uguale a:

$$\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

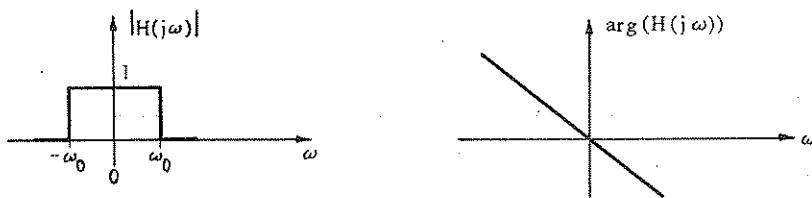


Fig. V.7.1 - Risposta in frequenza di un filtro passa basso ideale.

Determiniamo quindi la risposta, moltiplicando la funzione $H(j\omega)$ per lo spettro dell'eccitazione, cioè:

$$U(j\omega) = \left[\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] |H(j\omega)| e^{-jt_0\omega}$$

in cui $-t_0$ è la pendenza della curva $\arg(H(j\omega))$.

Calcolando l'andamento della risposta nel tempo mediante la (V.7.3), si ha:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} u_0(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{e^{j\omega(t-t_0)} - e^{-j\omega(t-t_0)}}{2j\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t-t_0)}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_0(t-t_0)] \end{aligned}$$

in cui la funzione $\text{Si}[\dots]$ è la funzione seno integrale. L'andamento della risposta è mostrato in fig. V.7.2 e chiaramente è assurdo, in quanto è diverso da zero per $t < 0$.

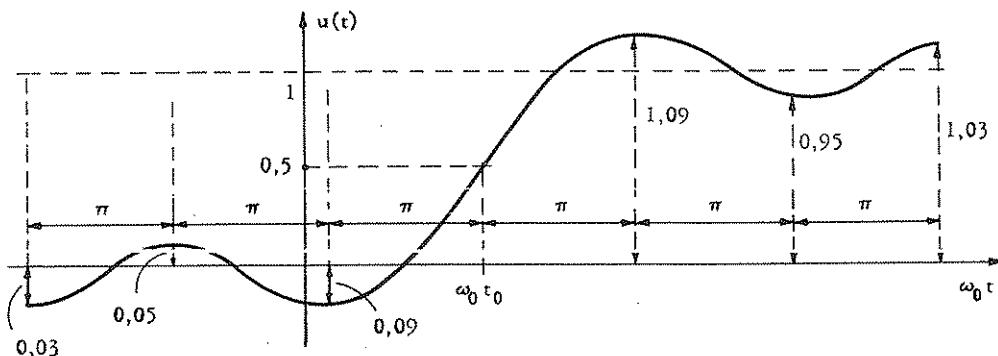


Fig. V.7.2 - Andamento della risposta del filtro passa-basso ideale ad un'eccitazione a gradino.

V.8 - Sistemi trifase.

Nelle applicazioni di potenza, quali il trasporto dell'energia, la conversione elettromeccanica dell'energia, i circuiti considerati e quindi le relative grandezze elettriche sono trattati in gruppi di tre. Il regime che interessa è usualmente quello permanente sinusoidale, che esiste sempre per la passività delle strutture considerate. L'utilizzazione del metodo dei fasori per via grafica è particolarmente utile, in quanto fornisce in modo immediato una valutazione delle tre componenti elettriche presenti. Tali tre componenti prendono il nome di *fasi di un sistema trifase*.

Per comprendere in modo semplice il significato dei sistemi trifase, conviene fare riferimento alla situazione più semplice circuittale, cioè a quella di un generatore chiuso su un carico. Poiché, siamo nel caso trifase, sia il generatore che il carico si compongono di tre elementi e nasce il problema della loro connessione. Una delle connessioni più usate è quella a stella, in cui i tre elementi hanno un morsetto in comune. Riportiamo in fig.V.8.1 il circuito costituito da un generatore trifase collegato a stella connesso ad un carico trifase anch'esso collegato a stella. Le tre tensioni E_a , E_b , E_c impresse dal generatore prendono il nome di *tensioni stellate*.

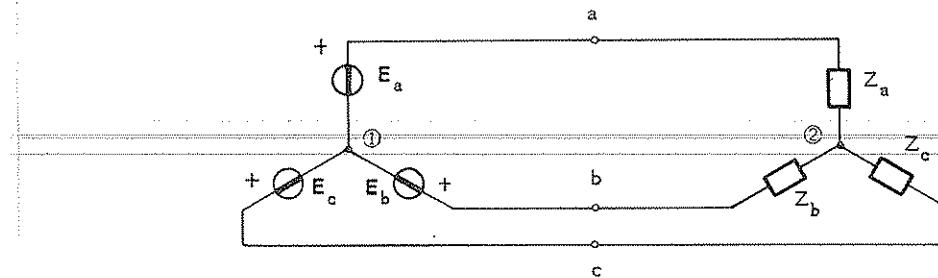
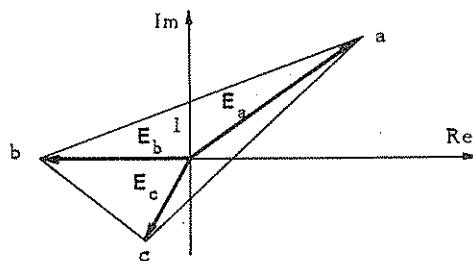


Fig.V.8.1 - Sistema trifase con generatori a stella.

Un primo problema di analisi, relativo al circuito di fig.V.8.1 è quello della determinazione delle tensioni tra i nodi a, b, c; tali tensioni prendono il nome di *tensioni concatenate del generatore*. Esse si ottengono immediatamente per via grafica, come mostrato in fig.V.8.2.

Le tensioni concatenate sono rappresentate in modulo e fase dai vettori corrispondenti ai lati del triangolo (a; b, c). Si noti che il riferimento è stato preso coincidente con il nodo 1, detto *centro-stella* relativo ai generatori.

Fig. V.8.2 - Determinazione delle tensioni concatenate da quelle stellate (V).



Un secondo problema riguarda il carico, rappresentato in figura V.8.1 dalle tre impedenze Z_a , Z_b e Z_c disposte a stella. Si tratta di determinare la tensione del nodo 2, centro-stella del carico, riferita al nodo di riferimento 1. Tale problema si risolve facilmente utilizzando il metodo dei nodi e precisamente esprimendo l'equazione di equilibrio delle correnti uscenti dal nodo 2. Detta E_x la tensione incognita di questo nodo, rispetto al nodo 1, si ha:

$$(V.8.1) \quad E_x (Y_a + Y_b + Y_c) - Y_a E_a - Y_b E_b - Y_c E_c = 0$$

dove Y_a , Y_b , Y_c sono le ammettenze pari all'inverso delle impedenze Z_a , Z_b , Z_c . Dall'equazione (V.8.1) si ottiene:

$$(V.8.2) \quad E_x = \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

Riportando E_x nel piano dei fasori, si ottiene il diagramma completo delle tensioni del circuito trifase (fig. V.8.3). In particolare da tale diagramma si possono determinare le tensioni E'_a , E'_b , E'_c , relative ai tre bipoli che rappresentano il carico.

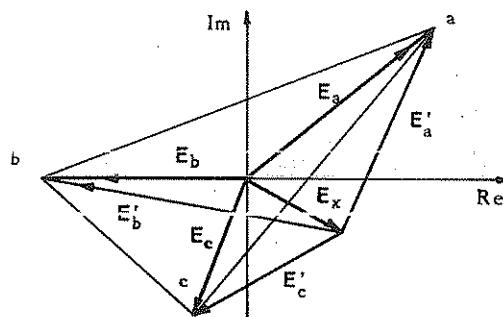


Fig.V.8.3 - Derivazione delle tensioni di carico.

Il diagramma delle correnti deriva immediatamente da quello delle tensioni, essendo note le impedenze di carico.

Il sistema trifase viene a volte assegnato in forma differente da quella qui descritta. Si consideri il circuito di fig. V.8.4, in cui il sistema trifase dei generatori costituisce un triangolo invece di una stella come in fig. V.8.1. Per la legge di Kirchhoff applicata alla maglia dei generatori, deve essere⁽¹⁾:

$$(V.8.3) \quad V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$$

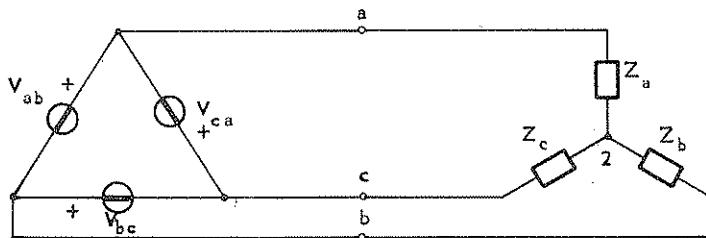


Fig. V.8.4 - Sistema trifase con generatori collegati a triangolo.

Il diagramma delle tensioni può essere anche in questo caso determinato facilmente, come mostrato in fig. V.8.5, in cui il nodo c viene preso come nodo di riferimento.

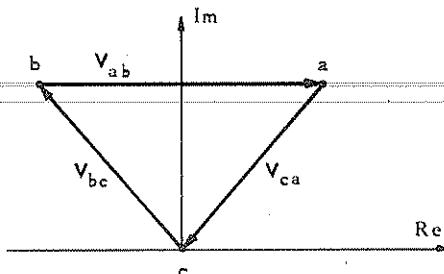


Fig. V.8.5 - Diagramma delle tensioni dei generatori del sistema trifase di fig. V.8.4.

In questo caso la tensione E_x del nodo 2 (centro-stella del carico) si può determinare con la seguente equazione di equilibrio:

(1) - In molti casi invece di assegnare le tensioni concatenate in modo completo, viene dato soltanto il loro modulo. In tal caso il sistema trifase si può determinare per mezzo del triangolo delle tensioni concatenate, sotto la condizione di esistenza di tale triangolo (*ciascuna tensione deve essere in modulo maggiore della differenza e minore della somma dei moduli delle altre due*).

$$(V.8.4) \quad E_x (Y_a + Y_b + Y_c) + Y_a V_{ca} - Y_b V_{bc} = 0$$

da cui:

$$(V.8.5) \quad E_x = \frac{Y_b V_{bc} - Y_a V_{ca}}{Y_c + Y_b + Y_a}$$

Il diagramma delle correnti risulta indeterminato, in quanto la corrente che scorre nella maglia formata dai generatori è arbitraria. Fissata tale corrente il diagramma si ottiene facilmente.

Particolarmente importanti, nelle applicazioni, sono quei sistemi trifase in cui il triangolo delle tensioni ed il triangolo delle correnti presentano particolari proprietà di simmetria. Alcuni di questi casi saranno trattati di seguito.

V.8.1 - Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati.

Con riferimento alla fig. V.8.6, si considerino le tre tensioni stellate E_1, E_2, E_3 . Se esse godono delle seguenti proprietà:

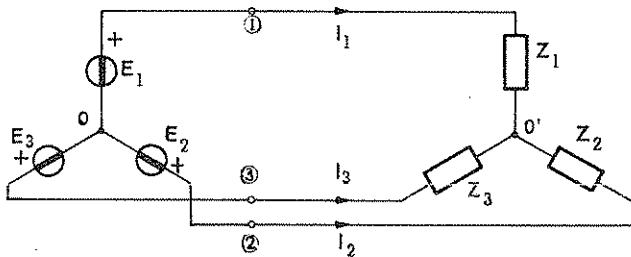


Fig. V.8.6 - Schema generale di un sistema trifase.

$$(V.8.6) \quad E_k = E e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{3}}, \quad \text{con } k = 1, 2, 3$$

ove E è un vettore generico, allora il sistema trifase viene detto *simmetrico*, di tipo *diretto*. Se invece della (V.8.6) è soddisfatta la seguente proprietà:

$$(V.8.7) \quad E_k = E e^{+j(k-1)\frac{2\pi}{3}}, \quad \text{con } k = 1, 2, 3$$

allora il sistema trifase viene detto simmetrico di tipo *inverso*. Riportando le tre tensioni stellate sul piano dei fasori, si ottengono i diagrammi riportati nella fig. V.8.7, per il caso diretto a) e per il caso inverso b), avendo scelto arbitrariamente $E = j$.

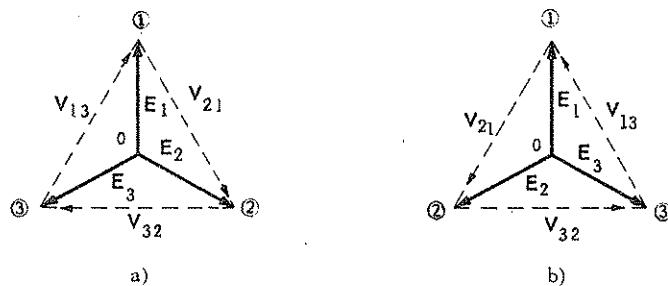


Fig.V.8.7 - Diagramma delle tensioni stellate e concatenate per sistemi trifase simmetrici; a) sistema trifase simmetrico diretto, b) sistema trifase simmetrico inverso.

È evidente dalle fig. V.8.7 che anche le tre tensioni concatenate V_{21} , V_{32} , V_{13} godono di particolari condizioni di simmetria ed in particolare hanno tutte lo stesso modulo V ; è facile ricavare la relazione fra il modulo V ed il modulo E delle tensioni stellate. Tale relazione è la seguente:

$$(V.8.8) \quad V = \sqrt{3} E$$

Se le tre impedanze di carico Z_1 , Z_2 , Z_3 sono uguali fra loro:

$$(V.8.9) \quad Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

allora anche le tre correnti di fase I_1 , I_2 , I_3 godono di particolari condizioni di simmetria. Infatti, in questo caso, in base alla (V.8.2), si ricava per la tensione E_x fra i nodi 0 e 0' di fig. V.8.6:

$$(V.8.10) \quad E_x = 0$$

Pertanto le tre correnti di fase si possono ricavare con le relazioni seguenti:

$$(V.8.11) \quad I_k = E_k / Z \quad \text{con} \quad k = 1, 2, 3$$

Quindi le correnti di fase godono di proprietà del tutto analoghe alle (V.8.6) per i sistemi diretti e (V.8.7) per i sistemi inversi. In questo caso il sistema trifase prende il nome di «equilibrato».

Il diagramma delle tensioni e delle correnti per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è mostrato in fig. V.8.8, nel caso diretto.

Applicando le definizioni di potenza attiva e reattiva, date nel § V.5, si ottiene per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato:

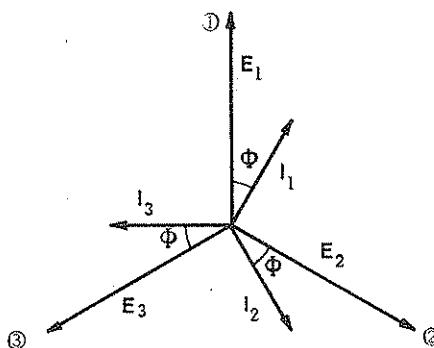


Fig.V.8.8 - Diagramma delle tensioni stellate e delle correnti di fase per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato.

$$(V.8.12) \quad \text{potenza attiva} = P_a = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_k \mathbf{I}_k^*) = \frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} \cos \Phi = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{V} \mathbf{I} \cos \Phi$$

ove \mathbf{I} è il modulo comune delle tre correnti di fase e Φ è l'angolo di sfasamento fra ciascuna tensione stellata e la relativa corrente di fase, come mostrato in fig.V.8.8. La potenza P_a rappresenta la potenza attiva trasferita globalmente dai tre generatori verso le tre impedanze di carico. Per la potenza reattiva si ha:

$$(V.8.13) \quad P_R = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\mathbf{E}_k \mathbf{I}_k^*] = \frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} \sin \Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{V} \mathbf{I} \sin \Phi$$

Una notevole proprietà si ha nei riguardi della potenza istantanea totale transitante dai generatori verso il carico. Utilizzando infatti la (V.8.7) si ottiene:

$$p(t) = \sum_{k=1}^3 p_k(t) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}_k \mathbf{I}_k^* \right] + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_k \mathbf{I}_k e^{j2\omega t}]$$

Tenendo conto delle (V.8.6) e delle (V.8.11) si ottiene:

$$p(t) = \frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} \cos \Phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{E}^2}{Z} e^{j2\omega t} \sum_{k=1}^3 e^{-j(k-1)\frac{4\pi}{3}} \right]$$

Essendo:

$$(V.8.14) \quad \sum_{k=1}^3 e^{-j(k-1)\frac{4\pi}{3}} = 0$$

risulta:

$$(V.8.15) \quad p(t) = \frac{3}{2} E I \cos \Phi = P_a$$

e pertanto si ottiene la seguente proprietà⁽¹⁾:

Proprietà V.8.1 - Un sistema trifase simmetrico ed equilibrato trasferisce dai generatori verso il carico una potenza istantanea totale costante nel tempo ed uguale alla potenza attiva totale.

Osservazione V.8.1: Il trasporto dell'energia elettrica.

La proprietà V.8.1 mostra che, a differenza del caso generico in cui la potenza istantanea $p(t)$ in regime permanente dipende dal tempo (si veda ad esempio la figura V.8.2 riferita al circuito di fig. V.5.1, nel caso di un circuito trifase simmetrico ed equilibrato si ha l'indipendenza dal tempo della potenza istantanea totale; naturalmente la proprietà V.8.1 non vale nei riguardi delle singole potenze istantanee assorbite da ciascuno dei tre bipoli costituenti il carico.

In base alla proprietà suddetta è facile prevedere che il trasferimento di energia dai generatori verso il carico, nel caso dei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati debba avere dei vantaggi rispetto al caso generico, poiché in quest'ultimo caso la potenza attiva è pari solo in media alla potenza istantanea e non istante per istante. Tale risultato può essere provato facilmente facendo riferimento ai due circuiti mostrati nelle figg. V.8.9a e b.

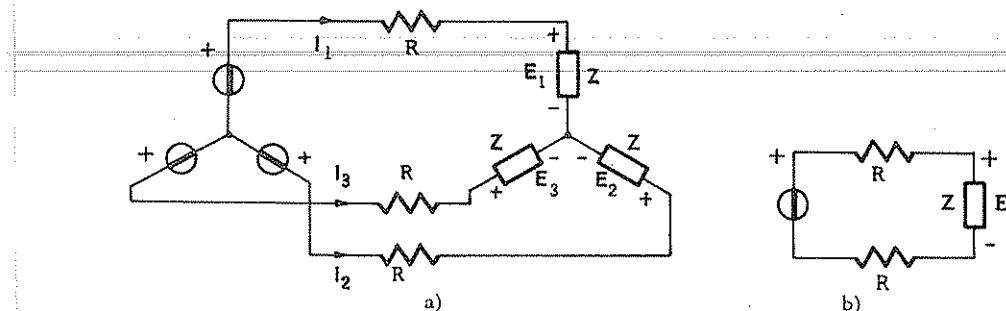


Fig. V.8.9 - Confronto fra un circuito trifase simmetrico ed equilibrato (a) ed un circuito monofase (b).

Il circuito di fig. V.8.9a mostra un carico trifase alimentato da una linea caratterizzata da tre resistori di resistenza R ; il circuito di fig. V.8.9b mostra invece un singolo bipolo alimentato da una linea caratterizzata da due resistori di resistenza R . Quest'ultimo circuito verrà denominato per contrapposizione «cittuito monofase».

(1) - Si vede facilmente che la proprietà V.8.1 vale anche per i sistemi trifase di tipo inverso.

Considerando come «utile» la potenza dissipata sul carico e come «perduta» la potenza dissipata sui resistori di linea, nel caso trifase si ottiene:

$$(V.8.16) \quad \text{potenza utile} = \frac{3}{2} E \cdot I \cos \Phi = P_u^{(1)}$$

$$(V.8.17) \quad \text{potenza perduta} = \frac{3}{2} |I|^2 R = P_p^{(1)}$$

mentre nel caso del circuito monofase si ottiene:

$$(V.8.18) \quad \text{potenza utile} = \frac{1}{2} E \cdot I \cos \Phi = P_u^{(2)}$$

$$(V.8.19) \quad \text{potenza perduta} = |I|^2 R = P_p^{(2)}$$

Effettuando il rapporto fra potenza utile e potenza perduta, si ottiene:

$$(V.8.20) \quad P_u^{(1)} / P_p^{(1)} = 2 P_u^{(2)} / P_p^{(2)}$$

che mostra la convenienza del sistema trifase rispetto a quello monofase nei riguardi della trasmissione dell'energia nel caso simmetrico ed equilibrato.

Le considerazioni sviluppate nella presente osservazione sono alla base del trasporto dell'energia elettrica. L'efficienza molto elevata di tale trasporto viene raggiunta utilizzando contemporaneamente ai sistemi trifase, tensioni elevate ed il rifasamento dei carichi utilizzatori.

V.8.2 - Sistemi trifase non simmetrici e non equilibrati.

Nelle applicazioni, il caso dei sistemi trifase perfettamente simmetrici ed equilibrati è difficile da ottenere, in quanto uno squilibrio sulle tre impedenze di carico dà luogo ad uno squilibrio fra le tre correnti di linea e quindi una dissimmetria fra le tre tensioni sul carico a causa delle impedenze interne dei generatori (pur ammettendo perfettamente simmetrico il sistema delle tensioni a vuoto). Pertanto risulta molto importante il caso dei sistemi trifase che si discostano da quelli considerati nel paragrafo precedente.

Tuttavia il caso simmetrico ed equilibrato conserva la sua importanza a causa della seguente proprietà, che permette di ricondurre ad esso anche il caso più generale.

Proprietà V.8.2 - Ogni terna di grandezze (tensioni o correnti) costituita da tre vettori generici $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$, si può sempre suddividere nella somma di tre terne, nel modo seguente:

- a) una terna trifase simmetrica diretta $\mathbf{A}_{d1}, \mathbf{A}_{d2}, \mathbf{A}_{d3}$;
- b) una terna trifase simmetrica inversa $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \mathbf{A}_{i3}$;
- c) una terna monofase $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_0$.

La dimostrazione della proprietà V.8.2 si riduce alla risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite. Infatti la proprietà stessa si può esprimere analiticamente nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (V.8.21) \quad & \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{d1} + \mathbf{A}_{i1} = \mathbf{A}_1 \\ & \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{d2} + \mathbf{A}_{i2} = \mathbf{A}_2 \\ & \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{d3} + \mathbf{A}_{i3} = \mathbf{A}_3 \end{aligned}$$

Ricordando le (V.8.6) e le (V.8.7), detto $\alpha = e^{\frac{j2\pi}{3}}$, si ha:

$$(V.8.22) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_{d1} &= \mathbf{A}_d; & \mathbf{A}_{d2} &= \mathbf{A}_d \alpha^{-1}; & \mathbf{A}_{d3} &= \mathbf{A}_d \alpha^{-2} \\ \mathbf{A}_{i1} &= \mathbf{A}_i; & \mathbf{A}_{i2} &= \mathbf{A}_i \alpha; & \mathbf{A}_{i3} &= \mathbf{A}_i \alpha^2 \end{aligned}$$

e tenendo conto che $\alpha^3 = 1$, si ha $\alpha^{-1} = \alpha^2, \alpha^{-2} = \alpha$.

Quindi il sistema (V.8.21) diviene:

$$(V.8.23) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$$

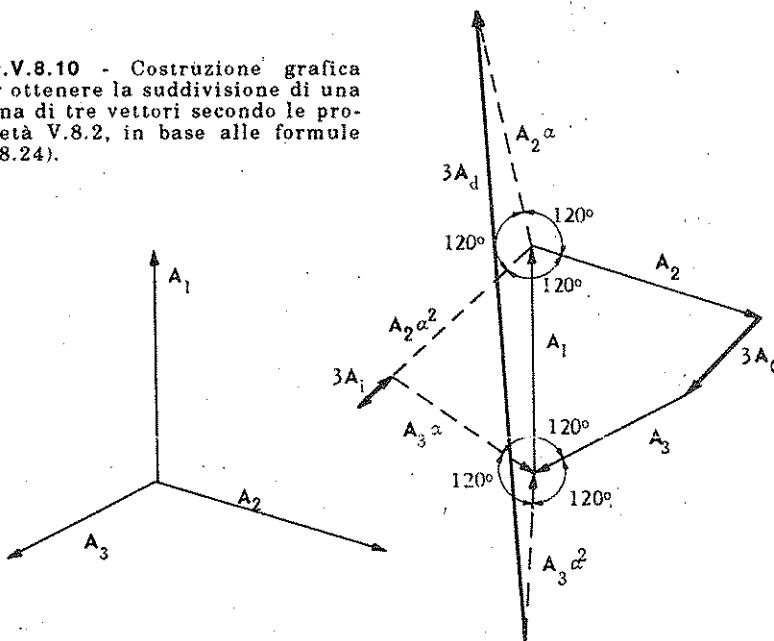
Essendo il determinante dei coefficienti diverso da zero, si possono ricavare le tre incognite $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_d$ e \mathbf{A}_i , il che dimostra la proprietà (V.8.2).

Il sistema (V.8.23) permette anche di determinare la formula per il calcolo di $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_d$ e \mathbf{A}_i ; infatti ricordando che $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, si ottiene facilmente:

$$(V.8.24) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \frac{1}{3} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \\ \mathbf{A}_d &= \frac{1}{3} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \alpha + \mathbf{A}_3 \alpha^2) \\ \mathbf{A}_i &= \frac{1}{3} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \alpha^2 + \mathbf{A}_3 \alpha) \end{aligned}$$

Le formule (V.8.24) possono essere utilizzate facilmente anche per via grafica, osservando che α è un operatore che ruota un vettore di un terzo di angolo giro in senso antiorario; tale interpretazione grafica è data in fig. V.8.10,

Fig.V.8.10 - Costruzione grafica per ottenere la suddivisione di una terna di tre vettori secondo le proprietà V.8.2, in base alle formule (V.8.24).



La proprietà V.8.2 è notevolmente importante in molte applicazioni, quali ad esempio quelle riguardanti le macchine elettriche sia nel caso che la si utilizzi per trattare una terna non simmetrica di tensioni sia nel caso di una terna non equilibrata di correnti. Particolarmenre utili sono le conseguenze di tale proprietà sulla potenza complessa transittante globalmente in un sistema trifase.

Considerando infatti un sistema trifase generico, la potenza complessa assorbita dal carico risulta:

$$(V.8.25) \quad P_c = \sum_{k=1}^3 P_{ck} = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^3 E_k I_k^*$$

Supponendo che il sistema trifase sia non simmetrico e non equilibrato, applicando la proprietà V.8.2 si ottiene:

$$(V.8.26) \quad P_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (E_0 + E_{dk} + E_{ik}) (I_{dk}^* + I_{ik}^*)$$

tenendo conto che il termine monofase della corrente è nullo in base alla prima della (V.8.24), essendo $\sum_{k=1}^3 I_k = 0$. La (V.8.26) si può semplificare notevolmente, poiché:

$$\sum_{k=1}^3 E_{dk} = 0 ; \quad \sum_{k=1}^3 E_{ik} = 0 ; \quad \sum_{k=1}^3 I_{dk}^* = 0 ; \quad \sum_{k=1}^3 I_{ik}^* = 0$$

$$\sum_{k=1}^3 E_{dk} I_{ik}^* = 0 \quad \sum_{k=1}^3 E_{ik} I_{dk}^* = 0$$

Quindi si ottiene:

$$(V.8.27) \quad P_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_{dk} I_{dk}^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_{ik} I_{ik}^*$$

Pertanto la potenza complessa totale è pari alla somma delle potenze trasportate dai due sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, diretto e inverso, essendo nulli tutti i termini mutui nell'espressione (V.8.26). Si ha pertanto la seguente proprietà:

Proprietà V.8.3 - «La potenza complessa trasportata da un sistema trifase generico è pari alla somma delle potenze complesse trasportate singolarmente dai due sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, diretto ed inverso, ottenibili applicando la proprietà V.8.2 alla terna delle tensioni e alla terna delle correnti».

Ovviamente la proprietà V.8.3 dà luogo a due analoghe proprietà riguardanti la potenza attiva e reattiva.

Esempio V.8.1.

Assegnato il sistema trifase simmetrico di fig.V.8.11, ricavare con il metodo grafico la terna delle correnti di fase. Suddividere quindi tale terna secondo la proprietà V.8.2 ed ottenere la potenza assorbita dal carico utilizzando la proprietà V.8.3.

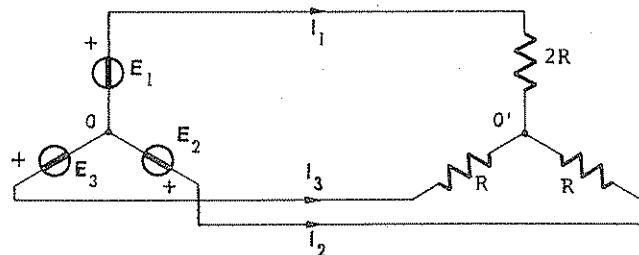


Fig.V.8.11 - Sistema trifase simmetrico e non equilibrato considerato nell'esempio V.8.1, $E = 200 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$.

Utilizzando la (V.8.2) si ottiene la tensione del nodo $0'$ rispetto al nodo 0 , E_x .

Si ha:

$$E_x = \frac{\frac{G}{2} + E_2 G + E_3 G}{\frac{G}{2} + 2G} = \frac{-\frac{E_1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{E_1}{5}$$

Utilizzando il metodo grafico e scegliendo arbitrariamente pari a $\pi/2$ la fase di E_1 , si ottiene il diagramma delle tensioni indicato in fig.V.8.12a; il corrispondente diagramma delle correnti è riportato in fig.V.8.12b.

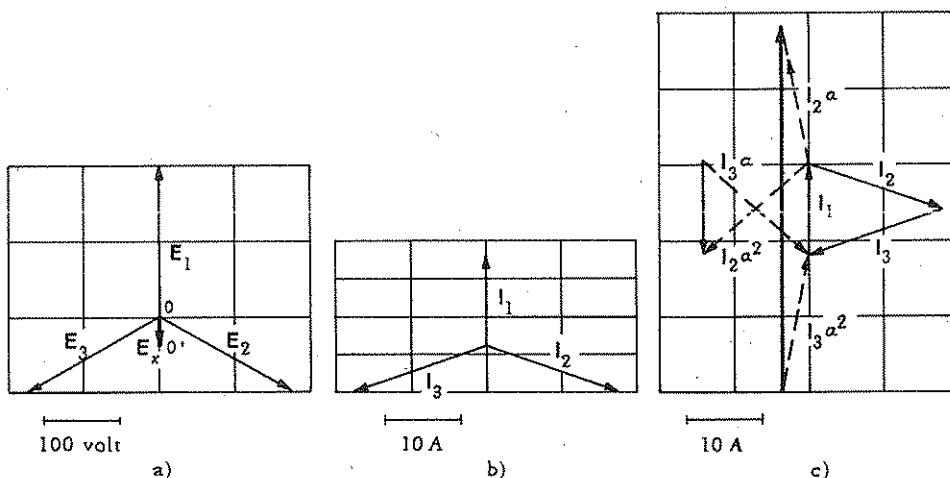


Fig.V.8.12 - Diagrammi utilizzati nell'esempio V.8.1.

- a) diagramma delle tensioni;
- b) diagramma delle correnti;
- c) diagramma per ricavare i sistemi equilibrati diretto e inverso delle correnti.

Dalla fig. V.8.12b si ottengono i seguenti valori approssimati per le correnti:

$$I_1 \approx j 12 ; \quad I_2 \approx 17,5 - j 6 ; \quad I_3 \approx -17,5 - j 6 \quad (\text{A})$$

Suddividendo la terna delle correnti in base alla proprietà V.8.2, secondo la costruzione di fig.V.8.10, si ottiene il diagramma di fig.V.8.12c; dal suddetto diagramma si ottengono i seguenti valori approssimati di $3I_d$ e $3I_i$:

$$3I_d \approx j 48 ; \quad 3I_i \approx -j 12 \quad (\text{A})$$

da cui si ottiene $I_d \approx j 16$ e $I_i \approx -j 4$.

Per quanto riguarda la potenza, si ottiene che la potenza reattiva è nulla, essendo il carico resistivo ed inoltre risulta anche nulla la potenza trasportata dal sistema trifase inverso delle correnti, essendo il sistema trifase delle tensioni simmetrico e diretto. Pertanto, per la potenza attiva, si ha:

$$P_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_k \cdot I_{dk}^* = \frac{3}{2} E \cdot I_d \approx 4800 \text{ W}$$

APPENDICI AL CAPITOLO V

V.A - Esempi di applicazione del metodo dei fasori.

Riportiamo di seguito quattro esempi di applicazione del metodo dei fasori in situazioni in cui è anche richiesto l'impiego del metodo basato sulla trasformata di Laplace, sviluppato nel capitolo III.

Esempio V.A.1

Nel circuito di fig.V.A.1, l'interruttore si apre all'istante $t=0$. Nell'ipotesi che il generatore di tensione indipendente sinusoidale agisca da un tempo sufficientemente lontano rispetto a $t=0$, in modo da poter supporre il circuito a regime nel momento dell'apertura dell'interruttore, determinare quanto vale l'energia immagazzinata nel condensatore di capacità C_1 all'istante $t=1$ sec.

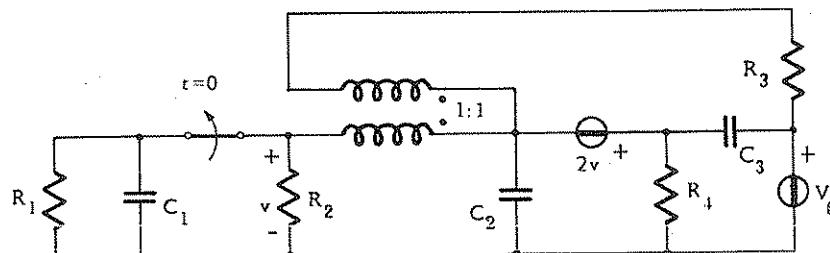


Fig.V.A.1 - Circuito considerato nell'esempio V.A.1. I valori dei componenti, espressi in Ω , F, V, sono:

$$R_1 = 2; R_3 = 1, C_1 = 0,5, V_g = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right), R_2 = 2; R_4 = 3, C_2 = C_3 = 1.$$

Il circuito da analizzare può essere considerato con buona approssimazione in regime permanente sinusoidale all'istante $t=0$, prima dell'apertura dell'interruttore.

Occorre perciò analizzarlo con il metodo dei fasori. Tenendo conto che la pulsazione è $\omega = 2$ e che il fasore della tensione del generatore indipendente è

$$E = 2 e^{j\pi/6}$$

si ottiene il circuito trasformato nel dominio dei fasori mostrato in fig.V.A.2.

Analizzando tale circuito con il metodo dei nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 6, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\text{nodo 1: } (1+2j) E = E_5 + 2j E_2 = 1$$

$$\text{nodo 2: } \left(\frac{1}{3} + 2j \right) E_2 - 2j E = I_x$$

$$\text{nodo 3: } 2j E_3 = -l_x + l_1 + l_2$$

$$\text{nodo 4: } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j \right) E_4 = 1$$

$$\text{nodo } 5: \quad E_5 - E = -I_2$$

A causa della presenza del trasformatore ideale otteniamo le seguenti equazioni aggiuntive:

$$m_4 = m_5 ; \quad l_1 = l_2$$

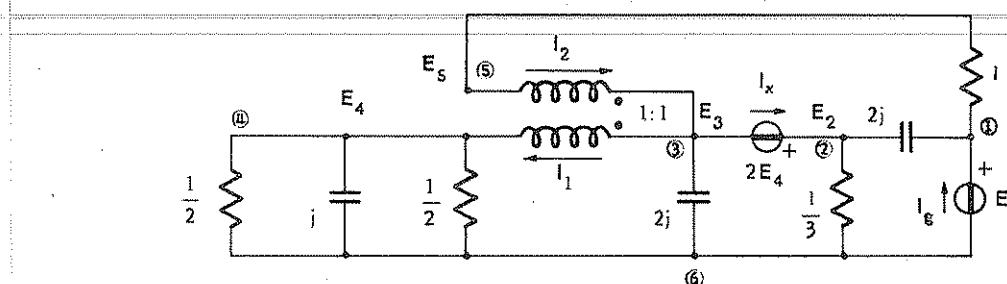


Fig.V.A.2 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori a partire da quello di fig.V.A.1; accanto ai condensatori ed ai resistori è indicata la relativa ammettenza.

Per la presenza del generatore controllato otteniamo ancora:

$$m_2 - m_1 = 2 m_4$$

Nel nostro caso non occorre analizzare completamente il circuito, ma è sufficiente calcolare la tensione E_4 ai capi del condensatore C_1 . Utilizzando le equazioni del trasformatore, insieme a quelle dei nodi 4 e 5, si ottiene:

$$(1+j) E_4 = I_1 \quad E_4 - E = -I_1$$

da cui si ha:

$$E_4 (2+j) = E$$

e quindi:

$$E_4 = \frac{E}{2+j} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)} = 0,8944 e^{-j0,9872}$$

Quindi la tensione ai capi del condensatore C_1 all'istante $t=0$ vale:

$$v(0) = 0,8944 \cos(2t - 0,9872) \Big|_{t=0} = 0,4928$$

Dopo l'apertura dell'interruttore la tensione ai capi del condensatore decresce in quanto questo si scarica sul resistore R_1 . Per determinare l'andamento nel tempo della tensione, utilizziamo i risultati dell'esempio III.1.3, per cui, in base alla (III.1.12), si ha:

$$v_c(t) = v(0) e^{-t/R_1 C_1} = 0,4928 e^{-t} \text{ (volt)}$$

Poiché l'energia immagazzinata nel condensatore vale:

$$\frac{1}{2} C_1 v_c^2 = \frac{1}{4} (0,4928)^2 e^{-2t} \text{ (Joule)}$$

all'istante $t=1$ sec, si ha un'energia di $8,217 \cdot 10^{-3}$ Joule.

Esempio V.A.2.

Nel circuito di fig.V.A.3, le eccitazioni sinusoidali agiscono da un tempo molto distante da quello di apertura dell'interruttore, considerato come $t=0$. Determinare, se esiste, quel valore Ψ della fase di uno dei due generatori di corrente, per cui è nulla la tensione ai capi del condensatore all'istante $t=0$.

In base all'ipotesi di applicazione dell'eccitazione da tempo molto lontano rispetto a $t=0$, possiamo analizzare il circuito per $t < 0$ con il metodo dei fasori. Per determinare la tensione ai capi del condensatore, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, essendo i generatori di pulsazione diversa.

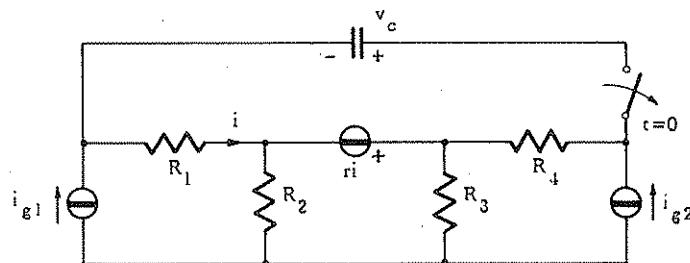


Fig.V.A.3 - Circuito considerato nell'esempio V.A.2. I valori dei componenti, espressi in A, Ω , F, sono:

$$i_{g1}(t) = 2 \cos 3t; \quad i_{g2}(t) = \cos(t + \Phi); \\ R_1 = R_2 = 1; \quad R_3 = R_4 = 2; \quad r = 3; \quad C = 1.$$

Nel caso in cui è presente solo il generatore di pulsazione 3, il circuito diviene, nel dominio dei fasori, quello di fig.V.A.4. Applicando il metodo delle maglie, secondo le indicazioni di fig.V.A.4, si ha:

$$2 I_1 - I_2 - I_3 = V_g$$

$$\left(3 + \frac{1}{j3}\right) I_2 - I_1 + 3 i = 0$$

$$3 I_3 - I_1 - 3 i = 0$$

a cui occorre aggiungere le equazioni:

$$I_1 = 2; \quad i = I_1 - I_2 = 2 - I_2$$

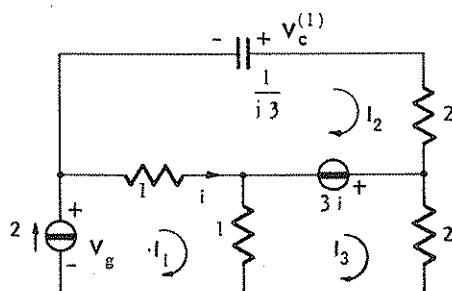


Fig.V.A.4 - Circuito risultante da quello di fig.V.A.3, quando: 1) viene disattivato il generatore di pulsazione $\omega = 1$; 2) viene considerato nel dominio dei fasori per $\omega = 3$.

Dalla seconda equazione del sistema si ha:

$$\left(3 + \frac{1}{j3} - 3\right) I_2 + 2 I_1 = 0$$

e quindi:

$$I_2 = -6j \quad I_1 = -j \cdot 12$$

La tensione ai capi del condensatore vale perciò:

$$V_c^{(1)} = -\frac{1}{j3} I_2 = 4$$

e quindi, nel dominio del tempo:

$$v_c^{(1)}(t) = 4 \cos 3t$$

Nel caso in cui agisca l'altro generatore, il circuito diviene, nel relativo dominio dei fasori ($\omega = 1$), quello mostrato in fig.V.A.5. Scrivendo le equazioni alle maglie si ha:

$$3I_1 - 2I_3 + 3i = 0$$

$$(3 - j)I_2 - 2I_3 - 3i = 0$$

$$4I_3 - 2I_1 - 2I_2 = V_g$$

a cui occorre aggiungere le equazioni:

$$I_3 = e^{j\Phi}; \quad i = I_2$$

Dalla seconda equazione del sistema si ha:

$$(3 - j - 3)I_2 - 2e^{j\Phi} = 0$$

e quindi si ha:

$$I_2 = 2j e^{j\Phi}$$

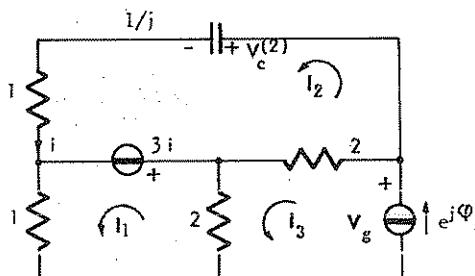


Fig.V.A.5 - Circuito risultante da quello di fig.V.A.3, quando: 1) viene disattivato il generatore di pulsazione $\omega = 3$; 2) viene considerato nel dominio dei fasori per $\omega = 1$.

La tensione ai capi del condensatore vale pertanto:

$$V_c^{(2)} = \frac{1}{j} 2j e^{j\Phi} = 2e^{j\Phi}$$

e quindi, nel dominio del tempo:

$$v_c^{(2)}(t) = 2 \cos(t + \phi)$$

L'andamento nel tempo della tensione v_c è perciò:

$$v_c(t) = v_c^{(1)}(t) + v_c^{(2)}(t) = 4 \cos 3t + 2 \cos(t + \phi)$$

e, per $t=0$, vale:

$$v_c(0) = 4 + 2 \cos \phi$$

Dalla espressione precedente si vede che non esiste alcun valore di ϕ per cui $v_c(0)$ è nulla.

Esempio V.A.3

Nel circuito indicato in fig.V.A.6, si ha:

$$v_g(t) = \cos \omega t, \quad C_1 = C_2 = 1, \quad L = 1$$

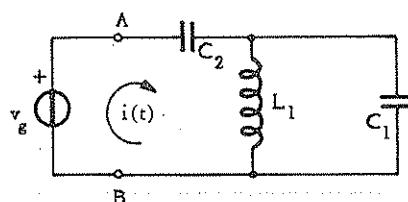


Fig. V.A.6 - Circuito considerato nell'esempio V.A.3.

Si determini, in funzione di ω , l'andamento dell'impedenza vista dal generatore, individuando i valori di ω che rendono infinita tale impedenza. Per ognuno dei valori di ω così individuati, si applichi un generatore $v_g(t) = \cos \omega t$ e si determini l'andamento della corrente erogata $i(t)$.

Il bipolo di cui occorre determinare l'impedenza è quello visto a destra dei morsetti A e B in fig.V.A.6. Tale impedenza vale:

$$Z(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{s}} = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 1)}$$

In regime permanente risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}[Z(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[Z(j\omega)] = -\frac{-2\omega^2 + 1}{\omega(-\omega^2 + 1)} \end{array} \right.$$

il cui andamento in funzione di ω è riportato in fig. V.A.7.

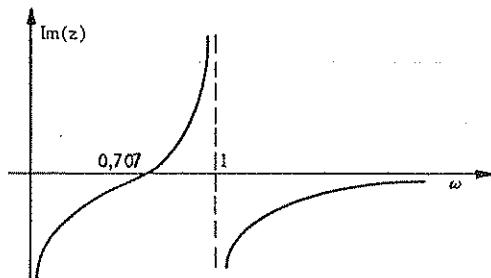


Fig. V.A.7 - Andamento della reattanza del circuito considerato nell'esempio V.A.3 in funzione di ω .

I poli dell'impedenza Z sono presenti per $\omega=0$ e per $\omega=1$.

Considerando il caso di $\omega=0$, si applichi in ingresso al circuito dato un generatore di tensione $v_g(t) = u_{-1}(t)$. In tal caso si ha:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{1}{s} \frac{s(s^2+1)}{2s^2+1} = \frac{s^2+1}{2s^2+1}$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$I(s) = \frac{1}{2} + \frac{1/2}{2s^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \frac{1/\sqrt{2}}{s^2+1/2}$$

da cui antitrasformando si ha:

$$i(t) = \frac{1}{2} u_0(t) + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t u_{-1}(t)$$

Considerando poi il caso di $\omega=1$, si applichi in ingresso al circuito dato un generatore di tensione $v_0(t) = \cos t u_{-1}(t)$. In tal caso si ha:

$$V_g(s) = \frac{s}{s^2+1} ; \quad I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{s}{s^2+1} \frac{s(s^2+1)}{2s^2+1} = \frac{s^2}{2s^2+1}$$

Sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$I(s) = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2s^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{2} \frac{1/\sqrt{2}}{s^2+1/2}$$

da cui antitrasformando si ha:

$$i(t) = \frac{1}{2} u_0(t) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t u_{-1}(t)$$

Si può notare che in entrambi i casi considerati è assente la parte permanente della risposta. Tuttavia, poiché la funzione di rete ha poli sull'asse immaginario, le parti transitorie, che coincidono con le forme d'onda trovate, non tendono a zero per t che tende all'infinito.

Esempio V.A.4

Nel circuito indicato in fig. V.A.8, si ha:

$$v_g(t) = \cos t \quad u_{-1}(t) \quad C_1 = C_2 = 1 \quad L = 1 \quad R_1 = R_2 = 1$$

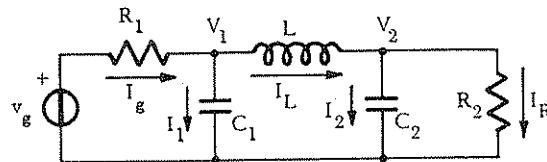


Fig. V.A.8 - Circuito considerato nell'esempio V.A.4.

Si determinino le condizioni iniziali al tempo $t = 0$, in modo tale che la risposta del circuito per $t > 0$ sia priva di transitorio.

Per determinare le condizioni iniziali richieste, si applichi al circuito un'eccitazione pari a $v_g(t) = \cos t$ e si risolva il circuito in regime permanente. Si determinino poi i valori delle tensioni dei condensatori e della corrente dell'induttore all'istante $t = 0$. Tali valori saranno proprio pari alle condizioni iniziali richieste.

Risolviamo il circuito dato con il metodo grafico. Assegnando il valore arbitrario $V_2 = 1$, si ottengono i diagrammi vettoriali di fig. V.A.9.

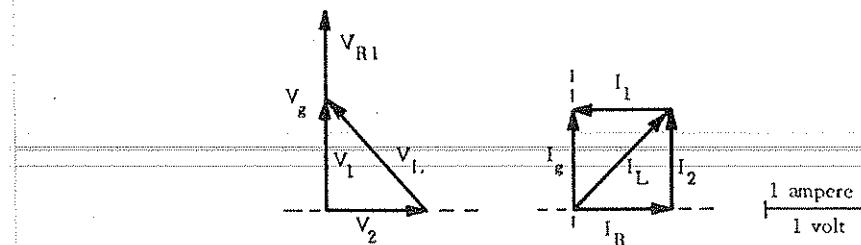


Fig. V.A.9 - Diagrammi vettoriali delle tensioni e delle correnti ottenuti nella risoluzione del circuito di fig. V.A.8, in regime permanente, sotto l'ipotesi arbitraria di $V_2 = 1$.

Poiché si ha $v_g(t) = \cos t$ e quindi $V_g = 1$, per ottenere i diagrammi vettoriali corretti, è necessario ruotare i diagrammi di fig. V.A.9 di 90° in senso orario e dividere per due la scala delle ampiezze. Si ottengono così i diagrammi vettoriali indicati in fig. V.A.10.

Dall'esame dei diagrammi di fig. V.A.10, si ottengono i seguenti valori per le tensioni dei condensatori e per la corrente dell'induttore:

- condensatore C_1 : $V_1 = 0,5$, $v_1(t) = 0,5 \cos t$, $v_1(0) = 0,5$;

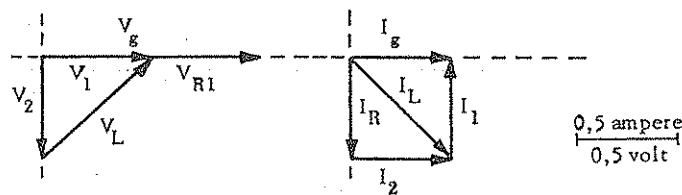


Fig. V.A.10 - Diagrammi vettoriali delle tensioni e delle correnti ottenuti nella risoluzione del circuito di fig. V.A.8 in regime permanente.

- condensatore \$C_2\$: \$V_2 = -j 0,5\$, \$v_2(t) = 0,5 \sin t\$, \$v_2(0) = 0\$;

- induttore \$L\$: \$I_L = 0,5 - j 0,5\$, \$i_L(t) = 0,5 \cos t + 0,5 \sin t\$, \$i_L(0) \approx 0,5\$.

Si effettui ora una verifica della correttezza dei risultati ottenuti. A tale scopo occorre analizzare il circuito di fig.V.A.8 con il metodo di Laplace (il generatore applicato è pari a: \$v_g(t) = \cos t u_{-1}(t)\$ e le condizioni iniziali sono quelle determinate). Si ottiene il circuito indicato in fig.V.A.11.

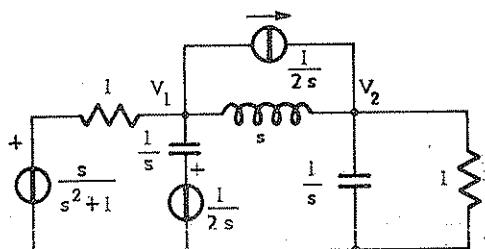


Fig. V.A.11 - Circuito fittizio nel dominio di Laplace per l'analisi del circuito di fig.V.A.8.

Analizzando il circuito di fig.V.A.11 con il metodo dei nodi, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(s+1+\frac{1}{s} \right) V_1 - \frac{1}{s^2+1} - s \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} V_2 = -\frac{1}{2s} \\ \left(s+1+\frac{1}{s} \right) V_2 - \frac{1}{s} V_1 = \frac{1}{2s} \end{array} \right.$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$V_1 = s \left[\left(s^2 + s + 1 \right) V_2 - \frac{1}{2s} \right] = \left(s^2 + s + 1 \right) V_2 - \frac{1}{2} .$$

Sostituendo nella prima, si ha:

$$\left(s+1+\frac{1}{s} \right) \left[\left(s^2 + s + 1 \right) V_2 - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{s} V_2 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2s} ,$$

$$\left[\left(s+1+\frac{1}{s} \right) (s^2+s+1) - \frac{1}{s} \right] V_2 = \frac{1}{2} \left(s+1+\frac{1}{s} \right) + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2s} .$$

$$(s^3 + 2s^2 + 3s + 2) V_2 = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{s}{s^2+1} .$$

Quindi si ottiene:

$$(s^3 + 2s^2 + 3s + 2) V_2 = \frac{(s^2+1)(s+2) + 2s}{2(s^2+1)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}{2(s^2+1)}$$

da cui, semplificando:

$$V_2 = \frac{1}{2(s^2+1)}$$

Infine, antitrasformando si ha:

$$v_2(t) = \frac{1}{2} \sin t u_{-1}(t)$$

Risulta quindi confermato che la risposta del circuito, con le condizioni iniziali calcolate precedentemente, è priva della parte transitoria. Inoltre tale risposta coincide, per $t > 0$, con la risposta permanente già determinata.

* * *



INDICE GENERALE



INDICE

<i>Introduzione</i>	III
Premessa	V
CAPITOLO I: Introduzione ai circuiti a costanti concentrate di tipo elettrico	
I. 1 - Grandezze fisiche considerate	1
I. 2 - Il circuito elettrico	2
I. 3 - Le leggi di Kirchhoff (legge delle correnti)	3
1. Prima legge di Kirchhoff (legge delle correnti)	4
2. Seconda legge di Kirchhoff (legge delle tensioni)	5
I. 4 - Elementi a più di due terminali. Definizione di porta	5
I. 5 - Proprietà generali dei componenti e dei circuiti	7
1. Linearità	8
2. Permanenza	8
3. Reciprocità	8
4. Passività	9
5. Causalità	10
I. 6 - Relazioni costitutive degli elementi bipolari lineari e permanenti	12
1. Resistore	12
2. Condensatore	13
3. Induttore	14
4. Il generatore indipendente di tensione	16
5. Il generatore indipendente di corrente	16
6. Corto-circuito e circuito aperto	17
7. Incongruenze associate agli elementi ideali e circuiti equivalenti dei bipoli reali	18
8. Generatori reali di tensione e di corrente	20
I. 7 - Derivazione del modello di circuito a costanti concentrate e suoi limiti di validità	22
1. Introduzione	22
2. Limiti di validità dell'ipotesi di «costanti concentrate»	24
3. Conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: suddivisione in regioni tipiche della struttura elettrica	25
4. Ulteriori conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: il modello circuitale della struttura elettrica	29
I. 8 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte attivi lineari e permanenti	32
1. Generatori controllati	33
2. Nullore	35

I. 9 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte passivi lineari e permanenti	39
1. Induttori mutuamente accoppiati e trasformatore ideale	39
2. Giratore	44
I.10 - Grafo di un circuito e sue proprietà tipologiche	46
1. Nozioni topologiche fondamentali	47
2. Albero e co-albero	49
3. Le leggi di Kirchhoff non sono indipendenti: teorema del calore di Maxwell	54
4. Proprietà topologica fondamentale: ortogonalità dei vettori delle correnti relativi ad un grafo	56
5. Prima conseguenza dell'ortogonalità: conservazione della potenza in un circuiti	56
6. Seconda conseguenza dell'ortogonalità: teorema di Tellegen	57
7. Circuiti non connessi	58
I.11 - Dualità nei circuiti	59
1. Relazioni costitutive	59
2. Leggi di Kirchhoff e proprietà topologiche	61
3. Circuito duale	61

CAPITOLO II: Analisi di circuiti senza memoria in presenza di eccitazioni costanti nel tempo

II.1 - Il problema dell'analisi	64
II.2 - Analisi su base maglie	65
1. Caso in cui siano presenti solo resistori e generatori indipendenti di tensione	65
2. Caso in cui siano presenti anche generatori indipendenti di corrente	71
3. Caso in cui siano presenti anche generatori controllati	84
II.3 - Analisi su base tagli	91
II.4 - Analisi su base nodi	98
1. Il circuito aumentato	98
2. Caso in cui siano presenti solo resistori e generatori indipendenti di corrente	101
3. Caso in cui siano presenti anche generatori indipendenti di tensione	105
4. Caso in cui siano presenti anche generatori controllati	109
5. Caso in cui siano presenti anche nullori	113

CAPITOLO III: Analisi dei circuiti con memoria

III.1 - La presenza della variabile tempo nell'analisi dei circuiti lineari e permanenti	116
1. Esempi del primo ordine	122
2. Esempi del secondo ordine	129
III.2 - Andamenti tipici delle grandezze impresse nei circuiti con memoria	142
1. Funzione gradino unitario	142
2. Funzione impulso unitario	145
3. Funzioni sinusoidali	150
4. Funzioni sinusoidali isofrequenziali	151
III.3 - Applicazione della trasformazione di Laplace all'analisi dei circuiti con memoria	155
1. Introduzione	155

2. Trasformazioni delle relazioni costitutive dei componenti e loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace	162
3. Trasformazioni delle leggi di Kirchhoff nel dominio della trasformata di Laplace	169
III.4 - Analisi nel dominio di Laplace di un circuito lineare e permanente	170

APPENDICE AL CAPITOLO III

III.A - Cenni sulla trasformazione e antitrasformazione di Laplace	182
1. Ulteriori proprietà della trasformazione di Laplace	183
2. Calcolo delle trasformate di Laplace delle funzioni più comuni nei circuiti a costanti concentrate	185
3. Trasformazione inversa di Laplace	187
4. Sviluppo in frazioni parziali	188
5. Antitrasformazione delle funzioni elementari facenti parte dello sviluppo in frazioni parziali	195
III.B - Esempi di applicazione del metodo della trasformata di Laplace	205

CAPITOLO IV: Funzioni di rete

IV.1 - Eccitazione e risposta di un circuito	231
1. Caso di una sola eccitazione	231
2. Caso di più eccitazioni	235
IV.2 - Classificazione delle funzioni	238
IV.3 - La risposta impulsiva	240
IV.4 - Proprietà delle funzioni di rete	246
1. Proprietà derivanti dal carattere «costanti concentrate»	246
2. Proprietà derivanti dalla stabilità	248

APPENDICE AL CAPITOLO IV

IV.A - Proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla struttura del circuito	264
1. Proprietà derivanti dalla natura dei componenti	262
2. Proprietà derivanti dalla topologia del circuito	266

CAPITOLO V: Analisi in regime permanente

V.1 - Suddivisione della risposta di un circuito nella parte transitoria e nella parte permanente	268
1. Definizione di risposta transitoria e permanente	268
2. Limiti di validità della suddivisione della risposta di un circuito nella parte transitoria e permanente	272
V.2 - Derivazione del metodo dei fasori da quello della trasformata di Laplace	277
1. Legame fra il fasore dell'eccitazione ed il fasore della risposta in regime	277
V.3 - Metodo dei fasori	280
V.4 - Uso grafico dei fasori nell'analisi in regime permanente sinusoidale	286
1. Interpretazione grafica dei legami fra i fasori delle grandezze elettriche relative ai singoli componenti elementari	287
2. Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff nel piano dei fasori	288
V.5 - Potenza ed energia in regime permanente sinusoidale	294
1. Espressione della potenza istantanea in regime permanente	294
2. Potenza attiva	296
3. Potenza complessa e potenza reattiva	298
4. Conservazione della potenza complessa	303

5. Espressione esplicita della potenza attiva e reattiva assorbita dai componenti di un circuito	307
6. Bilancio energetico di un circuito	312
7. Problema del rifasamento di un carico reattivo	315
V.6 - Regime permanente in presenza di grandezze elettriche di tipo non sinusoidale	318
1. Proprietà della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale	322
2. Sviluppo in componenti sinusoidali di un'eccitazione periodica	327
V.7 - Analisi dei circuiti con la trasformata di Fourier: analisi in frequenza dei circuiti	333
1. La trasformata di Fourier: definizione e proprietà	333
2. Trasformate di Fourier di andamenti tipici	336
3. Legame tra le trasformate di Fourier e Laplace di funzioni nulle per $t < 0$	340
4. Analisi in frequenza	341
V.8 - Sistemi trifase	343
1. Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati	346
2. Sistemi trifase non simmetrici e non equilibrati	350
APPENDICE AL CAPITOLO V	
V.A - Esempi di applicazione del metodo dei fasori	356

* * *

1^a Edizione: 1979
Ristampa corretta: 1982

Seconda Edizione

FINITO DI STAMPARE
GENNAIO 1997

presso il Laboratorio fotolitografico della
Edizioni Scientifiche SIDEREA
Via Terme di Traiano, 5/a - 00184 ROMA
Tel. e Fax: (06) 4872374



*Questa seconda edizione, per ragioni di economicità,
è stata composta al calcolatore nelle sole parti nuove.*

